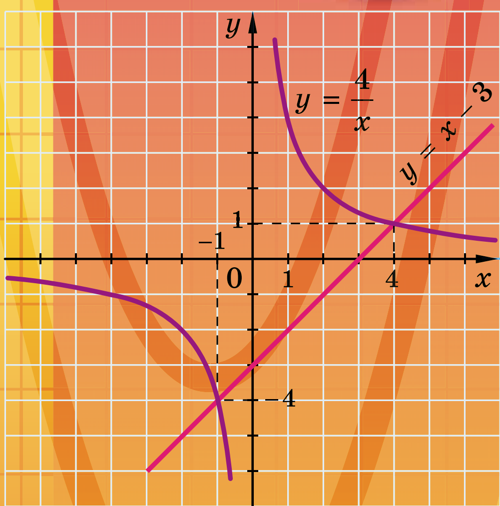
А.С. Истер

АЛГЕБРА

8



$$2\sqrt{\frac{x}{8}} - 4 = 0$$

$$2\sqrt{\frac{x}{8}} - 4 = 0$$

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я721
І-89

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(Приказ МОН Украины от 10.05.2016 № 491)

Издано за счет государственных средств.
Продажа запрещена

Переведено по изданию:
Алгебра : підруч. для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. — Київ : Генеза, 2016. — 272 с. ISBN 978-966-11-0699-3.

Эксперты, осуществившие экспертизу данного учебника во время проведения конкурсного отбора проектов учебников для учащихся 8 класса общеобразовательных учебных заведений и сделавшие вывод о целесообразности предоставления учебнику грифа «Рекомендовано Министерством образования и науки Украины»:

Бидюк В.Г., методист Новоселицкого районного методического кабинета Черновицкой области;

Грынькив О.И., учитель-методист Дидиловского УВК Каменка-Бугского района Львовской области;

Падалко Н.И., доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической физики Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки, кандидат педагогических наук.

Истер А.С.
І-89 Алгебра : учеб. для 8-го кл. общеобразоват. учеб. завед. / А.С. Истер. — Киев : Генеза, 2016. — 272 с.

ISBN 978-966-11-0752-5.

Учебник соответствует новой программе по математике, содержит достаточное количество дифференцированных упражнений и прикладных задач, упражнений для повторения, заданий для подготовки к тематическому оцениванию, в т. ч. в тестовой форме, материал для повторения курса математики 5–6 классов и курса алгебры 7 класса, задачи повышенной сложности, предметный указатель, ответы к большинству упражнений, а для самых любознательных – подборку нестандартных задач и дополнительный материал.

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-966-11-0752-5 (рус.)
ISBN 978-966-11-0699-3 (укр.)

Уважаемые учащиеся!

В этом году вы продолжите изучать одну из самых важных математических дисциплин – алгебру. Поможет вам в этом учебник, который вы держите в руках.

При изучении теоретического материала обратите внимание на текст, напечатанный **жирным** шрифтом. Его надо запомнить.

Обратите внимание и на условные обозначения:

 – необходимо запомнить;  – упражнения для повторения;

 – вопросы и задания к изученному материалу;

 – рубрика «Решите и подготовьтесь к изучению нового материала»;

1 – задание для классной работы; **2** – для домашней работы;

 – рубрика «Интересные задачки для неленивых» и дополнительный материал.

Все упражнения распределены в соответствии с уровнями учебных достижений и обозначены следующим образом:

– упражнения начального уровня;

– упражнения среднего уровня;

– упражнения достаточного уровня;

– упражнения высокого уровня.

Знаком  выделены упражнения повышенной сложности.

Проверить свои знания и подготовиться к тематическому оцениванию можно, выполняя задания «Домашней самостоятельной работы» и «Задания для проверки знаний». После каждого раздела размещены упражнения для его повторения, а в конце учебника – «Задания для проверки знаний за курс алгебры 8 класса». «Задачи повышенной сложности» помогут подготовиться к математической олимпиаде и углубить знания по математике, «Сведения из курса математики 5–6 классов и курса алгебры 7 класса» – вспомнить изученные ранее темы, «Упражнения на повторение курса алгебры 7 класса» в конце учебника – проверить свои знания на начало учебного года.

Автор старался подать теоретический материал учебника простым, доступным языком, проиллюстрировать его большим количеством примеров. После изучения теоретического материала в школе его необходимо проработать дома.

Учебник содержит много упражнений. Большинство из них вы рассмотрите на уроках и во время выполнения домашней работы, остальные упражнения рекомендуется решить самостоятельно.

Интересные факты из истории развития и становления математики как науки вы найдете в рубрике «А еще раньше...».

Уважаемые учителя!

Предлагаемый учебник содержит много упражнений; для большинства параграфов они даны «с запасом». Поэтому выбирайте их для использования на уроках и внеурочных занятиях и в качестве домашних заданий в зависимости от поставленной цели, уровня подготовки учащихся, степени дифференциации процесса обучения и т. п.

