

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
Ю. М. Рабінович
М. С. Якір

10

АЛГЕБРА

І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

Збірник задач
і контрольних
робіт



А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
Ю. М. Рабінович
М. С. Якір

АЛГЕБРА
і початки аналізу
10 клас

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

Збірник задач
і контрольних робіт

*Схвалено для використання
у загальноосвітніх навчальних закладах*

Харків
«Гімназія»
2020

УДК 373:512

М52

*Схвалено для використання
у загальноосвітніх навчальних закладах
комісією з математики
Науково-методичної ради з питань освіти
Міністерства освіти і науки України
(лист Інституту модернізації змісту освіти
від 14.08.2018 № 22.1/12-Г-763)*

Серія «Математика від «Гімназії»

Мерзляк А. Г.

М52 Алгебра і початки аналізу. 10 кл. : профільний рівень : збірник задач і контрольних робіт / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2020. — 144 с. : іл.
ISBN 978-966-474-318-8.

Посібник є складовою навчально-методичного комплексу до підручника «Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень» (автори А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір). Перша частина містить вправи (три варіанти), що відповідають темам підручника та призначені для складання самостійних перевірних робіт і для відпрацювання навичок розв'язування задач. Друга частина містить завдання для контрольних робіт (два варіанти).

Для вчителів та учнів 10 класів закладів загальної середньої освіти.

УДК 373:512

ISBN 978-966-474-318-8

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський,
Ю. М. Рабінович, М. С. Якір, 2018

© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, 2018

ВІД АВТОРІВ

Ця книга є складовою навчально-методичного комплексу до підручника «Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень» авторів А.Г. Мерзляка, Д.А. Номіровського, В.Б. Полонського, М.С. Якіра.

Першу частину — «Вправи» поділено на три однотипних варіанти по 344 задачі в кожному (задачі, що мають однакові номери, є однотипними). Цей матеріал насамперед призначено для складання самостійних перевірних робіт. Наявність для кожного типу задач ще двох аналогічних завдань дає також змогу використовувати цей матеріал для відпрацювання навичок розв'язування задач основних типів. На с. 4, 5 наведено таблицю тематичного розподілу вправ.

Друга частина посібника містить завдання для контрольних робіт (два варіанти). Завдання контрольних робіт позначено такими символами (де n — номер завдання): n° — завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень учнів; n^\bullet — достатньому рівню; $n^{\bullet\bullet}$ — високому рівню.

У посібнику відсутній розділ «Відповіді». Це зроблено для того, щоб можна було використовувати посібник як роздавальний дидактичний матеріал на контрольних і перевірних роботах.

ТЕМАТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВПРАВ

Тема	Номери вправ
Множини. Операції над множинами	1–10
Функція та її властивості	11–32
Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень	33–43
Обернена функція	44–47
Метод інтервалів	48–60
Ділення многочленів. Теорема Безу	61–67
Метод математичної індукції	68–70
Степенева функція з натуральним показником	71–79
Степенева функція із цілим показником	80–87
Означення кореня n -го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$	88–103
Властивості кореня n -го степеня	104–123
Степінь з раціональним показником та його властивості	124–135
Ірраціональні рівняння	136–146
Ірраціональні нерівності	147–150
Радіанна міра кута	151–155
Тригонометричні функції числового аргументу	156–161
Знаки значень тригонометричних функцій	162–166
Періодичні функції	167–173
Властивості та графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$	174–181
Властивості та графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$	182–188
Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу	189–196

Тема	Номери вправ
Формули додавання	197–206
Формули зведення	207–212
Формули подвійного, потрійного та половинного аргументів	213–224
Формули для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій	225–233
Рівняння $\cos x = b$	234–240
Рівняння $\sin x = b$	241–247
Рівняння $\operatorname{tg} x = b$ і $\operatorname{ctg} x = b$	248–252
Функції $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$	253–261
Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних	262–271
Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники.	272–279
Застосування обмеженості тригонометричних функцій	280–284
Тригонометричні нерівності	285–287
Означення границі функції в точці та функції, неперервної в точці	288–291
Задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції	292–300
Поняття похідної	301–308
Правила обчислення похідних	309–318
Рівняння дотичної	319–325
Ознаки зростання і спадання функції	326–333
Точки екстремуму функції	334–339
Найбільше і найменше значення функції на відрізку	340–342
Друга похідна. Поняття опуклості функції	343; 344
Побудова графіків функцій	

ВПРАВИ

Варіант 1

Множини. Операції над множинами

- Задайте переліком елементів множину A , якщо:
 - $A = \{x \mid 3x - 7 = 0\}$; 2) $A = \{x \mid (x-1)(x^2-1) = 0\}$.
- Чи є рівними множини A і B , якщо:
 - $A = \{2, 4\}$, $B = \{4, 2\}$;
 - $A = \{(2; 4)\}$, $B = \{(4; 2)\}$;
 - $A = \{x \mid x^2 + 5 = 0\}$, $B = \emptyset$;
 - A — множина прямокутних рівнобедрених трикутників, B — множина прямокутних трикутників із кутом 45° ?
- Які з поданих тверджень є правильними:
 - $3 \in \{1, 3, 5\}$; 3) $5 \subset \{1, 3, 5\}$; 5) $\emptyset \subset \{1, 3, 5\}$;
 - $\{1\} \in \{1, 3, 5\}$; 4) $\{5\} \subset \{1, 3, 5\}$; 6) $\{\emptyset\} \in \{1, 3, 5\}$?
- Нехай A — множина цифр числа 2342, B — множина цифр числа x . Чи є правильним твердження, що $B \subset A$, якщо:
 - $x = 43$; 2) $x = 444\ 444$; 3) $x = 321$; 4) $x = 323\ 2457$?
- Запишіть усі підмножини множини $\{1, 2, 3\}$.
- Які з поданих тверджень є правильними:
 - $\{3\} \cap \{3, 9\} = \{3, 9\}$; 3) $\{3\} \cup \{3, 9\} = \{9\}$;
 - $\{3\} \cap \{3, 9\} = \{3\}$; 4) $\{3\} \cup \{3, 9\} = \{3, 9\}$?
- Знайдіть $A \cap B$, якщо:
 - A — множина дільників числа 24, B — множина чисел, кратних числу 6;
 - A — множина одноцифрових чисел, B — множина складених чисел;
 - A — множина двоцифрових чисел, B — множина чисел, кратних числу 75.
- Знайдіть $A \cap B$ і $A \cup B$, якщо:
 - A — множина цифр числа 7786, B — множина цифр числа 5078;
 - A — множина дільників числа 12, B — множина дільників числа 16;
 - A — множина паралелограмів, B — множина прямокутників.

9. Дано множини $A = \{x | x^2 - 4 = 0\}$ і $B = \{x | (x-2)(x+3) = 0\}$.
Знайдіть: 1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$.

10. На діаграмі Ейлера (рис. 1) зображено множини A , B і C . Заштрихуйте множини:

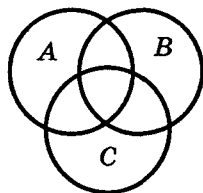


Рис. 1

- 1) $(A \cap C) \cup B$; 3) $(B \setminus C) \cap A$.
2) $(A \cup B) \setminus C$;

Функція та її властивості

11. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $f(x) = \frac{x}{|x|-5}$; 7) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+4}} - \frac{5x-3}{x^2-8x+7}$;
2) $f(x) = \frac{13}{|x|-x}$; 8) $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{|x|-5}}$;
3) $f(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{15-x}$; 9) $f(x) = \frac{x+2}{|x|-8} + \frac{4}{x}$;
4) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$; 10) $f(x) = \sqrt{x^2-4x-21} - \frac{6}{x^2-64}$;
5) $f(x) = \sqrt{x-8} + \frac{9}{\sqrt{10-x}}$; 11) $f(x) = \sqrt{|x|-9} + \frac{1}{\sqrt{x+12}}$;
6) $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{x+2}{x^2-6x}$; 12) $f(x) = \sqrt{|x-5|(2-x)}$.

12. Знайдіть область значень функції:

- 1) $\varphi(x) = 5 - x^2$; 5) $\varphi(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$;
2) $h(x) = x^2 + 4x - 7$; 6) $g(x) = \sqrt{1-x^2}$;
3) $h(x) = |x| - 4$; 7) $h(x) = \frac{4}{x^2+1}$;
4) $f(x) = \sqrt{x^2+4} - 3$; 8) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

13. Знайдіть нулі функції:

- 1) $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-4}$; 3) $f(x) = \frac{x^2-25}{\sqrt{x+1}}$;
2) $f(x) = \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-4}$; 4) $f(x) = x\sqrt{x-2}$.

14. На рисунку 2 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3, 5; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) область значень функції;

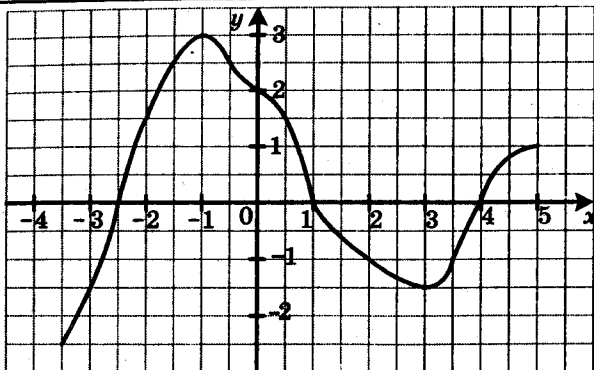


Рис. 2

2) проміжки знакосталості функції;

3) кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a .

15. На рисунку 3 зображено графік функції $y = f(x)$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) проміжки знакосталості функції;

2) кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a .

16. Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = \sqrt{x} - 2$;

2) $y = \sqrt{(x+2)(x-2)^2}$.

17. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = 2x - 6$ на проміжку $[-4; 3]$.

18. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^2 - 2x - 5$ на проміжку:

1) $[-2; -1]$;

2) $[0; 2]$;

3) $[2; 4]$.

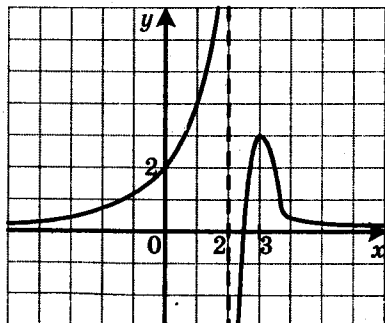


Рис. 3

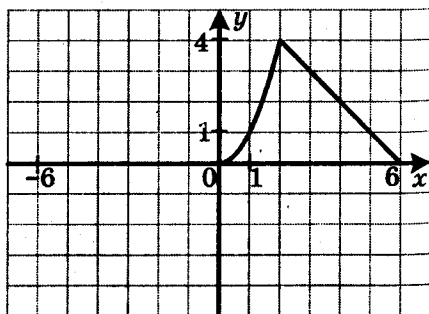


Рис. 4

19. Знайдіть $\max_M f(x)$ і $\min_M f(x)$, якщо:

1) $f(x) = -x^2 + 4x$, $M = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $M = D(f)$.

20. Знайдіть:

1) $\min_{\mathbb{R}} (|x+1| + |x-5|)$; 2) $\max_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 25}$.

21. Функція f є такою, що $f(-4) = -20$. Знайдіть $f(4)$, якщо функція f є: 1) парною; 2) непарною.

22. Функція g є такою, що $g(-5) = 4$. Знайдіть $g(5) \cdot g(-5)$, якщо функція g є: 1) парною; 2) непарною.

23. Чи є непарною функція, задана формулою $y = x^3$, якщо її область визначення — множина:

1) $(-5; 5)$; 2) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; 3) $(-4; 4]$?

24. Доведіть, що є парною функція:

1) $f(x) = -27$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{|x|} + 1$;

2) $f(x) = 8x^8 - 9x^4 + 24$; 4) $f(x) = \frac{x}{|x+12| - |x-12|}$.

25. Доведіть, що є непарною функція:

1) $f(x) = 7x - 4x^5$; 3) $f(x) = \sqrt{20+x} - \sqrt{20-x}$;

2) $f(x) = \frac{2}{5-9x} - \frac{2}{5+9x}$; 4) $f(x) = x + \frac{2|x|}{x}$.

26. Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = 3x^2 - 5x - 11$; 4) $f(x) = (x-5)^4 - (x+5)^4$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 2x}$; 5) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x - 8}$;

3) $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$; 6) $f(x) = (x+4)(x-1) - 3x$;

7) $f(x) = (x+8)|x-7| - (x-8)|x+7|$;

8) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+2x+4} - \frac{2x+3}{x^2-2x+4}$.

27. На рисунку 4 зображено частину графіка функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-6; 6]$. Добудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

28. Про функцію f , визначену на множині \mathbb{R} , відомо, що $f(x) = x^2 + 2x$ при $x \leq 0$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

29. Сума двох чисел дорівнює 14. Якого найбільшого значення може набувати добуток цих чисел?

30. Непарна функція f має 11 нулів. Знайдіть $f(0)$.

31. Функція f є такою, що $\min_{[5;7]} f(x) = -1$, $\max_{[5;7]} f(x) = 4$. Знайдіть $\min_{[-7;-5]} f(x)$, $\max_{[-7;-5]} f(x)$, якщо:

1) f — парна функція; 2) f — непарна функція.

32. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = -5x^2 + 7ax - 4$ є парною?

**Побудова графіків функцій
за допомогою геометричних перетворень**

33. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{2x}$;

3) $y = (3x+1)^2 - 2$;

2) $y = \sqrt{-\frac{3}{2}x}$;

4) $y = \left(\frac{1}{3}x+1\right)^2 - 2$.

34. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{4x+3}$;

2) $y = \frac{1}{3-4x}$;

3) $y = \frac{6}{4x-3} - 1$.

35. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{2x-3}$;

3) $y = \sqrt{3-2x}$;

5) $y = 0,5\sqrt{6-4x} + 2$;

2) $y = \sqrt{\frac{1}{2}x+3}$;

4) $y = \sqrt{2x+4} - 3$;

6) $y = -2\sqrt{3x+2} - 1$.

36. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 2x - 3$;

3) $y = |x^2 - 2x - 3|$;

2) $y = x^2 - 2|x| - 3$;

4) $y = |x^2 - 2|x| - 3|$.

37. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x} - 3$;

3) $y = \sqrt{|x|} - 3$;

2) $y = |\sqrt{x} - 3|$;

4) $y = \left| \sqrt{|x|} - 3 \right|$.

38. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$;

3) $y = |x+3|$;

5) $y = -3|x|$;

2) $y = |x| - 4$;

4) $y = ||x| - 5|$;

6) $y = |x-3| - 1$.

39. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{6}{|x|}$;

2) $y = \left| \frac{6}{x} - 2 \right|$;

3) $y = \left| \frac{6}{x-2} \right|$;

4) $y = \frac{6}{|x|-2}$.

40. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{1}{3x+1};$$

$$2) y = \sqrt{3-2|x|}.$$

41. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{|x+4|};$$

$$2) y = (|x-1|+2)^2;$$

$$3) y = \sqrt{|x+1|-4}.$$

42. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння:

$$1) ||x|-2|=a;$$

$$2) |\sqrt{x}-5|=a;$$

$$3) |(x-4)^2-2|=a?$$

43. При яких значеннях параметра a рівняння $|4|x|-1|=a(x+2)$ має три корені?

Обернена функція

44. Доведіть, що дана функція не є оборотною:

$$1) y = x^2 + 1;$$

$$2) y = \frac{1}{x^6};$$

$$3) y = -2.$$

45. Які з даних функцій є оборотними:

$$1) y = 3x - 2;$$

$$3) y = x^2, x \in [-2; 0];$$

$$2) y = x^2, x \in [1; +\infty);$$

$$4) y = x^2, x \in [-2; +\infty)?$$

46. Знайдіть функцію, обернену до даної:

$$1) y = 2x + 4;$$

$$3) y = 1 + \sqrt{x+3};$$

$$5) y = \frac{x}{4-x}.$$

$$2) y = \frac{3}{x-2};$$

$$4) y = x^2, x \in [2; +\infty);$$

47. Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

$$1) y = 0,5x - 2;$$

$$2) y = 4 - x^2, \text{ якщо } x \geq 0.$$

Метод інтервалів

48. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x+3,2)(x-4) \geq 0;$$

$$3) (2x+3)(4x-3)(x-10) \geq 0;$$

$$2) (x+7)(x-6)(x-14) < 0;$$

$$4) (5+x)(x+1)(3-x) < 0;$$

$$5) (x+6,8)(1-x)(2-x) \geq 0;$$

$$6) (5x+20)(2-6x)(6x-12)(9-2x) \leq 0.$$

49. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) \frac{x+8}{x-7} < 0;$$

$$3) \frac{x-3,2}{x-4,8} \geq 0;$$

$$5) \frac{(x+13)(x+2)}{x-13} \geq 0;$$

$$2) \frac{x-9}{x+11} > 0;$$

$$4) \frac{6-x}{x-5} \geq 0;$$

$$6) \frac{x+7,2}{(10-x)(x-3)} \geq 0.$$

50. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x^2 - 10x)(x^2 - 49) \geq 0; \quad 4) \frac{x^2 - 7x - 8}{x^2 - 8x + 7} > 0;$$

$$2) (x^2 - 10x + 9)(x^2 + 4x) < 0; \quad 5) \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 36} \leq 0.$$

$$3) (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3x + 6) \leq 0;$$

51. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x-1)^2(x-2)^4(x-3)^3 > 0; \quad 2) (x-1)^2(x-2)^4(x-3)^3 \geq 0;$$

$$3) (x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(x-4)^5 \leq 0.$$

52. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x-2)^2(x^2 - 4x + 3) > 0; \quad 3) (x-2)^2(x^2 - 4x + 3) < 0;$$

$$2) (x-2)^2(x^2 - 4x + 3) \geq 0; \quad 4) (x-2)^2(x^2 - 4x + 3) \leq 0.$$

53. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4x + 4} > 0; \quad 4) \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4x + 4} \leq 0; \quad 7) \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x - 10} < 0;$$

$$2) \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4x + 4} \geq 0; \quad 5) \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x - 10} > 0; \quad 8) \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x - 10} \leq 0.$$

$$3) \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4x + 4} < 0; \quad 6) \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x - 10} \geq 0;$$

54. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 25} \geq 0; \quad 2) \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15} \leq 0.$$

55. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x^2 + x - 6}{|x-4|} \geq 0; \quad 2) \frac{|x+2|}{x^2 - 2x - 63} \geq 0; \quad 3) \frac{x^2 - 5x - 6}{|x+2|(x-3)} \leq 0.$$

56. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x-4}{x-5} \leq \frac{3x+8}{x-5}; \quad 2) \frac{7x}{3x-4} \geq 1; \quad 3) \frac{x^2+8x}{x+6} \leq \frac{20}{x+6}; \quad 4) \frac{x^2+x}{x+3} \geq 2.$$

57. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{6}{x} - \frac{4}{x+1} > 1; \quad 4) \frac{3x+1}{x^2+x-6} > \frac{1}{3};$$

$$2) \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \geq \frac{3}{4x}; \quad 5) \frac{5x}{x^2-4x+3} + \frac{2}{x-1} \geq \frac{3}{x-3}.$$

$$3) \frac{6}{x^2-1} - \frac{5}{x^2-9} \leq 0;$$

58. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^2 + 10x + 9} < 0;$$

$$2) (x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^2 + 10x + 9} > 0;$$

$$3) (x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^2 + 10x + 9} \leq 0;$$

$$4) (x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^2 + 10x + 9} \geq 0.$$

59. Розв'яжіть нерівність $\left| \frac{x-5}{x^2-1} \right| \geq \frac{x-5}{x^2-1}$.

60. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

$$1) (x+6)(x-a) > 0;$$

$$5) (x-a)(x-1)^2 \leq 0;$$

$$2) (x+6)(x-a)^2 < 0;$$

$$6) \frac{x+5}{x-a} \geq 0;$$

$$3) (x+6)(x-a)^2 \leq 0;$$

$$7) \frac{(x+2)(x-a)}{x+2} \leq 0;$$

$$4) (x-a)(x-1)^2 < 0;$$

$$8) \frac{(x+2)(x-a)}{x-a} \geq 0.$$

Ділення многочленів. Теорема Безу

61. Доведіть, що многочлен $x^3 - x^2 - 3x + 2$ ділиться націло на многочлен $x^2 + x - 1$.

62. Доведіть, що многочлен $x^3 + 2x - 5$ не ділиться націло на многочлен $x + 1$.

63. Поділивши «куточком» многочлен $3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 5$ на многочлен $x^2 - x + 4$, знайдіть неповну частку й остачу.

64. Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^3 + x^2 - 5x - 4$ на двочлен $x - 3$.

65. Доведіть, що многочлен, тотожно рівний виразу $(x-3)^{2n} + (x-2)^n - 1$, де $n \in \mathbb{N}$, ділиться націло на многочлен $x^2 - 5x + 6$.

66. При яких значеннях параметра a многочлен $x^3 - 3x^2 + ax - 6$ при діленні на двочлен $x - 2$ дає в остачі 4?

67. Розв'яжіть рівняння $2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = 0$.

Метод математичної індукції

68. Доведіть методом математичної індукції, що при будь-якому натуральному n виконується рівність

$$1 + 5 + 9 + \dots + 4n - 3 = n(2n - 1).$$
69. Доведіть нерівність $4^n > 3n + 2$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
70. Доведіть, що для будь-якого натурального n значення виразу $21^n + 50 \cdot 4^n$ кратне 17.

Степенева функція з натуральним показником

71. Функцію задано формулою $f(x) = x^8$. Порівняйте:
- 1) $f(2,4)$ і $f(3,8)$; 3) $f(-9,6)$ і $f(9,6)$;
 2) $f(-8,7)$ і $f(-10,3)$; 4) $f(-0,8)$ і $f(0,4)$.
72. Функцію задано формулою $\varphi(x) = x^{17}$. Порівняйте:
- 1) $\varphi(9,4)$ і $\varphi(7,8)$; 2) $\varphi(-4,7)$ і $\varphi(-4,2)$; 3) $\varphi(-3,6)$ і $\varphi(3,6)$.
73. Побудуйте графік функції:
- 1) $y = x^3 + 2$; 2) $y = (x+2)^3$; 3) $y = x^4 - 2$; 4) $y = -\frac{1}{2}x^4$.
74. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^8$ на проміжку:
- 1) $[-2; 0]$; 2) $[1; 2]$; 3) $[-2; 2]$; 4) $(-\infty; -1]$.
75. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^9$ на проміжку: 1) $[-2; 2]$; 2) $[2; +\infty)$.
76. Визначте графічно кількість коренів рівняння:
- 1) $x^8 = 4 - x$; 2) $x^5 = 5 - 2x$.
77. Побудуйте графік функції:
- 1) $f(x) = \begin{cases} -x^4 - 1, & \text{якщо } x < 0, \\ -\sqrt{x} - 1, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^5, & \text{якщо } x < 1, \\ 3 - 2x, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$
- Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.
78. Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня n функції $y = x^n$, якщо:
- 1) $f(-5) > f(-3)$; 3) $f(-5) < f(-3)$;
 2) $f(-5) < f(3)$; 4) $f(-5) > f(3)$?
79. Розв'яжіть рівняння:
- 1) $7x^{19} + 5x^{11} = -12$; 2) $5x^{10} + 3x^6 = 8$.

Степенева функція із цілим показником

80. При якому значенні параметра a графік функції $y = ax^{-5}$ проходить через точку $B(-3; 1)$?
81. Дано функцію $f(x) = x^{-17}$. Порівняйте:
- 1) $f(5)$ і $f(-12)$; 2) $f(1,9)$ і $f(2,4)$; 3) $f(-50)$ і $f(-30)$.
82. Дано функцію $f(x) = x^{-32}$. Порівняйте:
- 1) $f(7,2)$ і $f(6,5)$; 3) $f(42)$ і $f(-42)$;
2) $f(-1,5)$ і $f(-1,8)$; 4) $f(-10)$ і $f(6)$.
83. Побудуйте графік функції:
- 1) $y = (x+5)^0$; 2) $y = (\sqrt{x}-1)^0$; 3) $y = (x^2 - 8x + 12)^0$.
84. Побудуйте графік функції:
- 1) $y = x^{-4} - 3$; 2) $y = (x-3)^{-4}$; 3) $y = \frac{1}{3}x^{-2}$.
85. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-5}$ на проміжку: 1) $[\frac{1}{3}; 1]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[2; +\infty)$.

86. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{якщо } x < 1, \\ x^{-3}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

87. Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:
- 1) $f(-12) < f(-16)$; 3) $f(-12) > f(-16)$;
2) $f(-12) < f(16)$; 4) $f(16) < f(12)$?

Означення кореня n -го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$

88. Обчисліть:

- 1) $0,2\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\sqrt[4]{625}$;
2) $\sqrt[7]{-128} + 3(\sqrt[5]{9})^5 - 4\sqrt[8]{256}$;
3) $4(-\sqrt[8]{6})^8 - 0,8\sqrt[4]{10000} + (\frac{1}{3}\sqrt[3]{270})^3$;
4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} \cdot \sqrt[6]{\frac{64}{729}} + (-5\sqrt{3})^2 - (-\sqrt[11]{14})^{11}$.

89. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt[6]{-x-1}; \quad 4) y = \sqrt[4]{5x-x^2}; \quad 7) y = \sqrt[4]{|x|(x-1)};$$

$$2) y = \sqrt[8]{-x^4}; \quad 5) y = \sqrt[4]{-12+8x-x^2}; \quad 8) y = \sqrt[6]{\frac{x^2-25}{|x|-7}};$$

$$3) y = \sqrt[3]{x-4}; \quad 6) y = 10\sqrt{\frac{x^2+8x-9}{x^2-1}}; \quad 9) y = \sqrt[8]{|x|-1} + \frac{1}{\sqrt[10]{x+5}}.$$

90. Знайдіть область значень функції:

$$1) y = \sqrt[8]{x} + 4; \quad 2) y = -\sqrt[4]{x} - 3; \quad 3) y = \sqrt{x} + 5.$$

91. Оцініть значення виразу $\sqrt[3]{x}$, якщо:

$$1) 8 \leq x \leq 343; \quad 2) -27 < x < 64.$$

92. Оцініть значення x , якщо:

$$1) -1 \leq \sqrt[5]{x} \leq 2; \quad 2) 3 < \sqrt[4]{x} < 5.$$

93. Порівняйте:

$$1) \sqrt[4]{5,8} \text{ і } \sqrt[4]{4,9}; \quad 2) \sqrt[5]{-42} \text{ і } \sqrt[5]{-45}; \quad 3) \sqrt[5]{34} \text{ і } 2.$$

94. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^9 = -16; \quad 3) x^4 = -81; \quad 5) 8x^4 - 64 = 0;$$

$$2) x^4 = \frac{1}{16}; \quad 4) (x-2)^6 = 64; \quad 6) (x^2 - 4x)^3 = -27.$$

95. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt[7]{x} = 2; \quad 3) \sqrt[4]{x} + 5 = 0; \quad 5) \sqrt[4]{6x-4} = 0;$$

$$2) \sqrt[4]{x} - 6 = 0; \quad 4) \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} - 3 = 0; \quad 6) \sqrt[4]{6x-4} = 2.$$

96. Між якими двома послідовними цілими числами розташоване на координатній прямій число:

$$1) \sqrt[3]{12}; \quad 2) \sqrt[4]{50}; \quad 3) -\sqrt[5]{30}?$$

97. Укажіть усі цілі числа, розташовані на координатній прямій між числами:

$$1) 3 \text{ і } \sqrt[3]{250}; \quad 2) \sqrt[5]{-30} \text{ і } \sqrt[6]{750}.$$

98. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x^2 - 25)^{18}\sqrt{4-x} = 0; \quad 3) (|x| - 8)^{22}\sqrt{5-x} = 0.$$

$$2) (x-8)^{20}\sqrt{x^2-12x+27} = 0;$$

99. Побудуйте графік функції:

$$1) y = (\sqrt[5]{-x+1})^5; \quad 2) y = (\sqrt[6]{x-2})^6.$$

100. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[3]{x} - 1$; 2) $y = \sqrt[3]{x-1}$; 3) $y = \sqrt[3]{1-x}$; 4) $y = -\sqrt[3]{|x|} + 1$.

101. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[6]{x+3} > 2$; 2) $\sqrt[3]{2x-3} \leq 5$; 3) $\sqrt[4]{3x+1} \leq 2$; 4) $\sqrt[10]{x^2-6} > \sqrt[10]{5x}$.

102. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $(a-1)\sqrt[8]{x} = 0$; 3) $(a+2)\sqrt[4]{x} = a+2$; 5) $ax^8 = 6$;

2) $\sqrt[6]{a(x-1)} = 0$; 4) $\sqrt[6]{x} = a-1$; 6) $x^5 = a+1$.

103. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + \sqrt[10]{x} = y + \sqrt[10]{y}, \\ 5y^2 - x^2 = 4. \end{cases}$$

Властивості кореня n -го степеня

104. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{27 \cdot 64}$; 3) $\sqrt[5]{243 \cdot 0,00032}$; 5) $\sqrt[7]{0,3^7 \cdot 5^{14}}$;

2) $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 625}$; 4) $\sqrt[3]{4^6 \cdot 3^9}$; 6) $\sqrt[4]{\frac{3^8 \cdot 7^4}{5^4 \cdot 2^{12}}}$.

105. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; 3) $\sqrt[3]{0,108} \cdot \sqrt[3]{2}$; 5) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{729}}$;

2) $\sqrt[6]{10\,000} \cdot \sqrt[6]{100}$; 4) $\sqrt[8]{3^5 \cdot 5^2} \cdot \sqrt[3]{3^3 \cdot 5^6}$; 6) $\frac{\sqrt[3]{5^8 \cdot 7^{10}}}{\sqrt[3]{5^2 \cdot 7^{16}}}$.

106. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{37} + 8} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{37} - 8}$; 2) $\sqrt[4]{17 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17 + \sqrt{33}}$.

107. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{m}}$; 3) $\sqrt[24]{a^3}$; 4) $\sqrt[10]{m^5 n^{15}}$.

108. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{54}$; 2) $\sqrt[5]{96}$; 3) $\sqrt[4]{405}$.

109. Внесіть множник під знак кореня:

1) $4\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt[3]{5}$; 3) $10\sqrt[4]{0,312}$; 4) $0,1\sqrt[5]{450}$; 5) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{135}$.

110. Спростіть вираз:

1) $3\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{-135} - 2\sqrt[3]{320}$;

2) $2\sqrt[4]{48m} - 4\sqrt[4]{1250m} - 4\sqrt[4]{768m} + 3\sqrt[4]{32m}$.

111. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{2^6 \sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[7]{a^3 \sqrt{a}}$; 3) $\sqrt[8]{c^5 \sqrt{c^3}}$; 4) $\sqrt[9]{p^5 \sqrt[4]{p^7}}$.

112. Порівняйте:

- 1) $\sqrt{6}$ і $\sqrt[6]{210}$; 3) $\sqrt[4]{7}$ і $\sqrt[3]{5}$; 5) $\sqrt[6]{5}$ і $\sqrt[6]{3\sqrt[3]{3}}$.
 2) $4\sqrt[3]{2}$ і $3\sqrt[3]{5}$; 4) $\sqrt[4]{6}$ і $\sqrt[6]{15}$;

113. При яких значеннях x виконується рівність:

- 1) $10\sqrt{25-x^2} = 10\sqrt{5-x} \cdot 10\sqrt{5+x}$;
 2) $\sqrt[8]{(x-8)(x-10)} = \sqrt[8]{8-x} \cdot \sqrt[8]{10-x}$;
 3) $\sqrt[5]{(x+8)(x-7)} = \sqrt[5]{x+8} \cdot \sqrt[5]{x-7}$?

114. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt[4]{a^4}$, якщо $a \geq 0$; 5) $\sqrt[4]{16x^8y^4z^{12}}$, якщо $y \geq 0$, $z \leq 0$;
 2) $\sqrt[6]{b^6}$, якщо $b \leq 0$; 6) $3,5x\sqrt[8]{256x^{24}}$, якщо $x \leq 0$;
 3) $\sqrt[5]{x^5}$; 7) $\frac{10\sqrt[10]{a^{10}b^{20}c^{30}}}{a^2b^3c^4}$, якщо $a < 0$, $c < 0$;
 4) $\sqrt[3]{343m^6n^9}$; 8) $-0,2a^3 \cdot \sqrt[4]{625a^{16}b^{36}}$, якщо $b \leq 0$.

115. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}$; 2) $\sqrt[3]{(2-\sqrt{7})^3}$; 3) $\sqrt[5]{(8-\sqrt{11})^5} + \sqrt[8]{(3-\sqrt{11})^8}$.

116. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt[6]{(x+16)^6} = 3x$; 2) $\sqrt[8]{(x-6)^8} = x-6$.

117. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt[6]{(x+2)^6}$; 3) $y = \sqrt[8]{(x-3)^5} \cdot \sqrt[8]{(x-3)^3}$;
 2) $y = \sqrt[4]{x^4} + 2x$; 4) $y = \frac{(x-4)^2}{\sqrt[4]{(x-4)^4}} + 2$.

118. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{a}-1}{\sqrt[6]{a}+1}$; 5) $\frac{\sqrt[6]{9a}-\sqrt[6]{3a^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3}}$; 7) $\frac{x-\sqrt{6x}+6}{x\sqrt{x}+6\sqrt{6}}$.
 2) $\frac{\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$; 4) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}}{a-\sqrt[4]{a^3}}$; 6) $\frac{x+8}{\sqrt[3]{x^2-2\sqrt[3]{x}+4}}$;

119. Винесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{8a^4}$; 5) $\sqrt[4]{320x^{10}y^{13}}$; 9) $\sqrt[4]{a^5b^5}$, якщо $a \leq 0$;
 2) $\sqrt[4]{x^9}$; 6) $\sqrt[3]{250m^7n^{20}}$; 10) $\sqrt[4]{a^6b^5}$, якщо $a \leq 0$;
 3) $\sqrt[3]{-a^{10}}$; 7) $\sqrt[4]{-16x^7}$; 11) $\sqrt[6]{a^7b^{14}c^{18}}$, якщо $c < 0$;
 4) $\sqrt[4]{x^6y^5}$; 8) $\sqrt[6]{a^{26}b^{13}}$; 12) $\sqrt[8]{-a^{17}b^{26}}$, якщо $b \leq 0$.

120. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $m\sqrt{6}$; 4) $3y\sqrt[5]{2y^2}$; 7) $c\sqrt[8]{c^6}$, якщо $c \leq 0$;
 2) $m\sqrt{-m^3}$; 5) $a\sqrt[9]{6a}$; 8) $xy\sqrt[6]{xy^4}$, якщо $y > 0$;
 3) $m\sqrt[4]{m^5}$; 6) $2b^4\sqrt[3]{\frac{3}{4b^2}}$; 9) $x^3y^{710}\sqrt[10]{x^8y^{12}}$, якщо $x < 0, y > 0$.