«Упражнения на повторение курса алгебры 7 класса» помогут диагностировать умения и навыки учащихся по алгебре за предыдущий год и повторить учебный материал. Дополнительные упражнения рубрики «Задания для проверки знаний» предназначены для учащихся, которые быстрее других справились с основными заданиями. Правильное их решение учитель может оценить отдельно. Упражнения для повторения разделов можно предложить учащимся во время обобщающих уроков или при повторении и систематизации учебного материала в конце учебного года. Задачи повышенной сложности и «Интересные задачки для нелленивых» помогут удовлетворить интерес учащихся к предмету и поспособствуют подготовке к различным математическим соревнованиям.

Уважаемые родители!

Если ваш ребенок пропустит один или несколько уроков алгебры, обязательно предложите ему самостоятельно проработать материал этих уроков по учебнику. Сначала он должен прочитать теоретический материал, изложенный простым, доступным языком и содержащий большое количество примеров решения упражнений, а потом из предложенных в соответствующем тематическом параграфе заданий решить посильные ему упражнения.

Во время изучения ребенком курса алгебры 8 класса вы можете предлагать ему дополнительно решать дома упражнения, которые не рассматривались на уроке. Это будет способствовать лучшему усвоению учебного материала.

Каждая тема заканчивается тематическим оцениванием. Перед его проведением предложите ребенку решить задания «Домашней самостоятельной работы», представленные в тестовой форме, и «Задания для проверки знаний». Это поможет вспомнить основные типы упражнений и качественно подготовиться к тематическому оцениванию.

Глава 1
Рациональные выражения

В этой главе вы:
- **вспомните** основное свойство обыкновенной дроби и основные свойства уравнений;
- **познакомитесь** с понятиями рациональной дроби, рационального уравнения; с функцией $y = \frac{k}{x}$, степенью с целым показателем, стандартным видом числа;
- **научитесь** сокращать рациональные дроби и приводить их к новому знаменателю; выполнять арифметические действия с рациональными дробями; решать рациональные уравнения.

§ 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

В курсе алгебры 7 класса вы уже знакомились с ***целыми рациональными выражениями***, то есть с выражениями, которые не содержат деления на выражение с переменной, например:

$$5m^2p; \quad 4c^3 + t^9; \quad (m - n)(m^2 + n^7); \quad k^9 - \frac{p + l}{4}.$$

Любое целое выражение можно представить в виде многочлена стандартного вида, например:

$$(m - n)(m^2 + n^7) = m^3 + mn^7 - nm^2 - n^8;$$

$$k^9 - \frac{p + l}{4} = k^9 - \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}l.$$

В отличие от целых выражений, выражения

$$5m - \frac{3}{p}; \quad \frac{x + 2}{y - 9}; \quad \frac{1}{5}x - \frac{19}{m^2}; \quad \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}; \quad \frac{1}{(x - y)(x^2 + 7)}$$

содержат деление на выражение с переменной. Такие выражения называют ***дробными рациональными выражениями***.

Целые рациональные и дробные рациональные выражения называют ***рациональными выражениями***.

Рациональные выражения **— это математические выражения, содержащие действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с целым показателем.**

Рациональное выражение вида $\dfrac{P}{Q}$, где P и Q – выражения, содержащие числа или переменные, называют ***дробью***. Выражение P – ее числитель, а Q – знаменатель. Если P и Q в дроби – многочлены, то дробь называют ***рациональной дробью***.

Целое рациональное выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных, так как при нахождении его значения выполняют действия сложения, вычитания, умножения и деления на число, отличное от нуля, что всегда выполнимо.

Рассмотрим дробное рациональное выражение $\dfrac{5}{x-3}$. Его значение можно найти для любого x, кроме $x = 3$, так как при $x = 3$ знаменатель дроби обращается в нуль. В этом случае говорят, что выражение $\dfrac{5}{x-3}$ имеет смысл при всех значениях переменной x, кроме $x = 3$ (или же при $x = 3$ не имеет смысла).

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных* в выражении.

Эти значения образуют ***область определения выражения***, или ***область допустимых значений переменных*** в выражении.

Пример 1. Найдите допустимые значения переменной в выражении: 1) $\dfrac{m-3}{9}$; 2) $\dfrac{5}{p+2}$; 3) $\dfrac{x+7}{x(x-9)}$; 4) $\dfrac{7}{|y|-3}$.

Решение. 1) Выражение имеет смысл при любых значениях переменной m. 2) Допустимые значения переменной p – все числа, кроме числа -2, так как это число обращает знаменатель дроби в нуль. 3) Знаменатель дроби $\dfrac{x+7}{x(x-9)}$ обращается в нуль при $x = 0$ или $x = 9$, поэтому допустимые значения переменной x – все числа, кроме чисел 0 и 9. 4) Допустимые значения переменной y – все числа, кроме 3 и -3.

Кратко ответы можно записать следующим образом:
1) m – любое число; 2) $p \neq -2$; 3) $x \neq 0$; $x \neq 9$; 4) $y \neq 3$; $y \neq -3$.

Рассмотрим *условие равенства дроби нулю*. Так как $\dfrac{0}{Q} = 0$, если $Q \neq 0$, то можно сделать вывод, что дробь $\dfrac{P}{Q}$ равна нулю тогда и только тогда, когда числитель P равен нулю, а знаменатель Q не равен нулю, то есть $\begin{cases} P = 0, \\ Q \neq 0. \end{cases}$

Пример 2. При каких значениях переменной равно нулю значение дроби:

1) $\dfrac{x-3}{x+1}$; 2) $\dfrac{(a-2)(a+1)}{a+5}$; 3) $\dfrac{b(b-7)}{b-7}$?

Решение. 1) Числитель дроби равен нулю при $x = 3$. Это значение переменной не обращает знаменатель в нуль, поэтому число 3 является значением переменной, при котором данная дробь равна нулю. 2) Числитель дроби равен нулю при $a = 2$ или $a = -1$. Для каждого из этих значений знаменатель дроби нулю не равен. Поэтому числа 2 и -1 – те значения переменной, при которых данная дробь равна нулю. 3) Числитель дроби равен нулю, если $b = 0$ или $b = 7$. При $b = 0$ знаменатель дроби нулю не равен, а при $b = 7$ знаменатель дроби обращается в нуль, то есть такой дроби не существует. Следовательно, данная дробь равна нулю только при $b = 0$.

Ответ. 1) $x = 3$; 2) $a = 2$, $a = -1$; 3) $b = 0$.

А еще раньше...

Древнегреческий математик Диофант (прибл. III в. н. э.) рассмотрел рациональные дроби и действия с ними в своей работе «Арифметика». В частности, на страницах этой книги можно встретить доказательство тождеств

$$30 \cdot \frac{144}{x^4+900-60x^2} + \frac{60}{x^2-30} = \frac{60x^2+2520}{x^4+900-60x^2}$$

$$\text{и} \quad \frac{96}{x^4+36-12x^2} - \frac{12}{6-x^2} = \frac{12x^2+24}{x^4+36-12x^2},$$

записанных символикой того времени.

Выдающийся английский ученый Исаак Ньютон (1643–1727) в своей монографии «Универсальная арифметика» (1707 г.) определяет дробь следующим образом: «Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, означает часть или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю». В этой работе Ньютон рассматривает не только обычные дроби, но и рациональные.

1. Какие выражения называют целыми рациональными выражениями, а какие – дробными рациональными выражениями? Приведите примеры таких выражений.
2. Какие выражения называют рациональными?
3. Какие дроби называют рациональными дробями?
4. Что такое допустимые значения переменной?
5. Когда дробь $\dfrac{P}{Q}$ равна нулю?

1 Начальный уровень

1. (Устно.) Какие из выражений – целые, а какие – дробные:

1) $\frac{1}{7}m^3n$; 2) $\frac{a+1}{a}$; 3) m^2+2m-8; 4) $\frac{b-2}{8}$;

5) $\frac{1}{x^2+m^2}$; 6) $\frac{x+y-a}{10}$; 7) $(p-2)^2+7p$; 8) $a^2+\frac{2}{a}$?

2. Из рациональных выражений a^3-ab; $\frac{m}{17}$; $t(t-1)+\frac{t}{p}$; $\frac{17}{a}$; $\frac{1}{9}a-\frac{1}{8}b$; $\frac{7}{x^2+1}-5$ выпишите: 1) целые; 2) дробные.

3. Какие из дробей являются рациональными дробями:

1) $\frac{a}{a^2-3}$; 2) $\frac{m\left(n+\frac{1}{k}\right)}{p^2-2}$; 3) $\frac{x^2-4x+5}{y^2-9}$; 4) $\frac{\frac{x}{x+2}}{m-3}$?

2 Средний уровень

4. Найдите значение выражения:

1) $\frac{3a+9}{a^2}$ при $a=1$; -2; -3;

2) $\frac{x+3}{x}-\frac{x}{x-2}$ при $x=4$; -1.

5. Определите фамилию выдающегося украинского авиаконструктора. Для этого найдите значения выражений из первой таблицы и перенесите соответствующие этим значениям буквы во вторую таблицу. Пользуясь любыми информационными источниками, ознакомьтесь с биографией этого авиаконструктора.

x	-3	-1	0	2	3
$\frac{1+x}{1-x}$					
Буквы	Т	В	А	О	Н

1	−2	−0,5	−3	−2	−3	0

6. Составьте дробь:

1) числителем которой является разность переменных a и b, а знаменателем – их сумма;

2) числителем которой является произведение переменных x и y, а знаменателем – сумма их квадратов.

7. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $m^2 - 5$; 2) $\dfrac{3a-5}{a}$; 3) $\dfrac{7b+9}{8}$; 4) $\dfrac{t-9}{t+1}$;

5) $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{2}{x-7}$; 6) $\dfrac{p+2}{p(p-1)}$; 7) $\dfrac{3}{x^2+1}$; 8) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{|m|+5}$.

8. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $p + 9$; 2) $\dfrac{a-7}{a+4}$; 3) $\dfrac{b-9}{4}$;

4) $\dfrac{x^2-3}{x(x+2)}$; 5) $\dfrac{2y}{y-1} + \dfrac{3}{y+6}$; 6) $\dfrac{4}{m^2+2}$.

9. За t ч автомобиль проехал 240 км. Составьте выражение для вычисления скорости автомобиля (в км/ч). Найдите значение полученного выражения при $t = 3$; 4.

10. Ученик потратил 48 грн на покупку n ручек. Составьте выражение для вычисления цены ручки (в грн) и вычислите его значение при $n = 8$; 10.

3 Достаточный уровень

11. При каком значении переменной значение дроби $\dfrac{x+2}{8}$ равно:

1) -2; 2) 9; 3) 0,01; 4) $-4{,}9$?

12. При каком значении переменной значение дроби $\dfrac{m-1}{10}$ равно:

1) -8; 2) 0,25?

13. При каком значении x равна нулю дробь:

1) $\dfrac{4x-8}{x}$; 2) $\dfrac{x(x+3)}{x^2}$;

3) $\dfrac{(x-1)(x+7)}{x+5}$; 4) $\dfrac{3x-6}{8-4x}$?

14. При каком значении y равна нулю дробь:

1) $\frac{y}{5y-7}$; 2) $\frac{(y+1)y}{y^7}$; 3) $\frac{(y+2)(y-3)}{y+4}$; 4) $\frac{y+1}{5y+5}$?

15. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\frac{a+1}{(a-1)(2a+7)}$; 2) $\frac{t+2}{t^2-7t}$; 3) $\frac{m}{m^2-25}$; 4) $\frac{5}{(x-9)^2}$.

16. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\frac{p-7}{(9-p)(4p+10)}$; 2) $\frac{a+2}{5a-a^2}$; 3) $\frac{c}{4-c^2}$; 4) $\frac{a}{(a+1)^2}$.

17. Составьте выражение с переменной x, которое имело бы смысл при любых значениях x, кроме:

1) $x = 2$; 2) $x = 1$ и $x = -4$.

4 Высокий уровень

18. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\frac{37}{a(a-2)-3a+6}$; 2) $\frac{x}{|x|-1}$; 3) $\frac{5m}{1-\frac{1}{m}}$; 4) $\frac{4k}{4-|k-2|}$.

19. Найдите область определения выражения:

1) $\frac{12}{x(x+2)-4x-8}$; 2) $\frac{m}{4-|m|}$; 3) $\frac{7}{\frac{1}{x}+1}$; 4) $\frac{2a}{|a+2|-3}$.

20. Определите знак дроби:

1) $\frac{x^7}{y^8}$, если $x > 0$, $y < 0$; 2) $\frac{m+1}{n^7}$, если $m > 0$, $n < 0$;

3) $\frac{|p-1|}{n^{19}}$, если $p < 0$, $n > 0$; 4) $\frac{|a|+1}{c^8}$, если $a < 0$, $c < 0$.

21. Докажите, что при любом значении переменной значение дроби:

1) $\frac{7}{a^2+1}$ положительно; 2) $\frac{4}{-p^2-2}$ отрицательно;

3) $\frac{(a+1)^2}{a^2+7}$ неотрицательно; 4) $\frac{-(p^2-4)^2}{p^4+1}$ неположительно.

Упражнения для повторения

22. Преобразуйте выражение в многочлен:

1) $(a^2 + 2a - 7) - (a^2 - 4a - 9)$;
2) $3x^2y(2x - 3y + 7)$;
3) $(x^2 - 2x)(x + 9)$;
4) $(x^2 - 5)^2 + 10x^2$.

23. Решите уравнение:

$4x(2x - 7) + 3x(5 - 2x) = 2x^2 + 39$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

24. Сократите дробь:

1) $\frac{7}{14}$; 2) $\frac{25}{35}$; 3) $\frac{12}{18}$; 4) $\frac{30}{45}$; 5) $\frac{36}{48}$; 6) $\frac{51}{85}$.

25. Приведите дробь:

1) $\frac{1}{8}$ к знаменателю 24;
2) $\frac{2}{7}$ к знаменателю 28;
3) $\frac{4}{15}$ к знаменателю 30;
4) $\frac{8}{9}$ к знаменателю 63.