121. Спростіть вираз:

- 1) $(\sqrt[5]{a}-1)(\sqrt[5]{a}+1)-(\sqrt[5]{a}-2)^2$; 3) $\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y}}+\frac{2\sqrt[8]{x}}{\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}}$;
 2) $\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-9}$; 4) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}+4}{\sqrt[4]{a}-4}-\frac{\sqrt[4]{a}-4}{\sqrt[4]{a}+4}\right)\cdot\frac{16-\sqrt{a}}{32\sqrt[4]{a^3}}$;
 5) $\frac{2\sqrt[8]{m}}{\sqrt[8]{m}-2}+\frac{\sqrt[8]{m}+7}{8-4\sqrt[8]{m}}\cdot\frac{32}{7\sqrt[8]{m}+4\sqrt{m}}$.

122. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$.

123. Доведіть, що значення виразу $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ є раціональним числом.

Степінь з раціональним показником та його властивості

124. Знайдіть значення виразу:

- 1) $27^{\frac{1}{3}}$; 2) $64^{\frac{5}{6}}$; 3) $0,0001^{-0,25}$; 4) $256^{0,375}$; 5) $\left(2\frac{23}{49}\right)^{-1,5}$.

125. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y=x^{\frac{3}{4}}$; 3) $y=(x+4)^{1,2}$; 5) $y=(x^2+8x-9)^{\frac{1}{5}}$.
 2) $y=x^{-0,7}$; 4) $y=\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{1,4}$;

126. Спростіть вираз:

- 1) $y^{3,4}\cdot y^{-1,8}$; 6) $(y^6)^{-0,9}\cdot(y^{2,3})^4:(y^{-2,5})^4$;
 2) $y^{\frac{15}{28}}:y^{\frac{6}{7}}$; 7) $\frac{x^{\frac{1}{6}}\cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{2}{9}}\cdot x^{\frac{1}{12}}}$;
 3) $(y^{-4})^{0,9}$; 8) $\sqrt[5]{a}\cdot a^{\frac{5}{6}}$;
 4) $y^{\frac{5}{9}}\cdot y^{\frac{5}{12}}\cdot y^{-\frac{5}{6}}$; 9) $\sqrt[6]{a^5}\cdot a^{-\frac{3}{7}}$;
 5) $\left(x^{\frac{10}{21}}y^{\frac{16}{35}}\right)^{\frac{49}{20}}$; 10) $(\sqrt[5]{a^{-4}})^{\frac{5}{16}}\cdot\left(a\frac{7}{8}\right)^{\frac{4}{21}}$.

127. Побудуйте графік функції $y = \left((x+4)^{\frac{1}{7}} \right)^{-7}$.

128. Відомо, що a — додатне число. Подайте вираз у вигляді:
а) квадрата; б) куба; в) шостого степеня:

1) a^{12} ; 2) a^{-15} ; 3) $a^{\frac{1}{4}}$; 4) $a^{4,2}$.

129. Спростіть вираз:

1) $x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{2}} + 3 \right) - \left(x^{\frac{1}{2}} + 3 \right)^2$;

2) $\left(m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}} \right) \left(m^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \right) + \left(2m^{\frac{1}{4}} - 3n^{\frac{1}{4}} \right) \left(5m^{\frac{1}{4}} + 2n^{\frac{1}{4}} \right)$;

3) $\left(a^{\frac{1}{12}} + b^{\frac{1}{12}} \right) \left(a^{\frac{1}{12}} - b^{\frac{1}{12}} \right) \left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}} \right) \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right)$;

4) $\left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}} \right) \left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}} \right) - a^{\frac{1}{6}} \left(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{6}} \right)$.

130. Знайдіть значення виразу:

1) $(3^{-0,9})^8 \cdot 3^{-10,2}$;

3) $625^{-2,25} \cdot 25^{-\frac{2}{3}} \cdot 125^{\frac{25}{9}}$;

2) $\left(\frac{16}{7^{17}} \right)^{\frac{51}{32}} \cdot 49^{1,25}$;

4) $\left(\frac{3^{\frac{5}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}}{15^{-1} \cdot 2^{\frac{2}{7}}} \right)^{-7}$.

131. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-\frac{3}{4}} = 0,125$;

2) $(x+4)^{1,6} = 256$.

132. Подайте даний вираз у вигляді: а) різниці квадратів;
б) різниці кубів і розкладіть його на множники (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) $a^{19} - b^5$;

2) $x^{\frac{4}{5}} - y^{\frac{3}{7}}$;

3) $x^{\frac{1}{3}} - 5$.

133. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $x - 5x^{\frac{1}{3}}$;

3) $10^{\frac{2}{5}} - 15^{\frac{2}{5}}$;

5) $x^{\frac{1}{5}} - 5x^{\frac{1}{6}}$;

2) $m^{\frac{2}{5}}n - n^{\frac{2}{5}}m$;

4) $6a^{\frac{2}{3}} + 9a^{\frac{5}{6}}$;

6) $x^{\frac{3}{8}}y^{\frac{1}{4}} - xy + x^{\frac{5}{8}}y^{\frac{3}{4}}$.

134. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m+4m^{\frac{5}{8}}}{\frac{3}{m^8}+4}$;

4) $\frac{m-m^{0,5}n^{0,5}+n}{m^{1,5}+n^{1,5}}$;

7) $\frac{a^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{2}{3}}}{a-64}$;

2) $\frac{7b^{\frac{4}{9}}}{\frac{7}{b^{12}}-b^{\frac{4}{9}}}$;

5) $\frac{a-6a^{0,5}b^{0,5}+9b}{a^3b^{2,5}-3a^{2,5}b^3}$;

8) $\frac{p-7p^{\frac{7}{9}}}{p-49p^{\frac{5}{9}}}$;

3) $\frac{49a-4b}{7a^{0,5}+2b^{0,5}}$;

6) $\frac{4m-m^{\frac{3}{5}}}{4m^4-m}$;

9) $\frac{15^{\frac{1}{4}}+45^{\frac{1}{4}}}{10^4+30^4}$.

135. Спростіть вираз:

1) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{a^2}+b^{\frac{1}{2}}} + \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}$;

2) $\frac{\frac{1}{x^8}+8}{\frac{1}{x^4}+4x^{\frac{1}{8}}} - \frac{\frac{1}{x^8}+1}{3x^{\frac{1}{8}}+12} - \frac{6-x^{\frac{1}{8}}}{3x^{\frac{1}{8}}}$;

3) $\left(\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}+y^{\frac{1}{3}}} + \frac{\frac{1}{y^3}}{x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{y^3}} \right) \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{xy^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y}$.

Іраціональні рівняння

136. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{2x-3} = -3$;

4) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{1-x}$;

2) $\sqrt[3]{2x-3} = -3$;

5) $\sqrt[12]{2x-3} = \sqrt[12]{x^2+x-23}$;

3) $\sqrt[8]{5-x} = \sqrt[8]{3x-3}$;

6) $\sqrt{2x-3} = 3-2x$.

137. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{7-x} = x-1$;

3) $\sqrt{-x^2+4x-2} = x-2$;

2) $\sqrt{2x^2+8x+7}-2 = x$;

4) $\sqrt{x^2+2x+6} = 2x+1$.

138. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(4x-11)(x-4)} = x-4$;

2) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4} = 2x-6$.

139. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+10} - \sqrt{x-5} = 3$;

3) $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} = 1$;

2) $\sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = 2$;

4) $\sqrt{x-4} - \sqrt{x-11} = 1$.

140. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} = 8; \quad 3) \sqrt{x+7} + \sqrt{3-x} = 4;$$

$$2) \sqrt{3x+1} + \sqrt{16-3x} = 5; \quad 4) \sqrt{4x+1} + \sqrt{x+2} = 5.$$

141. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{2x+7} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x+3}; \quad 3) \sqrt{x-6} = \sqrt{x-5} - \sqrt{2x-5};$$

$$2) \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x-7}; \quad 4) \sqrt{x-5} = \sqrt{2x-7} - \sqrt{x-2}.$$

142. Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

$$1) \sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 3 = 0; \quad 3) \sqrt{x+3} - 3\sqrt[4]{x+3} + 2 = 0;$$

$$2) \sqrt[3]{x} - 4\sqrt[6]{x} - 5 = 0; \quad 4) \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} + 3\sqrt[3]{x-1} - 4 = 0.$$

143. Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

$$1) x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31; \quad 4) 2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0;$$

$$2) \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} + \sqrt{\frac{x+4}{2-x}} = 2; \quad 5) 5x^2 - 20x + 6 - 2\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 0.$$

$$3) x\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x^3} = 2;$$

144. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-4+2\sqrt{x-5}} + \sqrt{x-4-2\sqrt{x-5}} = 4$.

145. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt[3]{x-7} + \sqrt[3]{9-x} = 2;$$

$$2) \sqrt[3]{(8-x)^2} - \sqrt[3]{(8-x)(27+x)} + \sqrt[3]{(27+x)^2} = 7.$$

146. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt[3]{y} - \sqrt{x} = 7, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} = 18; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ x - y = 56; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = 16, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{3x-y+3} = 2, \\ \sqrt{x+2y+4} = 4-x; \end{cases} \quad 7) \begin{cases} \sqrt{4-y+x} + \sqrt{9-2y+x} = 7, \\ 2x-3y = 12; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{41}{20}, \\ x+y = 41; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 9. \end{cases}$$

Ірраціональні нерівності

147. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$;

3) $\sqrt{x^2-5x+6} \leq \sqrt{4x-14}$;

2) $\sqrt{2x-1} < \sqrt{x-4}$;

4) $\sqrt{2x^2+6x+3} \geq \sqrt{-x^2-4x}$.

148. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+12} < 8-x$;

3) $\sqrt{1-x^2} < 4-x$;

2) $\sqrt{2x-1} < x-2$;

4) $\sqrt{2x^2-11x+9} \leq x-3$.

149. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+33} > x+3$;

3) $\sqrt{x^2+4x-5} > x-3$;

2) $\sqrt{16-5x} \geq x-2$;

4) $\sqrt{-x^2-2x+8} \geq x+4$.

150. Розв'яжіть нерівність:

1) $(4-3x)\sqrt{x} \geq 0$;

3) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} \leq 6$.

2) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6 \leq 0$;

Радіанна міра кута

151. Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

1) 18° ;

2) 48° ;

3) 75° ;

4) 240° .

152. Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

1) $\frac{\pi}{20}$;

2) $\frac{4\pi}{5}$;

3) $1\frac{2}{3}\pi$;

4) 3π .

153. У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

1) 138° ;

3) 500° ;

5) $\frac{\pi}{7}$;

7) $-\frac{11\pi}{6}$;

9) 2 ;

2) -140° ;

4) -48° ;

6) $\frac{5\pi}{3}$;

8) $-1,7\pi$;

10) $-3?$

154. Знайдіть усі кути, на які треба повернути точку $P_0(1; 0)$, щоб отримати точку:

1) $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

2) $P_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

155. Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих у результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути:

1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

3) $\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

2) $-\frac{\pi}{4} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

4) $\frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

Тригонометричні функції числового аргументу

156. Знайдіть значення виразу:

1) $2\cos 0^\circ + 5\sin 90^\circ - 4\operatorname{tg} 180^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + 3\cos \frac{\pi}{2} - 4\sin \frac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg} 45^\circ \cos 30^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ$; 4) $\frac{(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{2}) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} 2\pi}$;

5) $\sqrt{(2\sin 45^\circ + 1)^2} - \sqrt{(1 - 2\cos 45^\circ)^2}$.

157. Знайдіть значення виразу $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$ при:

1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$;

2) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

158. Чи є можливою рівність:

1) $\cos \alpha = \frac{5}{7}$; 2) $\sin \alpha = -\sqrt[3]{1,1}$; 3) $\sin \alpha = \frac{\pi}{5}$; 4) $\cos \alpha = \sqrt{2} - 2$?

159. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $1 + 3\sin \alpha$;

2) $\cos^2 \alpha - 5$;

3) $\frac{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha}$.

160. При яких значеннях параметра a можлива рівність:

1) $\sin x = a + 6$;

2) $\cos x = a^2 - 9a + 19$?

161. Знайдіть область значень виразу:

1) $\frac{1}{4 + \cos 5x}$; 2) $3 - 2|\cos 3x|$; 3) $\frac{1}{\sin 4x - 1}$; 4) $\operatorname{tg}^6 x - 4$.

Знаки значень тригонометричних функцій

162. Який знак має:

1) $\sin 140^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 200^\circ$;

5) $\sin 2$;

2) $\cos 320^\circ$;

4) $\operatorname{ctg}(-84^\circ)$;

6) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$?

163. Знайдіть значення виразу:

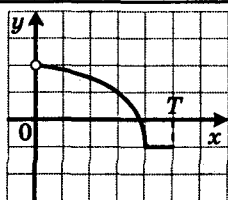
1) $8\sin(-45^\circ) - \sqrt{2}\operatorname{ctg}(-45^\circ) + \cos(-45^\circ)$;

2) $\frac{\sin(-45^\circ)\cos(-60^\circ)}{\operatorname{tg}(-30^\circ)}$;

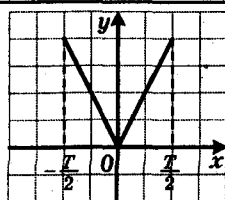
3) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 10\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

164. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin 148^\circ \cos 116^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 216^\circ \cos(-232^\circ)$; 3) $\sin 4 \operatorname{tg} 5$.



а



б

Рис. 5

165. Порівняйте:

- 1) $\cos 40^\circ$ і $\sin 240^\circ$; 3) $\sin \frac{17\pi}{10}$ і $\cos \frac{3\pi}{10}$;
 2) $\operatorname{tg} 160^\circ$ і $\operatorname{ctg} (-160^\circ)$; 4) $\operatorname{tg} 5$ і $\sin 2,5$.

166. Кутом якої координатної чверті є кут α , якщо:

- 1) $\sin \alpha > 0$ і $\sin \alpha \cos \alpha < 0$; 2) $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ і $\sin \alpha \cos \alpha > 0$?

Періодичні функції

167. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sin 750^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 510^\circ$; 5) $\sin \frac{11\pi}{6}$;
 2) $\cos 840^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} (-405^\circ)$; 6) $\operatorname{tg} \left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

168. Відомо, що число $T = \sqrt{5}$ є періодом функції f . Укажіть ще які-небудь три числа, які є періодами цієї функції.

169. На рисунку 5 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T . Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T; 2T]$.

170. Покажіть, що число T є періодом функції f :

- 1) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$, $T = 6\pi$; 3) $f(x) = \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{6} \right|$, $T = 6\pi$;
 2) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{5}$, $T = 5$; 4) $f(x) = \cos^8 6x$, $T = \frac{\pi}{6}$.

171. Покажіть, що число $T = -\pi$ не є періодом функції $f(x) = \sin x$.

172. Знайдіть період функції $f(x) = \cos 4x + \operatorname{tg} \frac{2x}{3}$.

173. Знайдіть усі значення параметра a , при яких число $T = \frac{5\pi}{3}$ є періодом функції $f(x) = \operatorname{tg} ax$.

Властивості та графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

174. На проміжку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right]$ укажіть:

- 1) нулі функції $y = \sin x$;
- 2) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найбільшого і найменшого значень.

175. Порівняйте:

- 1) $\sin \frac{10\pi}{9}$ і $\sin \frac{8\pi}{7}$;
- 2) $\sin(-91^\circ)$ і $\sin(-93^\circ)$;
- 3) $\sin 8$ і $\sin 8,5$;
- 4) $\cos \frac{13\pi}{23}$ і $\cos \frac{12\pi}{23}$;
- 5) $\cos 183^\circ$ і $\cos 185^\circ$;
- 6) $\cos(-5)$ і $\cos(-6)$.

176. Чи є можливою рівність:

- 1) $\sin \alpha = \sqrt{2} \sin 44^\circ$;
- 2) $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 61^\circ$?

177. Дослідіть на парність функцію:

- 1) $f(x) = \sin x - \cos x$;
- 2) $f(x) = \frac{x \cos x}{3 + \cos x}$;
- 3) $f(x) = \frac{x^3 + \sin x}{x^2}$;
- 4) $f(x) = \frac{(x+2)\cos^2 x}{x+2}$.

178. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sin x - 2$;
- 2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
- 3) $y = -\sin 3x$;
- 4) $y = \frac{1}{2} \sin x$;
- 5) $y = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$.

179. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \cos x + 1,5$;
- 2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
- 3) $y = \cos \frac{x}{3}$;
- 4) $y = -\frac{1}{2} \cos x$;
- 5) $y = -\frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1,5$.

180. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$;
- 2) $y = 2 \cos\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$;
- 3) $y = \sin\left(\left|x + \frac{\pi}{4}\right|\right)$;
- 4) $y = \left|\cos\left|2x - \frac{\pi}{6}\right|\right|$.

181. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \cos x - (\sqrt{\cos x})^2$;
- 2) $y = \sin x + \sqrt{\sin^2 x}$;
- 3) $y = \frac{\cos x + |\cos x|}{\cos x}$.

Властивості та графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$

182. На проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$ укажіть:

1) нулі функції $y = \operatorname{tg} x$;

2) числа, які не належать області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$.

183. Порівняйте:

1) $\operatorname{tg} \frac{23\pi}{12}$ і $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{7}$;

4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{10}\right)$ і $\operatorname{ctg}\left(-\frac{12\pi}{11}\right)$;

2) $\operatorname{tg}(-182^\circ)$ і $\operatorname{tg}(-183^\circ)$;

5) $\operatorname{ctg} 223^\circ$ і $\operatorname{ctg} 222^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 5$ і $\operatorname{tg} 6$;

6) $\operatorname{ctg}(-1)$ і $\operatorname{ctg}(-1,5)$.

184. Порівняйте:

1) $\operatorname{tg} 43^\circ$ і $\operatorname{ctg} 43^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 28^\circ$ і $\operatorname{tg} 59^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 46^\circ$ і $\sin 91^\circ$.

185. Чи є можливою рівність:

1) $\sin \alpha = \sqrt{3} \operatorname{tg} 34^\circ$;

2) $\cos \alpha = \operatorname{ctg} 50^\circ$?

186. Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \cos x + \operatorname{ctg} x$;

2) $f(x) = \frac{x \operatorname{tg} x}{2 - \cos x}$.

187. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = \operatorname{ctg} 2x$;

2) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + 2$;

4) $y = -4 \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

188. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{ctg} 3|x|$;

2) $y = \operatorname{tg} x - |\operatorname{tg} x|$.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

189. Спростіть вираз:

1) $(\cos 10\alpha - 1)(\cos 10\alpha + 1)$;

4) $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}$;

2) $\sin^2 3\beta + \cos^2 3\beta - \frac{1}{\cos^2 4\alpha}$;

5) $\sin^2 \frac{x}{4} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{4} + \operatorname{ctg} \frac{x}{4}\right)$;

3) $\operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}$;

6) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 3\alpha (\sin^2 3\alpha - 1)}{\cos^2 3\alpha}$.

190. Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ і $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$;

3) $\cos \alpha = -\frac{1}{7}$ і $\operatorname{tg} \alpha = -4\sqrt{3}$?

2) $\operatorname{ctg} \alpha = 4$ і $\operatorname{tg} \alpha = -0,25$;

191. Обчисліть значення тригонометричних функцій кута α , якщо:

$$1) \sin \alpha = -\frac{2}{7} \text{ і } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \quad 2) \operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{2} \text{ і } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

192. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\sin^3 8\alpha - \cos^3(-8\alpha)}{1 - \cos 8\alpha \sin(-8\alpha)} = \sin 8\alpha - \cos 8\alpha;$$

$$2) \sin^4(-6x) - \cos^4 6x + 2\cos^2 6x = 1;$$

$$3) \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} + \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta} = \frac{2}{\cos \beta};$$

$$4) \cos^4 5\gamma + \sin^4 5\gamma - \cos^6 5\gamma - \sin^6 5\gamma = \cos^2 5\gamma \sin^2 5\gamma;$$

$$5) \frac{1 - (\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$6) \frac{1 - \sqrt{17} \cos \alpha}{\sqrt{17} \sin \alpha - 4} = \frac{\sqrt{17} \sin \alpha + 4}{1 + \sqrt{17} \cos \alpha};$$

$$7) \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$$

193. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

$$1) 3\cos^2 \alpha - 4\sin^2 \alpha; \quad 3) 6\cos \alpha + \sin^2 \alpha;$$

$$2) 2\sin^2 \alpha + 3\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha; \quad 4) 4\sin \alpha - \cos^2 \alpha.$$

194. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{2\sin \alpha + 3\cos \alpha}, \text{ якщо } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4};$$

$$2) \frac{\sin \alpha \cos \alpha + 3\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 4\cos^2 \alpha}, \text{ якщо } \operatorname{ctg} \alpha = 5.$$

195. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \cos 2x \operatorname{tg} 2x;$$

$$2) y = \cos^2 \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{1}{x}.$$

196. Спростіть вираз $\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\beta}{4}} - \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{4}}$, якщо $4\pi < \beta < 6\pi$.

Формули додавання

197. Спростіть вираз:

$$1) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$3) \frac{\sin(30^\circ + \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)}{\sin(30^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)}.$$

$$2) 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sqrt{3}\sin \alpha + \cos \alpha;$$

198. Спростіть вираз:

1) $\cos 2\beta \cos 5\beta + \sin 2\beta \sin 5\beta$;

2) $\sin 53^\circ \cos 7^\circ + \cos 53^\circ \sin 7^\circ$;

3) $\cos(4^\circ + \alpha) \sin(\alpha - 41^\circ) + \cos(\alpha - 41^\circ) \sin(4^\circ + \alpha)$;

4) $\frac{\cos 63^\circ \cos 22^\circ + \sin 63^\circ \sin 22^\circ}{\sin 16^\circ \cos 25^\circ + \cos 16^\circ \sin 25^\circ}$;

5) $\frac{\operatorname{tg} 47^\circ - \operatorname{tg} 17^\circ}{1 + \operatorname{tg} 47^\circ \operatorname{tg} 17^\circ}$;

6) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$.

199. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha + \beta)} = \operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$;

2) $\sin 6\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha - \cos 6\alpha = 1$.

200. Знайдіть $\operatorname{tg} 105^\circ$.

201. Дано: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть $\sin(30^\circ + \alpha)$.

202. Дано: $\sin \alpha = 0,8$, $\cos \beta = -\frac{5}{13}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$.

Знайдіть $\cos(\alpha + \beta)$.

203. Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha$;

2) $5 \sin \alpha - 12 \cos \alpha$.

204. Дано: $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{5}$, $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \frac{11\pi}{6}$. Знайдіть $\cos \alpha$.

205. Дано: $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Знайдіть $\alpha + \beta$.

206. Побудуйте графік функції $y = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}$.

Формули зведення

207. Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6}$;

2) $\sin 1110^\circ$;

3) $\cos \frac{74\pi}{3}$.

208. Знайдіть значення виразу:

1) $4 \sin 225^\circ - 6 \cos 120^\circ + \operatorname{tg} 300^\circ + 3 \operatorname{ctg} 240^\circ$;

2) $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) \cos \frac{13\pi}{4} \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6}$;

3) $\sin 463^\circ \cos 373^\circ + \cos 103^\circ \sin 193^\circ$;

4) $\frac{\sin 148^\circ \sin 168^\circ + \cos 12^\circ \cos 212^\circ}{\sin 110^\circ \cos 336^\circ + \cos 250^\circ \sin 24^\circ}$.

209. Спростіть вираз:

1) $\cos(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + \sin(\pi - \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\frac{\sin(\beta - \pi) \cos(2\pi - \beta) \sin(2\pi + \beta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{ctg}(\pi - \beta) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}$;

4) $\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) \cos(2\pi - \alpha) + \cos(\pi - \alpha)\right)^2 + \frac{2\sin^2(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha - \pi)}$.

210. Знайдіть значення виразів $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$, якщо

$$\sin \alpha = -\frac{2}{3} \text{ і } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

211. Спростіть вираз:

1) $\cos 30^\circ + \cos 40^\circ + \cos 50^\circ + \dots + \cos 150^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \dots \operatorname{tg} 49^\circ$.

212. Доведіть тотожність:

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\alpha - \pi) = \cos^2 \alpha.$$

Формули подвійного, потрійного та половинного аргументів

213. Знайдіть значення виразу:

1) $2\sin^2 \frac{3\pi}{8} - 1$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^2 15^\circ - 1}{\operatorname{tg}^2 15^\circ + 1}$; 3) $2\sin 37,5^\circ \cos 37,5^\circ \cos 75^\circ$.

214. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 10\alpha}{\sin 5\alpha}$; 3) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 7\alpha\right) - 1$; 5) $\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{8} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{8}}$;

2) $\frac{\cos 3\alpha}{\cos \frac{3\alpha}{2} - \sin \frac{3\alpha}{2}}$; 4) $\sin \frac{3\alpha}{7} \cos \frac{3\alpha}{7} \cos \frac{6\alpha}{7}$; 6) $\frac{\operatorname{tg} 6\alpha(1 - \operatorname{tg}^2 3\alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2 3\alpha}$.

215. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1 + \cos \frac{\alpha}{2}$; 2) $1 - \cos 10\alpha$; 3) $1 - \sin \frac{2\pi}{9}$; 4) $1 + \sin \alpha$.

216. Понизьте степінь виразу:

1) $\cos^2 4x$; 2) $\sin^2 3x$; 3) $\sin^2\left(\frac{x}{2} - 10^\circ\right)$; 4) $\cos^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{8}\right)$.

217. Дано: $\sin \alpha = 0,8$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 4\alpha$.

218. Дано: $\operatorname{tg} \alpha = -4$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

219. Доведіть тотожність:

1) $\cos 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha = 1$; 3) $\frac{\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

2) $\operatorname{ctg} 6\alpha (1 - \cos 12\alpha) = \sin 12\alpha$;

220. Спростіть вираз $\sqrt{8 + 8\cos 6\alpha}$, якщо $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

221. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 3\alpha + \cos 3\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$; 3) $\frac{2\cos^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$;

2) $\frac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2 \alpha - 4}$; 4) $\frac{\sin 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$.

222. Доведіть, що $\cos 4\beta \cos 8\beta \cos 16\beta = \frac{\sin 32\beta}{8\sin 4\beta}$.

223. Доведіть тотожність $\frac{\cos^3 2\alpha - \cos 6\alpha}{\sin^3 2\alpha + \sin 6\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

224. Знайдіть значення виразу $\cos 10^\circ (1 - 4\sin^2 10^\circ)$.

Формули для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій

225. Перетворіть у добуток:

1) $\cos 40^\circ + \cos 10^\circ$; 4) $\cos 3\alpha - \cos 7\alpha$;

2) $\sin 4\alpha + \sin 10\alpha$; 5) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $\sin \frac{11\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}$; 6) $\cos\left(2\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right)$.

226. Перетворіть у добуток:

1) $\cos 70^\circ + \sin 36^\circ$; 2) $\sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{10}$; 3) $\cos 4\beta - \sin 2\beta$.

227. Перетворіть у добуток:

1) $1 + 2\sin\alpha$;

2) $\sqrt{2}\cos\alpha + 1$.

228. Доведіть тотожність:

1) $\sin 5\alpha - \sin 6\alpha + \sin 8\alpha - \sin 7\alpha = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}$;

2) $\frac{\sin\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

3) $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

4) $\cos^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha + \beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta$.

229. Спростіть вираз:

1) $\frac{(\sin 7\alpha + \sin \alpha)(\cos 7\alpha + \cos \alpha)}{1 + \cos 6\alpha}$;

2) $\left(\frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}\right) \cdot \frac{\cos 10\alpha - \cos 6\alpha}{\sin 3\alpha}$;

3) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$.

230. Спростіть вираз:

1) $\frac{1 + \cos(2\alpha - 2\pi) + \cos(4\alpha + 2\pi) - \cos(\pi - 6\alpha)}{\cos(\pi - 2\alpha) + 1 - 2\cos^2(\pi + 2\alpha)}$;

2) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{15\pi}{8} + \alpha\right)$.

231. Доведіть тотожність:

1) $\cos^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha + \beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta$;

2) $\cos\alpha + \sin 2\alpha + \cos 3\alpha + \sin 4\alpha = 4\cos\alpha \cos\left(\frac{\pi - \alpha}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi - 5\alpha}{4}\right)$;

3) $4\cos^2\alpha - 1 = 4\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

232. Перетворіть у суму добуток:

1) $\sin 4\alpha \cos 7\alpha$; 3) $\cos 25^\circ \cos 50^\circ$; 5) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$;

2) $\sin 2\alpha \sin \alpha$; 4) $\sin\frac{5\pi}{24} \cos\frac{11\pi}{24}$; 6) $\cos\alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

233. Доведіть тотожність:

1) $\cos 2\alpha + 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 0,5$;

2) $\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 4\alpha \sin \alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha$;

3) $\cos^2\alpha + \sin^2\beta + \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = 1$.

Рівняння $\cos x = b$

234. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x = -1$;

6) $\cos \frac{4\pi x}{3} = -\frac{1}{2}$;

2) $\cos 5x = \frac{1}{2}$;

7) $\cos\left(6x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{3}$;

3) $\cos \frac{3x}{7} = 0$;

8) $\cos(4x - 1) = \frac{\pi}{4}$;

4) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) = 1$;

9) $2\cos\left(8x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$;

5) $\cos(3 - 2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

10) $4\cos\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$.

235. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 4x = \frac{1}{4}$;

2) $\cos^2 \frac{x}{5} = \frac{3}{4}$;

3) $12\sin^2 x - 5 = 0$.

236. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

237. Скільки коренів рівняння $\cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ належать проміжку $\left[\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{2}\right]$?238. Знайдіть усі корені рівняння $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, які задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.239. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\cos x = a^2 - 8a + 17$;

2) $(a - 5)\cos x = a + 3$?

240. Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$ залежно від значення параметра a .Рівняння $\sin x = b$

241. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 6x = 1$;

5) $1 + 2\sin(3 - 2x) = 0$;

2) $\sin \frac{2x}{9} = 0$;

6) $7\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$;

3) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$;

7) $\sin(5x - 2) = -\frac{\pi}{2}$;

4) $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0$;

8) $\sin(4x + 3) = -\frac{\pi}{6}$.

242. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{3} \sin x - \cos x = -1; \quad 3) \sin x + \cos x = -\sqrt{2}.$$

$$2) \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 1;$$

243. Скільки коренів рівняння $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$?

244. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{7\pi x}{5} = 0; \quad 2) \sin(5\pi\sqrt{x}) = -1; \quad 3) \sin \frac{6\pi x^2}{5} = 1.$$

245. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

$$1) (a^2 - 25)\sin x = a + 5; \quad 2) \sin x = 2a - a^2 - 2?$$

246. Визначте кількість коренів рівняння $\sin 2x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ залежно від значення параметра a .

247. Скільки коренів має рівняння $\cos x (\sin x - a) = 0$ на проміжку $[0; 2\pi]$ залежно від значення параметра a ?

$$\text{Рівняння } \operatorname{tg} x = b \text{ і } \operatorname{ctg} x = b$$

248. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{tg} 2x = 0; \quad 3) 3\operatorname{tg}\left(8x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0; \quad 5) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = 0;$$

$$2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right) = 1; \quad 4) \operatorname{ctg} 6x = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 6) 2\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 4 = 0.$$

249. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння

$$\operatorname{tg}\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

250. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

251. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\frac{\operatorname{ctg} x - a}{\cos x - \frac{1}{2}} = 0$ на проміжку $(0; \pi)$?

252. При яких значеннях параметра a рівняння $(x - a)\left(\operatorname{tg} x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь?

Функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccctg} x$

253. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 3) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\operatorname{arctg}1\right)$;

2) $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

254. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 5)$; 2) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{7}\right)$; 3) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

255. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin(x-1)$; 2) $y = \arccos(x^2-8)$; 3) $y = \operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{2-x}}$.

256. Знайдіть область значень функції:

1) $y = 4\arcsin x + \frac{\pi}{3}$; 2) $y = 2 - 5\operatorname{arccctg} 3x$.

257. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(x+3) = \frac{2\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}(2x-1) = \frac{\pi}{4}$.

258. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin x > \frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{arctg}(5x+2) > -\frac{\pi}{3}$.

2) $\arccos 3x \leq \frac{2\pi}{3}$;

259. Обчисліть:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{7}\right)$; 3) $\sin(\operatorname{arctg} 8)$; 5) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{9}\right)$;

2) $\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$; 4) $\cos(\operatorname{arccctg}(-0,3))$; 6) $\operatorname{tg}(\operatorname{arccctg} 10)$.

260. Побудуйте графік функції $y = \frac{\arcsin|x|}{\arcsin x}$.

261. Обчисліть:

1) $\sin\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$; 2) $\arccos(\cos 5)$.

Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних

262. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin^2 3x - 3\sin 3x + 1 = 0$; 3) $\operatorname{tg}^2 6x - 3 = 0$;

2) $6\cos^2 5x + 5\cos 5x - 1 = 0$; 4) $\operatorname{ctg}^2 2x - 6\operatorname{ctg} 2x + 5 = 0$.

263. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2\cos^2 \frac{4x}{3} + 11\sin \frac{4x}{3} - 7 = 0$; 5) $\operatorname{tg}^4 5x + 4\operatorname{tg}^2 5x - 5 = 0$;
 2) $3\cos 8x - \cos 4x + 1 = 0$; 6) $\frac{1}{\cos^2 3x} - 7\operatorname{tg} 3x + 11 = 0$;
 3) $2\cos^2 4x + 14\sin^2 2x - 11 = 0$; 7) $4\operatorname{ctg}^2 2x - \frac{3}{\sin 2x} + 3 = 0$;
 4) $3\operatorname{tg} \frac{x}{4} - 4\operatorname{ctg} \frac{x}{4} = 1$; 8) $4\cos^2 7x + 6\operatorname{tg}^2 7x - 5 = 0$.

264. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin 8x + \cos 8x = 0$; 3) $6\cos \frac{x}{4} - 5\sin \frac{x}{4} = 0$;
 2) $\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = 0$; 4) $2\sin^2 \frac{x}{2} + 3\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$.

265. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $4\sin^2 \frac{x}{4} - 3\sin \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{4} = 0$; 4) $\frac{2\cos x + 3\sin x}{\sin x - 4\cos x} = \frac{1}{2}$;
 2) $6\cos^2 4x + 2\sin 8x = 5$; 5) $1 - \cos 6x - \sin 6x = 0$;
 3) $4\cos^2 5x - 3\sin 10x = 4$; 6) $3\sin 4x + 2\cos 4x = 3$.

266. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $4\sin^2 2x - 1 = \cos 2x \cos 6x$; 3) $\sqrt{5 - 4\operatorname{tg} x} = 2 - \operatorname{tg} x$;
 2) $\sin 2x - 5(\sin x + \cos x) + 5 = 0$; 4) $\sqrt{\cos 2x} = -\cos x$.

267. Знайдіть усі корені рівняння $\sqrt{3}\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$, які задовольняють нерівність $-1 < x < 2$.

268. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3} = \frac{1}{\sin \frac{x}{3}}.$$

269. При яких значеннях параметра a має корені рівняння

$$\sin^2 x - (2a + 1)\sin x + 4a - 2 = 0?$$

270. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить рівно 3 корені рівняння

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = 0?$$

271. Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння

$$\cos^2 x + \left(a + \frac{1}{2}\right)\cos x + \frac{a}{2} = 0 \text{ має на проміжку } \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right]:$$

1) 2 корені;

2) 3 корені.

**Розв'язування тригонометричних рівнянь
методом розкладання на множники.
Застосування обмеженості тригонометричних функцій**

272. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\cos 3x + \cos 5x = 0$; 4) $\sin x - \sin 6x = 0$;
 2) $\sin 4x + \sin 6x = 0$; 5) $\sin 2x + \sin 6x = 2\cos 2x$;
 3) $\cos 4x - \cos 3x = 0$; 6) $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x - 4 = 0$;
 7) $2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin x + 2\cos x - \sqrt{3} = 0$;
 8) $(1 - \cos x)\operatorname{tg} x + \cos x - 1 = 0$.

273. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin 2x - \cos 5x = 0$; 3) $\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{3}\sin 2x$;
 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$; 4) $\sin x + \sin 5x = \sin 3x - \sin 9x$.

274. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin 2x + 2\sin^2 3x = 1$; 3) $\cos^2 x + \cos^2 5x = 1$;
 2) $1 + \cos 6x = \sqrt{3}\cos 3x$; 4) $\sin^2 2x + \sin^2 6x = \sin^2 3x + \sin^2 5x$.

275. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin 7x$; 4) $\sin 5x \sin x = \cos 4x$;
 2) $\sqrt{2}(\cos 4x - \sin 4x) = \cos 8x$; 5) $\cos 6x \cos 4x = \sin x \sin 3x$;
 3) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin 2x$; 6) $\sin 12x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$.

276. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 0$; 2) $\frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2\cos x$.

277. Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg} 5x \cos x + \sin x - \sqrt{2}\cos 4x = 0$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$?

278. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3\cos\frac{x^2 - x}{2} = x^2 - 2x + 4$; 2) $\cos\frac{3x}{2} + \cos x = 2$.

279. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3}, \\ \cos^2 x - \cos^2 y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x = 2 \cos y. \end{cases}$$

Тригонометричні нерівності

280. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sin x \leq \frac{1}{2}; \quad 2) \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \operatorname{tg} x > -1; \quad 4) \operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}.$$

281. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \cos 2x < \frac{1}{2};$$

$$4) \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2};$$

$$2) \sin \frac{x}{6} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$5) \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{10}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$3) \cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$6) \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

282. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 1 \leq \operatorname{tg} x \leq 2;$$

$$3) |\sin x| > \frac{1}{2};$$

$$2) -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$4) |\operatorname{tg} x| \geq \sqrt{3}.$$

283. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2 \sin^2 3x > \frac{1}{2};$$

$$2) \sin 2x \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3} \cos 2x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

284. Розв'яжіть нерівність $\sin x (2 \cos 2x - 1) > 0$.

Означення границі функції в точці та функції, неперервної в точці

285. Для кожної з функцій, графіки яких зображено на рисунку 6, установіть:

1) чи визначена ця функція в точці x_0 ;

2) чи існує границя функції в точці x_0 ; у разі ствердної відповіді запишіть з використанням відповідної символіки, чому вона дорівнює;

3) якщо границя в точці x_0 існує, то чи дорівнює вона значенню функції в цій точці.

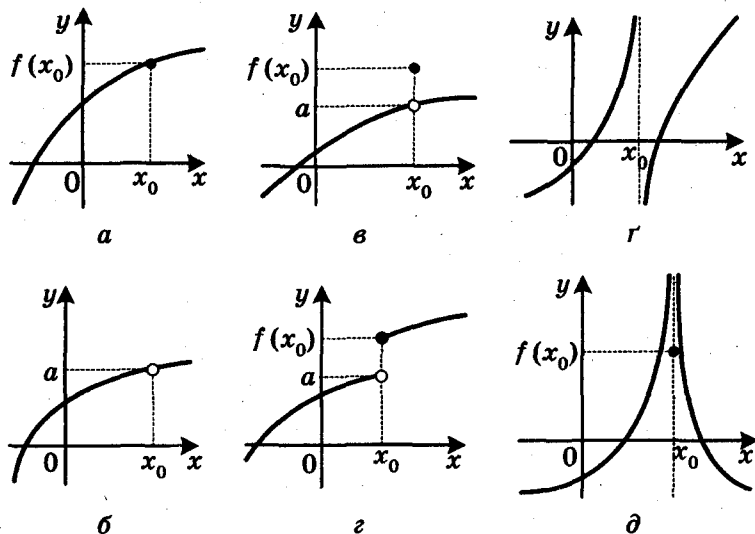


Рис. 6

286. Побудувавши графік функції f , з'ясуйте, чи є неперечною функція f у точці x_0 :

1) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$;

2) $f(x) = \frac{x-3}{|x-3|}$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{якщо } x < 1, \\ x^2+4, & \text{якщо } x \geq 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+15}{x+5}, & \text{якщо } x \neq -5, \\ 3, & \text{якщо } x = -5, \end{cases}$ $x_0 = -5$.

287. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos 3x$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{x} - 3x}{x - 7\sqrt{x}}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$.

Задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції

288. Знайдіть приріст функції f у точці x_0 , якщо:

1) $f(x) = 3x - 2$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,3$;

2) $f(x) = 2x^2 - x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$;

3) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = \frac{\pi}{6}$.

289. Для функції $f(x) = 4 - 2x$ і точки x_0 знайдіть

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ і } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

290. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 3t^2 + 1$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент часу $t_0 = 4$ с.

291. Знайдіть кутовий коефіцієнт:

1) січної графіка функції $y = x^2 + 2$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 1$ і $x_1 = 1,1$;

2) дотичної до графіка функції $y = x^2 + 2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Поняття похідної

292. Знайдіть похідну функції:

1) $y = 2x - 1$;

4) $y = \frac{1}{x^7}$;

7) $y = \sqrt[5]{x}$;

2) $y = -8$;

5) $y = x^{1,4}$;

8) $y = \sqrt[7]{x^5}$;

3) $y = x^8$;

6) $y = x^{2,3}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

293. Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0 :

1) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

294. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = x^3 \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

2) $\varphi(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$, $x_0 = 8$.

295. Користуючись означенням, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = 1 - 2x$;

2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

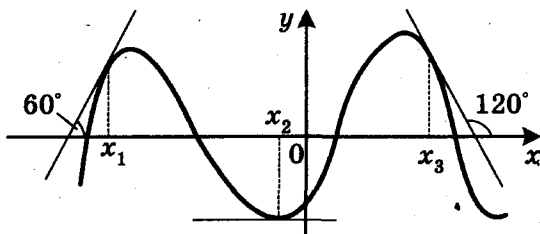


Рис. 7

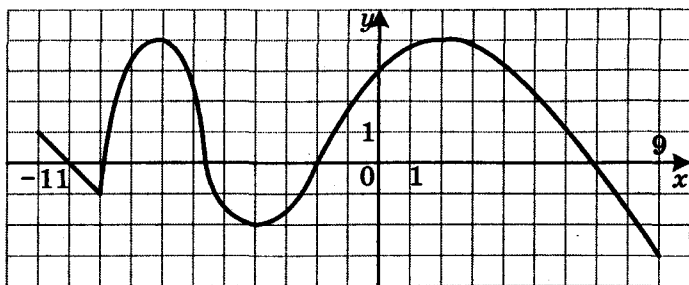


Рис. 8

296. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 :

1) $f(x) = x^5$, $x_0 = 1$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^6}$, $x_0 = -2$;

2) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 625$; 4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

297. Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 7) значення $f'(x_1)$, $f'(x_2)$ і $f'(x_3)$.

298. Дотична до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k . Знайдіть x_0 , якщо:

1) $f(x) = x^5$, $k = \frac{1}{125}$; 2) $f(x) = \cos x$, $k = -\frac{1}{2}$.

299. На рисунку 8 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-11; 9]$. Укажіть точки, у яких похідна дорівнює нулю, і точки, у яких похідна не існує.

300. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = \frac{1}{t^2}$. Знайдіть $s'(6)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

Правила обчислення похідних

301. Знайдіть похідну функції:

1) $y = 3x^7 - 6x^5 - 4x^2 + 17$; 4) $y = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$;

2) $y = \frac{1}{3}x^6 - 8\sqrt{x} + 2x$; 5) $y = \frac{x^3}{3} + \sqrt{3}\sin x - \cos\frac{\pi}{3} - 3x^2$;

3) $y = x - \frac{4}{x}$; 6) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

302. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$; 4) $y = (x^2 - 3x + 1)(x^4 - 3x + 2)$;
 2) $y = \sqrt{x}(3x + 2)$; 5) $y = x^2 \cos x$;
 3) $y = (\sqrt{x} + 1)(3 - 2\sqrt{x})$; 6) $y = 3x \operatorname{tg} x$.

303. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = \frac{3x - 7}{5 - 2x}$; 3) $y = \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$; 5) $y = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$;
 2) $y = \frac{x^2 + 5x}{x - 3}$; 4) $y = \frac{\sqrt{x}}{4x - 1}$; 6) $y = \frac{3 \cos x}{x^3}$.

304. Знайдіть похідну функції:

- 1) $y = (3 - x)^5$; 4) $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$; 7) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x}$;
 2) $y = \frac{1}{(x^2 - 3x)^3}$; 5) $y = \cos 6x$; 8) $y = \frac{\sin 2x}{1 - x}$;
 3) $y = \sqrt{2x - 1}$; 6) $y = \sin^3 x$; 9) $y = x^2 \cos \frac{1}{x}$.

305. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 :

- 1) $f(x) = \cos^4 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{9}$; 2) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 5x}$, $x_0 = -1$.

306. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 3t^2 - 5t + 8$ (час t вимірюють у секундах, переміщення x — у метрах). Знайдіть швидкість руху в момент часу $t_0 = 4$ с.

307. Матеріальна точка масою 4 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 3t^2 + 2$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть імпульс $P(t) = mv(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 5$ с.

308. Знайдіть у точках $x_1 = 1$ і $x_2 = -2$ похідну функції:

- 1) $f(x) = x^2 - 2|x| - 3$; 2) $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

Рівняння дотичної

309. Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , якщо:

- 1) $f(x) = x^3 - 5x$, $x_0 = 2$; 3) $f(x) = \sqrt{x - 3}$, $x_0 = 4$;
 2) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$, $x_0 = -2$; 4) $f(x) = \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

310. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ у точці його перетину з віссю ординат.
311. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x-4}{x^2-2}$ у точці його перетину з віссю абсцис.
312. Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції $f(x) = x^4 - 4x^2 - 8$.
313. Знайдіть таку точку графіка функції $f(x) = x^3 - 26x + 4$, що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
314. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 4x + 6$, яка паралельна прямій $y = 4x + 7$.
315. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x-3}{4-x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$. Чи існують прямі, паралельні знайденій дотичній, які також є дотичними до графіка даної функції?
316. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^3 - x^2 + 6x - 2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.
317. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 + 1$, яка проходить через точку $A(1; 1)$.
318. При яких значеннях b і c парабола $y = x^2 + bx + c$ дотикається до прямої $y = 3x - 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$?

Ознаки зростання і спадання функції

319. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^3 - 18x$;

4) $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$;

2) $f(x) = 1 + 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$;

5) $f(x) = x + \frac{5}{x}$;

3) $f(x) = 0,2x^5 - x^3 + 2x - 9$;

6) $f(x) = \frac{x^2 - 3,5x}{x+2}$.

320. На рисунку 9 зображено графік похідної функції f , диференційовної на \mathbb{R} . Укажіть проміжки зростання функції f .

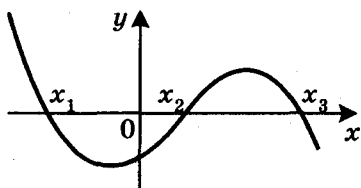


Рис. 9

321. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$;

2) $f(x) = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

322. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$ є зростаючою.

323. Знайдіть, при яких значеннях параметра a зростає на \mathbb{R} функція:

1) $f(x) = (a-2)x^2 + 4x - 9$; 2) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + 4x - 10$.

324. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = \frac{1}{3}(a-2)x^3 + 2x^2 - 9x + 3$ спадає на \mathbb{R} ?

325. Розв'яжіть рівняння $x^7 + 6x = \sin 5x$.

Точки екстремуму функції

326. Знайдіть точки максимуму і точки мінімуму функції:

1) $f(x) = 2x^6$;

3) $f(x) = x^3 - 12x - 2$;

2) $f(x) = 10x - x^2$;

4) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 11$.

327. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 11$;

2) $f(x) = (x+1)^2(x-3)^2$.

328. Визначте, чи має дана функція точки екстремуму:

1) $f(x) = 2x^7$; 2) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$; 3) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$; 4) $f(x) = \cos x - x$.

329. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$;

2) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$;

4) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$.

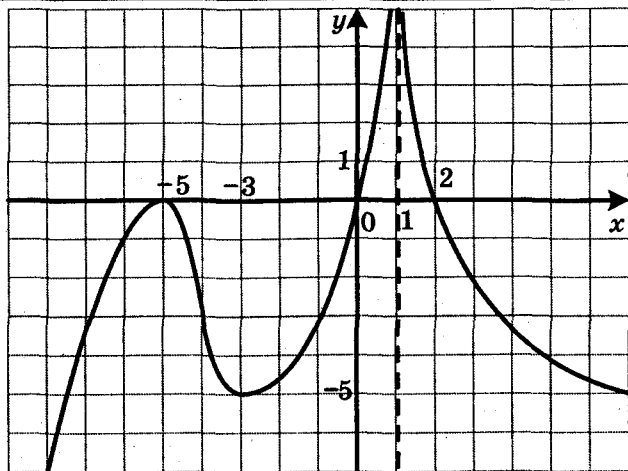


Рис. 10

330. На рисунку 10 зображено графік похідної функції f , визначеної на \mathbb{R} . Укажіть:

- 1) критичні точки функції f ;
- 2) точки мінімуму та точки максимуму функції f .

331. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x^2\sqrt{4-x}$; 2) $f(x) = \sin 3x + \frac{3}{2}x$.

332. Знайдіть, при яких значеннях параметра a функція $f(x) = \sin^2 x - (2a+1)x$:

- 1) не має критичних точок;
- 2) не має точок екстремуму.

333. При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 5$ є точкою мінімуму функції $y = \frac{1}{3}x^3 - (a+1)x^2 + (a^2+2a)x - 6$?

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

334. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $[-1; 3]$; 3) $f(x) = x^6 + 2x^2 - 3$, $[-2; -1]$;

2) $f(x) = 1 - 3x^2 - x^3$, $[-1; 2]$; 4) $f(x) = \frac{x^2+5}{x-2}$, $[3; 6]$.

335. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \sqrt{8+2x-x^2}$, $[-1; 2]$;

2) $f(x) = (x+3)^3(x-1)^2$, $[-4; 2]$;

3) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$, $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

336. Подайте число 50 у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.

337. Знайдіть таке додатне число, що різниця між потроєним квадратом цього числа та його подвоєним кубом набуває найбільшого значення.

338. У півколо радіуса $\sqrt{5}$ см вписано прямокутник найбільшого периметра. Знайдіть сторони прямокутника.

339. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^2 - 6|x| + 5$ на відрізку $[-1; 4]$.

Друга похідна. Поняття опуклості функції

340. Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$; 3) $y = \frac{x^2 - 4}{x}$; 5) $y = (5x - 2)^4$;

2) $y = 3\sin \frac{x}{3}$; 4) $y = x \cos x$; 6) $y = (x - 1)^2 \sin x$.

341. Тіло масою 2 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3 - 2t + 3$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть силу $F(t) = ma(t)$, яка діє на тіло через 5 с після початку руху.

342. Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

1) $f(x) = 7x^9 - 27x^8 + 4x - 2$; 2) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$.

Побудова графіків функцій

343. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$; 4) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$;

2) $f(x) = 4 - 3x^2 - x^4$; 5) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 8}$;

3) $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$; 6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

344. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x - \sqrt{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$; 3) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

Варіант 2

Множини. Операції над множинами

1. Задайте переліком елементів множину A , якщо:
1) $A = \{x \mid 4x + 11 = 0\}$; 2) $A = \{x \mid (x-3)(x^2-9) = 0\}$.
2. Чи є рівними множини A і B , якщо:
1) $A = \{3, 5\}$, $B = \{5, 3\}$;
2) $A = \{(3; 5)\}$, $B = \{(5; 3)\}$;
3) $A = \{x \mid x^2 + 4 = 0\}$, $B = \{\emptyset\}$;
4) A — множина рівносторонніх трикутників, B — множина трикутників із кутом 60° ?
3. Які з поданих тверджень є правильними:
1) $\{9\} \in \{2, 7, 9\}$; 3) $\{7\} \subset \{2, 7, 9\}$; 5) $\emptyset \in \{2, 7, 9\}$;
2) $2 \in \{2, 7, 9\}$; 4) $7 \subset \{2, 7, 9\}$; 6) $\emptyset \subset \{2, 7, 9\}$?
4. Нехай B — множина цифр числа 5658, C — множина цифр числа x . Чи є правильним твердження, що $B \subset C$, якщо:
1) $x = 856$; 2) $x = 656\ 565$; 3) $x = 876$; 4) $x = 5555$?
5. Запишіть усі підмножини множини $\{10, 11, 12\}$.
6. Які з поданих тверджень є правильними:
1) $\{5\} \cup \{5, 6\} = \{5, 6\}$; 3) $\{5\} \cap \{5, 6\} = \{5\}$;
2) $\{5\} \cap \{5, 6\} = 5$; 4) $\{5\} \cup \{5, 6\} = \{5\}$?
7. Знайдіть $A \cap B$, якщо:
1) A — множина дільників числа 36, B — множина чисел, кратних числу 12;
2) A — множина парних чисел, B — множина простих чисел;
3) A — множина одноцифрових чисел, B — множина чисел, кратних числу 10.
8. Знайдіть $A \cap B$ і $A \cup B$, якщо:
1) A — множина цифр числа 6694, B — множина цифр числа 41 686;
2) A — множина дільників числа 15, B — множина дільників числа 20;
3) A — множина прямокутників, B — множина квадратів.
9. Дано множини $A = \{x \mid x^2 - 25 = 0\}$ і $B = \{x \mid (x+5)(x-4) = 0\}$. Знайдіть: 1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$.

10. На діаграмі Ейлера (рис. 11) зображено множини A , B і C . Заштрихуйте множини:

- 1) $(C \cup B) \cap A$; 3) $(B \setminus A) \cap C$.
2) $(A \cup C) \setminus B$;

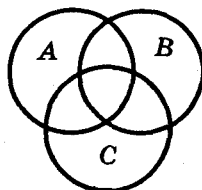


Рис. 11

Функція та її властивості

11. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{x^2}{|x| - 8}$;

7) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} - \frac{5x+2}{x^2-7x+12}$;

2) $f(x) = \frac{15}{|x|+x}$;

8) $f(x) = \frac{x-6}{\sqrt{|x|-1}}$;

3) $f(x) = \sqrt{x+9} - \sqrt{4-x}$;

9) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{|x|}$;

4) $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{2-x}$;

10) $f(x) = \sqrt{x^2-5x-14} - \frac{3}{x^2-81}$;

5) $f(x) = \sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{5-x}}$;

11) $f(x) = \sqrt{|x|-8} + \frac{1}{\sqrt{x+10}}$;

6) $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{6x+1}{x^2+7x}$;

12) $f(x) = \sqrt{(x-7)^2(1-x)}$.

12. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = 3 - x^2$;

5) $\varphi(x) = \sqrt{x-6} - \sqrt{6-x}$;

2) $\varphi(x) = x^2 - 6x - 9$;

6) $g(x) = \sqrt{4-x^2}$;

3) $g(x) = 5 + |x|$;

7) $h(x) = \frac{3}{x^2+2}$;

4) $f(x) = \sqrt{x^2+9} - 5$;

8) $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$.

13. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$;

3) $f(x) = \frac{x^2-16}{\sqrt{2-x}}$;

2) $f(x) = \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x+2}$;

4) $f(x) = (x-2)\sqrt{x-3}$.

14. На рисунку 12 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) область значень функції;
2) проміжки знакосталості функції;

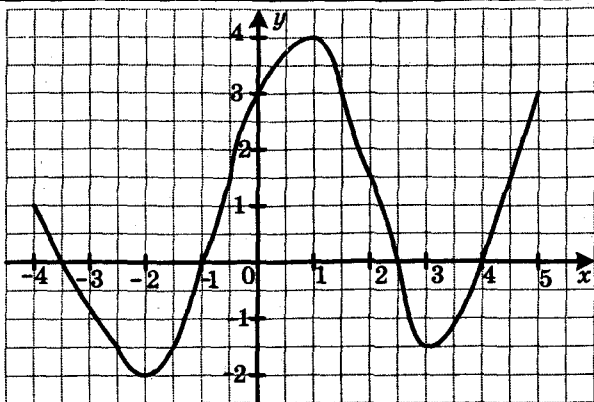


Рис. 12

3) кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a .

15. На рисунку 13 зображено графік функції $y = f(x)$.

Користуючись графіком, знайдіть:

1) проміжки знакосталості функції;

2) кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a .

16. Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = \sqrt{x} - 3$;

2) $y = \sqrt{(x+3)(x-3)^2}$.

17. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = -3x + 4$ на проміжку $[-2; 4]$.

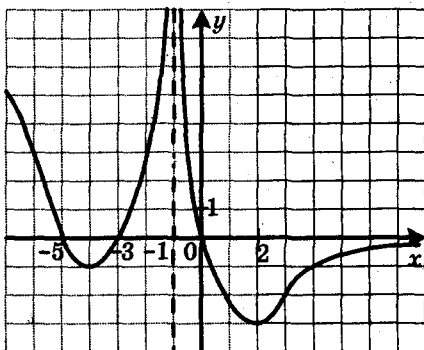


Рис. 13

18. Знайдіть найбільше і найменше значення функції
 $y = x^2 - 6x + 5$ на проміжку:
 1) $[0; 2]$; 2) $[1; 4]$; 3) $[4; 5]$.
19. Знайдіть $\max_M f(x)$ і $\min_M f(x)$, якщо:
 1) $f(x) = -x^2 - 6x$, $M = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$, $M = D(f)$.
20. Знайдіть:
 1) $\max_{\mathbb{R}} (|x+1| - |x+3|)$; 2) $\max_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 36}$.
21. Функція g є такою, що $g(8) = 12$. Знайдіть $g(-8)$, якщо функція g є: 1) парною; 2) непарною.
22. Функція f є такою, що $f(-7) = -8$. Знайдіть $f(-7) - f(7)$, якщо функція f є: 1) парною; 2) непарною.
23. Чи є парною функція, задана формулою $y = x^6$, якщо її область визначення — множина:
 1) $[-9; 9]$; 2) $(-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$; 3) $[-6; 6]$?
24. Доведіть, що є парною функція:
 1) $f(x) = 41$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{|x|} - 2$;
 2) $f(x) = -11x^{10} + 54x^6 - 12$; 4) $f(x) = \frac{|x+17| - |x-17|}{x}$.
25. Доведіть, що є непарною функція:
 1) $f(x) = -5x^7 - 9x$; 3) $f(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}$;
 2) $f(x) = \frac{6}{8+7x} - \frac{6}{8-7x}$; 4) $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$.
26. Дослідіть на парність функцію:
 1) $f(x) = -2x^2 - 6x + 7$; 4) $f(x) = (x+1)^6 - (x-1)^6$;
 2) $f(x) = \frac{5}{x^4 + 4x^2}$; 5) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{4x - 12}$;
 3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$; 6) $f(x) = (x-5)(x+4) + x$;
 7) $f(x) = (x-9)|x+8| + (x+9)|x-8|$;
 8) $f(x) = \frac{5x+4}{x^2-3x+9} - \frac{5x-4}{x^2+3x+9}$.

27. На рисунку 14 зображено частину графіка функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 5]$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

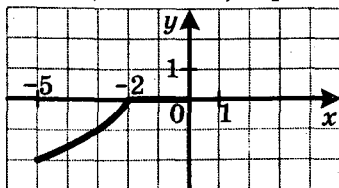


Рис. 14

28. Про функцію f , визначену на множині \mathbb{R} , відомо, що $f(x) = x^2 - 4x$ при $x \geq 0$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.
29. Сума двох чисел дорівнює 12. Якого найбільшого значення може набувати добуток цих чисел?
30. Парна функція f має 9 нулів. Знайдіть $f(0)$.
31. Функція f є такою, що $\min_{[1;6]} f(x) = -5$, $\max_{[1;6]} f(x) = 8$. Знайдіть

$$\min_{[-6;-1]} f(x), \max_{[-6;-1]} f(x), \text{ якщо:}$$

- 1) f — парна функція; 2) f — непарна функція.
32. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = 3x^3 - 8x - 5a$ є непарною?

**Побудова графіків функцій
за допомогою геометричних перетворень**

33. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{6x};$$

$$3) y = (4x - 1)^2 + 2;$$

$$2) y = \sqrt{-\frac{1}{2}x};$$

$$4) y = \left(\frac{1}{4}x - 1\right)^2 + 2.$$

34. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{1}{2x+1};$$

$$2) y = \frac{1}{1-2x};$$

$$3) y = \frac{4}{2x-1} + 2.$$

35. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{3x+2};$$

$$3) y = \sqrt{2-3x};$$

$$5) y = \frac{1}{3}\sqrt{4-2x} - 2;$$

$$2) y = \sqrt{\frac{1}{3}x - 2};$$

$$4) y = \sqrt{3x+2} + 1;$$

$$6) y = -\frac{1}{3}\sqrt{4x-6} + 3.$$

36. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 4x + 3$;

3) $y = |x^2 - 4x + 3|$;

2) $y = x^2 - 4|x| + 3$;

4) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

37. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x} - 1$;

3) $y = \sqrt{|x|} - 1$;

2) $y = |\sqrt{x} - 1|$;

4) $y = |\sqrt{|x|} - 1|$.

38. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$;

3) $y = |x + 2|$;

5) $y = \frac{1}{3}|x|$;

2) $y = |x| + 3$;

4) $y = ||x| - 3|$;

6) $y = |x - 1| + 2$.

39. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{8}{|x|}$;

2) $y = \left| \frac{8}{x} - 3 \right|$;

3) $y = \left| \frac{8}{x-3} \right|$;

4) $y = \frac{8}{|x-3|}$.

40. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2x-1}$;

2) $y = \sqrt{2-3|x|}$.

41. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{|x-5|}$;

2) $y = (|x+1|-3)^2$;

3) $y = \sqrt{|x-1|+1}$.

42. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння:

1) $||x|-3|=a$;

2) $|\sqrt{x}-4|=a$;

3) $|(x+2)^2-5|=a$?

43. При яких значеннях параметра a рівняння $|3|x|-2|=a(x-4)$ має три корені?

Обернена функція

44. Доведіть, що дана функція не є оборотною:

1) $y = -x^2 + 2$;

2) $y = \frac{1}{x^2}$;

3) $y = 4$.

45. Які з даних функцій є оборотними:

1) $y = \frac{1}{x}$;

3) $y = x^2, x \in (-\infty; -1]$;

2) $y = x^2, x \in [-3; 3]$;

4) $y = x^2, x \in (-\infty; 1]$?

46. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 5 - 4x$;

3) $y = 2 - \sqrt{x-3}$;

5) $y = \frac{x}{x+3}$.

2) $y = \frac{6}{1-x}$;

4) $y = x^2, x \in (-\infty; -2]$;

47. Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

1) $y = -2x + 1$;

2) $y = x^2 + 1$, якщо $x \leq 0$.

Метод інтервалів

48. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-1,8)(x+3) \leq 0$;

3) $(4x+3)(2x-3)(x-5) \geq 0$;

2) $(x+6)(x-1)(x-7) > 0$;

4) $(2+x)(x+7)(2-x) > 0$;

5) $(x+7,2)(4-x)(5-x) \leq 0$;

6) $(3x+21)(3-6x)(4x-6)(7-3x) \geq 0$.

49. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x+3}{x-6} < 0$;

3) $\frac{x+5,8}{x-2,3} \geq 0$;

5) $\frac{(x+5)(x+7)}{x-11} \leq 0$;

2) $\frac{x-5}{x+7} > 0$;

4) $\frac{3-x}{x-4} \geq 0$;

6) $\frac{x+6,8}{(7-x)(x-4)} \leq 0$.

50. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2+5x)(x^2-16) \geq 0$;

4) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-3x+2} < 0$;

2) $(x^2-4x+3)(x^2-2x) < 0$;

5) $\frac{x^2+6x-7}{x^2-25} \geq 0$.

3) $(x^2+9x+14)(x^2+5x+7) \geq 0$;

51. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+1)^3(x-1)^2(x-3)^6 < 0$;

2) $(x+1)^3(x-1)^2(x-3)^6 \leq 0$;

3) $(x+3)^3(x-1)^2(x-3)^6(x-4)^5 \geq 0$.

52. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+2)^2(x^2+2x-3) < 0$;

3) $(x+2)^2(x^2+2x-3) > 0$;

2) $(x+2)^2(x^2+2x-3) \leq 0$;

4) $(x+2)^2(x^2+2x-3) \geq 0$.

53. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2-3x-18}{x^2-10x+25} > 0$;

4) $\frac{x^2-3x-18}{x^2-10x+25} \leq 0$;

7) $\frac{x^2+8x+16}{x^2+4x-5} < 0$;

2) $\frac{x^2-3x-18}{x^2-10x+25} \geq 0$;

5) $\frac{x^2+8x+16}{x^2+4x-5} > 0$;

8) $\frac{x^2+8x+16}{x^2+4x-5} \leq 0$.

3) $\frac{x^2-3x-18}{x^2-10x+25} < 0$;

6) $\frac{x^2+8x+16}{x^2+4x-5} \geq 0$;

54. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} \geq 0;$$

$$2) \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} \geq 0.$$

55. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x^2 + 2x - 3}{|x - 5|} \geq 0; \quad 2) \frac{|x - 3|}{x^2 - 5x - 36} \geq 0; \quad 3) \frac{x^2 - 7x + 12}{|x + 3|(x - 2)} \leq 0.$$

56. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{5x - 8}{x + 1} \leq \frac{x - 4}{x + 1};$$

$$3) \frac{x^2 + 7x}{x + 3} \leq \frac{8}{x + 3};$$

$$2) \frac{2x}{3x + 5} \leq 2;$$

$$4) \frac{x^2 - x}{x + 3} \geq 1.$$

57. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{8}{x} - \frac{5}{x + 3} > 3;$$

$$4) \frac{4x + 4}{x^2 + 2x - 8} < \frac{1}{2};$$

$$2) \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \leq \frac{5}{12x};$$

$$5) \frac{4x}{x^2 - 6x + 5} + \frac{3}{x - 1} \geq \frac{2}{x - 5}.$$

$$3) \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - 25} \geq 0;$$

58. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 + 8x + 7} < 0;$$

$$2) (x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 + 8x + 7} > 0;$$

$$3) (x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 + 8x + 7} \leq 0;$$

$$4) (x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 + 8x + 7} \geq 0.$$

59. Розв'яжіть нерівність $\left| \frac{x + 4}{x^2 - 25} \right| \geq \frac{x + 4}{x^2 - 25}$.

60. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

$$1) (x - 2)(x - a) < 0;$$

$$5) (x - a)(x + 4)^2 \leq 0;$$

$$2) (x - 2)(x - a)^2 > 0;$$

$$6) \frac{x - 3}{x - a} \geq 0;$$

$$3) (x - 2)(x - a)^2 \geq 0;$$

$$7) \frac{(x + 3)(x - a)}{x + 3} \geq 0;$$

$$4) (x - a)(x + 4)^2 < 0;$$

$$8) \frac{(x - 1)(x - a)}{x - a} \leq 0.$$

Ділення многочленів. Теорема Безу

61. Доведіть, що многочлен $x^3 - 2x^2 - 2x + 3$ ділиться націло на многочлен $x^2 - x - 3$.
62. Доведіть, що многочлен $x^3 - x - 7$ не ділиться націло на многочлен $x - 2$.
63. Поділивши «куточком» многочлен $2x^4 - 4x^3 + x^2 - 5x - 7$ на многочлен $x^2 + x + 2$, знайдіть неповну частку й остачу.
64. Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ на двочлен $x + 3$.
65. Доведіть, що многочлен, тотожно рівний виразу $(x-4)^{2n} + (x-3)^n - 1$, де $n \in \mathbb{N}$, ділиться націло на многочлен $x^2 - 7x + 12$.
66. При яких значеннях параметра a многочлен $x^3 - 5x^2 + ax + 4$ при діленні на двочлен $x + 2$ дає в остачі 8?
67. Розв'яжіть рівняння $2x^4 - x^3 - 14x^2 + 19x - 6 = 0$.

Метод математичної індукції

68. Доведіть методом математичної індукції, що при будь-якому натуральному n виконується рівність $1 + 11 + 21 + \dots + 10n - 9 = n(5n - 4)$.
69. Доведіть нерівність $5^n > 4n + 3$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
70. Доведіть, що для будь-якого натурального n значення виразу $24^n + 37 \cdot 5^n$ кратне 19.

Степенева функція з натуральним показником

71. Функцію задано формулою $g(x) = x^{12}$. Порівняйте:
- 1) $g(5,8)$ і $g(4,9)$; 3) $g(-0,3)$ і $g(0,3)$;
2) $g(-12,3)$ і $g(-15,1)$; 4) $g(1,4)$ і $g(-2,1)$.
72. Функцію задано формулою $g(x) = x^{25}$. Порівняйте:
- 1) $g(6,2)$ і $g(7,3)$; 3) $g(-7,5)$ і $g(7,5)$.
2) $g(-0,13)$ і $g(-0,17)$;
73. Побудуйте графік функції:
- 1) $y = x^3 + 1$; 2) $y = (x-1)^3$; 3) $y = x^4 + 1$; 4) $y = -\frac{1}{2}x^3$.

74. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{10}$ на проміжку:

- 1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $[2; +\infty)$.

75. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^7$ на проміжку: 1) $[-1; 2]$; 2) $(-\infty; 0]$.

76. Визначте графічно кількість коренів рівняння:

- 1) $x^4 = x + 5$; 2) $x^5 = 5 - x$.

77. Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^6 + 2, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{x} + 2, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x^3, & \text{якщо } x < -1, \\ -\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \geq -1. \end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

78. Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня n функції $y = x^n$, якщо:

- 1) $f(-7) > f(-1)$; 3) $f(-7) < f(-1)$;
2) $f(-7) > f(1)$; 4) $f(-7) < f(1)$?

79. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $6x^{15} + 11x^3 = -17$; 2) $4x^{18} + 7x^2 = 11$.

Степенева функція із цілим показником

80. При якому значенні параметра a графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку $B\left(-2; -\frac{1}{4}\right)$?

81. Дано функцію $f(x) = x^{-11}$. Порівняйте:

- 1) $f(0,2)$ і $f(-10)$; 2) $f(14)$ і $f(12)$; 3) $f(-23)$ і $f(-34)$.

82. Дано функцію $f(x) = x^{-20}$. Порівняйте:

- 1) $f(1,4)$ і $f(2,6)$; 3) $f(-2,8)$ і $f(2,8)$;
2) $f(-5,4)$ і $f(-6,3)$; 4) $f(-25)$ і $f(7)$.

83. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = (x - 4)^0$; 2) $y = (\sqrt{x} - 3)^0$; 3) $y = (x^2 + 6x + 8)^0$.

84. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^{-3} + 1$; 2) $y = (x + 1)^{-3}$; 3) $y = 4x^{-4}$.

85. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-4}$ на проміжку: 1) $\left[\frac{1}{5}; 2\right]$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; 3) $(-\infty; -2]$.

86. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^{-2}, & \text{якщо } x < -1, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq -1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

87. Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:

- 1) $f(-10) < f(-9)$; 3) $f(10) < f(-9)$;
 2) $f(-10) > f(-9)$; 4) $f(10) < f(9)$?

Означення кореня n -го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$

88. Обчисліть:

- 1) $0,7\sqrt[4]{10\,000} - \frac{4}{3}\sqrt[5]{243}$; 2) $\sqrt[2]{512} + 2(\sqrt[7]{7})^7 - 6\sqrt[4]{81}$;
 3) $3(-\sqrt[10]{18})^{10} - 1,4\sqrt[3]{1\,000\,000} + \left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{80}\right)^4$;
 4) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} \cdot \sqrt[3]{\frac{17}{27}} + (-3\sqrt{2})^2 - (-\sqrt[5]{13})^5$.

89. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt[4]{x+7}$; 4) $y = \sqrt[8]{x^2+3x}$; 7) $y = \sqrt[6]{|x|(x-2)}$;
 2) $y = \sqrt[6]{-x^2}$; 5) $y = \sqrt[8]{-6-5x-x^2}$; 8) $y = \sqrt[8]{\frac{x^2-64}{|x|-3}}$;
 3) $y = \sqrt[7]{x-6}$; 6) $y = 12\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x^2-25}}$; 9) $y = 10\sqrt[4]{-|x|} + \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$.

90. Знайдіть область значень функції:

- 1) $y = \sqrt[6]{x} - 8$; 2) $y = 9 - \sqrt[10]{x}$; 3) $y = \sqrt[3]{x} - 6$.

91. Оцініть значення виразу $\sqrt[5]{x}$, якщо:

- 1) $32 \leq x \leq 1024$; 2) $-100\,000 < x < 243$.

92. Оцініть значення x , якщо:

- 1) $-2 \leq \sqrt[3]{x} \leq 6$; 2) $2 < \sqrt[4]{x} < 4$.

93. Порівняйте:

- 1) $\sqrt[5]{6,4}$ і $\sqrt[5]{7,2}$; 2) $\sqrt[9]{-19}$ і $\sqrt[9]{-23}$; 3) 4 і $\sqrt[3]{62}$.

94. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^5 = -25$; 3) $x^6 = -64$; 5) $2x^6 - 36 = 0$;
 2) $x^6 = \frac{1}{729}$; 4) $(x+1)^4 = 16$; 6) $(x^2+x)^5 = 32$.

95. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[5]{x} = \frac{3}{2}$; 3) $\sqrt[4]{x} + 3 = 0$; 5) $\sqrt[6]{3x-2} = 0$;

2) $\sqrt[4]{x} - 4 = 0$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + 3 = 0$; 6) $\sqrt[6]{3x-2} = 2$.

96. Між якими двома послідовними цілими числами розташоване на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{20}$; 2) $\sqrt[4]{90}$; 3) $-\sqrt[4]{40}$?

97. Укажіть усі цілі числа, розташовані на координатній прямій між числами:

1) 5 і $\sqrt[3]{400}$; 2) $\sqrt{-98}$ і $\sqrt[4]{1300}$.

98. Розв'яжіть рівняння:

1) $(16 - x^2)\sqrt[3]{x-3} = 0$; 3) $(|x| - 7)\sqrt[4]{x+3} = 0$.

2) $(x+5)\sqrt[18]{x^2+12x+20} = 0$;

99. Побудуйте графік функції:

1) $y = (\sqrt{x-3})^7$; 2) $y = (\sqrt[3]{x+4})^8$.

100. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[3]{x} + 1$; 2) $y = \sqrt[3]{3+x}$; 3) $y = \sqrt[3]{3-x}$; 4) $y = -\sqrt[3]{|x|} - 1$.

101. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[4]{x-1} > 5$; 2) $\sqrt[5]{4x+1} < 3$; 3) $\sqrt[4]{2x-3} \leq 3$; 4) $\sqrt[8]{x^2-7} \geq \sqrt[8]{6x}$.

102. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $a\sqrt[6]{x} = 0$; 3) $(a-7)\sqrt[8]{x} = a-7$; 5) $ax^6 = 3$;

2) $\sqrt[4]{ax} = 0$; 4) $\sqrt[8]{x} = a+8$; 6) $x^3 = a-4$.

103. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x^7 + \sqrt[4]{x} = y^7 + \sqrt[4]{y}, \\ 7x^2 - y^2 = 24. \end{cases}$$

Властивості кореня n -го степеня

104. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{216 \cdot 125}$; 3) $\sqrt[4]{128 \cdot 0,0000001}$; 5) $\sqrt{0,9^9 \cdot 3^{18}}$;

2) $\sqrt{0,0625 \cdot 256}$; 4) $\sqrt[5]{11^5 \cdot 5^{10}}$; 6) $\sqrt[4]{\frac{10^4 \cdot 3^{16}}{9^4 \cdot 2^8}}$.

105. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$; 3) $\sqrt[3]{0,09} \cdot \sqrt[3]{2,4}$; 5) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{54}}$;

2) $\sqrt[4]{10\,000} \cdot \sqrt[4]{1000}$; 4) $\sqrt[9]{2^5 \cdot 5^4} \cdot \sqrt[9]{5^5 \cdot 2^{22}}$; 6) $\frac{\sqrt[4]{2^7 \cdot 10^3}}{\sqrt[4]{10^{11} \cdot 2^3}}$.

106. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}}; \quad 2) \sqrt[4]{9 + \sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9 - \sqrt{65}}.$$

107. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[4]{4b}; \quad 2) \sqrt[5]{3c}; \quad 3) \sqrt[35]{m^5}; \quad 4) \sqrt[20]{a^{15}b^{10}}.$$

108. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt[3]{40}; \quad 2) \sqrt[5]{128}; \quad 3) \sqrt[4]{162}.$$

109. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) 7\sqrt{2}; \quad 2) 4\sqrt[3]{5}; \quad 3) 10\sqrt[4]{0,24}; \quad 4) 0,1\sqrt[5]{84}; \quad 5) \frac{5}{3}\sqrt[3]{54}.$$

110. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[3]{375} + 5\sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{-192};$$

$$2) 3\sqrt[4]{162n} - 2\sqrt[4]{243n} + \sqrt[4]{512n} - 5\sqrt[4]{1875n}.$$

111. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[3]{6\sqrt[3]{5}}; \quad 2) \sqrt[4]{b^5\sqrt{b^2}}; \quad 3) \sqrt[7]{c^5\sqrt{c^2}}; \quad 4) \sqrt[6]{a^2\sqrt[5]{a^2}}.$$

112. Порівняйте:

$$1) \sqrt[4]{7} \text{ і } \sqrt[8]{50}; \quad 3) \sqrt[3]{18} \text{ і } \sqrt{7}; \quad 5) \sqrt[4]{7} \text{ і } \sqrt[9]{9\sqrt{7}}.$$

$$2) 3\sqrt[3]{3} \text{ і } 2\sqrt[3]{10}; \quad 4) \sqrt[10]{5} \text{ і } \sqrt[15]{11};$$

113. При яких значеннях x виконується рівність:

$$1) \sqrt[6]{x^2 - 16} = \sqrt[6]{x - 4} \cdot \sqrt[6]{x + 4};$$

$$2) \sqrt[12]{(-x + 5)(x - 7)} = \sqrt[12]{x - 5} \cdot \sqrt[12]{7 - x};$$

$$3) \sqrt[9]{(8 - x)(10 - x)} = \sqrt[9]{8 - x} \cdot \sqrt[9]{10 - x} ?$$

114. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[8]{m^8}, \text{ якщо } m \geq 0; \quad 5) \sqrt[4]{625x^{12}y^{28}z^8}, \text{ якщо } x \geq 0, y \leq 0;$$

$$2) \sqrt[4]{n^4}, \text{ якщо } n \leq 0; \quad 6) 2,5x^3 \sqrt[4]{256x^{20}}, \text{ якщо } x \geq 0;$$

$$3) \sqrt[9]{p^9}; \quad 7) \frac{\sqrt[6]{a^{12}b^{18}c^{30}}}{ab^2c^3}, \text{ якщо } b > 0, c < 0;$$

$$4) \sqrt[3]{0,008m^{36}n^{48}}; \quad 8) -0,8y^2 \cdot \sqrt[4]{81x^{44}y^{24}}, \text{ якщо } x \geq 0.$$

115. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[4]{(\sqrt{5} - 6)^4}; \quad 2) \sqrt[3]{(4 - \sqrt{3})^3}; \quad 3) \sqrt[6]{(7 - 5\sqrt{2})^6} + \sqrt[5]{(3 - 5\sqrt{2})^5}.$$

116. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt[12]{(x + 3)^{12}} = 4x; \quad 2) \sqrt[4]{(x - 15)^4} = 15 - x.$$

117. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt[6]{(x-6)^6}; \quad 3) y = \sqrt[4]{(x-2)^3} \cdot \sqrt[4]{x-2};$$

$$2) y = x + \sqrt[4]{x^4}; \quad 4) y = \frac{(x+4)^2}{\sqrt[4]{(x+4)^4}} - 3.$$

118. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{\sqrt{m} + \sqrt{n}}{m-n}; \quad 3) \frac{\sqrt[3]{x-4}}{\sqrt[6]{x-2}}; \quad 5) \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{7}}{\sqrt[8]{5x^2} + \sqrt[8]{35x}}; \quad 7) \frac{x + \sqrt{2x} + 2}{x\sqrt{x-2}\sqrt{2}}$$

$$2) \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}; \quad 4) \frac{\sqrt[4]{x^3 + x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}; \quad 6) \frac{x-27}{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9}$$

119. Внесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt{12a^8}; \quad 5) \sqrt[4]{1250x^{18}y^{21}}; \quad 9) \sqrt[6]{m^7n^7}, \text{ якщо } m \leq 0;$$

$$2) \sqrt[4]{x^{15}}; \quad 6) \sqrt[3]{108a^{10}b^{25}}; \quad 10) \sqrt[6]{a^8b^7}, \text{ якщо } a \leq 0;$$

$$3) \sqrt[3]{-m^{16}}; \quad 7) \sqrt[4]{-81a^{13}}; \quad 11) \sqrt[4]{a^5b^{10}c^{20}}, \text{ якщо } c > 0;$$

$$4) \sqrt[4]{x^{26}y^9}; \quad 8) \sqrt[8]{a^{34}b^{19}}; \quad 12) \sqrt[10]{-p^{21}q^{34}}, \text{ якщо } q \leq 0.$$

120. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) x\sqrt{5}; \quad 6) 5a^3\sqrt[3]{\frac{4}{25a^4}};$$

$$2) y\sqrt{-y^5}; \quad 7) p^{10}\sqrt{p^6}, \text{ якщо } p \leq 0;$$

$$3) b^8\sqrt[8]{b^7}; \quad 8) mn^8\sqrt[8]{m^4n^3}, \text{ якщо } m > 0;$$

$$4) 3a^3\sqrt[3]{2a^2}; \quad 9) m^3n^5\sqrt[6]{m^4n^8}, \text{ якщо } m > 0, n < 0.$$

$$5) m^5\sqrt[5]{7m^2};$$

121. Спростіть вираз:

$$1) (\sqrt[4]{x} + 5)(\sqrt[4]{x} - 5) - (\sqrt[4]{x} + 6)^2; \quad 4) \left(\frac{\sqrt[4]{a} + 3}{\sqrt[4]{a} - 3} + \frac{\sqrt[4]{a} - 3}{\sqrt[4]{a} + 3} \right) \cdot \frac{3\sqrt{a} + 27}{9 - \sqrt{a}};$$

$$2) \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c} - 4} - \frac{\sqrt[6]{c}}{\sqrt[6]{c} - 2}; \quad 5) \frac{5\sqrt[10]{a}}{\sqrt[10]{a} + 3} + \frac{\sqrt[10]{a} - 6}{3\sqrt[10]{a} + 9} \cdot \frac{135}{6\sqrt[10]{a} - 5a}.$$

$$3) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{ab}} + \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}};$$

122. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{4 - \sqrt{15}} \cdot \sqrt[6]{31 + 8\sqrt{15}}; \quad 2) \sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt[4]{9 - 4\sqrt{5}}.$$

123. Доведіть, що значення виразу $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ є раціональним числом.

Степінь з раціональним показником та його властивості

124. Знайдіть значення виразу:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $32^{-\frac{2}{5}}$; 3) $0,0004^{-1,5}$; 4) $81^{0,75}$; 5) $\left(12\frac{1}{4}\right)^{-1,5}$.

125. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^{\frac{5}{8}}$; 3) $y = (x-2)^{3,4}$; 5) $y = (5-4x-x^2)^{\frac{1}{7}}$.

2) $y = x^{-1,2}$; 4) $y = \left(\frac{x+7}{x-4}\right)^{2,1}$;

126. Спростіть вираз:

1) $x^{-1,3} \cdot x^{2,5}$;

6) $(x^4)^{0,8} \cdot (x^{-1,4})^3 : (x^{-1,5})^6$;

2) $x^{\frac{7}{12}} : x^{\frac{5}{8}}$;

7) $\frac{x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{1}{12}}}$;

3) $(x^{-6})^{0,6}$;

8) $\sqrt[3]{a} \cdot a^{\frac{3}{4}}$;

4) $x^{\frac{4}{7}} \cdot x^{\frac{9}{14}} \cdot x^{-\frac{15}{28}}$;

9) $\sqrt[8]{a^5} \cdot a^{\frac{3}{5}}$;

5) $\left(x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{9}}\right)^{\frac{18}{25}}$;

10) $\left(\sqrt[4]{a^{-3}}\right)^{\frac{4}{9}} \cdot \left(a^{\frac{8}{9}}\right)^{-\frac{3}{16}}$.

127. Побудуйте графік функції $y = \left((x-1)^{\frac{1}{9}}\right)^{-9}$.

128. Відомо, що a — додатне число. Подайте вираз у вигляді:

а) квадрата; б) куба; в) дев'ятого степеня:

1) a^{18} ; 2) a^{-24} ; 3) $a^{\frac{1}{3}}$; 4) $a^{3,6}$.

129. Спростіть вираз:

1) $a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{1}{4}} - 2\right) - \left(a^{\frac{1}{4}} + 2\right)^2$;

2) $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right) \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right) - \left(3x^{\frac{1}{3}} + 2y^{\frac{1}{3}}\right) \left(2x^{\frac{1}{3}} - 3y^{\frac{1}{3}}\right)$;

3) $\left(m^{\frac{1}{20}} - n^{\frac{1}{20}}\right) \left(m^{\frac{1}{20}} + n^{\frac{1}{20}}\right) \left(m^{\frac{1}{10}} + n^{\frac{1}{10}}\right) \left(m^{\frac{1}{5}} + n^{\frac{1}{5}}\right)$;

$$4) \left(\frac{1}{b^2} + c^2 \right) \left(b - b^2 c^2 + c \right) - b^5 \left(\frac{2}{b^3} + b^6 \right).$$

130. Знайдіть значення виразу:

$$1) (5^{-0,8})^7 : 5^{-2,6}; \quad 3) 81^{-1,25} \cdot 9^{1,5} \cdot 27^{\frac{2}{3}};$$

$$2) \left(6 \frac{4}{11} \right)^{\frac{11}{20}} \cdot 36^{1,1}; \quad 4) \left(\frac{7 \frac{2}{3} \cdot 2 \frac{2}{3}}{14^{\frac{2}{3}} \cdot 3 \frac{4}{3}} \right)^{-1,5}.$$

131. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^{\frac{4}{5}} = 0,0016; \quad 2) (x-5)^{2,5} = 243.$$

132. Подайте даний вираз у вигляді: а) різниці квадратів; б) різниці кубів і розкладіть його на множники (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

$$1) a^7 - b^{13}; \quad 2) x^{\frac{9}{17}} - y^{\frac{2}{5}}; \quad 3) x^{\frac{1}{4}} - 6.$$

133. Внесіть за дужки спільний множник:

$$1) 3a^{\frac{1}{4}} + a; \quad 3) 14^{\frac{3}{4}} + 21^{\frac{3}{4}}; \quad 5) n^{\frac{1}{6}} + 6n^{\frac{1}{7}};$$

$$2) x^{\frac{3}{7}}y - y^{\frac{3}{7}}x; \quad 4) 8m^{\frac{5}{7}} + 12m^{\frac{3}{14}}; \quad 6) a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{3}{5}} + ab + a^{\frac{7}{9}}b^{\frac{1}{5}}.$$

134. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{x-9x^{\frac{2}{7}}}{x^{\frac{5}{7}}-9}; \quad 4) \frac{x+y}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}}; \quad 7) \frac{a+27}{\frac{2}{a^3}-9};$$

$$2) \frac{6y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}-y^{\frac{2}{3}}}; \quad 5) \frac{b+2b^{0,5}c^{0,5}+c}{bc^{0,5}+b^{0,5}c}; \quad 8) \frac{m^{\frac{5}{8}}+5m^{\frac{1}{4}}}{m-25m^{\frac{1}{4}}};$$

$$3) \frac{4a^{0,5}-3b^{0,5}}{16a-9b}; \quad 6) \frac{3a^{\frac{1}{3}}+a}{\frac{1}{3a^6} + a^6}; \quad 9) \frac{21^{\frac{1}{5}}+3^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{63^5} + 9^{\frac{1}{5}}}.$$

135. Спростіть вираз:

$$1) \frac{2y-5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x-4y} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}};$$

$$2) \frac{x^{\frac{1}{6}}-1}{2x^{\frac{1}{6}}-6} - \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{3}}-6}{2x^{\frac{1}{3}}-6x^{\frac{1}{6}}};$$

$$3) \left(\frac{a^{\frac{1}{6}} + 4}{a^{\frac{1}{6}} - 4} - \frac{a^{\frac{1}{6}} - 4}{a^{\frac{1}{6}} + 4} \right) : \frac{32a^{\frac{1}{2}}}{16 - a^{\frac{1}{3}}}$$

Ірраціональні рівняння

136. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[8]{3x-1} = -1$;

4) $\sqrt{3x-1} = \sqrt{4x+1}$;

2) $\sqrt[3]{3x-1} = -1$;

5) $\sqrt[8]{3x-1} = \sqrt[8]{x^2+8x-7}$;

3) $\sqrt[6]{3x-1} = \sqrt[6]{9-2x}$;

6) $\sqrt{3x-1} = 1-3x$.

137. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+7} = 5-x$;

3) $\sqrt{-x^2+8x-14} = x-4$;

2) $2 + \sqrt{4+2x-x^2} = x$;

4) $\sqrt{12-9x-2x^2} = 3x-2$.

138. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(3x-5)(x-1)} = x-1$;

2) $(x-4)\sqrt{x^2-x-20} = 6x-24$.

139. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2} = 2$;

3) $2\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2} = 1$;

2) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$;

4) $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-4} = 2$.

140. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3x-5} + \sqrt{x-2} = 3$;

3) $\sqrt{x+8} + \sqrt{5-x} = 5$;

2) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$;

4) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4$.

141. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$;

3) $\sqrt{x-4} = \sqrt{x-3} - \sqrt{2x-1}$;

2) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x-6}$;

4) $\sqrt{x-7} = \sqrt{2x-3} - \sqrt{x+4}$.

142. Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0$;

3) $\sqrt{x+2} = 2\sqrt[4]{x+2} + 3$;

2) $3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 2 = 0$;

4) $\sqrt[3]{9-6x+x^2} - \sqrt[3]{3-x} - 2 = 0$.

143. Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2 - 2\sqrt{x^2-24} = 39$;

4) $x^2 + 2x + \sqrt{x^2+2x+8} = 12$;

2) $\sqrt{\frac{2x}{x+1}} - 2\sqrt{\frac{x+1}{2x}} = 1$;

5) $3x^2 - 6x + 2 - \sqrt{x^2-2x+4} = 0$.

3) $x\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} = 4$;

144. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-4+4\sqrt{x-8}} - \sqrt{x-4-4\sqrt{x-8}} = 2$.

145. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{8-x} = 3$;

2) $\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+2)(14-x)} + \sqrt[3]{(14-x)^2} = 4$.

146. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt[5]{y} = 5, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{y} = 14; \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2, \\ x + y = 26; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x - y = 75, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 15; \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} \sqrt{x+3y+1} = 2, \\ \sqrt{2x-y+2} = 7y-6; \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+3} = 7, \\ 3x+2y = 22; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{6}, \\ x - y = 5; \end{cases}$$

8)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4, \\ x^2 + 4x + y^2 - 3y = 0. \end{cases}$$

Іраціональні нерівності

147. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+5} > \sqrt{8-x}$;

3) $\sqrt{x^2-4x+3} < \sqrt{-3-9x}$;

2) $\sqrt{3x-2} < \sqrt{2x-7}$;

4) $\sqrt{x^2+2x+2} \geq \sqrt{-x^2-3x}$.

148. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+18} < 2-x$;

3) $\sqrt{2x-x^2} \leq 5-x$;

2) $\sqrt{2x-3} < x-3$;

4) $\sqrt{2x^2-11x+9} \leq x-3$.

149. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x+14} \geq x+3$;

3) $\sqrt{x^2+7x+12} > 6-x$;

2) $\sqrt{11-5x} \geq x-1$;

4) $\sqrt{-x^2+2x+3} \geq x+1$.

150. Розв'яжіть нерівність:

1) $(6-7x)\sqrt{x} \geq 0$;

3) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} \leq 5$.

2) $\sqrt[5]{x} + 2\sqrt[10]{x} - 8 \geq 0$;

Радіанна міра кута

151. Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

1) 12° ;

2) 72° ;

3) 105° ;

4) 330° .

152. Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює: 1) $\frac{\pi}{30}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $1\frac{3}{4}\pi$; 4) 5π .

153. У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

1) 283° ; 3) 420° ; 5) $\frac{\pi}{9}$; 7) $-\frac{4\pi}{3}$; 9) 3;

2) -215° ; 4) -53° ; 6) $\frac{11\pi}{18}$; 8) $-2,1\pi$; 10) -4 ?

154. Знайдіть усі кути, на які треба повернути точку $P_0(1; 0)$, щоб отримати точку:

1) $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

155. Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих у результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути:

1) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

2) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

Тригонометричні функції числового аргументу

156. Знайдіть значення виразу:

1) $8\cos 90^\circ - 7\cos 180^\circ + 3\sin 270^\circ$;

2) $\sin \pi + 2\cos \pi + 5\operatorname{tg} \pi$;

3) $\sin 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ$;

4) $\frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{2}}{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} 0\right) \cos \frac{\pi}{6}}$;

5) $\sqrt{(2\cos 30^\circ + 1)^2} - \sqrt{(1 - 2\sin 60^\circ)^2}$.

157. Знайдіть значення виразу $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ при:

1) $\alpha = 45^\circ, \beta = 15^\circ$;

2) $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6}$.

158. Чи є можливою рівність:

1) $\sin \alpha = -\frac{7}{8}$; 2) $\cos \alpha = \sqrt[4]{2}$; 3) $\cos \alpha = \frac{\pi}{4}$; 4) $\sin \alpha = 3 - \sqrt{2}$?

159. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $7\cos \alpha - 3$; 2) $5 - \sin^2 \alpha$; 3) $\frac{\cos \alpha (5 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}$.

160. При яких значеннях параметра a можлива рівність:

$$1) \sin x = 4 - a; \quad 2) \cos x = a^2 - 3a + 1?$$

161. Знайдіть область значень виразу:

$$1) \frac{1}{3 + \cos 2x}; \quad 2) 1 - 2|\sin 4x|; \quad 3) \frac{1}{1 - \sin 3x}; \quad 4) 1 - \operatorname{ctg}^4 x.$$

Знаки значень тригонометричних функцій

162. Який знак має:

$$\begin{array}{lll} 1) \sin 230^\circ; & 3) \operatorname{tg} 330^\circ; & 5) \cos 3; \\ 2) \cos 170^\circ; & 4) \operatorname{ctg}(-230^\circ); & 6) \sin \frac{13\pi}{8} ? \end{array}$$

163. Знайдіть значення виразу:

$$1) 4\sin(-60^\circ) - 3\operatorname{ctg}(-60^\circ) + 5\cos(-30^\circ);$$

$$2) \frac{\cos(-45^\circ)\operatorname{tg}(-60^\circ)}{\sin(-30^\circ)};$$

$$3) 2\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3\cos(-\pi) + 6\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

164. Порівняйте з нулем значення виразу:

$$1) \cos 260^\circ \sin 190^\circ; \quad 2) \cos 356^\circ \operatorname{tg}(-100^\circ); \quad 3) \sin 2 \cos 3,5.$$

165. Порівняйте:

$$1) \sin 156^\circ \text{ і } \cos 256^\circ; \quad 3) \sin \frac{7\pi}{4} \text{ і } \cos \frac{11\pi}{6};$$

$$2) \operatorname{ctg} 220^\circ \text{ і } \operatorname{tg}(-220^\circ); \quad 4) \cos 3 \text{ і } \sin 1.$$

166. Кутом якої координатної чверті є кут α , якщо:

$$1) \cos \alpha < 0 \text{ і } \sin \alpha \cos \alpha < 0;$$

$$2) |\cos \alpha| = -\cos \alpha \text{ і } \sin \alpha \cos \alpha > 0?$$

Періодичні функції

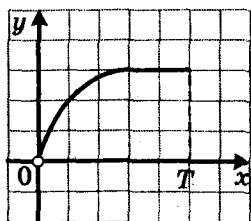
167. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sin 420^\circ; \quad 3) \operatorname{tg} 390^\circ; \quad 5) \cos \frac{23\pi}{4};$$

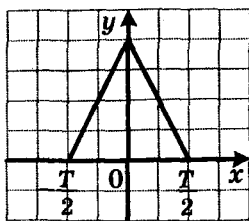
$$2) \cos 600^\circ; \quad 4) \operatorname{ctg}(-780^\circ); \quad 6) \operatorname{tg}\left(-\frac{13\pi}{3}\right).$$

168. Відомо, що число $T = \sqrt{3}$ є періодом функції f . Укажіть ще які-небудь три числа, які є періодами цієї функції.

169. На рисунку 15 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T . Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T; 2T]$.



а



б

Рис. 15

170. Покажіть, що число T є періодом функції f :

1) $f(x) = \cos 2x$, $T = \pi$;

3) $f(x) = \left| \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right|$, $T = 4\pi$;

2) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$, $T = 4$;

4) $f(x) = \sin^6 4x$, $T = \frac{\pi}{4}$.

171. Покажіть, що число $T = \frac{\pi}{2}$ не є періодом функції $f(x) = \operatorname{tg} x$.

172. Знайдіть період функції $f(x) = \sin 3x - \operatorname{ctg} \frac{5x}{2}$.

173. Знайдіть усі значення параметра a , при яких число $T = \frac{4\pi}{5}$ є періодом функції $f(x) = \sin ax$.

Властивості та графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

174. На проміжку $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$ укажіть:

1) нулі функції $y = \cos x$;

2) значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найбільшого і найменшого значень.

175. Порівняйте:

1) $\sin \frac{13\pi}{7}$ і $\sin \frac{15\pi}{8}$;

4) $\cos \frac{19\pi}{12}$ і $\cos \frac{23\pi}{12}$;

2) $\sin (-178^\circ)$ і $\sin (-179^\circ)$;

5) $\cos 271^\circ$ і $\cos 272^\circ$;

3) $\sin 4,5$ і $\sin 4$;

6) $\cos (-8)$ і $\cos (-9)$.

176. Чи є можливою рівність:

1) $\sin \alpha = \sqrt{2} \sin 46^\circ$;

2) $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 59^\circ$?

177. Дослідіть на парність функцію:

$$1) f(x) = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$3) f(x) = \frac{x^4 + \cos x}{x^2 - 4};$$

$$2) f(x) = \frac{x \sin^2 x}{2 + \cos x};$$

$$4) f(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

178. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sin x + 2;$$

$$3) y = -\sin \frac{x}{2};$$

$$5) y = 3 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2.$$

$$2) y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$4) y = 3 \sin x;$$

179. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \cos x - 1,5; \quad 3) y = \cos 2x; \quad 5) y = -\frac{1}{3} \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1,5.$$

$$2) y = \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right); \quad 4) y = -\frac{1}{3} \cos x;$$

180. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sin \left|x + \frac{\pi}{6}\right|;$$

$$3) y = \cos \left(|x| - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$2) y = \frac{1}{2} \cos \left|x + \frac{\pi}{4}\right|;$$

$$4) y = \left| \sin \left|\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right| \right|.$$

181. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sin x + (\sqrt{\sin x})^2;$$

$$3) y = \frac{\sin x + |\sin x|}{\sin x}.$$

$$2) y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x};$$

Властивості та графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$

182. На проміжку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ укажіть:

1) нулі функції $y = \operatorname{tg} x$;

2) числа, які не належать області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$.

183. Порівняйте:

$$1) \operatorname{tg} \frac{19\pi}{10} \text{ і } \operatorname{tg} \frac{23\pi}{12};$$

$$4) \operatorname{ctg} \left(-\frac{21\pi}{10}\right) \text{ і } \operatorname{ctg} \left(-\frac{19\pi}{9}\right);$$

$$2) \operatorname{tg} (-94^\circ) \text{ і } \operatorname{tg} (-92^\circ);$$

$$5) \operatorname{ctg} 286^\circ \text{ і } \operatorname{ctg} 288^\circ;$$

$$3) \operatorname{tg} 4 \text{ і } \operatorname{tg} 4,5;$$

$$6) \operatorname{ctg} (-7) \text{ і } \operatorname{ctg} (-6,5).$$

184. Порівняйте:

$$1) \operatorname{ctg} 48^\circ \text{ і } \operatorname{tg} 48^\circ; \quad 2) \operatorname{tg} 56^\circ \text{ і } \operatorname{ctg} 27^\circ; \quad 3) \operatorname{ctg} 38^\circ \text{ і } \sin 85^\circ.$$

185. Чи є можливою рівність:

$$1) \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} 25^\circ; \quad 2) \sin \alpha = \operatorname{tg} 40^\circ ?$$

186. Дослідіть на парність функцію:

$$1) f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x; \quad 2) f(x) = \frac{x^5 + \operatorname{tg} x}{x^2 - 36}.$$

187. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right); \quad 3) y = \operatorname{ctg} \frac{2x}{3};$$

$$2) y = 3 \operatorname{tg} x - 2; \quad 4) y = -2 \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

188. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \operatorname{tg} 3|x|; \quad 2) y = |\operatorname{ctg} x| - \operatorname{ctg} x.$$

Співвідношення між тригонометричними функціями
одного й того самого аргументу

189. Спростіть вираз:

$$1) (\sin 5\beta - 1)(\sin 5\beta + 1); \quad 4) \frac{\operatorname{ctg} 3x \sin 3x}{1 + \operatorname{tg}^2 3x};$$

$$2) \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{\sin^2 5\beta}; \quad 5) \cos^2 4\alpha (\operatorname{tg} 4\alpha + \operatorname{ctg} 4\alpha);$$

$$3) \operatorname{ctg}^2 2\alpha + \operatorname{tg} 6\alpha \operatorname{ctg} 6\alpha; \quad 6) \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha (\cos^2 2\alpha - 1)}{\sin^2 2\alpha}.$$

190. Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

$$1) \cos \alpha = -\frac{1}{5} \text{ і } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}; \quad 3) \sin \alpha = \frac{1}{6} \text{ і } \operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{35} ?$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = 20 \text{ і } \operatorname{ctg} \alpha = -0,05;$$

191. Обчисліть значення тригонометричних функцій кута α , якщо:

$$1) \cos \beta = \frac{3}{4} \text{ і } \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi; \quad 2) \operatorname{tg} \beta = -3 \text{ і } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi.$$

192. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\cos^3 6\alpha + \sin^3(-6\alpha)}{1 + \sin 6\alpha \cos(-6\alpha)} = \cos 6\alpha - \sin 6\alpha;$$

$$2) \cos^4 3\beta - \sin^4(-3\beta) - 2 \cos^2 3\beta = -1;$$

$$3) \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha};$$

$$4) \cos^6 2x + \sin^6 2x + \sin^2 2x \cos^2 2x = \cos^4 2x + \sin^4 2x;$$

$$5) \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$6) \frac{1 + \sqrt{10} \cos \alpha}{\sqrt{10} \sin \alpha + 3} = \frac{\sqrt{10} \sin \alpha - 3}{1 - \sqrt{10} \cos \alpha};$$

$$7) \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha.$$

193. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

$$1) \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha; \quad 3) 3 \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$2) 3 \cos^2 \alpha - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha; \quad 4) 3 \cos^2 \alpha - 4 \sin \alpha.$$

194. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{4 \sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + 4 \sin \alpha}, \text{ якщо } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3};$$

$$2) \frac{7 \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{5 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha}, \text{ якщо } \operatorname{tg} \alpha = -2.$$

195. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \cos 3x \operatorname{tg} 3x; \quad 2) y = \cos^2 \sqrt{x} + \sin^2 \sqrt{x}.$$

196. Спростіть вираз $\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{3}} + \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{3}}$, якщо $3\pi < \alpha < \frac{9}{2}\pi$.