26. Представьте в виде степени выражение:

1) m^3m^4; 2) pp^7; 3) $x^9 : x^3$;
4) $(a^3)^7$; 5) $b^2 \cdot (b^3)^4$; 6) $(c^4)^5 : c^{12}$.

27. На какое выражение нужно умножить одночлен $2a^2b$, чтобы получить:

1) $2a^3b$; 2) $2a^2b^4$; 3) $4a^5b$; 4) $16a^4b^3$?

28. Разложите на множители многочлен:

1) $ab - b^2$; 2) $m^7 + m^5$; 3) $8m^2 - 4mn$;
4) $6a^3b - 15a^2b^2$; 5) $x^2 + 6x + 9$; 6) $c^2 - 10c + 25$;
7) $x^2 - 25$; 8) $p^4 - 49m^2$; 9) $a^2 + ab + 7a + 7b$.

Интересные задачки для неленивых

29. (*Киевская городская математическая олимпиада 1985 г.*) Найдите все такие трехзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

§2. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ

Вспомним основное свойство обыкновенной дроби: *если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получим дробь, равную данной*. Иначе говоря, для любых натуральных чисел a, b и c справедливо равенство:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}} \text{ и } \boldsymbol{\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}}.$$

Докажем, что эти равенства являются верными не только для натуральных значений a, b и c, но и для любых других значений при условии $b \neq 0$ и $c \neq 0$.

Докажем сначала, что $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Пусть $\frac{a}{b} = a : b = p$. Тогда по определению частного $a = bp$. Умножим обе части этого равенства на c, получим: $ac = (bp)c$. Используя переставное и сочетательное свойства умножения, приходим к равенству: $ac = (bc)p$. Так как $b \neq 0$ и $c \neq 0$, то и $bc \neq 0$. Из последнего равенства (по определению частного) имеем: $\frac{ac}{bc} = p$. Поскольку $\frac{a}{b} = p$ и $\frac{ac}{bc} = p$, то $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Это равенство является тождеством, следовательно, можем поменять в нем левую и правую части местами:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Это тождество дает возможность заменить дробь $\frac{ac}{bc}$ на дробь $\frac{a}{b}$, то есть *сократить* дробь $\frac{ac}{bc}$ на общий множитель c числителя и знаменателя.

Свойство дроби, выраженное равенствами $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ и $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, называют *основным свойством рациональной дроби*.

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля выражение, то получим дробь, равную данной.

Рассмотрим примеры применения этого свойства для дробей на их области допустимых значений переменной.

Пример 1. Сократите дробь $\dfrac{24a^2}{16a}$.

Решение. Представим числитель и знаменатель этой дроби в виде произведений, содержащих одинаковый (общий) множитель $8a$, и сократим дробь на это выражение:

$$\frac{24a^2}{16a} = \frac{8a \cdot 3a}{8a \cdot 2} = \frac{3a}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{3a}{2}$.

Пример 2. Сократите дробь $\dfrac{x^2 - 9y^2}{5x + 15y}$.

Решение. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби: $\dfrac{(x - 3y)(x + 3y)}{5(x + 3y)}$. Сократим дробь на $x + 3y$ – общий множитель числителя и знаменателя:

$$\frac{(x - 3y)(x + 3y)}{5(x + 3y)} = \frac{x - 3y}{5}.$$

Ответ. $\dfrac{x - 3y}{5}$.

Таким образом, чтобы сократить дробь, нужно:

1) разложить на множители числитель и знаменатель дроби, если это необходимо;

2) выполнить деление числителя и знаменателя на их общий множитель и записать ответ.

Тождество $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$ дает возможность приводить дроби к заданному другому (новому) знаменателю.

Пример 3. Приведите дробь $\dfrac{5m}{4p}$ к знаменателю $12p^4$.

Решение. Поскольку $12p^4 = 4p \cdot 3p^3$, то, умножив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{5m}{4p}$ на $3p^3$, получим дробь со знаменателем $12p^4$:

$$\frac{5m}{4p} = \frac{5m \cdot 3p^3}{4p \cdot 3p^3} = \frac{15mp^3}{12p^4}.$$

Множитель $3p^3$ называют *дополнительным множителем* числителя и знаменателя дроби $\dfrac{5m}{4p}$.

О т в е т. $\dfrac{15mp^3}{12p^4}$.

Пример 4. Приведите дробь $\dfrac{7}{a-b}$ к знаменателю $b - a$.

Р е ш е н и е. Поскольку $b - a = -1 \cdot (a - b)$, то, умножив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{7}{a-b}$ на -1, получим дробь со знаменателем $b - a$: $\dfrac{7}{a-b} = \dfrac{7 \cdot (-1)}{(a-b) \cdot (-1)} = \dfrac{-7}{b-a}$.