Формули додавання

197. Спростіть вираз:

$$1) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right); \quad 3) \frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}.$$

$$2) 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha;$$

198. Спростіть вираз:

$$1) \cos 6\alpha \cos 4\alpha - \sin 6\alpha \sin 4\alpha;$$

$$2) \sin 14^\circ \cos 31^\circ + \cos 14^\circ \sin 31^\circ;$$

$$3) \cos(24^\circ + \alpha) \cos(24^\circ - \alpha) + \sin(24^\circ + \alpha) \sin(24^\circ - \alpha);$$

$$4) \frac{\sin 21^\circ \cos 28^\circ + \cos 21^\circ \sin 28^\circ}{\cos 18^\circ \cos 31^\circ - \sin 18^\circ \sin 31^\circ};$$

$$5) \frac{\operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{tg} 47^\circ}{1 + \operatorname{tg} 2^\circ \operatorname{tg} 47^\circ};$$

$$6) \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}.$$

199. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\sin(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha \sin\beta}{2\cos\alpha \cos\beta - \cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta);$$

$$2) \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha.$$

200. Знайдіть $\operatorname{ctg} 75^\circ$.

201. Дано: $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть $\cos(\alpha + 45^\circ)$.

202. Дано: $\cos\alpha = 0,8$, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$,
 $180^\circ < \beta < 270^\circ$. Знайдіть $\sin(\alpha - \beta)$.

203. Знайдіть найменше значення виразу:

$$1) \cos\alpha - \sin\alpha;$$

$$2) 8\cos\alpha - 15\sin\alpha.$$

204. Дано: $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{7\pi}{6}$. Знайдіть $\sin\alpha$.

205. Дано: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$, $\sin\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Знайдіть $\alpha + \beta$.

206. Побудуйте графік функції $y = \frac{\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} 2x}$.

Формули зведення

207. Обчисліть:

$$1) \sin \frac{5\pi}{3};$$

$$2) \operatorname{tg} 1050^\circ;$$

$$3) \cos \frac{43\pi}{4}.$$

208. Знайдіть значення виразу:

$$1) 2 \sin 210^\circ + \operatorname{tg} 240^\circ + \operatorname{ctg} 120^\circ + 6 \cos 450^\circ;$$

$$2) \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) \cos \frac{19\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right);$$

$$3) \sin 113^\circ \cos 323^\circ + \cos 247^\circ \cos 307^\circ;$$

$$4) \frac{\cos 107^\circ \cos 185^\circ - \sin 253^\circ \sin 5^\circ}{\sin 143^\circ \cos 165^\circ + \cos 37^\circ \sin 15^\circ}.$$

209. Спростіть вираз:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi - \alpha) - \sin(2\pi - \alpha);$$

$$2) \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 4\pi) \cos(3\pi - \alpha);$$

$$3) \frac{\sin(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha)};$$

$$4) \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(3\pi - \alpha)} + \sin(-\alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) \right)^2 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$$

210. Знайдіть значення виразів $\cos(\pi + \alpha)$ і $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, якщо

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4} \text{ і } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

211. Спростіть вираз:

$$1) \operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ + \dots + \operatorname{tg} 165^\circ;$$

$$2) \operatorname{ctg} 12^\circ \operatorname{ctg} 13^\circ \operatorname{ctg} 14^\circ \dots \operatorname{ctg} 78^\circ.$$

212. Доведіть тотожність:

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 1.$$

Формули подвійного, потрійного та половинного аргументів

213. Знайдіть значення виразу:

$$1) 2\sin^2\frac{\pi}{8} - 1; \quad 2) \frac{2\operatorname{tg}75^\circ}{\operatorname{tg}^275^\circ - 1}; \quad 3) (\cos^27,5^\circ - \sin^27,5^\circ)\sin15^\circ.$$

214. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sin12\alpha}{\cos6\alpha};$$

$$4) \cos\frac{2\alpha}{3} \sin\frac{2\alpha}{3} \cos\frac{4\alpha}{3};$$

$$2) \frac{\cos5\alpha}{\cos\frac{5\alpha}{2} + \sin\frac{5\alpha}{2}};$$

$$5) \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{6} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{3}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{6}};$$

$$3) 1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 3\alpha\right);$$

$$6) \frac{\operatorname{tg}8\alpha(1 - \operatorname{tg}^24\alpha)}{1 + \operatorname{tg}^24\alpha}.$$

215. Подайте у вигляді добутку вираз:

$$1) 1 + \cos4\beta; \quad 2) 1 - \cos\frac{\gamma}{3}; \quad 3) 1 + \sin\frac{4\pi}{9}; \quad 4) 1 - \sin8\alpha.$$

216. Понизьте степінь виразу:

$$1) \sin^25\alpha; \quad 2) \cos^212x; \quad 3) \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + 20^\circ\right); \quad 4) \sin^2\left(\frac{\pi}{10} - \beta\right).$$

217. Дано: $\cos\alpha = 0,6$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Знайдіть:

$$1) \sin2\alpha;$$

$$2) \cos2\alpha;$$

$$3) \operatorname{tg}4\alpha.$$

218. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Знайдіть:

$$1) \sin2\alpha;$$

$$2) \cos2\alpha;$$

$$3) \operatorname{tg}2\alpha.$$

219. Доведіть тотожність:

$$1) 2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1;$$

$$3) \frac{1 + \cos 2\alpha - \cos \alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha;$$

220. Спростіть вираз $\sqrt{0,5 - 0,5 \cos 4\alpha}$, якщо $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

221. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 5\alpha}{\cos \alpha};$$

$$3) \frac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right)};$$

$$2) \frac{\sin^2 2\alpha - 4\cos^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4\cos^2 \alpha - 4};$$

$$4) \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

222. Доведіть, що $\cos 3\gamma \cos 6\gamma \cos 12\gamma = \frac{\sin 24\gamma}{8\sin 3\gamma}$.

223. Доведіть тотожність $\frac{\cos 9\alpha - \cos^3 3\alpha}{\sin 9\alpha + \sin^3 3\alpha} = -\operatorname{tg} 3\alpha$.

224. Знайдіть значення виразу $\sin 20^\circ (4\cos^2 20^\circ - 1)$.

**Формули для перетворення суми, різниці та добутку
тригонометричних функцій**

225. Перетворіть у добуток:

$$1) \sin 20^\circ + \sin 50^\circ;$$

$$4) \cos 14\alpha - \cos 6\alpha;$$

$$2) \sin 13\alpha - \sin 7\alpha;$$

$$5) \cos\left(\beta + \frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\beta - \frac{\pi}{10}\right);$$

$$3) \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9};$$

$$6) \sin\left(4\alpha - \frac{5\pi}{6}\right) - \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

226. Перетворіть у добуток:

$$1) \sin 40^\circ + \cos 70^\circ;$$

$$2) \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{10};$$

$$3) \sin 3\beta - \cos \beta.$$

227. Перетворіть у добуток:

$$1) 1 + 2\cos \alpha;$$

$$2) \sqrt{3} - 2\sin \alpha.$$

228. Доведіть тотожність:

$$1) \cos 5\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 12\alpha = 4\cos \frac{3\alpha}{2} \cos 2\alpha \cos \frac{17\alpha}{2};$$

$$2) \frac{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$3) \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$4) \cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

229. Спростіть вираз:

$$1) \frac{(\sin \alpha + \sin 5\alpha)(\cos 5\alpha - \cos \alpha)}{1 - \cos 6\alpha};$$

$$2) \left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha} \right) \cdot \frac{\sin 4\alpha + \sin 8\alpha}{\sin \alpha};$$

$$3) (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2.$$

230. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)};$$

$$2) \sin^2\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{7\pi}{12} + \alpha\right).$$

231. Доведіть тотожність:

$$1) \cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta;$$

$$2) \cos \alpha - \frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{2\cos \alpha} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right);$$

$$3) 4\cos^2 \alpha - 3 = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right).$$

232. Перетворіть у суму добуток:

$$1) \cos 3\alpha \cos 2\alpha; \quad 3) \sin 15^\circ \cos 40^\circ; \quad 5) \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta);$$

$$2) \sin 5\alpha \sin 3\alpha; \quad 4) \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}; \quad 6) \sin \alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right).$$

233. Доведіть тотожність:

$$1) \sin \alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = 0,5;$$

$$2) \sin 4\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \cos 5\alpha = \sin 6\alpha \cos \alpha;$$

$$3) \sin^2 \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \frac{1}{4}.$$

Рівняння $\cos x = b$

234. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos 6x = 1;$$

$$4) \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$2) \cos 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$5) \cos(2 - 5x) = \frac{1}{2};$$

$$3) \cos \frac{9x}{5} = 0;$$

$$6) \cos \frac{3\pi x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

7) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

9) $2\cos\left(7x - \frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{2} = 0$;

8) $\cos(6x - 5) = \frac{\pi}{8}$;

10) $3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$.

235. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 3x = \frac{3}{4}$;

2) $\cos^2 \frac{x}{7} = \frac{1}{2}$;

3) $8\cos^2 x - 3 = 0$.

236. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

237. Скільки коренів рівняння $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ належать про-міжку $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$?238. Знайдіть усі корені рівняння $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, які задо-вольняють нерівність $-\frac{\pi}{16} < x < \frac{7\pi}{16}$.239. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\cos x = a^2 - 6a + 10$;

2) $(a+3)\cos x = a-4$?

240. Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміж-ку $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$ залежно від значення параметра a .**Рівняння $\sin x = b$**

241. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 8x = 1$;

5) $\sqrt{3} + 2\sin(4 - 9x) = 0$;

2) $\sin \frac{4x}{11} = 0$;

6) $5\sin(4x - 1) - 2 = 0$;

3) $\sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$;

7) $\sin(11x + 3) = \frac{\pi}{2}$;

4) $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$;

8) $\sin(6x - 7) = -\frac{\pi}{8}$.

242. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$;

3) $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$.

2) $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = -1$;

243. Скільки коренів рівняння $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$?

244. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{9\pi x}{4} = 0; \quad 2) \sin(7\pi\sqrt{x}) = 1; \quad 3) \sin \frac{3\pi x^2}{4} = -1.$$

245. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

$$1) (a^2 - 9)\sin x = a - 3; \quad 2) \sin x = 4a - a^2 - 5?$$

246. Визначте кількість коренів рівняння $\sin 3x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$ залежно від значення параметра a .

247. Скільки коренів має рівняння $\sin x (\cos x - a) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ залежно від значення параметра a ?

Рівняння $\operatorname{tg} x = b$ і $\operatorname{ctg} x = b$

248. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \operatorname{tg} 3x = 0; & 4) \operatorname{ctg} 4x = -\sqrt{3}; \\ 2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 1; & 5) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right) = 0; \\ 3) 8\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 = 0; & 6) 2\operatorname{ctg}\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) - 5 = 0. \end{array}$$

249. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\operatorname{ctg}\left(8x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}.$$

250. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 3x = 1$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

251. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\frac{\operatorname{tg} x - a}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$ на проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

252. При яких значеннях параметра a рівняння $(x - a)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ має єдиний корінь?

Функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$

253. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

2) $\cos(2 \operatorname{arctg} 1)$;

3) $\operatorname{tg}\left(5 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $\sin\left(\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arcsin\frac{1}{2}\right)$.

254. Обчисліть:

1) $\sin(\arcsin(-0,2))$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{\pi}{5}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg}\sqrt{3})$.

255. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arccos(4+x)$; 2) $y = \arcsin(3-x^2)$; 3) $y = \operatorname{arccotg}\frac{5}{\sqrt{x-1}}$.

256. Знайдіть область значень функції:

1) $y = 2 \arccos x - \frac{\pi}{6}$; 2) $y = 3 - 4 \operatorname{arctg} 4x$.

257. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{arccotg}(x-2) = \frac{3\pi}{4}$; 2) $\arcsin(4x+3) = -\frac{\pi}{6}$.

258. Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{4}$; 2) $\arcsin\frac{x}{2} > \frac{\pi}{3}$; 3) $\arccos(2x-4) > \frac{5\pi}{6}$.

259. Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\frac{3}{7}\right)$; 3) $\cos(\operatorname{arctg} 4)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$;

2) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{9}\right)$; 4) $\sin(\operatorname{arccotg}(-5))$; 6) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arccotg}\frac{11}{14}\right)$.

260. Побудуйте графік функції $y = \frac{|\arccos x|}{\arccos x}$.

261. Обчисліть:

1) $\sin\left(2 \arccos\frac{5}{6}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 6)$.

Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних

262. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 1 = 0$; 3) $3 \operatorname{ctg}^2 5x - 1 = 0$;

2) $7 \sin^2 3x + 6 \sin 3x - 1 = 0$; 4) $\operatorname{tg}^2 4x - 5 \operatorname{tg} 4x - 6 = 0$.

263. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2\cos^2 \frac{x}{3} + 5\sin \frac{x}{3} + 1 = 0; \quad 5) \operatorname{ctg}^4 2x + 3\operatorname{ctg}^2 2x - 4 = 0;$$

$$2) 5\cos 14x + \cos 7x - 4 = 0; \quad 6) \frac{1}{\cos^2 4x} - 6\operatorname{tg} 4x + 7 = 0;$$

$$3) 2\cos^2 10x - 6\cos^2 5x + 1 = 0; \quad 7) 3\operatorname{ctg}^2 6x - \frac{4}{\sin 6x} + 4 = 0;$$

$$4) 2\operatorname{tg} \frac{3x}{5} - 5\operatorname{ctg} \frac{3x}{5} = 3; \quad 8) 4\cos^2 5x + 3\operatorname{tg}^2 5x - 5 = 0.$$

264. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos 3x - \sin 3x = 0; \quad 3) 4\sin \frac{x}{3} - 7\cos \frac{x}{3} = 0;$$

$$2) \sin 5x - \sqrt{3}\cos 5x = 0; \quad 4) 3\sin^2 \frac{x}{5} - 7\sin \frac{x}{5}\cos \frac{x}{5} + 4\cos^2 \frac{x}{5} = 0.$$

265. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 7\sin^2 \frac{x}{3} - 4\sin \frac{2x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3} = 0; \quad 4) \frac{2\sin x - \cos x}{\cos x + 3\sin x} = \frac{1}{4};$$

$$2) 8\sin^2 2x + 3\sin 4x = 7; \quad 5) 1 + \sin 2x - \cos 2x = 0;$$

$$3) 5\sin^2 3x + 2\sin 6x = 5; \quad 6) 2\sin 3x + 5\cos 3x = 2.$$

266. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 4\sin^2 x = 3 + 2\sin x \sin 3x; \quad 3) \sqrt{10 - 9\operatorname{tg} x} = 3\operatorname{tg} x - 2;$$

$$2) \sin 2x - 3(\sin x + \cos x) - 3 = 0; \quad 4) \sqrt{\cos 2x} = \cos x.$$

267. Знайдіть усі корені рівняння $\sin x \cos x + \sqrt{3}\sin^2 x = 0$, які задовольняють нерівність $-2 < x < 1$.

268. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\sin \frac{x}{4} - \cos \frac{x}{4} = \frac{1}{\sin \frac{x}{4}}.$$

269. При яких значеннях параметра a має корені рівняння

$$\cos^2 x - (3a - 1)\cos x + 9a - 12 = 0 ?$$

270. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить рівно 3 корені рівняння

$$2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x = 0 ?$$

271. Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння

$$\sin^2 x - \left(a - \frac{1}{2}\right)\sin x - \frac{a}{2} = 0 \text{ має на проміжку } \left[\pi; \frac{4\pi}{3}\right):$$

1) один корінь;

2) 2 корені.

**Розв'язування тригонометричних рівнянь
методом розкладання на множники.**

Застосування обмеженості тригонометричних функцій

272. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|---|--|
| 1) $\cos 2x + \cos 6x = 0;$ | 4) $\sin 2x - \sin 7x = 0;$ |
| 2) $\sin 3x + \sin 9x = 0;$ | 5) $\cos x + \cos 5x = 2\cos 3x;$ |
| 3) $\cos 5x - \cos 2x = 0;$ | 6) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 9\operatorname{tg} x - 9 = 0;$ |
| 7) $2\sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x + 2\sin x - \sqrt{3} = 0;$ | |
| 8) $(1 - \sin x)\operatorname{ctg} x + \sin x - 1 = 0.$ | |

273. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|--|--|
| 1) $\cos 4x - \sin 3x = 0;$ | 3) $\sin 2x + \sin 8x = \sqrt{2} \cos 3x;$ |
| 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -1;$ | |
| 4) $\sin x + \sin 7x = \sin 5x + \sin 3x.$ | |

274. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1) $\sin 5x + 2\sin^2 4x = 1;$ | 3) $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1;$ |
| 2) $1 - \cos 4x = \sqrt{2} \sin 2x;$ | |
| 4) $\cos^2 x + \cos^2 5x = \cos^2 2x + \cos^2 4x.$ | |

275. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1) $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \cos 3x;$ | 4) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x;$ |
| 2) $\sqrt{2}(\cos 3x + \sin 3x) = \cos 6x;$ | |
| 5) $\sin 5x \cos 2x = -\sin 3x \cos 6x;$ | |
| 3) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2\cos 5x;$ | |
| 6) $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$ | |

276. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|---|--|
| 1) $\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x - \sin x} = 0;$ | 2) $\frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2\sin x.$ |
|---|--|

277. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 4x \cos x - \sin x - \sqrt{2} \sin 3x = 0$

належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]$?

278. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1) $2\sin \frac{\pi x}{8} = x^2 - 8x + 18;$ | 2) $\cos \frac{2x}{3} + \cos 2x = 2.$ |
|---|---------------------------------------|

279. Розв'яжіть систему рівнянь:

- | | |
|---|--|
| 1) $\begin{cases} x + y = \frac{3\pi}{4}, \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{4}; \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{6}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{4}; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ 2\sin x = \sin y. \end{cases}$ |

Тригонометричні нерівності

280. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.

281. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin \frac{x}{5} > \frac{1}{2}$; 3) $\sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \leq -\sqrt{3}$;

2) $\cos 4x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos \left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\operatorname{ctg} \left(\frac{5x}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \geq 1$.

282. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \operatorname{ctg} x \leq 4$; 3) $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $|\operatorname{tg} x| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

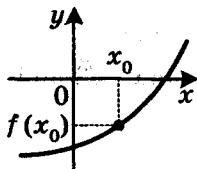
283. Розв'яжіть нерівність:

1) $2\sin^2 \frac{x}{4} < 1,5$; 2) $\sin 4x \cos x - \cos 4x \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

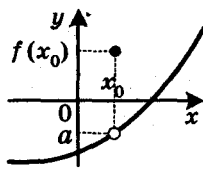
284. Розв'яжіть нерівність $\cos x (2\sin 2x + \sqrt{3}) < 0$.

Означення границі функції в точці та функції, неперервної в точці

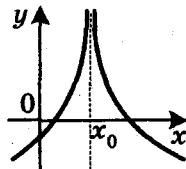
285. Для кожної з функцій, графіки яких зображено на рисунку 16, установіть:

1) чи визначена ця функція в точці x_0 ;

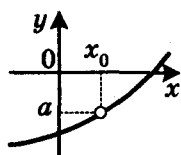
а



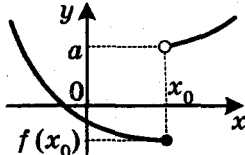
б



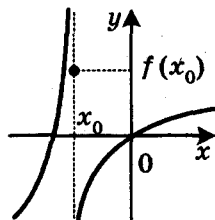
г



д



е



ж

Рис. 16

- 2) чи існує границя функції в точці x_0 ; у разі ствердної відповіді запишіть з використанням відповідної символіки, чому вона дорівнює;
- 3) якщо границя в точці x_0 існує, то чи дорівнює вона значенню функції в цій точці.

286. Побудувавши графік функції f , з'ясуйте, чи є неперервною функція f у точці x_0 :

1) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $x_0 = 12$;

2) $f(x) = \frac{|x+7|}{x+7}$, $x_0 = 4$;

3) $f(x) = \begin{cases} 3x-8, & \text{якщо } x < 2, \\ x^2-6, & \text{якщо } x \geq 2, \end{cases} x_0 = 2$;

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-16}{x-8}, & \text{якщо } x \neq 8, \\ 2, & \text{якщо } x = 8, \end{cases} x_0 = 8$.

287. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \sin 4x$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\sqrt{x}-x}{x-4\sqrt{x}}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+2x-8}{x^2-16}$.

Задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції

288. Знайдіть приріст функції f у точці x_0 , якщо:

1) $f(x) = 4x + 5$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,1$;

2) $f(x) = 3x^2 + x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,2$;

3) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = \frac{\pi}{12}$.

289. Для функції $f(x) = 5 - 3x$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

290. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 4t^2 + 2$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент часу $t_0 = 3$ с.

291. Знайдіть кутовий коефіцієнт:

1) січної графіка функції $y = x^2 + 1$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 1$ і $x_1 = 1,3$;

2) дотичної до графіка функції $y = x^2 + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Поняття похідної

292. Знайдіть похідну функції:

1) $y = 4x + 1$;

4) $y = \frac{1}{x^9}$;

7) $y = \sqrt[3]{x}$;

2) $y = -9$;

5) $y = x^{2.4}$;

8) $y = \sqrt[9]{x^8}$;

3) $y = x^{11}$;

6) $y = x^{-3.1}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^3}}$.

293. Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0 :

1) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{3}$;

2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

294. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = x^2 \sqrt{x}$, $x_0 = 9$;

2) $\varphi(x) = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x}}$, $x_0 = 16$.

295. Користуючись означенням, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = 3x + 7$;

2) $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

296. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 :

1) $f(x) = x^6$, $x_0 = -1$;

3) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $x_0 = 5$;

2) $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $x_0 = 243$;

4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

297. Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 17) значення $f'(x_1)$, $f'(x_2)$ і $f'(x_3)$.

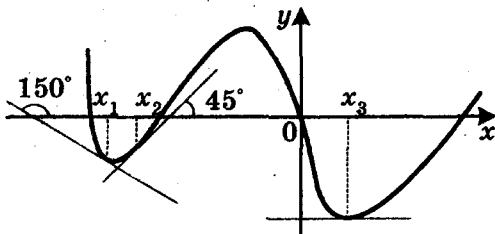


Рис. 17

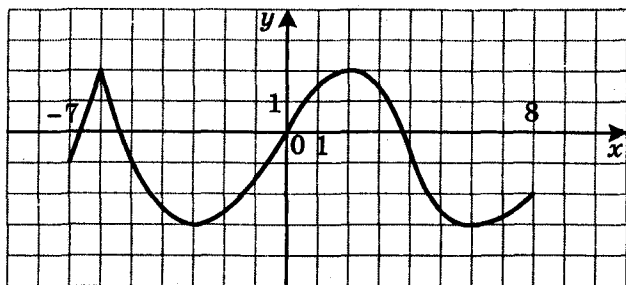


Рис. 18

298. Дотична до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k . Знайдіть x_0 , якщо:

$$1) f(x) = x^3, \quad k = \frac{1}{12};$$

$$2) f(x) = \sin x, \quad k = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

299. На рисунку 18 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-7; 8]$. Укажіть точки, у яких похідна дорівнює нулю, і точки, у яких похідна не існує.

300. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = \frac{1}{t^3}$. Знайдіть $s'(5)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

Правила обчислення похідних

301. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = 4x^6 - 2x^4 + 3x^2 + 6;$$

$$4) y = \frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^2};$$

$$2) y = \frac{1}{4}x^8 + 6\sqrt{x} - 7x;$$

$$5) y = \frac{x^9}{9} + \sqrt{2} \cos x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 2x^4;$$

$$3) y = x^2 + \frac{2}{x};$$

$$6) y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$$

302. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = (x^3 + 4)(x^2 - 3);$$

$$4) y = (x^3 + x^2 - 4)(x^2 - 4x + 1);$$

$$2) y = \sqrt{x}(4x - 3);$$

$$5) y = x^2 \sin x;$$

$$3) y = (\sqrt{x} - 2)(5 - 6\sqrt{x});$$

$$6) y = x^3 \operatorname{ctg} x.$$

303. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = \frac{6x+5}{4-3x};$$

$$3) y = \frac{x+2}{\sqrt{x}};$$

$$5) y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x};$$

$$2) y = \frac{x^2-4x}{x-2};$$

$$4) y = \frac{\sqrt{x}}{2x+1};$$

$$6) y = \frac{2x^2}{\sin x}.$$

304. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = (2x - 7)^6; \quad 4) y = \sqrt[3]{2x^3 + 4x}; \quad 7) y = \sqrt{\cos 3x};$$

$$2) y = \frac{1}{(x^2 + x)^4}; \quad 5) y = \sin \frac{x}{4}; \quad 8) y = \frac{\cos \frac{x}{2}}{x+1};$$

$$3) y = \sqrt{3x - 14}; \quad 6) y = \cos^3 x; \quad 9) y = x^3 \sin \frac{2}{x}.$$

305. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 :

$$1) f(x) = \sin^3 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{12}; \quad 2) f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x}, \quad x_0 = 2.$$

306. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 0,2t^5 - 4t^2 + 6$ (час t вимірюють у секундах, переміщення x — у метрах). Знайдіть швидкість руху в момент часу $t_0 = 2$ с.

307. Матеріальна точка масою 6 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 + 1$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть імпульс $P(t) = mv(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 3$ с.

308. Знайдіть у точках $x_1 = 2$ і $x_2 = -3$ похідну функції:

$$1) f(x) = x^2 - 5|x| + 4; \quad 2) f(x) = |x^2 - 5x + 4|.$$

Рівняння дотичної

309. Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , якщо:

$$1) f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 4x, \quad x_0 = -2; \quad 3) f(x) = \sqrt{x+2}, \quad x_0 = 7;$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x_0 = 2; \quad 4) f(x) = \sin 3x, \quad x_0 = \frac{\pi}{9}.$$

310. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ у точці його перетину з віссю ординат.

311. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x+1}{3-x^2}$ у точці його перетину з віссю абсцис.

312. Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції $f(x) = x^4 - 10x^2 - 6$.

313. Знайдіть таку точку графіка функції $f(x) = \sqrt{3}x^3 - 5$, що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
314. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 5x + 8$, яка паралельна прямій $y = -3x + 5$.
315. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{3-x}{x+4}$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$. Чи існують прямі, паралельні знайденій дотичній, які також є дотичними до графіка даної функції?
316. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.
317. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 1$, яка проходить через точку $B(-1; -1)$.
318. При яких значеннях b і c парабола $y = x^2 + bx + c$ дотикається до прямої $y = -x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$?

Ознаки зростання і спадання функції

319. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^3 - 15x$;

4) $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$;

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6$;

5) $f(x) = x + \frac{3}{x}$;

3) $f(x) = 0,4x^5 - 4x^3 + 16x - 7$;

6) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{4x - 1}$.

320. На рисунку 19 зображено графік похідної функції f , диференційовної на \mathbb{R} . Укажіть проміжки спадання функції f .

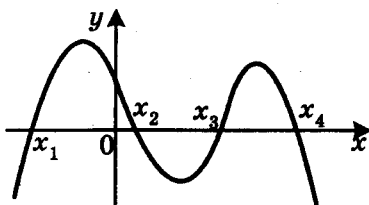


Рис. 19

321. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

$$1) f(x) = \sqrt{2x - x^2}; \quad 2) f(x) = \cos x + \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

322. Доведіть, що функція $f(x) = 6 - 6x + 3x^2 - 2x^3$ є спадною.

323. Знайдіть, при яких значеннях параметра a спадає на \mathbb{R} функція:

$$1) f(x) = (a+3)x^2 - 2x + 7;$$

$$2) f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 3ax - 7.$$

324. При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = \frac{1}{3}(a+3)x^3 - x^2 + 7x - 4$$
 зростає на \mathbb{R} ?

325. Розв'яжіть рівняння $x^9 + 5x + 1 = \cos 4x$.

Точки екстремуму функції

326. Знайдіть точки максимуму і точки мінімуму функції:

$$1) f(x) = -3x^8;$$

$$2) f(x) = x^2 + 12x;$$

$$3) f(x) = x^3 - 27x + 4;$$

$$4) f(x) = -x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 17.$$

327. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = -x^8 + 4x^7 + 8;$$

$$2) f(x) = (x+5)^2(x-4)^2.$$

328. Визначте, чи має дана функція точки екстремуму:

$$1) f(x) = -4x^5; \quad 3) f(x) = \sqrt[3]{x^2};$$

$$2) f(x) = \sqrt[6]{x^5}; \quad 4) f(x) = \sin x + x.$$

329. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = \frac{3x+5}{x-4}; \quad 3) f(x) = \frac{x^3}{x^2+2};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2+5}{2-x}; \quad 4) f(x) = \frac{x^2-6x}{x+2}.$$

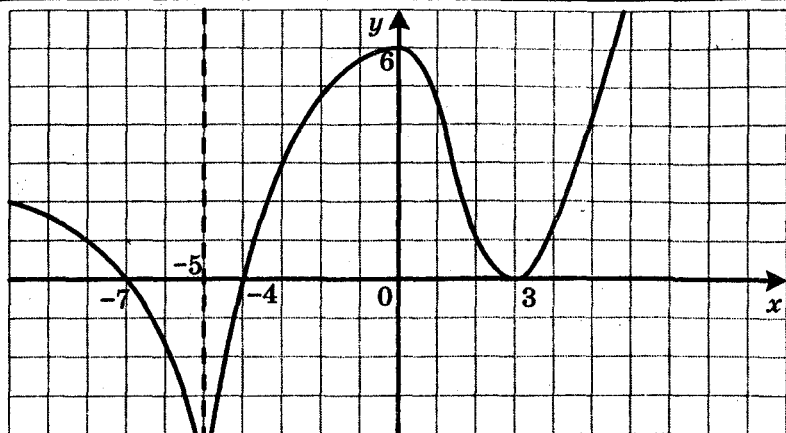


Рис. 20

330. На рисунку 20 зображено графік похідної функції f , визначеної на \mathbb{R} . Укажіть:

- 1) критичні точки функції f ;
- 2) точки мінімуму та точки максимуму функції f .

331. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

- 1) $f(x) = x^2\sqrt{3-x}$;
- 2) $f(x) = \cos 4x - 2\sqrt{2}x$.

332. Знайдіть, при яких значеннях параметра a функція $f(x) = \cos^2 x + (4a - 3)x$:

- 1) не має критичних точок;
- 2) не має точок екстремуму.

333. При яких значеннях параметра a точка $x_0 = -1$ є точкою

максимуму функції $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2a-3}{2}x^2 + (a^2 - 3a)x + 10$?

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

334. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

- 1) $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2$, $[-2; 1]$;
- 3) $f(x) = x^6 + 2x^4 + 4$, $[1; 2]$;

- 2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x$, $[0; 6]$;
- 4) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}$, $[-1; 3]$.

335. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

- 1) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$, $[1; 4]$;

2) $f(x) = (x-3)^3(x+2)^2$, $[-3; 4]$;

3) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$, $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

336. Подайте число 36 у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб їхній добуток був найбільшим.

337. Знайдіть таке додатне число, що різниця між цим числом і подвоєним квадратним коренем із цього числа набуває найменшого значення.

338. У півколо радіуса $2\sqrt{5}$ см вписано прямокутник найбільшого периметра. Знайдіть сторони прямокутника.

339. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ на відрізку $[-3; 1]$.

Друга похідна. Поняття опуклості функції

340. Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = x^4 - 3x^2 + 4x - 6$; 3) $y = \frac{3x+4}{x}$; 5) $y = (4x+1)^6$;

2) $y = 0,5\cos 4x$; 4) $y = x\sin x$; 6) $y = (x+3)^2 \cos x$.

341. Тіло масою 3 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3 - 4t - 2$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть силу $F(t) = ma(t)$, яка діє на тіло через 4 с після початку руху.

342. Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

1) $f(x) = x^{11} + 11x^{10} - 7x - 8$; 2) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Побудова графіків функцій

343. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x^3 - 3x$; 4) $f(x) = \frac{10x}{x^2+25}$;

2) $f(x) = x^4 + 4x^2 - 5$; 5) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$;

3) $f(x) = (x-3)^2(x-1)^2$; 6) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

344. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x - \sqrt{x+1}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$; 3) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

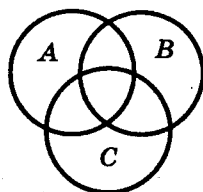
Варіант 3

Множини. Операції над множинами

1. Задайте переліком елементів множини A , якщо:
1) $A = \{x \mid 6x - 3 = 0\}$; 2) $A = \{x \mid (x-4)(x^2-16) = 0\}$.
2. Чи є рівними множини A і B , якщо:
1) $A = \{8, 12\}$, $B = \{12, 8\}$;
2) $A = \{(8; 12)\}$, $B = \{(12; 8)\}$;
3) $A = \{x \mid x^2 + 9 = 0\}$, $B = \{-3, 3\}$;
4) A — множина рівнобічних трапецій, B — множина трапецій, навколо яких можна описати коло?
3. Які з поданих тверджень є правильними:
1) $\{8\} \subset \{4, 6, 8\}$; 3) $4 \in \{4, 6, 8\}$; 5) $\emptyset \subset \{4, 6, 8\}$;
2) $8 \subset \{4, 6, 8\}$; 4) $\{4\} \in \{4, 6, 8\}$; 6) $\{\emptyset\} \in \{4, 6, 8\}$?
4. Нехай A — множина цифр числа 1123, B — множина цифр числа x . Чи є правильним твердження, що $B \subset A$, якщо:
1) $x = 321$; 2) $x = 234$; 3) $x = 2121$; 4) $x = 111\ 111$?
5. Запишіть усі підмножини множини $\{5, 6, 7\}$.
6. Які з поданих тверджень є правильними:
1) $\{0\} \cup \{0, 9\} = \{\{0, 9\}\}$; 3) $\{0\} \cap \{0, 9\} = \{9\}$;
2) $\{0\} \cup \{0, 9\} = \{0, 9\}$; 4) $\{0\} \cap \{0, 9\} = \{0\}$?
7. Знайдіть $A \cap B$, якщо:
1) A — множина дільників числа 42, B — множина чисел, кратних числу 14;
2) A — множина одноцифрових чисел, B — множина чисел, кратних числу 5;
3) A — множина простих чисел, B — множина складених чисел.
8. Знайдіть $A \cap B$ і $A \cup B$, якщо:
1) A — множина цифр числа 53 299, B — множина цифр числа 63 986;
2) A — множина дільників числа 24, B — множина дільників числа 32;
3) A — множина ромбів, B — множина паралелограмів.
9. Дано множини $A = \{x \mid x^2 - 36 = 0\}$ і $B = \{x \mid (x-6)(x+10) = 0\}$. Знайдіть: 1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$.