Дробь $\dfrac{-7}{b-a}$ можно заменить тождественно равным ему выражением $-\dfrac{7}{b-a}$, так как изменение знака перед дробью приводит к изменению знака в числителе или знаменателе.

Поэтому $\dfrac{7}{a-b} = \dfrac{-7}{b-a} = -\dfrac{7}{b-a}$.

О т в е т. $-\dfrac{7}{b-a}$.

Аналогично, например, $\dfrac{c-2}{5} = -\dfrac{2-c}{5}$. Следовательно,

если изменить знак в числителе (или знаменателе) дроби одновременно со знаком перед дробью, то получим дробь, тождественно равную данной.

Это правило можно записать с помощью тождества:

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}.$$

Пример 5. Найдите область определения функции $y = \dfrac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ и постройте ее график.

Р е ш е н и е. Область определения функции – все числа, кроме тех, которые обращают знаменатель $2x - 4$ в нуль. Так как $2x - 4 = 0$ при $x = 2$, то область определения функции – все числа, кроме числа 2. Упростим дробь $\dfrac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ путем сокращения: $\dfrac{x^2 - 2x}{2x - 4} = \dfrac{x(x-2)}{2(x-2)} = \dfrac{x}{2}$. Следовательно, функция $y = \dfrac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ имеет вид $y = \dfrac{x}{2}$ при условии $x \neq 2$, а ее графиком является прямая $y = \frac{x}{2}$ без точки с абсциссой 2, то есть без точки (2; 1). Такую точку называют «выколотой» и обязательно исключают ее из графика, изображая «пустой».

График функции $y = \frac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ представлен на рисунке 1.

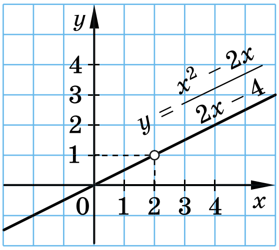


Рис. 1

1. Какими равенствами записывают основное свойство дроби? Сформулируйте это свойство.
2. Докажите тождество $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.
3. Объясните, как сократить рациональную дробь.

1 Начальный уровень

30. (Устно.) Сократите дробь:

1) $\frac{7x}{7y}$; 2) $\frac{3a}{15b}$; 3) $\frac{xy}{xm}$; 4) $\frac{ab}{b^2}$; 5) $\frac{5ac}{4ab}$; 6) $\frac{10xy}{10my}$.

31. Сократите дробь:

1) $\frac{3m}{3p}$; 2) $\frac{4x}{12y}$; 3) $\frac{ab}{ap}$; 4) $\frac{t^2}{tx}$; 5) $\frac{9xy}{8xz}$; 6) $\frac{4mn}{4pn}$.

2 Средний уровень

32. Сократите дробь:

1) $\frac{15ab}{20am}$; 2) $\frac{-2a^2m}{5ap}$; 3) $\frac{16ax^2}{20xb}$; 4) $\frac{-8m^2n}{-2n^3}$;

5) $\frac{-ap^2}{p^3c}$; 6) $\frac{4abc}{12ac^3}$; 7) $\frac{26m^2n}{39mn^2}$; 8) $\frac{a^5c^4}{-c^3a^6}$.

33. Сократите дробь:

1) $\frac{8at}{12ap}$; 2) $\frac{-3xy}{7x^2y}$; 3) $\frac{12m^2n}{20xm}$; 4) $\frac{-6p^3c}{-3p^4}$;

5) $\frac{-kp^3}{p^4t}$; 6) $\frac{5xyz}{15y^2z}$; 7) $\frac{22x^2y}{-33y^2x}$; 8) $\frac{t^7p^8}{p^6t^9}$.

34. Представьте частное в виде дроби и сократите эту дробь:

1) $12x^2y : (4xy^3)$; 2) $3a^2bc : (-18ab^2c^2)$;

3) $-10ap^3 : (-15a^2)$; 4) $-14x^9 : (2x^7y)$.

35. Приведите дробь:

1) $\frac{5}{4m}$ к знаменателю $20m$; 2) $\frac{p}{a^2}$ к знаменателю a^5.

36. Приведите дробь:

1) $\frac{4}{3p}$ к знаменателю $15p$; 2) $\frac{x}{y^3}$ к знаменателю y^7.

37. Сократите дробь:

1) $\frac{m(a-2)}{p(a-2)}$; 2) $\frac{4(x+2)^2}{(x+2)^3}$; 3) $\frac{mn(p+7)}{m^2n(p+7)^2}$; 4) $\frac{16m^3(a+3)^2}{20m^4(a+3)}$.

38. Сократите дробь:

1) $\frac{x(b+7)}{y(b+7)}$; 2) $\frac{5(m-3)^3}{(m-3)^4}$; 3) $\frac{a^2y(x-2)^2}{ay(x-2)}$; 4) $\frac{12x^3(y-7)}{16x^2(y-7)^2}$.

39. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите ее:

1) $\frac{4a+12b}{16ab}$; 2) $\frac{5x-5y}{7(x-y)}$; 3) $\frac{3m(x+2)}{x^2+2x}$; 4) $\frac{ax-a}{a}$;

5) $\frac{y}{y^2-yx}$; 6) $\frac{2x-6y}{5x-15y}$; 7) $\frac{a+2b}{a^2+2ab}$; 8) $\frac{2x^2-10xy}{x-5y}$.

40. Сократите дробь, предварительно разложив ее числитель и знаменатель на множители:

1) $\frac{3a+15b}{9ab}$; 2) $\frac{mn-m}{4(n-1)}$; 3) $\frac{p^2-3p}{4k(p-3)}$;

4) $\frac{xy-2x}{x}$; 5) $\frac{m}{m^2+mn}$; 6) $\frac{4a-12c}{7a-21c}$.

41. Сократите дробь:

1) $\frac{a(x-y)}{5(y-x)}$; 2) $\frac{3a-9b}{15b-5a}$; 3) $\frac{7y-14}{y^2-4}$;

4) $\frac{m^2-9}{m^2-6m+9}$; 5) $\frac{p^2-1}{p^3-p^2}$; 6) $\frac{x^2+10x+25}{mx+5m}$.

42. Сократите дробь:

1) $\dfrac{m(p-2)}{a(2-p)}$; 2) $\dfrac{3a+12}{a^2-16}$;

3) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; 4) $\dfrac{mc+4c}{m^2+8m+16}$.

3 Достаточный уровень

43. Сократите дробь:

1) $\dfrac{m^2n-m}{m^2-m^3n}$; 2) $\dfrac{15m^3-15mn}{10n^2-10nm^2}$;

3) $\dfrac{m^3+27}{m^2-3m+9}$; 4) $\dfrac{20+10a+5a^2}{a^3-8}$;

5) $\dfrac{3p+pn-3y-yn}{7p-7y}$; 6) $\dfrac{am+an-bm-bn}{am-an-bm+bn}$.

44. Сократите дробь:

1) $\dfrac{16p^3-16pq}{12p^3q-12pq^2}$; 2) $\dfrac{a^2-2a+4}{a^3+8}$;

3) $\dfrac{7+7a+7a^2}{a^3-1}$; 4) $\dfrac{5m+an-5n-am}{a^2-10a+25}$.

45. Приведите дробь:

1) $\dfrac{5}{a-b}$ к знаменателю a^2-ab;

2) $\dfrac{4}{m+n}$ к знаменателю $m^2+2mn+n^2$;

3) $\dfrac{9}{x-y}$ к знаменателю x^2-y^2;

4) $\dfrac{4}{k-1}$ к знаменателю k^3-1;

5) $\dfrac{a}{a-b}$ к знаменателю $b-a$;

6) $\dfrac{p}{p-2}$ к знаменателю $4-p^2$.

46. Приведите дробь:

1) $\dfrac{7}{m+n}$ к знаменателю $m^2 + mn$;

2) $\dfrac{4}{x-y}$ к знаменателю $x^2 - 2xy + y^2$;

3) $\dfrac{a}{a+b}$ к знаменателю $a^2 - b^2$;

4) $\dfrac{c}{c-7}$ к знаменателю $7 - c$.

47. Вычислите значение дроби $\dfrac{-2(c^3)^4(x^{12})^2}{5(c^5)^2(x^3)^8}$ при $c = 5$, $x = 2016$.

48. Вычислите значение дроби $\dfrac{6x^2 - 3xy}{8xy - 4y^2}$ при $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{4}$.

49. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^5 - a^3}{a^4 - a^2}$; 2) $\dfrac{p^9 + p^7}{p^5 + p^7}$; 3) $\dfrac{2a^2 - a^3}{a^6 - 2a^5}$; 4) $\dfrac{5c^5 - 10c^4}{12c^5 - 6c^6}$.

50. Упростите выражение:

1) $\dfrac{t^9 - t^8}{t^8 - t^7}$; 2) $\dfrac{a^6 + a^3}{a^9 + a^6}$; 3) $\dfrac{3b^2 - b^3}{b^8 - 3b^7}$; 4) $\dfrac{4a^4 - 8a^3}{12a^2 - 6a^3}$.

4 Высокий уровень

51. Сократите дробь:

1) $\dfrac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{48x}$; 2) $\dfrac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}$; 3) $\dfrac{(3b - 9c)^2}{5b - 15c}$.

52. Сократите дробь:

1) $\dfrac{(m+5)^2 + (m-5)^2}{m^2 + 25}$; 2) $\dfrac{a^4 - b^4}{a^3 + b^3}$; 3) $\dfrac{6m + 2n}{(12m + 4n)^2}$.