10. На діаграмі Ейлера (рис. 21) зображено множини A , B і C . Заштрихуйте множину:

- 1) $(A \cup C) \cap B$; 3) $(A \setminus C) \cup B$.
2) $(A \cap B) \setminus C$;



Функція та її властивості

Рис. 21

11. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $f(x) = \frac{x^3}{|x| - 7}$; 7) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}} - \frac{3x-1}{x^2-x-6}$;
2) $f(x) = \frac{13}{x - \sqrt{x^2}}$; 8) $f(x) = \frac{5x+1}{\sqrt{9-|x|}}$;
3) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x}$; 9) $f(x) = \frac{x+3}{|x|-4} - \frac{x}{x^2+x}$;
4) $f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x-3}$; 10) $f(x) = \sqrt{2x^2-5x+2} - \frac{8}{x^2-9}$;
5) $f(x) = \sqrt{x-6} - \frac{4}{\sqrt{5-x}}$; 11) $f(x) = \sqrt{|x|-12} + \frac{1}{\sqrt{x+15}}$;
6) $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{7x+8}{x^2+4x}$; 12) $f(x) = \sqrt{|x+6|(x+1)}$.

12. Знайдіть область значень функції:

- 1) $g(x) = 7 - x^2$; 5) $\varphi(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{-x-4}$;
2) $\varphi(x) = 3 + 4x + x^2$; 6) $\varphi(x) = \sqrt{25-|x|}$;
3) $h(x) = |x| - 6$; 7) $h(x) = \frac{5}{x^2+5}$;
4) $f(x) = \sqrt{x^4+16} + 4$; 8) $f(x) = \frac{3x+2}{x+3}$.

13. Знайдіть нулі функції:

- 1) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$; 3) $f(x) = \frac{x^2-49}{\sqrt{x-5}}$;
2) $f(x) = \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{x-6}$; 4) $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$.

14. На рисунку 22 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 4]$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) область значень функції;

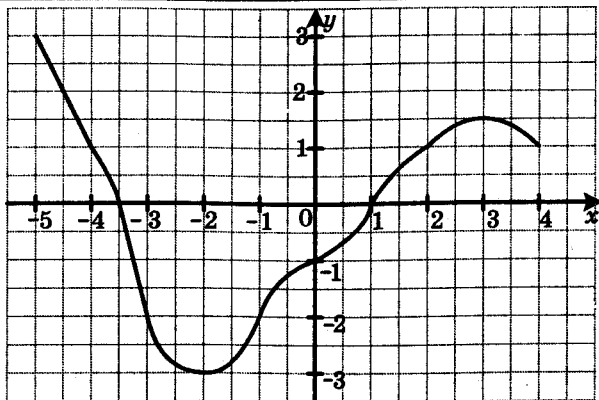


Рис. 22

2) проміжки знакосталості функції;

3) кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a .

15. На рисунку 23 зображено графік функції $y = f(x)$.

Користуючись графіком, знайдіть:

1) проміжки знакосталості функції;

2) кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a .

16. Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = \sqrt{x} - 4$;

2) $y = \sqrt{(x+4)(x-4)^2}$.

17. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = -4x - 1$ на проміжку $[-1; 5]$.

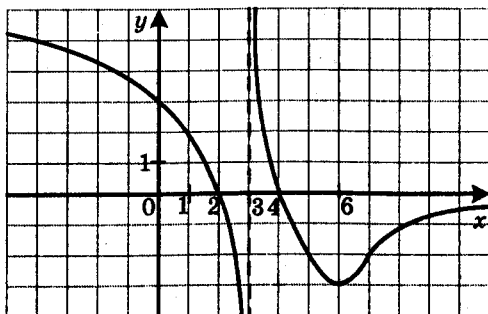


Рис. 23

18. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$y = x^2 - 4x + 2 \text{ на проміжку:}$$

1) $[-3; 1]$;

2) $[1; 3]$;

3) $[4; 6]$.

19. Знайдіть $\max_M f(x)$ і $\min_M f(x)$, якщо:

1) $f(x) = -x^2 + 10x$, $M = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \sqrt{64 - x^2}$, $M = D(f)$.

20. Знайдіть:

1) $\min_{\mathbb{R}} (|x+4| + |x-2|)$;

2) $\max_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 49}$.

21. Функція f є такою, що $f(-6) = -10$. Знайдіть $f(6)$, якщо функція f є: 1) парною; 2) непарною.

22. Функція f є такою, що $f(2) = -3$. Знайдіть $f(2) + f(-2)$, якщо функція f є: 1) парною; 2) непарною.

23. Чи є парною функція, задана формулою $y = x^4$, якщо її область визначення — множина:

1) $[-7; 7]$;

2) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$;

3) $[-8; 8]$?

24. Доведіть, що є парною функція:

1) $f(x) = 45$;

3) $f(x) = \frac{2x^2}{|x|} - 1$;

2) $f(x) = -7x^6 + 2x^2 - 10$;

4) $f(x) = \frac{|x+5| - |x-5|}{x}$.

25. Доведіть, що є непарною функція:

1) $f(x) = -4x^3 + 2x$;

3) $f(x) = \sqrt{9-x} - \sqrt{9+x}$;

2) $f(x) = \frac{4}{3-2x} - \frac{4}{3+2x}$;

4) $f(x) = 2x + \frac{x}{|x|}$.

26. Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = 7x^2 + 6x - 8$;

4) $f(x) = (x+4)^5 - (x-4)^5$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 9x}$;

5) $f(x) = \frac{x^2 + 8x}{2x + 16}$;

3) $f(x) = \sqrt{3 - |x|}$;

6) $f(x) = (x-8)(x+6) + 2x$;

7) $f(x) = (x+6)|x-7| - (x-6)|x+7|$;

8) $f(x) = \frac{6x-7}{x^2+4x+16} - \frac{6x+7}{x^2-4x+16}$.

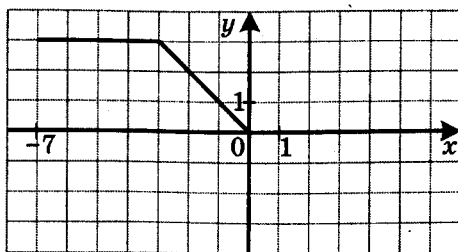


Рис. 24

27. На рисунку 24 зображено частину графіка функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-7; 7]$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.
28. Про функцію f , визначену на множині \mathbb{R} , відомо, що $f(x) = x^2 - 2x$ при $x \geq 0$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.
29. Сума двох чисел дорівнює 10. Якого найбільшого значення може набувати добуток цих чисел?
30. Непарна функція f має 5 нулів. Знайдіть $f(0)$.
31. Функція f є такою, що $\min_{[2;4]} f(x) = -4$, $\max_{[2;4]} f(x) = 7$. Знайдіть

$\min_{[-4;-2]} f(x)$, $\max_{[-4;-2]} f(x)$, якщо:

- 1) f — парна функція; 2) f — непарна функція.

32. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = -x^2 + 4ax + 7$ є парною?

**Побудова графіків функцій
за допомогою геометричних перетворень**

33. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{3x}; \quad 3) y = (2x+3)^2 - 1;$$

$$2) y = \sqrt{-\frac{2}{3}x}; \quad 4) y = \left(\frac{1}{2}x+3\right)^2 - 1.$$

34. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{1}{3x+2}; \quad 2) y = \frac{1}{2-3x}; \quad 3) y = \frac{2}{3x+2} - 3.$$

35. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sqrt{6x-4}; \quad 3) y = \sqrt{1-6x}; \quad 5) y = \frac{1}{4}\sqrt{6-3x} - 1;$$

$$2) y = \sqrt{\frac{1}{6}x+1}; \quad 4) y = \sqrt{4x-2} - 2; \quad 6) y = -\frac{1}{2}\sqrt{2x-5} - 2.$$

36. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3 - 2x - x^2$;

3) $y = |3 - 2x - x^2|$;

2) $y = 3 - 2|x| - x^2$;

4) $y = |3 - 2|x| - x^2|$.

37. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x} - 2$;

3) $y = \sqrt{|x|} - 2$;

2) $y = |\sqrt{x} - 2|$;

4) $y = |\sqrt{|x|} - 2|$.

38. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$;

3) $y = |x - 2|$;

5) $y = 2|x|$;

2) $y = |x| - 2$;

4) $y = ||x| - 2|$;

6) $y = |x + 3| - 4$.

39. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{4}{|x|}$;

2) $y = \left| \frac{4}{x} - 1 \right|$;

3) $y = \left| \frac{4}{x-1} \right|$;

4) $y = \frac{4}{|x|-1}$.

40. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{3x-1}$;

2) $y = \sqrt{1-4|x|}$.

41. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{|x+3|}$;

2) $y = (|x-4|-2)^2$;

3) $y = \sqrt{|x+2|-3}$.

42. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння:

1) $||x|-4| = a$;

2) $|\sqrt{x}-3| = a$;

3) $|(x+3)^2 - 1| = a$?

43. При яких значеннях параметра a рівняння $|2|x|-3| = a(x+5)$ має три корені?

Обернена функція

44. Доведіть, що дана функція не є оборотною:

1) $y = x^2 - 31$;

2) $y = \frac{1}{x^8}$;

3) $y = -7$.

45. Які з даних функцій є оборотними:

1) $y = 4x - 1$;

3) $y = x^2, x \in [0; +\infty)$;

2) $y = x^2, x \in [-9; -2)$;

4) $y = x^2, x \in [-9; +\infty)$?

46. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 3x + 2$;

3) $y = \sqrt{x+4} + 2$;

5) $y = \frac{x}{2-x}$.

2) $y = \frac{4}{x+3}$;

4) $y = x^2, x \in [1; +\infty)$;

47. Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

1) $y = 2x + 3$;

2) $y = x^2 - 1$, якщо $x \geq 0$.

Метод інтервалів

48. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x - 4,6)(x + 5) \leq 0$;

3) $(3x + 5)(2x - 7)(x - 6) \leq 0$;

2) $(x + 12)(x - 4)(x - 20) > 0$;

4) $(7 + x)(x - 2)(5 - x) > 0$;

5) $(x + 7,2)(3 - x)(6 - x) \leq 0$;

6) $(6x + 18)(4 - 16x)(7x - 21)(5 - 2x) \geq 0$.

49. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x-3}{x+5} > 0$;

3) $\frac{x-5,6}{x+1,4} \geq 0$;

5) $\frac{(x-4)(x+6)}{x+4} \geq 0$;

2) $\frac{x+7}{x-10} < 0$;

4) $\frac{9-x}{x-20} \geq 0$;

6) $\frac{x+6,1}{(14-x)(x-16)} \geq 0$.

50. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2 + 7x)(x^2 - 25) \leq 0$;

4) $\frac{x^2 + 10x + 9}{x^2 - 4x + 3} < 0$;

2) $(x^2 + 6x + 5)(x^2 - 3x) > 0$;

5) $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 64} \geq 0$.

3) $(x^2 + 9x + 18)(x^2 + 4x + 5) \geq 0$;

51. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x + 2)^2(x - 3)^4(x - 4)^3 > 0$;

2) $(x + 2)^2(x - 3)^4(x - 4)^3 \geq 0$;

3) $(x + 2)^2(x - 3)^3(x - 4)^4(x - 6)^5 \leq 0$.

52. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x + 4)^2(x^2 + 8x + 12) < 0$;

3) $(x + 4)^2(x^2 + 8x + 12) > 0$;

2) $(x + 4)^2(x^2 + 8x + 12) \leq 0$;

4) $(x + 4)^2(x^2 + 8x + 12) \geq 0$.

53. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} > 0$;

4) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} \leq 0$;

7) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - x - 12} < 0$;

2) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} \geq 0$;

5) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - x - 12} > 0$;

8) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - x - 12} \leq 0$.

3) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} < 0$;

6) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - x - 12} \geq 0$;

54. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 36} \geq 0; \quad 2) \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x - 4} \leq 0.$$

55. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x^2 - 6x + 8}{|x - 8|} \geq 0; \quad 2) \frac{|x + 1|}{x^2 + 4x - 12} \geq 0; \quad 3) \frac{x^2 - 6x - 7}{|x + 2|(x - 4)} \leq 0.$$

56. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x + 2}{x - 2} \geq \frac{4x - 10}{x - 2}; \quad 3) \frac{x^2 + 5x}{x - 1} \geq \frac{14}{x - 1};$$

$$2) \frac{3x}{2x - 7} \leq 1; \quad 4) \frac{x^2 - 4x}{x - 2} \leq 3.$$

57. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{10}{x} - \frac{6}{x + 1} > 1; \quad 4) \frac{2x + 1}{x^2 - x - 6} < \frac{1}{4};$$

$$2) \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x + 3} \geq \frac{4}{3x}; \quad 5) \frac{3x}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{x - 1} \geq \frac{4}{x - 2}.$$

$$3) \frac{3}{x^2 - 25} - \frac{1}{x^2 - 9} \leq 0;$$

58. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x^2 - 5x + 6)\sqrt{x^2 + 5x + 4} < 0;$$

$$2) (x^2 - 5x + 6)\sqrt{x^2 + 5x + 4} > 0;$$

$$3) (x^2 - 5x + 6)\sqrt{x^2 + 5x + 4} \leq 0;$$

$$4) (x^2 - 5x + 6)\sqrt{x^2 + 5x + 4} \geq 0.$$

59. Розв'яжіть нерівність: $\left| \frac{x - 3}{x^2 - 49} \right| \geq \frac{x - 3}{x^2 - 49}$.

60. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

$$1) (x - 4)(x - a) < 0; \quad 5) (x - a)(x + 2)^2 \leq 0;$$

$$2) (x - 4)(x - a)^2 > 0; \quad 6) \frac{x - 7}{x - a} \leq 0;$$

$$3) (x - 4)(x - a)^2 \geq 0; \quad 7) \frac{(x - 5)(x - a)}{x - 5} \geq 0;$$

$$4) (x - a)(x + 2)^2 < 0; \quad 8) \frac{(x - 5)(x - a)}{x - a} \leq 0.$$

Ділення многочленів. Теорема Безу

61. Доведіть, що многочлен $x^3 - x^2 - 7x + 3$ ділиться націло на многочлен $x^2 + 2x - 1$.
62. Доведіть, що многочлен $x^3 + 3x^2 - 5$ не ділиться націло на многочлен $x - 1$.
63. Поділивши «куточком» многочлен $2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 2$ на многочлен $x^2 + x + 3$, знайдіть неповну частку й остачу.
64. Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^3 + 4x^2 - 3x + 7$ на двочлен $x - 2$.
65. Доведіть, що многочлен, тотожно рівний виразу $(x+2)^n + (x+1)^{2n} - 1$, де $n \in \mathbb{N}$, ділиться націло на многочлен $x^2 + 3x + 2$.
66. При яких значеннях параметра a многочлен $x^3 + ax^2 + 2x - 9$ при діленні на двочлен $x - 3$ дає в остачі 6?
67. Розв'яжіть рівняння $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$.

Метод математичної індукції

68. Доведіть методом математичної індукції, що при будь-якому натуральному n виконується рівність $1 + 7 + 13 + \dots + 6n - 5 = n(3n - 2)$.
69. Доведіть нерівність $6^n > 5n + 4$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
70. Доведіть, що для будь-якого натурального n значення виразу $29^n + 68 \cdot 6^n$ кратне 23.

Степенева функція з натуральним показником

71. Функцію задано формулою $\varphi(x) = x^{16}$. Порівняйте:

- 1) $\varphi(3,5)$ і $\varphi(2,9)$; 3) $\varphi(1,4)$ і $\varphi(-1,4)$;
2) $\varphi(-8,1)$ і $\varphi(-6,5)$; 4) $\varphi(-0,18)$ і $\varphi(0,14)$.

72. Функцію задано формулою $f(x) = x^{15}$. Порівняйте:

- 1) $f(3,4)$ і $f(5,2)$; 3) $f(4,1)$ і $f(-4,1)$.
2) $f(-0,35)$ і $f(-0,24)$;

73. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^3 - 2$; 2) $y = (x - 2)^3$; 3) $y = x^4 + 2$; 4) $y = -\frac{1}{4}x^4$.

74. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^6$ на проміжку:

- 1) $[0; 3]$; 2) $[-3; -2]$; 3) $[-3; 3]$; 4) $(-\infty; -3]$.

75. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^5$ на проміжку: 1) $[-3; 2]$; 2) $(-\infty; -2]$.

76. Визначте графічно кількість коренів рівняння:

- 1) $x^6 = 2 - x$; 2) $x^7 = 3 - 2x$.

77. Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^4 + 1, & \text{якщо } x < 0, \\ \frac{1}{x+1}, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x^3, & \text{якщо } x < 1, \\ \sqrt{x} - 2, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

78. Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня n функції $y = x^n$, якщо:

- 1) $f(-6) > f(2)$; 3) $f(-6) < f(2)$;
2) $f(-6) > f(-2)$; 4) $f(-6) < f(-2)$?

79. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $9x^{13} + 2x^5 = -11$; 2) $7x^{10} + 8x^{14} = 15$.

Степенева функція із цілим показником

80. При якому значенні параметра a графік функції $y = ax^{-2}$ проходить через точку $A\left(\frac{1}{2}; 8\right)$?

81. Дано функцію $f(x) = x^{-15}$. Порівняйте:

- 1) $f(20)$ і $f(23)$; 2) $f(-1,6)$ і $f(-1,8)$; 3) $f(-6,4)$ і $f(6,4)$.

82. Дано функцію $f(x) = x^{-26}$. Порівняйте:

- 1) $f(-\varepsilon, 9)$ і $f(-2,5)$; 3) $f(19)$ і $f(16)$;
2) $f(0,4)$ і $f(-0,4)$; 4) $f(-26)$ і $f(3)$.

83. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = (x+3)^0$; 2) $y = (\sqrt{x} - 2)^0$; 3) $y = (x^2 - 4x - 12)^0$.

84. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^{-2} - 2$; 2) $y = (x-2)^{-2}$; 3) $y = 2x^{-3}$.

85. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-3}$

на проміжку: 1) $\left[\frac{1}{4}; 3\right]$; 2) $[-4; -2]$; 3) $[5; +\infty)$.

86. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{якщо } x < 1, \\ x^{-4}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

87. Парним чи непарним є натуральне число n у показнику

степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:

1) $f(-3) > f(-2)$;

3) $f(-3) < f(-2)$;

2) $f(-3) < f(2)$;

4) $f(3) > f(-2)$?

Означення кореня n -го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$

88. Обчисліть:

1) $0,6 \sqrt[3]{8000} - \frac{5}{3} \sqrt[4]{81}$;

2) $\sqrt[3]{-216} + 4(\sqrt[3]{5})^6 - 3 \sqrt[2]{512}$;

3) $2(-\sqrt[12]{12})^{12} - 30 \sqrt[3]{0,001} + (\frac{1}{2} \sqrt[5]{96})^5$;

4) $\sqrt[4]{2 \frac{113}{256}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{8}{125}} + (-2\sqrt{7})^2 - (-\sqrt[9]{11})^9$.

89. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt[4]{x-8}$; 4) $y = \sqrt[6]{x^2-4x}$; 7) $y = \sqrt[3]{|x|(x-3)}$;

2) $y = \sqrt[10]{-x^8}$; 5) $y = \sqrt[10]{-8+6x-x^2}$; 8) $y = 10 \sqrt{\frac{x^2-81}{|x|-5}}$;

3) $y = \sqrt[5]{x+2}$; 6) $y = 12 \sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x^2-9}}$; 9) $y = \sqrt[4]{|x|-8} + \frac{1}{\sqrt[6]{x+9}}$.

90. Знайдіть область значень функції:

1) $y = \sqrt[4]{x} + 15$; 2) $y = -\sqrt[6]{x} - 1$; 3) $y = \sqrt[5]{x} - 7$.

91. Оцініть значення виразу $\sqrt[3]{x}$, якщо:

1) $27 \leq x \leq 125$;

2) $-64 \leq x \leq 343$.

92. Оцініть значення x , якщо:

1) $-6 \leq \sqrt[3]{x} \leq 10$;

2) $3 < \sqrt[4]{x} < 4$.

93. Порівняйте:

1) $\sqrt[3]{2,8}$ і $\sqrt[3]{2,4}$; 2) $\sqrt[3]{-12}$ і $\sqrt[3]{-16}$; 3) 3 і $\sqrt[4]{82}$;

94. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^7 = -10$; 3) $x^4 = -625$; 5) $5x^8 - 95 = 0$;
 2) $x^4 = \frac{1}{81}$; 4) $(x-5)^4 = 256$; 6) $(x^2 - 6x)^3 = -125$.

95. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}$; 3) $\sqrt[4]{x} + 2 = 0$; 5) $\sqrt[5]{4x+2} = 0$;
 2) $\sqrt[4]{x} - 5 = 0$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{x} - 2 = 0$; 6) $\sqrt[5]{4x+2} = 3$.

96. Між якими двома послідовними цілими числами розташоване на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{42}$; 2) $\sqrt[4]{300}$; 3) $-\sqrt[3]{250}$?

97. Укажіть усі цілі числа, розташовані на координатній прямій між числами:

1) 2 і $\sqrt[3]{130}$; 2) $\sqrt[5]{-40}$ і $\sqrt[4]{650}$.

98. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 - 9)\sqrt[6]{x+2} = 0$; 3) $(|x| - 5)^{20}\sqrt[4]{-x} = 0$.
 2) $(x-4)\sqrt[14]{x^2 - 10x + 9} = 0$;

99. Побудуйте графік функції:

1) $y = (\sqrt[9]{4-x})^9$; 2) $y = (\sqrt[10]{x-3})^{10}$.

100. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[4]{x} + 2$; 2) $y = \sqrt[4]{x-2}$; 3) $y = \sqrt[4]{2-x}$; 4) $y = -\sqrt[4]{|x|} - 2$.

101. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[5]{x-4} > 3$; 3) $\sqrt[4]{4x+1} \leq 5$;
 2) $\sqrt[3]{3x-2} \leq 4$; 4) $\sqrt[12]{x^2-8} > \sqrt[12]{7x}$.

102. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $(a+6)\sqrt[8]{x} = 0$; 3) $\sqrt[4]{x} = a-7$; 5) $ax^{10} = 8$;
 2) $\sqrt[8]{a(x-2)} = 0$; 4) $(a-10)\sqrt[8]{x} = a-10$; 6) $x^7 = a-10$.

103. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 + \sqrt[6]{x} = y^3 + \sqrt[6]{y}, \\ 4y^2 + 3x^2 = 7. \end{cases}$

Властивості кореня n -го степеня

104. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{8 \cdot 343}; \quad 3) \sqrt[5]{32 \cdot 0,00001}; \quad 5) \sqrt[8]{0,5^8 \cdot 3^{16}};$$

$$2) \sqrt[4]{0,0016 \cdot 81}; \quad 4) \sqrt[3]{7^6 \cdot 2^9}; \quad 6) \sqrt[6]{\frac{6^{12} \cdot 5^6}{2^{18} \cdot 3^{18}}}.$$

105. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{4}; \quad 3) \sqrt[3]{0,054} \cdot \sqrt[3]{4}; \quad 5) \frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}};$$

$$2) \sqrt[5]{1000} \cdot \sqrt[5]{100}; \quad 4) \sqrt[7]{7^4 \cdot 2^9} \cdot \sqrt[7]{7^3 \cdot 2^5}; \quad 6) \frac{\sqrt[3]{6^{10} \cdot 3^5}}{\sqrt[3]{3^{14} \cdot 6^7}}.$$

106. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{5 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5 + \sqrt{17}}; \quad 2) \sqrt[4]{26 + \sqrt{51}} \cdot \sqrt[4]{26 - \sqrt{51}}.$$

107. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[6]{m}; \quad 2) \sqrt[7]{5x}; \quad 3) 2\sqrt[11]{b^7}; \quad 4) 18\sqrt[14]{a^9 b^{27}}.$$

108. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt[3]{24}; \quad 2) \sqrt[5]{160}; \quad 3) \sqrt[4]{243}.$$

109. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) 3\sqrt{5}; \quad 2) 3\sqrt[3]{4}; \quad 3) 10\sqrt[4]{0,789}; \quad 4) 0,1\sqrt[5]{1230}; \quad 5) \frac{2}{5}\sqrt[3]{500}.$$

110. Спростіть вираз:

$$1) 7\sqrt[3]{-250} - 2\sqrt[3]{54} + 8\sqrt[3]{432};$$

$$2) 4\sqrt[4]{96k} + 5\sqrt[4]{243k} - 3\sqrt[4]{486k} - 6\sqrt[4]{48k}.$$

111. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{5\sqrt{2}}; \quad 2) \sqrt[3]{b^4\sqrt{b}}; \quad 3) \sqrt[9]{p^5\sqrt{p^4}}; \quad 4) \sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^7}}.$$

112. Порівняйте:

$$1) \sqrt[3]{6} \text{ і } \sqrt[6]{34}; \quad 3) \sqrt{3} \text{ і } \sqrt[5]{16}; \quad 5) \sqrt[9]{6} \text{ і } \sqrt[12]{7\sqrt[3]{5}}.$$

$$2) 2\sqrt[3]{5} \text{ і } 3\sqrt[3]{2}; \quad 4) \sqrt[18]{19} \text{ і } \sqrt[12]{7};$$

113. При яких значеннях x виконується рівність:

$$1) \sqrt[16]{64 - x^2} = \sqrt[16]{8 - x} \cdot \sqrt[16]{8 + x};$$

$$2) \sqrt[18]{(x-1)(x-6)} = \sqrt[18]{1-x} \cdot \sqrt[18]{6-x};$$

$$3) \sqrt[15]{(x-9)(x+12)} = \sqrt[15]{x-9} \cdot \sqrt[15]{x+12}?$$

114. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt[6]{x^6}$, якщо $x \geq 0$; 5) $\sqrt[4]{81x^{16}y^{20}z^4}$, якщо $y \leq 0$, $z \geq 0$;
 2) $\sqrt[8]{y^8}$, якщо $y \leq 0$; 6) $4,5a^2\sqrt[6]{64a^{18}}$, якщо $a \leq 0$;
 3) $\sqrt[7]{a^7}$; 7) $\frac{m^7n^6k^5}{\sqrt[8]{m^8n^{16}k^{40}}}$, якщо $m > 0$, $k < 0$;
 4) $\sqrt[3]{125a^9c^{12}}$; 8) $-0,6x^4 \cdot \sqrt[4]{256x^8y^{28}}$, якщо $y \leq 0$.

115. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt[4]{(3-\sqrt{10})^4}$; 2) $\sqrt[5]{(1-7\sqrt{2})^5}$; 3) $\sqrt[8]{(3-5\sqrt{3})^8} + \sqrt[3]{(2-5\sqrt{3})^3}$.

116. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt[4]{(x+10)^4} = 6x$; 2) $\sqrt[14]{(x+9)^{14}} = x+9$.

117. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt[4]{(x+1)^4}$; 3) $y = \sqrt[6]{(x-1)^5} \cdot \sqrt[9]{x-1}$;
 2) $y = \sqrt[4]{x^4} - x$; 4) $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt[8]{(x-1)^8}} - 1$.

118. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 3) $\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}+3}$; 5) $\frac{\sqrt[8]{2a^3}-\sqrt[8]{8a}}{\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{2}}$; 7) $\frac{x-\sqrt{3x}+3}{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}$.
 2) $\frac{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}$; 6) $\frac{x+64}{\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+16}$.

119. Внесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{48x^{16}}$; 5) $\sqrt[4]{810a^{26}b^{17}}$; 9) $\sqrt[12]{a^{13}b^{13}}$, якщо $a \leq 0$;
 2) $\sqrt[4]{x^{17}}$; 6) $\sqrt[3]{128m^{13}n^8}$; 10) $\sqrt[8]{m^{10}n^9}$, якщо $m \leq 0$;
 3) $\sqrt[5]{-b^{12}}$; 7) $\sqrt[4]{-625a^{15}}$; 11) $\sqrt[4]{x^{23}y^{18}z^{36}}$, якщо $z < 0$;
 4) $\sqrt[4]{x^{18}y^7}$; 8) $\sqrt[6]{x^{14}y^{17}}$; 12) $\sqrt[6]{-m^{49}n^{20}}$, якщо $n \geq 0$.

120. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $a\sqrt{7}$; 4) $2x\sqrt[3]{3x^2}$; 7) $m\sqrt[6]{m^4}$, якщо $m \leq 0$;
 2) $a\sqrt{-a}$; 5) $b\sqrt[7]{4b}$; 8) $ab\sqrt[4]{a^2b}$, якщо $a > 0$;
 3) $a\sqrt[4]{a^3}$; 6) $3x^2\sqrt[3]{\frac{1}{9x^2}}$; 9) $a^5b^3\sqrt[8]{a^6b^{10}}$, якщо $a < 0$, $b > 0$.

121. Спростіть вираз:

1) $(\sqrt[3]{a} + 2)(\sqrt[3]{a} - 2) - (\sqrt[3]{a} + 3)^2$; 4) $\left(\frac{\sqrt[4]{a} - 2}{\sqrt[4]{a} + 2} - \frac{\sqrt[4]{a} + 2}{\sqrt[4]{a} - 2}\right) : \frac{12\sqrt{a}}{4 - \sqrt{a}}$;

2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a} + 1}$;

5) $\frac{3\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a} - 4} - \frac{\sqrt[8]{a} + 2}{2\sqrt[8]{a} - 8} \cdot \frac{96}{\sqrt[4]{a} + 2\sqrt[8]{a}}$.

3) $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{ab} - \sqrt[3]{b}} - \frac{2\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$;

122. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{3 + \sqrt{10}} \cdot \sqrt[6]{19 - 6\sqrt{10}}$;

2) $\sqrt[4]{8 - 2\sqrt{15}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

123. Доведіть, що значення виразу $\sqrt[3]{14\sqrt{2} + 20} - \sqrt[3]{14\sqrt{2} - 20}$ є раціональним числом.

Степінь з раціональним показником та його властивості

124. Знайдіть значення виразу:

1) $16^{\frac{1}{2}}$; 2) $8^{-\frac{2}{3}}$; 3) $0,0016^{-0,5}$; 4) $32^{0,4}$; 5) $\left(11\frac{1}{9}\right)^{-2,5}$.

125. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^{\frac{6}{7}}$; 3) $y = (3 - x)^{2,8}$; 5) $y = (2x^2 - 5x + 2)^{\frac{1}{6}}$.

2) $y = x^{-2,3}$; 4) $y = \left(\frac{x-8}{x+5}\right)^{3,2}$;

126. Спростіть вираз:

1) $a^{-0,8} \cdot a^{1,3}$;

6) $(a^3)^{-0,7} \cdot (a^{-0,4})^{-5} : (a^{-0,5})^8$;

2) $a^{\frac{7}{9}} : a^{\frac{5}{6}}$;

7) $\frac{x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{8}{9}} \cdot x^{\frac{1}{12}}}$;

3) $(a^{-0,4})^8$;

8) $\sqrt[4]{a} \cdot a^{\frac{2}{3}}$;

4) $a^{\frac{5}{8}} \cdot a^{\frac{7}{12}} \cdot a^{-\frac{13}{24}}$;

9) $\sqrt[5]{a^3} \cdot a^{-\frac{4}{9}}$;

5) $\left(a^{\frac{1}{3}b^{\frac{4}{15}}}\right)^{\frac{6}{11}}$;

10) $\left(\sqrt[3]{a^{-2}}\right)^{\frac{3}{8}} \cdot \left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{10}}$.

127. Побудуйте графік функції $y = \left((x+8)^{\frac{1}{11}}\right)^{-11}$.

128. Відомо, що a — додатне число. Подайте вираз у вигляді:
а) квадрата; б) куба; в) восьмого степеня:

1) a^{16} ; 2) a^{-12} ; 3) $a^{\frac{1}{5}}$; 4) $a^{2.4}$.

129. Спростіть вираз:

1) $b^{\frac{1}{6}} \left(b^{\frac{1}{6}} - 4 \right) - \left(b^{\frac{1}{6}} - 2 \right)^2$;

2) $\left(b^{\frac{1}{8}} - c^{\frac{1}{4}} \right) \left(b^{\frac{1}{8}} + c^{\frac{1}{4}} \right) - \left(5b^{\frac{1}{8}} + 2c^{\frac{1}{4}} \right) \left(3b^{\frac{1}{8}} - 4c^{\frac{1}{4}} \right)$;

3) $\left(a^{\frac{1}{24}} + b^{\frac{1}{24}} \right) \left(a^{\frac{1}{24}} - b^{\frac{1}{24}} \right) \left(a^{\frac{1}{12}} + b^{\frac{1}{12}} \right) \left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}} \right)$;

4) $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} \right) \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right) - y^{\frac{5}{8}} \left(y^{\frac{3}{8}} + y^{\frac{1}{8}} \right)$.

130. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(3^{-0.6} \right)^4 : 3^{-0.4}$;

3) $16^{-0.75} \cdot 8^{\frac{5}{12}} \cdot 4^{\frac{5}{8}}$;

2) $\left(5^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{9}{16}} \cdot 25^{\frac{11}{16}}$;

4) $\left(\frac{5^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{\frac{5}{6}}}{5^{\frac{1}{6}} \cdot 6} \right)^{-12}$.

131. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\frac{3}{5}} = 0,008$;

2) $(x+6)^{\frac{1}{3}} = 625$.

132. Подайте даний вираз у вигляді: а) різниці квадратів;
б) різниці кубів і розкладіть його на множники (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) $a^{17} - b^{11}$;

2) $x^{\frac{2}{11}} - y^{\frac{15}{19}}$;

3) $x^{\frac{1}{5}} - 7$.

133. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $b - 4b^{\frac{1}{5}}$;

3) $9^{\frac{2}{5}} - 12^{\frac{2}{5}}$;

5) $7m^{\frac{1}{8}} - m^{\frac{1}{9}}$;

2) $a^{\frac{4}{9}}b - b^{\frac{4}{9}}a$;

4) $9a^{\frac{3}{16}} + 15a^{\frac{5}{8}}$;

6) $m^{\frac{11}{12}}n^{\frac{5}{7}} - mn - m^{\frac{1}{12}}n^{\frac{3}{7}}$.

134. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a+6a^{\frac{1}{4}}}{\frac{3}{a^4}+6}$;

2) $\frac{2m^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{m^2}-4m^{\frac{1}{3}}}$;

3) $\frac{36a-25b}{6a^{0.5}+5b^{0.5}}$;

$$4) \frac{a^{1,5} - b^{1,5}}{a + a^{0,5}b^{0,5} + b}; \quad 6) \frac{x - 5x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{5}} - 5x^{\frac{1}{5}}}; \quad 8) \frac{x - 16x^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{x^4} - 4x^{\frac{1}{2}}};$$

$$5) \frac{m^2 n^{1,5} - m^{1,5} n^2}{m - 2m^{0,5}n^{0,5} + n}; \quad 7) \frac{4a^{\frac{2}{3}} - 1}{8a - 1}; \quad 9) \frac{12^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}.$$

135. Спростіть вираз:

$$1) \frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}} - \frac{2n}{n - m} - \frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}};$$

$$2) \frac{a^{\frac{1}{4}} - 3,2}{a^2 - 4a^4} + \frac{a^{\frac{1}{4}} - 5}{5a^4 - 20} - \frac{a^{\frac{1}{4}} + 4}{5a^4};$$

$$3) \left(\frac{m^{\frac{1}{5}}}{m^{\frac{1}{5}} + n^{\frac{1}{5}}} - \frac{m^{\frac{1}{5}}}{m^{\frac{1}{5}} - n^{\frac{1}{5}}} \right) : \frac{m^{\frac{6}{5}} n^{\frac{1}{5}} - m^{\frac{1}{5}} n^{\frac{6}{5}}}{m^{\frac{2}{5}} - n^{\frac{2}{5}}}.$$

Ірраціональні рівняння

136. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt[10]{x+4} = -2; \quad 4) \sqrt{x+4} = \sqrt{2x+9};$$

$$2) \sqrt[5]{x+4} = -2; \quad 5) \sqrt[16]{x+4} = \sqrt[16]{x^2+5x-1};$$

$$3) \sqrt[4]{x+4} = \sqrt[4]{7-2x}; \quad 6) \sqrt{x+4} = -x-4.$$

137. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{5x+1} = 1-x; \quad 3) \sqrt{-x^2+6x-1} = x-3;$$

$$2) x + \sqrt{2x^2-14x+13} = 5; \quad 4) \sqrt{x^2-11x+11} = 2x-1.$$

138. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{(2x-1)(x-3)} = x-3; \quad 2) (x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2.$$

139. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2; \quad 3) 2\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 4;$$

$$2) \sqrt{3x+1} - \sqrt{x-4} = 3; \quad 4) \sqrt{x+9} - \sqrt{x-6} = 3.$$

140. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x+3} + \sqrt{3x-9} = 6; \quad 3) \sqrt{x+6} + \sqrt{4-x} = 4;$$

$$2) \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4; \quad 4) \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = 6.$$

141. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{9-2x} + \sqrt{1-x} = 2\sqrt{4-x}; \quad 3) \sqrt{x-3} = \sqrt{x-2} - \sqrt{2x+1};$$

$$2) \sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{x-5}; \quad 4) \sqrt{x-3} = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+4}.$$

142. Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

$$1) \sqrt{x} - 6\sqrt[4]{x} + 8 = 0; \quad 3) \sqrt{x-5} - 8 = 2\sqrt[4]{x-5};$$

$$2) 2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 3 = 0; \quad 4) 4\sqrt[3]{x+2} + 5 = \sqrt[3]{x^2+4x+4}.$$

143. Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

$$1) x^2 + 2\sqrt{41-x^2} = 26; \quad 4) x^2 - x + \sqrt{x^2-x-2} = 8;$$

$$2) \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} - 2\sqrt{\frac{x-4}{x+4}} = \frac{7}{3}; \quad 5) 3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2+5x+1} = 2.$$

$$3) x\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[8]{x^5} = 3;$$

144. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} = 4$.

145. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{6-x} = 4;$$

$$2) \sqrt[3]{(x+17)^2} + \sqrt[3]{(x+17)(x-2)} + \sqrt[3]{(x-2)^2} = 19.$$

146. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{y} = 3, \\ \sqrt[4]{y} \cdot \sqrt[3]{x} = 10; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x} = 5, \\ x - y = -35; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y - x = -7, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ xy = 27; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{2x-y+1} = 2, \\ \sqrt{x+y+1} = 3-y; \end{cases} \quad 7) \begin{cases} \sqrt{x+2y} + \sqrt{x-y+2} = 3, \\ 2x+y = 3; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x+y = 25; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} \sqrt{\frac{3y-2x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{3y-2x}} = 2\sqrt{2}, \\ 3x^2+x+2 = y^2-yx+2y. \end{cases}$$

Іраціональні нерівності

147. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt{3-2x} > \sqrt{x+1}; \quad 3) \sqrt{x^2+2x-3} < \sqrt{9x-13};$$

$$2) \sqrt{4x-1} < \sqrt{3x-8}; \quad 4) \sqrt{x^2+2x-2} \geq \sqrt{-x^2+5x}.$$

148. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+14} < 6-x$;

3) $\sqrt{-2x-x^2} < 3-x$;

2) $\sqrt{2x+5} < x+1$;

4) $\sqrt{2x^2-3x-5} \leq x-1$.

149. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+24} > x-6$;

3) $\sqrt{x^2+5x-6} > 2-x$;

2) $\sqrt{21-10x} \geq 2x-3$;

4) $\sqrt{-x^2-4x-3} \geq x+3$.

150. Розв'яжіть нерівність:

1) $(5-2x)\sqrt{x} \leq 0$;

3) $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} \leq 8$.

2) $\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 5 \geq 0$;

Радіанна міра кута

151. Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

1) 10° ; 2) 54° ; 3) 125° ; 4) 270° .

152. Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

1) $\frac{\pi}{15}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $1\frac{5}{6}\pi$; 4) 4π .

153. У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

1) 126° ; 3) 620° ; 5) $\frac{\pi}{5}$; 7) $-\frac{7\pi}{6}$; 9) 4;

2) -110° ; 4) -29° ; 6) $\frac{4\pi}{3}$; 8) $-0,8\pi$; 10) $-5?$

154. Знайдіть усі кути, на які треба повернути точку $P_0(1; 0)$, щоб отримати точку:

1) $P_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

155. Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих у результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути:

1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

3) $-\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

2) $\frac{\pi}{6} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

4) $\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Тригонометричні функції числового аргументу

156. Знайдіть значення виразу:

1) $6\sin 270^\circ - 3\cos 0^\circ + 4\operatorname{ctg} 90^\circ$; 2) $5\cos \frac{3\pi}{2} - 7\sin \frac{3\pi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}$;

3) $\cos 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{ctg} 45^\circ$;

4)
$$\frac{\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}\right) \cdot 4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\cos \pi + 2 \sin \frac{\pi}{2}}$$
;

5) $\sqrt{(\operatorname{ctg} 30^\circ + 2)^2} + \sqrt{(\operatorname{tg} 60^\circ - 2)^2}$.

157. Знайдіть значення виразу $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$ при:

1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$;

2) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

158. Чи є можливою рівність:

1) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; 2) $\cos \alpha = -\sqrt[3]{0,6}$; 3) $\cos \alpha = \frac{\pi}{3}$; 4) $\sin \alpha = \sqrt{5} - \sqrt{3}$?

159. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $1 - 5 \cos \alpha$;

2) $4 + \sin^2 \alpha$;

3) $\frac{\sin \alpha (3 - \cos \alpha)}{\sin \alpha}$.

160. При яких значеннях параметра a можлива рівність:

1) $\sin x = a - 3$;

2) $\cos x = a^2 + 7a + 11$?

161. Знайдіть область значень виразу:

1) $\frac{1}{2 - \sin 3x}$;

2) $2 - 3|\cos 5x|$;

3) $\frac{1}{1 + \cos 2x}$;

4) $\operatorname{tg}^2 x + 2$.

Знаки значень тригонометричних функцій

162. Який знак має:

1) $\cos 260^\circ$;

3) $\operatorname{ctg} 310^\circ$;

5) $\operatorname{tg} 4$;

2) $\sin 185^\circ$;

4) $\operatorname{tg}(-220^\circ)$;

6) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$?

163. Знайдіть значення виразу:

1) $5 \sin(-30^\circ) - 2 \operatorname{tg}(-45^\circ) - \cos(-60^\circ)$;

2) $\frac{\sin(-60^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-45^\circ)}{\cos(-30^\circ)}$;

3) $2 \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin(-\pi) + 5 \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

164. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\operatorname{ctg} 204^\circ \sin 164^\circ$; 2) $\cos 100^\circ \sin(-193^\circ)$; 3) $\cos 5 \operatorname{ctg} 2,4$.

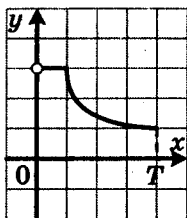
165. Порівняйте:

1) $\cos 70^\circ$ і $\sin 340^\circ$;

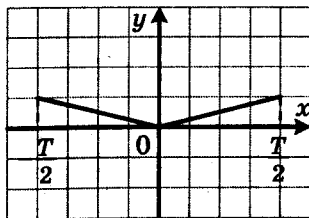
3) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$ і $\cos \frac{5\pi}{6}$;

2) $\operatorname{tg} 100^\circ$ і $\operatorname{ctg}(-100^\circ)$;

4) $\cos 6$ і $\sin 4$.



а



б

Рис. 25

166. Кутом якої координатної чверті є кут α , якщо:

- 1) $\sin \alpha < 0$ і $\sin \alpha \cos \alpha > 0$;
- 2) $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$ і $\sin \alpha \cos \alpha < 0$?

Періодичні функції

167. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sin 405^\circ$;
- 2) $\cos 390^\circ$;
- 3) $\operatorname{tg} 420^\circ$;
- 4) $\operatorname{ctg}(-855^\circ)$;
- 5) $\sin \frac{25\pi}{4}$;
- 6) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{35\pi}{6}\right)$.

168. Відомо, що число $T = \sqrt{2}$ є періодом функції f . Укажіть ще які-небудь три числа, які є періодами цієї функції.

169. На рисунку 25 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T . Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T; 2T]$.

170. Покажіть, що число T є періодом функції f :

- 1) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $T = 4\pi$;
- 2) $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$, $T = 2$;
- 3) $f(x) = \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right|$, $T = 2\pi$;
- 4) $f(x) = \cos^4 2x$, $T = \frac{\pi}{2}$.

171. Покажіть, що число $T = \pi$ не є періодом функції $f(x) = \cos x$.

172. Знайдіть період функції $f(x) = \operatorname{tg} 4x + \sin \frac{4x}{3}$.

173. Знайдіть усі значення параметра a , при яких число $T = \frac{4\pi}{3}$ є періодом функції $f(x) = \operatorname{tg} ax$.

Властивості та графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

174. На проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ укажіть:

1) нулі функції $y = \sin x$;

2) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найбільшого і найменшого значень.

175. Порівняйте:

1) $\sin \frac{17\pi}{8}$ і $\sin \frac{19\pi}{9}$;

4) $\cos \frac{13\pi}{11}$ і $\cos \frac{15\pi}{11}$;

2) $\sin(-184^\circ)$ і $\sin(-185^\circ)$;

5) $\cos 362^\circ$ і $\cos 363^\circ$;

3) $\sin 5,5$ і $\sin 6$;

6) $\cos(-3)$ і $\cos(-2)$.

176. Чи є можливою рівність:

1) $\cos \alpha = \sqrt{2} \cos 47^\circ$;

2) $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos 29^\circ$?

177. Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = x^3 + \cos x$;

3) $f(x) = \frac{\sin x}{|x|-3}$;

2) $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{2 - \cos x}$;

4) $f(x) = \frac{(1 + \sin^2 x)(x + 1)}{x + 1}$.

178. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin x - 1$; 3) $y = -\sin 4x$; 5) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$.

2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $y = 2\sin x$;

179. Побудуйте графік функції:

1) $y = \cos x + 1$; 3) $y = \cos \frac{x}{2}$; 5) $y = -3\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 1$.

2) $y = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$; 4) $y = -3\cos x$;

180. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{3}\right|$; 3) $y = \sin\left(\left|x\right| - \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $y = -2\cos\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$; 4) $y = \left|\cos\left|\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right|\right|$.

181. Побудуйте графік функції:

1) $y = \cos x + (\sqrt{\cos x})^2$; 3) $y = \frac{\cos x - |\cos x|}{\cos x}$.

2) $y = \sqrt{\sin^2 x} - \sin x$;

Властивості та графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$

182. На проміжку $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ укажіть:

1) нулі функції $y = \operatorname{ctg} x$;

2) числа, які не належать області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$.

183. Порівняйте:

1) $\operatorname{tg} \frac{29\pi}{10}$ і $\operatorname{tg} \frac{26\pi}{9}$;

4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{25\pi}{12}\right)$ і $\operatorname{ctg}\left(-\frac{15\pi}{7}\right)$;

2) $\operatorname{tg}(-205^\circ)$ і $\operatorname{tg}(-203^\circ)$;

5) $\operatorname{ctg} 258^\circ$ і $\operatorname{ctg} 256^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 7$ і $\operatorname{tg} 7,5$;

6) $\operatorname{ctg}(-5)$ і $\operatorname{ctg}(-5,5)$.

184. Порівняйте:

1) $\operatorname{tg} 42^\circ$ і $\operatorname{ctg} 42^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 51^\circ$ і $\cos 6^\circ$.

2) $\operatorname{tg} 61^\circ$ і $\operatorname{ctg} 32^\circ$;

185. Чи є можливою рівність:

1) $\cos \alpha = \sqrt{3} \operatorname{ctg} 65^\circ$;

2) $\sin \alpha = \operatorname{tg} 55^\circ$?

186. Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;

2) $f(x) = \frac{x - \operatorname{tg} x}{\sin x}$.

187. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$;

2) $y = 2 \operatorname{ctg} x - 1$;

4) $y = -3 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

188. Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{tg} 2|x|$;

2) $y = \operatorname{ctg} x + |\operatorname{ctg} x|$.

Співвідношення між тригонометричними функціями
одного й того самого аргументу

189. Спростіть вираз:

1) $(\cos 7\alpha - 1)(\cos 7\alpha + 1)$;

4) $\frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{4}}$;

2) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sin^2 3\beta}$;

5) $(\operatorname{tg} 3\beta + \operatorname{ctg} 3\beta) \sin^2 3\beta$;

3) $\operatorname{tg} 5x \operatorname{ctg} 5x + \operatorname{tg}^2 4x$;

6) $\frac{\cos^2 4\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 4\alpha (\sin^2 4\alpha - 1)}$.

190. Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

$$1) \sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ і } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad 3) \cos \alpha = -\frac{1}{4} \text{ і } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15} ?$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = 5 \text{ і } \operatorname{ctg} \alpha = -0,2;$$

191. Обчисліть значення тригонометричних функцій кута α , якщо:

$$1) \cos \gamma = -\frac{3}{8} \text{ і } \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi; \quad 2) \operatorname{ctg} \gamma = -\sqrt{5} \text{ і } \frac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi.$$

192. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\cos^3(-7\alpha) + \sin^3 7\alpha}{1 + \cos 7\alpha \sin(-7\alpha)} = \cos 7\alpha + \sin 7\alpha;$$

$$2) \cos^4 5\varphi - \sin^4 5\varphi + 2\sin^2(-5\varphi) = 1;$$

$$3) \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha};$$

$$4) \sin^2 3\beta \cos^2 3\beta + \sin^6 3\beta + \cos^6 3\beta = \sin^4 3\beta + \cos^4 3\beta;$$

$$5) \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$6) \frac{1 + \sqrt{5} \cos \alpha}{\sqrt{5} \sin \alpha - 2} = \frac{\sqrt{5} \sin \alpha + 2}{1 - \sqrt{5} \cos \alpha};$$

$$7) \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

193. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

$$1) 5 \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha; \quad 3) 5 \sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha;$$

$$2) 4 \sin^2 \alpha - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha; \quad 4) 8 \sin \alpha - \cos^2 \alpha.$$

194. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{5 \cos \alpha + 6 \sin \alpha}{3 \sin \alpha - 8 \cos \alpha}, \text{ якщо } \operatorname{tg} \alpha = 4;$$

$$2) \frac{3 \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha}, \text{ якщо } \operatorname{ctg} \alpha = -3.$$

195. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sin 2x \operatorname{ctg} 2x; \quad 2) y = \cos^2 \sqrt{x^2 - 4} + \sin^2 \sqrt{x^2 - 4}.$$

196. Спростіть вираз $\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, якщо $3\pi < \alpha < 4\pi$.

Формули додавання

197. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right);$ 3) $\frac{\cos(30^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ + \alpha)}{\cos(30^\circ - \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)}$

2) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha;$

198. Спростіть вираз:

1) $\sin\varphi \cos 3\varphi + \cos\varphi \sin 3\varphi;$

2) $\cos 64^\circ \cos 34^\circ + \sin 64^\circ \sin 34^\circ;$

3) $\sin(84^\circ - \alpha) \cos(\alpha + 24^\circ) - \cos(84^\circ - \alpha) \sin(\alpha + 24^\circ);$

4) $\frac{\cos 14^\circ \cos 23^\circ - \sin 14^\circ \sin 23^\circ}{\sin 56^\circ \cos 19^\circ - \cos 56^\circ \sin 19^\circ};$

5) $\frac{\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{tg} 46^\circ}{1 - \operatorname{tg} 14^\circ \operatorname{tg} 46^\circ};$

6) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right)}$

199. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha \sin\beta}{2\cos\alpha \cos\beta - \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta);$

2) $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha.$

200. Знайдіть $\operatorname{tg} 15^\circ$.201. Дано: $\cos \alpha = -0,6$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Знайдіть $\sin(60^\circ - \alpha)$.202. Дано: $\sin \alpha = 0,6$, $\sin \beta = -\frac{8}{17}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$.Знайдіть $\cos(\alpha - \beta)$.

203. Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha;$

2) $3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha.$

204. Дано: $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$, $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$. Знайдіть $\cos \alpha$.205. Дано: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\sin \beta = \frac{3\sqrt{34}}{34}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.Знайдіть $\alpha + \beta$.206. Побудуйте графік функції $y = \frac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x}{1 + \operatorname{tg} 5x \operatorname{tg} 3x}$.

Формули зведення

207. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$;

2) $\cos 855^\circ$;

3) $\sin \frac{37\pi}{6}$.

208. Знайдіть значення виразу:

1) $3 \operatorname{ctg} 135^\circ + 2 \cos 120^\circ + \operatorname{tg} 420^\circ + 2 \sin 300^\circ$;

2) $\sin \frac{7\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{6} \operatorname{tg} \left(-\frac{5\pi}{3}\right) \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3}$;

3) $\sin 200^\circ \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cos 50^\circ$;

4) $\frac{\cos 115^\circ \cos 188^\circ + \sin 8^\circ \cos 25^\circ}{\sin 138^\circ \cos 9^\circ + \sin 189^\circ \cos 42^\circ}$.

209. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

2) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cos(3\pi - \alpha) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) \sin(3\pi + \alpha)$;

3) $\frac{\sin(\pi - \beta) \cos(\pi + \beta) \operatorname{tg}(\pi - \beta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}$;

4) $\frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(2\pi - \alpha)\right)^2 - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha) \cos(\pi - \alpha)}$.

210. Знайдіть значення виразів $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$, якщо

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} \text{ і } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

211. Спростіть вираз:

1) $\operatorname{ctg} 20^\circ + \operatorname{ctg} 40^\circ + \operatorname{ctg} 60^\circ + \dots + \operatorname{ctg} 160^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 29^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 31^\circ \dots \operatorname{tg} 61^\circ$.

212. Доведіть тотожність:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \cos^2 \alpha.$$

Формули подвійного, потрійного та половинного аргументів

213. Знайдіть значення виразу:

1) $1 - 2\cos^2 \frac{\pi}{8}$;

2) $\frac{\operatorname{tg}^2 75^\circ - 1}{\operatorname{tg}^2 75^\circ + 1}$;

3) $2\sin 7,5^\circ \cos 7,5^\circ \cos 15^\circ$.

214. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 14\alpha}{\sin 7\alpha}$;

4) $\sin \frac{4\alpha}{9} \cos \frac{4\alpha}{9} \cos \frac{8\alpha}{9}$;

2) $\frac{\cos 9\alpha}{\cos \frac{9\alpha}{2} - \sin \frac{9\alpha}{2}}$;

5) $\frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{5} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{10}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{10}}$;

3) $1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 8\alpha\right)$;

6) $\frac{2\operatorname{ctg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}$.

215. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1 + \cos 6\alpha$;

3) $1 + \sin \frac{\pi}{10}$;

2) $1 - \cos \frac{\alpha}{4}$;

4) $1 - \sin \frac{\alpha}{2}$.

216. Понизьте степінь виразу:

1) $\sin^2 \frac{\alpha}{4}$; 2) $\cos^2 5x$; 3) $\sin^2(3\beta + 5^\circ)$; 4) $\cos^2\left(\frac{\varphi}{6} - \frac{\pi}{14}\right)$.

217. Дано: $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Знайдіть:

1) $\sin 2\alpha$;

2) $\cos 2\alpha$;

3) $\operatorname{tg} 4\alpha$.

218. Дано: $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Знайдіть:

1) $\sin 2\alpha$;

2) $\cos 2\alpha$;

3) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

219. Доведіть тотожність:

1) $2\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha = 1$;

3) $\frac{1 - \cos 2\alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha - \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

2) $\operatorname{ctg} 2\alpha (1 - \cos 4\alpha) = \sin 4\alpha$;

220. Спростіть вираз $\sqrt{2 + 2\cos 8\alpha}$, якщо $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

221. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 9\alpha}{\sin 3\alpha} + \frac{\cos 9\alpha}{\cos 3\alpha}$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right) \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 4\alpha\right)}{1 - 2\cos^2 4\alpha}$;

2) $\frac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^4 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$;

4) $\frac{\sin 8\alpha}{1 + \cos 8\alpha} \cdot \frac{\cos 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} \cdot \frac{\sin 4\alpha}{1 - \cos 4\alpha}$.

222. Доведіть, що $\cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha = \frac{\sin 16\alpha}{8\sin 2\alpha}$.

223. Доведіть тотожність $\frac{\sin 12\alpha + \sin^3 4\alpha}{\cos 12\alpha - \cos^3 4\alpha} = -\operatorname{ctg} 4\alpha$.

224. Знайдіть значення виразу $\cos 20^\circ (1 - 4\sin^2 20^\circ)$.

**Формули для перетворення суми, різниці та добутку
тригонометричних функцій**

225. Перетворіть у добуток:

1) $\sin 100^\circ - \sin 40^\circ$;

4) $\cos 2\alpha - \cos 8\alpha$;

2) $\cos 3\alpha + \cos 11\alpha$;

5) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right)$;

3) $\sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8}$;

6) $\cos\left(3\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3\alpha\right)$.

226. Перетворіть у добуток:

1) $\sin 35^\circ - \cos 75^\circ$; 2) $\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{12}$; 3) $\cos 2\alpha + \sin \alpha$.

227. Перетворіть у добуток:

1) $2\cos \alpha - 1$;

2) $\sqrt{3} + 2\sin \alpha$.

228. Доведіть тотожність:

1) $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4\cos \alpha \cos 2\alpha \sin 4\alpha$;

2) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

3) $\frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha + \cos 2\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$;

4) $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

229. Спростіть вираз:

1) $\frac{(\sin 8\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)}{1 - \cos 6\alpha}$;

2) $\left(\frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos 5\alpha}\right) \cdot \frac{\sin 9\alpha + \sin 11\alpha}{\sin 2\alpha}$;

3) $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2$.

230. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$;

2) $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8} + \alpha\right) \cdot \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - \alpha\right)$.

231. Доведіть тотожність:

1) $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$;

2) $\sin \alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos \alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{2}\right)$;

3) $4\sin^2 \alpha - 3 = -4\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

232. Перетворіть у суму добуток:

1) $\sin \alpha \sin 7\alpha$; 3) $\sin 36^\circ \cos 24^\circ$; 5) $\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)$;

2) $\cos \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}$; 4) $\sin \frac{11\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24}$; 6) $\sin \alpha \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

233. Доведіть тотожність:

1) $\sin 2\alpha + 2\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right) = 0,5$;

2) $\sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 7\alpha \cos \alpha = \cos 6\alpha \cos 2\alpha$;

3) $\sin^2 2\alpha - \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) = \frac{1}{4}$.

Рівняння $\cos x = b$

234. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 4x = -1$; 6) $\cos \frac{5\pi x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos \frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$;

3) $\cos \frac{8x}{5} = 0$; 8) $\cos(3x - 5) = \frac{\pi}{6}$;

4) $\cos\left(10x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$; 9) $2\cos\left(5x + \frac{\pi}{8}\right) - \sqrt{3} = 0$;

5) $\cos(4 - 3x) = -\frac{1}{2}$; 10) $6\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$.

235. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 5x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{4}$; 3) $6\cos^2 x - 1 = 0$.

236. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

237. Скільки коренів рівняння $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ належать про-

міжку $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$?

238. Знайдіть усі корені рівняння $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, які задо-

вольняють нерівність $-\frac{3\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$.

239. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\cos x = a^2 - 4a + 5$;

2) $(a - 1)\cos x = a - 2$?

240. Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$ залежно від значення параметра a .

Рівняння $\sin x = b$

241. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 9x = 1$;

5) $\sqrt{3} + 2\sin(8 - 3x) = 0$;

2) $\sin \frac{3x}{8} = 0$;

6) $6 \sin(2x - 5) - 5 = 0$;

3) $\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

7) $\sin(8x - 4) = \pi$;

4) $2\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$;

8) $\sin(7x - 2) = -\frac{\pi}{12}$.

242. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$;

3) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

2) $\sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x = -1$;

243. Скільки коренів рівняння $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$?

244. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin \frac{3\pi x}{7} = 0$;

2) $\sin(4\pi\sqrt{x}) = 1$;

3) $\sin \frac{4\pi x^2}{9} = -1$.

245. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $(a^2 - 4) \sin x = a + 2$;

2) $\sin x = 6a - a^2 - 10$?

246. Визначте кількість коренів рівняння $\sin 4x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{8}\right]$ залежно від значення параметра a .

247. Скільки коренів має рівняння $\cos x (\sin x - a) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ залежно від значення параметра a ?

Рівняння $\operatorname{tg} x = b$ і $\operatorname{ctg} x = b$

248. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} 5x = 0$;

4) $\operatorname{ctg} 11x = -1$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = -1$;

5) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 8x\right) = 0$;

3) $6\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 7 = 0$;

6) $2\operatorname{ctg}\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) - 10 = 0$.

249. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння

$$\operatorname{tg}\left(6x + \frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

250. Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg} 3x = -1$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

251. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\frac{\operatorname{ctg} x - a}{\cos x + \frac{1}{2}} = 0$ на проміжку $(-\pi; 0)$?

252. При яких значеннях параметра a рівняння $(x - a)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь?

Функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$

253. Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\sin(2 \operatorname{arctg}(-1))$;

3) $\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arcsin \frac{1}{2}\right)$;

4) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} 1\right)$.

254. Обчисліть:

1) $\cos\left(\arccos \frac{4}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin \frac{\pi}{12}\right)$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1)$.

255. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin(2x - 3)$; 2) $y = \arccos(x^2 - 2)$; 3) $y = \operatorname{arctg} \frac{6}{\sqrt{x+5}}$.

256. Знайдіть область значень функції:

1) $y = 3 \arcsin x + \frac{\pi}{4}$; 2) $y = 4 - 2 \operatorname{arctg} 2x$.

257. Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(x - 3) = \frac{5\pi}{6}$; 2) $\arcsin(5x - 6) = \frac{\pi}{6}$.

258. Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin x < -\frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos \frac{4x}{5} \geq \frac{3\pi}{4}$; 3) $\operatorname{arctg}(1 - 2x) \geq -\frac{\pi}{4}$.

259. Обчисліть:

- 1) $\cos\left(\arcsin\frac{2}{9}\right)$; 3) $\sin(\operatorname{arctg} 3)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$;
 2) $\sin\left(\arccos\frac{3}{4}\right)$; 4) $\cos(\operatorname{arcctg}(-2))$; 6) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 6)$.

260. Побудуйте графік функції $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}|x|}$.

261. Обчисліть:

- 1) $\sin\left(2\arcsin\frac{2}{5}\right)$; 2) $\arccos(\cos 6)$.

Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних

262. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2\cos^2 4x + \cos 4x - 1 = 0$; 3) $3\operatorname{tg}^2 2x - 1 = 0$;
 2) $5\sin^2 \frac{x}{3} - 6\sin \frac{x}{3} + 1 = 0$; 4) $\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{5} + 3\operatorname{ctg} \frac{x}{5} - 4 = 0$.

263. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2\sin^2 \frac{x}{4} - 7\cos \frac{x}{4} - 5 = 0$; 5) $\operatorname{tg}^4 3x - 2\operatorname{tg}^2 3x - 3 = 0$;
 2) $3\cos 10x + \cos 5x + 2 = 0$; 6) $\frac{1}{\cos^2 2x} - 5\operatorname{tg} 2x + 5 = 0$;
 3) $2\cos^2 6x + 10\sin^2 3x - 3 = 0$; 7) $2\operatorname{tg}^2 5x + \frac{1}{\cos 5x} + 1 = 0$;
 4) $3\operatorname{ctg} \frac{2x}{3} + 2\operatorname{tg} \frac{2x}{3} = -5$; 8) $2\sin^2 4x + 4\operatorname{ctg}^2 4x - 5 = 0$.

264. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin 7x - \cos 7x = 0$; 3) $3\cos \frac{2x}{5} + 2\sin \frac{2x}{5} = 0$;
 2) $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 0$; 4) $8\sin^2 \frac{x}{6} + 9\sin \frac{x}{6}\cos \frac{x}{6} + \cos^2 \frac{x}{6} = 0$.

265. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $6\sin^2 \frac{x}{2} - 7\sin x + 8\cos^2 \frac{x}{2} = 0$; 4) $\frac{\cos x + 2\sin x}{3\sin x - \cos x} = \frac{1}{3}$;
 2) $4\cos^2 3x + \sin 6x = 3$; 5) $1 + \cos 4x - \sin 4x = 0$;
 3) $3\cos^2 2x + \sin 4x = 3$; 6) $4\sin 5x + 3\cos 5x = 4$.

266. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $12\cos^2 \frac{x}{2} = 9 - 4\cos \frac{x}{2}\cos \frac{3x}{2}$; 3) $\sqrt{13 - 12\operatorname{tg} x} = 2\operatorname{tg} x - 1$;
 2) $\sin 2x - 4(\sin x - \cos x) + 4 = 0$; 4) $\sqrt{-\cos 2x} = \sin x$.

267. Знайдіть усі корені рівняння $\sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$, які задовольняють нерівність $0 < x < 3$.

268. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}$$

269. При яких значеннях параметра a має корені рівняння

$$\sin^2 x - (3a + 1) \sin x + 6a - 2 = 0 ?$$

270. При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить рівно 3 корені рівняння $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x = 0$?

271. Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння

$$\sin^2 x - \left(a + \frac{1}{3}\right) \sin x + \frac{a}{3} = 0$$
 має на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right)$:

- 1) один корінь; 2) 2 корені.

**Розв'язування тригонометричних рівнянь
методом розкладання на множники.**

Застосування обмеженості тригонометричних функцій

272. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\cos x + \cos 7x = 0$; 4) $\sin 3x - \sin 8x = 0$;
 2) $\sin 2x + \sin 8x = 0$; 5) $\sin 8x - \sin 2x = 2 \cos 5x$;
 3) $\cos 3x - \cos 4x = 0$; 6) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 4 = 0$;
 7) $2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin x - 2 \cos x - \sqrt{3} = 0$;
 8) $(1 + \sin x) \operatorname{ctg} x - \sin x - 1 = 0$.

273. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin 3x + \cos 2x = 0$; 3) $\sin 3x + \sin x = \sqrt{2} \sin 2x$;
 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$; 4) $\cos x + \cos 5x = \cos 3x + \cos 7x$.

274. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin 3x + 2 \sin^2 2x = 1$;
 2) $1 - \cos 8x = \sqrt{3} \sin 4x$;
 3) $\sin^2 x + \sin^2 7x = 1$;
 4) $\cos^2 4x + \cos^2 6x = \cos^2 3x + \cos^2 7x$.

275. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 5x$; 4) $\cos 7x \cos 3x = \cos 4x$;
 2) $\sqrt{2}(\sin 2x - \cos 2x) = \cos 4x$; 5) $\sin 7x \cos 5x = \cos 3x \sin 5x$;
 3) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \sin 3x$; 6) $\sin 9x = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)$.

276. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{\sin 2x + \sin 6x}{\cos 2x + \cos 6x} = 0$; 2) $\frac{\sin 2x}{1 - \sin x} = 2 \cos x$.

277. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 5x = 0$

належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$?

278. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $4 \cos \frac{x^2 + 3x}{2} = x^2 + 6x + 13$; 2) $\cos \frac{4x}{3} + \cos 3x = 2$.

279. Розв'яжіть систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \cos x + \cos y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{2}}{4}; \end{cases}$
 2) $\begin{cases} x + y = \frac{7\pi}{12}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2 \sin y. \end{cases}$

Тригонометричні нерівності

280. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$; 2) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} x \geq 1$; 4) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

281. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{1}{2}$;
 2) $\cos \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$;
 3) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{5}\right) \leq -1$.

282. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $-3 \leq \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$; 3) $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 2) $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $|\operatorname{ctg} x| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

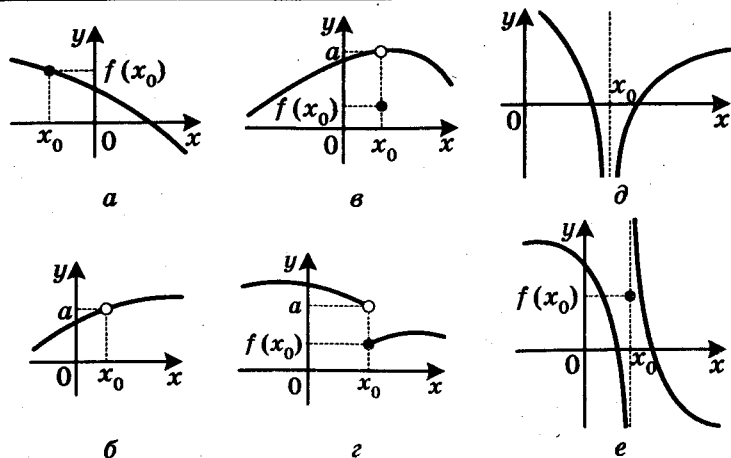


Рис. 26

283. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2\cos^2 2x \geq 1,5; \quad 2) \cos x \cos \frac{x}{2} - \sin x \sin \frac{x}{2} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

284. Розв'яжіть нерівність $\sin 2x(2\cos x - \sqrt{2}) > 0$.

Означення границі функції в точці
та функції, неперервної в точці

285. Для кожної з функцій, графіки яких зображено на рисунку 26, установіть:

- чи визначена ця функція в точці x_0 ;
- чи існує границя функції в точці x_0 ; у разі ствердної відповіді запишіть з використанням відповідної символіки, чому вона дорівнює;
- якщо границя в точці x_0 існує, то чи дорівнює вона значенню функції в цій точці.