53. Найдите область определения функции и постройте ее график: 1) $y = \dfrac{x^2 + 6x}{6x + 36}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{2 - x}$.

54. Найдите область определения функции и постройте ее график: 1) $y = \dfrac{x^2 - 5x}{25 - 5x}$; 2) $y = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{3 + x}$.

Упражнения для повторения

55. Вычислите значение выражения:

1) $\frac{2^{12}}{2^{14}}$; 2) $\frac{3^9}{3^6}$; 3) $\frac{7^4}{49}$; 4) $\frac{125}{5^5}$.

56. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + 3y = 2, \\ 3x - 2y = 17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ 7x - 2y = -22. \end{cases}$

57. Упростите выражение:

1) $(2x + 3y)^2 - (x + 7y)(4x - y)$;

2) $(m + 3)(m^2 - 5) - m(m - 4)^2$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

58. Вычислите:

1) $\frac{1}{7} + \frac{3}{7}$; 2) $\frac{7}{13} + \frac{8}{13}$; 3) $\frac{9}{11} - \frac{5}{11}$; 4) $\frac{3}{17} - \frac{9}{17}$;

5) $\frac{4}{5} + \frac{1}{5}$; 6) $-\frac{11}{15} + \frac{2}{15}$; 7) $-\frac{3}{10} - \frac{7}{10}$; 8) $-\frac{2}{7} - \left(-\frac{1}{7}\right)$.

Интересные задачки для неленивых

59. (*Национальная олимпиада Великобритании, 1968 г.*) Пусть $a_1, a_2, ..., a_7$ – целые числа, а $b_1, b_2, ..., b_7$ – те же числа, взятые в другом порядке. Докажите, что число $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)...(a_7 - b_7)$ является четным.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ С ОДИНАКОВЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

Вспомним, как сложить дроби с одинаковыми знаменателями. Нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же. Например:

$$\frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{3 + 5}{11} = \frac{8}{11}.$$

Запишем это правило в виде формулы:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}.$$

Это равенство справедливо для любых дробей. Докажем его (при условии $c \neq 0$).

Пусть $\frac{a}{c} = p$ и $\frac{b}{c} = q$. Тогда по определению частного $a = cp$ и $b = cq$. Имеем: $a + b = cp + cq = c(p + q)$.

Поскольку $c \neq 0$, то по определению частного $p + q = \frac{a + b}{c}$, следовательно, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$.

Сформулируем *правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями*:

чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

Пример 1. $\frac{5p}{2x} + \frac{3p}{2x} = \frac{5p + 3p}{2x} = \frac{8p}{2x} = \frac{4p}{x}$.

Аналогично можно доказать тождество

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}} - \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}},$$

при помощи которого записывают правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Сформулируем *правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями*:

чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно от числителя уменьшаемого отнять числитель вычитаемого, а знаменатель оставить тот же.

Пример 2.

$$\frac{10x - 14}{7p} - \frac{3x}{7p} = \frac{10x - 14 - 3x}{7p} = \frac{7x - 14}{7p} = \frac{7(x - 2)}{7p} = \frac{x - 2}{p}.$$

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 3. Найдите сумму и разность дробей

$$\frac{2x + y}{2xy} \text{ и } \frac{2x - y}{2xy}.$$

Р е ш е н и е.

$$\frac{2x+y}{2xy}+\frac{2x-y}{2xy}=\frac{2x+y+2x-y}{2xy}=\frac{4x}{2xy}=\frac{2}{y};$$

$$\frac{2x+y}{2xy}-\frac{2x-y}{2xy}=\frac{2x+y-(2x-y)}{2xy}=\frac{2x+y-2x+y}{2xy}=\frac{2y}{2xy}=\frac{1}{x}.$$

О т в е т. $\frac{2}{y}$; $\frac{1}{x}$.

Пример 4. Упростите выражение

$$\frac{m^2+5m}{m^2-3m}+\frac{7}{m^2-3m}-\frac{11m-2}{m^2-3m}.$$

Р е ш е н и е.

$$\frac{m^2+5m}{m^2-3m}+\frac{7}{m^2-3m}-\frac{11m-2}{m^2-3m}=\frac{m^2+5m+7-(11m-2)}{m^2-3m}=$$

$$=\frac{m^2+5m+7-11m+2}{m^2-3m}=\frac{m^2-6m+9}{m^2-3m}=\frac{(m-3)^2}{m(m-3)}=\frac{m-3}{m}.$$

О т в е т. $\frac{m-3}{m}$.

Пример 5. Найдите сумму $\frac{10x}{y-2x}+\frac{5y}{2x-y}$.

Р е ш е н и е. Так как $2x-y=-(y-2x)$, то второе слагаемое можно записать с тем же знаменателем, что и в первом слагаемом:

$$\frac{5y}{2x-y}=\frac{5y}{-(y-2x)}=-\frac