286. Побудувавши графік функції f , з'ясуйте, чи є неперервною функція f у точці x_0 :

$$1) f(x) = \sqrt{x+2}, \quad x_0 = 3; \quad 2) f(x) = \frac{x-10}{|x-10|}, \quad x_0 = -3;$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 7-2x, & \text{якщо } x < 3, \\ x^2-8, & \text{якщо } x \geq 3, \end{cases} \quad x_0 = 3;$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{4x+24}{x+6}, & \text{якщо } x \neq -6, \\ 4, & \text{якщо } x = -6, \end{cases} \quad x_0 = -6.$$

287. Обчисліть границю:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} 2x; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7\sqrt{x}-3}{6x-\sqrt{x}}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x^2-9}.$$

Задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції

288. Знайдіть приріст функції f у точці x_0 , якщо:

$$1) f(x) = 4x + 5, \quad x_0 = -3, \quad x = 0, 2;$$

$$2) f(x) = 3 - 2x^2, \quad x_0 = 2, \quad x = 0, 3;$$

$$3) f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad \Delta x = \frac{\pi}{12}.$$

289. Для функції $f(x) = 2 - 4x$ і точки x_0 знайдіть

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ і } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

290. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 + 4$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент часу $t_0 = 5$ с.

291. Знайдіть кутовий коефіцієнт:

1) січної графіка функції $y = x^2 - 1$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 1$ і $x_1 = 1, 4$;

2) дотичної до графіка функції $y = x^2 - 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Поняття похідної

292. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = 3x - 11; \quad 4) y = \frac{1}{x^{11}}; \quad 7) y = \sqrt[3]{x};$$

$$2) y = -1; \quad 5) y = x^{1,7}; \quad 8) y = \sqrt[3]{x^7};$$

$$3) y = x^{12}; \quad 6) y = x^{-4,1}; \quad 9) y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}.$$

293. Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0 :

$$1) f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad 2) f(x) = \sin x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{6}.$$

294. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

$$1) f(x) = x^4 \sqrt{x}, \quad x_0 = 1; \quad 2) \varphi(x) = \frac{x^4}{\sqrt[5]{x}}, \quad x_0 = 1.$$

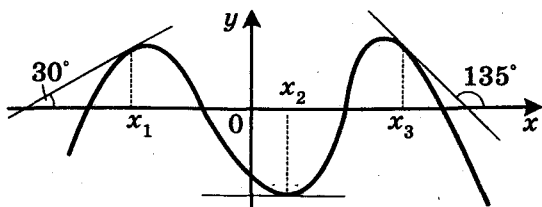


Рис. 27

295. Користуючись означенням, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = 7 - 4x$;

2) $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

296. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 :

1) $f(x) = x^7$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \frac{1}{x^5}$, $x_0 = 3$;

2) $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x_0 = 64$;

4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

297. Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 27) значення $f'(x_1)$, $f'(x_2)$ і $f'(x_3)$.

298. Дотична до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k . Знайдіть x_0 , якщо:

1) $f(x) = x^7$, $k = \frac{7}{64}$;

2) $f(x) = \cos x$, $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

299. На рисунку 28 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-9; 8]$. Укажіть точки, у яких похідна дорівнює нулю, і точки, у яких похідна не існує.

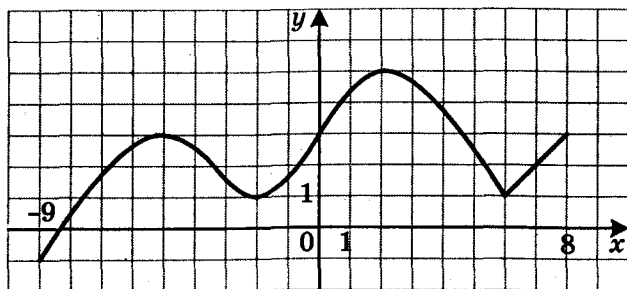


Рис. 28

300. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = \frac{1}{t^4}$. Знайдіть $s'(2)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

Правила обчислення похідних

301. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = 8x^9 - 3x^5 + 6x^3 - 2; \quad 4) y = \frac{5}{x^7} - \frac{2}{x^5};$$

$$2) y = \frac{1}{5}x^{10} + 4\sqrt{x} - 3x; \quad 5) y = \frac{x^4}{4} - \sqrt{3}\operatorname{tg}x + \sin\frac{\pi}{6} - 4x^3;$$

$$3) y = x - \frac{2}{x^2}; \quad 6) y = \sin x - \operatorname{ctg}x.$$

302. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = (x^2 - 5)(x^3 + 4); \quad 4) y = (x^4 + 2x^2 - 5)(x^2 - 2x + 2);$$

$$2) y = \sqrt{x}(2x + 4); \quad 5) y = x^3 \cos x;$$

$$3) y = (\sqrt{x} - 8)(9 - 7\sqrt{x}); \quad 6) y = 4x \operatorname{ctg}x.$$

303. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = \frac{3-5x}{3x+8}; \quad 3) y = \frac{x-3}{\sqrt{x}}; \quad 5) y = \frac{1-\sin x}{1-\cos x};$$

$$2) y = \frac{x^2+2x}{x-5}; \quad 4) y = \frac{\sqrt{x}}{3x-1}; \quad 6) y = \frac{\sin x}{2x^2}.$$

304. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = (5-4x)^3; \quad 4) y = \sqrt[3]{x^3-9x}; \quad 7) y = \sqrt{\sin 5x};$$

$$2) y = \frac{1}{(x^2-5x)^5}; \quad 5) y = \cos 9x; \quad 8) y = \frac{\sin 3x}{x-1};$$

$$3) y = \sqrt{4x-6}; \quad 6) y = \operatorname{tg}^2 x; \quad 9) y = x^3 \sin \frac{1}{x}.$$

305. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f , у точці з абсцисою x_0 :

$$1) f(x) = \cos 4x, \quad x_0 = \frac{\pi}{16}; \quad 2) f(x) = \sqrt{2x^2-4x}, \quad x_0 = -2.$$

306. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 2t^2 - 5t + 7$ (час t вимірюють у секундах, переміщення x — у метрах). Знайдіть швидкість руху в момент часу $t_0 = 3$ с.

307. Матеріальна точка масою 3 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 4t^2 + 3$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть імпульс $P(t) = mv(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 4$ с.

308. Знайдіть у точках $x_1 = 3$ і $x_2 = -1$ похідну функції:

$$1) f(x) = x^2 - 6|x| + 8; \quad 2) f(x) = |x^2 - 6x + 8|.$$

Рівняння дотичної

309. Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 , якщо:

$$1) f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 4; \quad 3) f(x) = \sqrt{x-5}, \quad x_0 = 9;$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x+3}, \quad x_0 = -2; \quad 4) f(x) = \cos \frac{1}{2}x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

310. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ у точці його перетину з віссю ординат.

311. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x-3}{x^2-3}$ у точці його перетину з віссю абсцис.

312. Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції $f(x) = x^4 - 6x^2 - 5$.

313. Знайдіть таку точку графіка функції $f(x) = x^3 - 13x - 5$, що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

314. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 3x - 5$, яка паралельна прямій $y = 7x - 2$.

315. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x-2}{3-x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$. Чи існують прямі, паралельні знайденій дотичній, які також є дотичними до графіка даної функції?

316. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 5$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

317. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 + 3$, яка проходить через точку $C(1; 3)$.

318. При яких значеннях b і c парабола $y = x^2 + bx + c$ дотикається до прямої $y = -3x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$?

Ознаки зростання і спадання функції

319. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^3 - 9x$;

4) $f(x) = \frac{4x-3}{x+1}$;

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 7$;

5) $f(x) = x + \frac{2}{x}$;

3) $f(x) = 0,2x^5 - \frac{11}{3}x^3 + 18x + 1$;

6) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$.

320. На рисунку 29 зображено графік похідної функції f , диференційовної на \mathbb{R} . Укажіть проміжки зростання функції f .

321. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$;

2) $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$.

322. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 7x - 11$ є зростаючою.

323. Знайдіть, при яких значеннях параметра a зростає на \mathbb{R} функція:

1) $f(x) = (a-1)x^2 + 6x - 7$;

2) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + 9x - 5$.

324. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = \frac{1}{3}(a-1)x^3 + 3x^2 - 7x - 8$ спадає на \mathbb{R} ?

325. Розв'яжіть рівняння $x^7 + 7x = \sin 6x$.

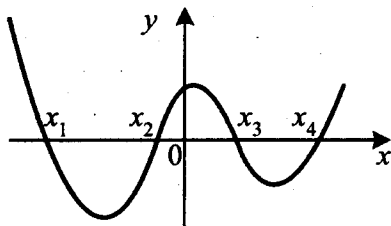


Рис. 29

Точки екстремуму функції

326. Знайдіть точки максимуму і точки мінімуму функції:

1) $f(x) = 2x^{10}$;

3) $f(x) = x^3 - 48x + 21$;

2) $f(x) = 14x - x^2$;

4) $f(x) = x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 27$.

327. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x^6 + 3x^5 - 14$;

2) $f(x) = (x+3)^2(x-1)^2$.

328. Визначте, чи має дана функція точки екстремуму:

1) $f(x) = 5x^9$;

3) $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$;

2) $f(x) = \sqrt[8]{x^3}$;

4) $f(x) = -x - \cos x$.

329. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$;

2) $f(x) = \frac{x^2-5}{x-3}$;

4) $f(x) = \frac{x^2-8x}{x+1}$.

330. На рисунку 30 зображено графік похідної функції f , визначеної на \mathbb{R} . Укажіть:

1) критичні точки функції f ;

2) точки мінімуму та точки максимуму функції f .

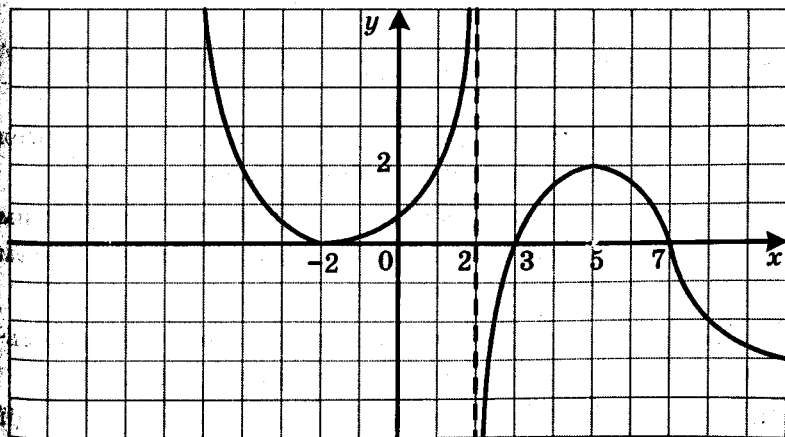


Рис. 30

331. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = x^2 \sqrt{2-x};$$

$$2) f(x) = \sin \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x.$$

332. Знайдіть, при яких значеннях параметра a функція $f(x) = \sin^2 x - (3a+2)x$:

1) не має критичних точок;

2) не має точок екстремуму.

333. При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 3$ є точкою мінімуму функції $y = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - 25)x + 8$?

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

334. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

$$1) f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2, [-1; 4];$$

$$3) f(x) = x^4 + 3x^2 - 1, [2; 3];$$

$$2) f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x, [-4; 0];$$

$$4) f(x) = \frac{x^2 + 12}{x - 2}, [-3; 1].$$

335. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

$$1) f(x) = \sqrt{15 - 2x - x^2}, [-4; 1];$$

$$2) f(x) = (x-3)^3(x+1)^2, [-2; 4];$$

$$3) f(x) = 2\cos x - \sin 2x, \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

336. Подайте число 80 у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.

337. Знайдіть таке додатне число, що різниця між квадратним коренем із цього числа та його подвоєним квадратом набуває найбільшого значення.

338. У півколо радіуса $3\sqrt{5}$ см вписано прямокутник найбільшого периметра. Знайдіть сторони прямокутника.

339. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^2 - 8|x| + 15$ на відрізку $[-5; 1]$.

Друга похідна. Поняття опуклості функції

340. Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = x^5 + 4x^3 - 7x + 8$; 3) $y = \frac{4-x}{x^2}$; 5) $y = (3x-4)^5$;

2) $y = 8\sin \frac{x}{2}$; 4) $y = \cos^2 x$; 6) $y = (x-2)^2 \sin x$.

341. Тіло масою 4 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3 - 5t + 6$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть силу $F(t) = ma(t)$, яка діє на тіло через 3 с після початку руху.

342. Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

1) $f(x) = 5x^7 - 14x^6 + 3x - 1$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$.

Побудова графіків функцій

343. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x^3 - 2x^2$; 4) $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 16}$;

2) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$; 5) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$;

3) $f(x) = (x-3)^3(x+1)^2$; 6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

344. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x - \sqrt{x-2}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$; 3) $f(x) = x\sqrt{6-x^2}$.

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ**Варіант 1****Контрольна робота № 1**

Тема. Повторення та розширення відомостей про множини та функції.

1.° Які з наведених тверджень є правильними:

1) $\{7\} \subset \{1, 7\}$; 2) $1 \subset \{1, 7\}$; 3) $\{\emptyset\} \subset \{1, 7\}$; 4) $\emptyset \subset \{1, 7\}$?

2.° Які з наведених тверджень є правильними:

1) $\{7, 9\} \cap \{9\} = \{9\}$; 3) $\{7, 9\} \cap \emptyset = \{7, 9\}$; 5) $\{7, 9\} \cup \{9\} = \{7, 9\}$;

2) $\{7, 9\} \cap \{9\} = \{7, 9\}$; 4) $\{7, 9\} \cup \emptyset = \{7, 9\}$; 6) $\{7, 9\} \setminus \{7\} = \{9\}$?

3.° Знайдіть функцію, обернену до функції $y = 9 - 3x$.

4.° Побудуйте графік функції $y = \sqrt{3|x| - 2}$.

5.° Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^3 + 4x^2 - 3x + 7$ на двочлен $x - 2$.

6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(5 - x)(x - 8)(x - 6)^2 \leq 0$; 2) $\frac{x^2 - 10x + 16}{(x - 5)^2} \leq 0$.

7.° При яких значеннях параметра a рівняння

$$|3|x| - 1| = x - a$$

має один корінь?

Контрольна робота № 2

Тема. Степенева функція.

Корінь n -го степеня та його властивості

1.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{16}$. Порівняйте:

1) $f(5,6)$ і $f(2,4)$; 3) $f(4,5)$ і $f(-4,5)$;

2) $f(-2,8)$ і $f(-7,3)$; 4) $f(0,3)$ і $f(-0,8)$.

2.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{\frac{3^9 \cdot 7^3}{2^{12}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{243}}$; 3) $\sqrt[4]{6 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{6 + 2\sqrt{5}}$.

3.° Спростіть вираз:

1) $^{20}\sqrt{a^5}$;

2) $\sqrt[4]{a^3 \sqrt[5]{a}}$.

4.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-3} - 3$ на проміжку $[-3; -2]$.

5.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[16]{a^{16}}$, якщо $a \geq 0$;

2) $\sqrt[8]{(a+9)^8}$, якщо $a \leq -9$.

6.° Знайдіть значення виразу $\sqrt[4]{31 - 8\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{15}}$.

7.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $m\sqrt[6]{5}$, якщо $m \leq 0$;

2) $ab\sqrt[4]{a^2b}$, якщо $a > 0$.

8.° Визначте кількість коренів рівняння $(x-a)(\sqrt[6]{x}-2)=0$ залежно від значення параметра a .

Контрольна робота № 3

Тема. Степінь з раціональним показником та його властивості. Ірраціональні рівняння та нерівності

1.° Спростіть вираз:

1) $a^{\frac{17}{18}} : a^{\frac{1}{12}}$; 2) $(a^3)^{-0,4} \cdot (a^{-5})^{-0,2} : (a^{-0,7})^6$; 3) $\left(a^{\frac{14}{7}} b^{\frac{3}{14}}\right)^{\frac{2 \cdot 6}{11}}$.

2.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{a - 9a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - 9}$;

2) $\frac{a^{\frac{1}{3}} - 9b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} + 3b^{\frac{1}{12}}}$;

3) $\frac{4x^4 - 4x^8 y^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{3}}}{2x^4 y^{\frac{1}{6}} - x^8 y^{\frac{1}{3}}}$.

3.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{6x+16} = x$.

4.° Побудуйте графік функції $y = \left((x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}$.

5.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2} = 2$.

6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{3-2x} < x$;

2) $\sqrt{5x-6} > x$.

7.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = 2$.

Контрольна робота № 4

Тема. Тригонометричні функції та їхні властивості

1.° Знайдіть значення виразу:

1) $\cos \frac{25\pi}{3}$; 2) $\operatorname{ctg}(-780^\circ)$.

2.° Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin 181^\circ \cos(-302^\circ) \operatorname{tg} 260^\circ$; 2) $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right) \operatorname{tg} \frac{7\pi}{5}$.

3.° Порівняйте значення виразів:

1) $\sin \frac{16\pi}{15}$ і $\sin \frac{17\pi}{16}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{4\pi}{7}\right)$ і $\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$.

4.° Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = x^4 + 4\sin^2 x \cos 2x$; 2) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\cos x}$.

5.° Знайдіть період функції $f(x) = \cos 5x + \operatorname{tg} \frac{3x}{4}$.6.° Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\operatorname{tg}^2 x \cos^2 x - 3$.

7.° Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{1}{2} |\sin 3x|$; 2) $y = \sqrt{\sin 2x - 1} - 1$.

Контрольна робота № 5

Тема. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу. Формули додавання та їхні наслідки

1.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos^2 6\alpha - 1}{1 - \sin^2 6\alpha} - \operatorname{tg} 12\alpha \operatorname{ctg} 12\alpha$; 3) $\frac{\sin 14\alpha - \sin 10\alpha}{\cos 3\alpha - \cos 7\alpha}$;

2) $\frac{4\cos^2 7\alpha}{\sin 14\alpha}$; 4) $2\cos 8\alpha \cos 9\alpha - \cos 17\alpha$.

2.° Дано: $\operatorname{tg} \alpha = 5$, $\operatorname{tg} \beta = 1,5$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\alpha + \beta$.

3.* Доведіть тотожність:

$$1) \operatorname{tg} 8\alpha - \operatorname{ctg} 8\alpha = -2\operatorname{ctg} 16\alpha;$$

$$2) \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right) - \sin(\pi + 3\alpha)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) - \cos(\pi + 5\alpha)\right)}{1 + \cos(2\pi - 2\alpha)} = \sin 8\alpha.$$

4.** Знайдіть значення виразу $\cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 96^\circ$.

Контрольна робота № 6

Тема. Тригонометричні рівняння та нерівності

1.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = 0; \quad 2) \cos\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \operatorname{tg}^2 4x + \operatorname{tg} 4x = 0.$$

2.° Розв'яжіть нерівність:

$$1) \cos \frac{x}{7} \leq \frac{1}{2}; \quad 2) \operatorname{ctg}\left(7x + \frac{2\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) 4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0; \quad 3) \sin 9x + \sin 8x + \sin 7x = 0;$$

$$2) 3\sin^2 3x - 2,5\sin 6x + 1 = 0; \quad 4) \sin 6x + \sqrt{3}\cos 6x = -2\cos 8x.$$

4.** При яких значеннях параметра a рівняння

$$\cos^2 x - (a + 2)\cos x + 3a - 3 = 0$$

має розв'язки?

Контрольна робота № 7

Тема. Похідна. Рівняння дотичної

1.° Знайдіть похідну функції:

$$1) f(x) = 2x^5 - \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 4; \quad 3) f(x) = \frac{x^2 + 9x}{x - 4};$$

$$2) f(x) = (3x - 5)\sqrt{x}; \quad 4) f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^6}.$$

2.* Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції

$$f(x) = x^4 - 2x \text{ у точці з абсцисою } x_0 = -1.$$

- 3.° Знайдіть похідну даної функції та обчисліть її значення у точці x_0 :
- 1) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $x_0 = 5$; 2) $f(x) = \sin^5 x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
- 4.° Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2,5t^2 + 24t + 7$ (час t вимірюють у секундах, переміщення s — у метрах). Знайдіть швидкість руху в момент часу $t_0 = 3$ с.
- 5.° Знайдіть абсцису точки графіка функції $f(x) = x^2 + x\sqrt{3}$, у якій проведена до нього дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 150° .
- 6.° У якій точці графіка функції $y = \frac{1}{x-1}$ треба провести дотичну, щоб вона проходила через точку з координатами $(3; 0)$?

Контрольна робота № 8

Тема. Застосування похідної до дослідження функцій

- 1.° Дано функцію $f(x) = x^4 - 8x^2$. Знайдіть:
- 1) проміжки зростання і спадання та точки екстремуму даної функції;
 - 2) найбільше і найменше значення функції f на відрізку $[1; 3]$;
 - 3) проміжки опуклості та точки перегину даної функції.
- 2.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:
- 1) $f(x) = x\sqrt{9-x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2+7x}{x-9}$; 3) $f(x) = \sqrt{3x} - 2\cos x$.
- 3.° Дослідіть функцію $f(x) = 1,5x^2 - x^3$ та побудуйте її графік.

- 4.[°] Знайдіть таке додатне число, що різниця між потроєним квадратом цього числа та його подвоєним кубом набуває найбільшого значення.
- 5.^{**} При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 2$ є точкою максимуму функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a-1}{2}x^2 + (5a-30)x - 9$?

Контрольна робота № 9

Тема. Узагальнення та систематизація знань учнів

- 1.[°] Скоротіть дріб $\frac{\sqrt[9]{a} - 9\sqrt[9]{b}}{\sqrt[6]{a} - 6\sqrt[12]{ab} + 9\sqrt[6]{b}}$.
- 2.[°] Спростіть вираз $a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{1}{4}} - 2 \right) - \left(a^{\frac{1}{4}} + 2 \right)^2$.
- 3.[°] Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{x^2-6x+8}}$.
- 4.[°] Розв'яжіть рівняння:
 - 1) $\sqrt{x+5} - \sqrt{8-x} = 1$;
 - 2) $8\sin^2 2x + 3\sin 4x = 7$.
- 5.[°] Доведіть тотожність

$$\left(\frac{\sin 8\alpha - \cos 8\alpha}{\sin 5\alpha - \cos 5\alpha} \right) \cdot \frac{\sin 6\alpha + \sin 14\alpha}{\sin 3\alpha} = 4 \cos 4\alpha.$$
- 6.[°] Дослідіть функцію $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2$ та побудуйте її графік.
- 7.^{**} Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} 5x \cos x + \sin x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

Варіант 2

Контрольна робота № 1

Тема. Повторення та розширення відомостей
про множини та функції

- 1.° Які з наведених тверджень є правильними:
1) $8 \subset \{2, 8\}$; 2) $\{\emptyset\} \subset \{2, 8\}$; 3) $\{2\} \subset \{2, 8\}$; 4) $\emptyset \subset \{2, 8\}$?
- 2.° Які з наведених тверджень є правильними:
1) $\{1, 5\} \cap \{5\} = \{1\}$; 3) $\{1, 5\} \cap \emptyset = \emptyset$; 5) $\{1, 5\} \cap \emptyset = \{1, 5\}$;
2) $\{1, 5\} \cap \{5\} = \{5\}$; 4) $\{1, 5\} \cup \emptyset = \{1, 5\}$; 6) $\{1, 5\} \setminus \{1\} = \{1\}$?
- 3.° Знайдіть функцію, обернену до функції $y = 5x - 10$.
- 4.° Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2|x| - 3}$.
- 5.° Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^3 + 6x^2 - 2x + 9$ на двочлен $x + 2$.
- 6.° Розв'яжіть нерівність:
1) $(7 - x)(x - 11)(x - 9)^2 \leq 0$; 2) $\frac{x^2 - 9x + 8}{(x - 4)^2} \leq 0$.
- 7.° При яких значеннях параметра a рівняння
$$|2|x| - 3| = a - x$$
має один корінь?

Контрольна робота № 2

Тема. Степенева функція.

Корінь n -го степеня та його властивості

- 1.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{18}$. Порівняйте:
1) $f(1,8)$ і $f(3,6)$; 3) $f(-5,4)$ і $f(5,4)$;
2) $f(-2,5)$ і $f(-1,7)$; 4) $f(0,9)$ і $f(-0,2)$.
- 2.° Знайдіть значення виразу:
1) $\sqrt[4]{\frac{5^8 \cdot 11^4}{2^{16}}}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{432}}{\sqrt[3]{2}}$; 3) $\sqrt[3]{9 - 3\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{9 + 3\sqrt{6}}$.

3.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[21]{x^7}$;

2) $\sqrt[4]{x^5 \sqrt[3]{x}}$.

4.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-5} + 1$ на проміжку $[2; 3]$.

5.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[22]{a^{22}}$, якщо $a \leq 0$;

2) $\sqrt[14]{(a-12)^{14}}$, якщо $a \geq 12$.

6.° Знайдіть значення виразу $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

7.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $n\sqrt[8]{7}$, якщо $n \leq 0$;

2) $ab\sqrt[6]{ab^2}$, якщо $b > 0$.

8.° Визначте кількість коренів рівняння $(x-a)(\sqrt[4]{x}-3)=0$ залежно від значення параметра a .

Контрольна робота № 3

Тема. Степінь з раціональним показником та його властивості. Ірраціональні рівняння та нерівності

1.° Спростіть вираз:

$$1) a^{\frac{8}{15}} : a^{-\frac{1}{6}}; \quad 2) (a^{-0,8})^4 \cdot (a^{-1,4})^{-2} : (a^{0,4})^{-6}; \quad 3) \left(a^{\frac{4^3}{8} b^{\frac{211}{12}}} \right)^{\frac{4}{35}}$$

2.° Скоротіть дріб:

$$1) \frac{m^{\frac{7}{8}} - 12}{m - 12m^{\frac{1}{8}}}; \quad 2) \frac{b^{\frac{1}{8}} + 5c^{\frac{1}{14}}}{b^{\frac{1}{4}} - 25c^{\frac{1}{7}}}; \quad 3) \frac{x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{4}} + 9y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}} + 3x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{2}}}$$

3.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{15-2x} = -x$.

4.° Побудуйте графік функції $y = \left((x-4)^{\frac{1}{5}} \right)^{-5}$.

5.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$.

6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{5-4x} < x$;

2) $\sqrt{6x-8} > x$.

7.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{8+x} = 4$.

Контрольна робота № 4

Тема. Тригонометричні функції та їхні властивості

1.° Знайдіть значення виразу:

$$1) \sin \frac{19\pi}{3}; \quad 2) \operatorname{ctg} (-765^\circ).$$

2.° Порівняйте з нулем значення виразу:

$$1) \cos 156^\circ \sin (-350^\circ) \operatorname{ctg} 230^\circ; \quad 2) \sin \frac{9\pi}{5} \operatorname{ctg} \left(-\frac{8\pi}{7}\right).$$

3.° Порівняйте значення виразів:

$$1) \operatorname{tg} \frac{20\pi}{19} \text{ і } \operatorname{tg} \frac{21\pi}{20}; \quad 2) \cos \left(-\frac{5\pi}{8}\right) \text{ і } \cos \left(-\frac{7\pi}{10}\right).$$

4.° Дослідіть на парність функцію:

$$1) f(x) = x^5 - 3\sin^3 3x \cos x; \quad 2) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\sin x}.$$

5.° Знайдіть період функції $f(x) = \sin \frac{3x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{4x}{3}$.

6.° Знайдіть найбільше і найменше значення виразу

$$\operatorname{ctg}^2 x \sin^2 x - 5.$$

7.° Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = 2 \left| \cos \frac{x}{3} \right|; \quad 2) y = \sqrt{\cos \frac{1}{2} x - 1} + 1.$$

Контрольна робота № 5

Тема. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу. Формули додавання та їхні наслідки

1.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{1 - \sin^2 8\alpha}{\cos^2 8\alpha - 1} - \operatorname{tg} 11\alpha \operatorname{ctg} 11\alpha; \quad 3) \frac{\sin 12\alpha + \sin 8\alpha}{\cos 11\alpha + \cos 7\alpha};$$

$$2) \frac{6\sin^2 10\alpha}{\sin 20\alpha}; \quad 4) 2\sin 11\alpha \cos 5\alpha - \sin 6\alpha.$$

2.° Дано: $\operatorname{tg} \alpha = 1,25$, $\operatorname{tg} \beta = 9$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\alpha + \beta$.

3.° Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{ctg} 7\alpha - \operatorname{tg} 7\alpha = 2\operatorname{ctg} 14\alpha$;

2)
$$\frac{\left(\cos(2\pi + 6\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 8\alpha\right)\right)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 8\alpha\right) - \sin(\pi - 6\alpha)\right)}{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \sin 14\alpha.$$

4.° Знайдіть значення виразу $\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$.

Контрольна робота № 6

Тема. Тригонометричні рівняння та нерівності

1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(\frac{x}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 2) $\sin\left(6x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{ctg}^2 5x - \operatorname{ctg} 5x = 0$.

2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 7x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{7} - \frac{5\pi}{6}\right) < -\sqrt{3}$.

3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4\sin^2 x - 8\cos x + 1 = 0$; 3) $\cos 7x + \cos 8x + \cos 9x = 0$;

2) $2\cos^2 2x - 2\sin 4x + 1 = 0$; 4) $\sin 10x + \cos 10x = -\sqrt{2} \sin 8x$.

4.° При яких значеннях параметра a рівняння

$$\sin^2 x - (a + 3) \sin x + 2a + 2 = 0$$

має розв'язки?

Контрольна робота № 7

Тема. Похідна. Рівняння дотичної

1.° Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 3x^6 + \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x$; 3) $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 2}$;

2) $f(x) = (2 - 5x)\sqrt{x}$; 4) $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^4}$.

- 2.° Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 3x^2 - x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.
- 3.° Знайдіть похідну даної функції та обчисліть її значення у точці x_0 :
- 1) $f(x) = \sqrt{6x+7}$, $x_0 = 3$; 2) $f(x) = \cos^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
- 4.° Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 8 + 15t + t^2 - \frac{1}{3}t^3$ (час t вимірюють у секундах, переміщення s — у метрах). Знайдіть швидкість руху в момент часу $t_0 = 4$ с.
- 5.° Знайдіть абсцису точки графіка функції $f(x) = x^2 + 3x\sqrt{3}$, у якій проведена до нього дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 120° .
- 6.** У якій точці графіка функції $y = \frac{1}{x-3}$ треба провести дотичну, щоб вона проходила через точку з координатами $(1; 0)$?

Контрольна робота № 8

Тема. Застосування похідної до дослідження функцій

- 1.° Дано функцію $f(x) = x^3 - x^2 - x + 4$. Знайдіть:
- 1) проміжки зростання і спадання та точки екстремуму даної функції;
 - 2) найбільше і найменше значення функції f на відрізку $[0; 2]$;
 - 3) проміжки опуклості та точки перегину даної функції.
- 2.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:
- 1) $f(x) = x\sqrt{12-x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2+7x}{x-9}$; 3) $f(x) = x - \sqrt{2} \sin x$.

- 3.° Дослідіть функцію $f(x) = 2x^2 - x^4$ та побудуйте її графік.
- 4.° Знайдіть таке додатне число, що різниця між цим числом і подвоєним квадратним коренем із цього числа набуває найменшого значення.
- 5.° При яких значеннях параметра a точка $x_0 = -1$ є точкою мінімуму функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a-10}{2}x^2 + (24-4a)x + 7$?

Контрольна робота № 9

Тема. Узагальнення та систематизація знань учнів

- 1.° Скоротіть дріб $\frac{\sqrt[4]{m} + 4\sqrt[8]{mn} + 4\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{m} - 4\sqrt[4]{n}}$.
- 2.° Спростіть вираз $b^{\frac{1}{6}} \left(b^{\frac{1}{6}} - 4 \right) - \left(b^{\frac{1}{6}} - 2 \right)^2$.
- 3.° Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 16}{-x^2 + 6x - 5}}$.
- 4.° Розв'яжіть рівняння:
- 1) $\sqrt{2x+7} - \sqrt{x-5} = 3$; 2) $6\cos^2 4x + 2\sin 8x = 5$.
- 5.° Доведіть тотожність
- $$\left(\frac{\cos 7\alpha}{\sin 3\alpha} + \frac{\sin 7\alpha}{\cos 3\alpha} \right) \cdot \frac{\cos 7\alpha - \cos 5\alpha}{\cos 4\alpha} = -4 \sin \alpha.$$
- 6.° Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - 3x^2$ та побудуйте її графік.
- 7.° Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 4x \cos x - \sin x - \sqrt{2} \sin 3x = 0$.

Зміст

Від авторів.....	3
Тематичний розподіл вправ	4
Вправи	6
Варіант 1.....	6
Варіант 2.....	47
Варіант 3.....	89
Контрольні роботи	132
Варіант 1.....	132
Варіант 2.....	138

Навчальне видання

Мерзляк Аркадій Григорович, Полонський Віталій Борисович,
Рабінович Юхим Михайлович, Якір Михайло Семенович

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

10 клас

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

Збірник задач і контрольних робіт

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *Т. Є. Цента*
Дизайн обкладинки *Д. В. Висоцький*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*
Коректор *А. Ю. Венза*

Формат 84x108/32. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.

Друк офсетний. Ум. друк. арк. 7,56.

Тираж 3000 прим. Замовлення № 018

ТОВ ТО «Гімназія»,

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052

Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93

E-mail: contact@gymnasia.com.ua, www.gymnasia.com.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,

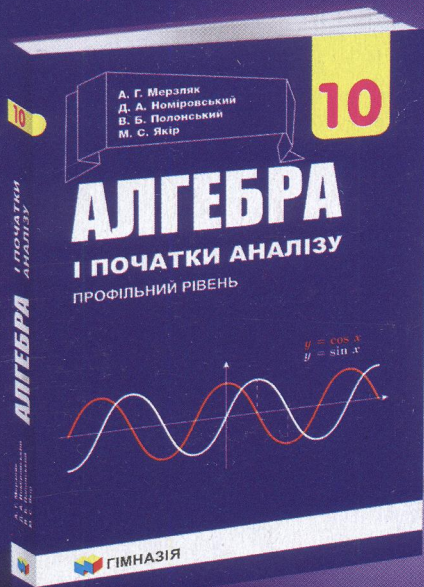
у друкарні ПП «Модем»,

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052

Тел. (057) 758-15-80

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

Видавництво «Гімназія» пропонує
навчально-методичний комплект
з алгебри і початків аналізу
(профільний рівень)
для 10 класу



61052 Харків,
вул. Восьмого Березня, 31
тел.: (057) 758-83-93, 719-17-26,
719-07-73, 719-46-80

факс: (057) 758-83-93
e-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua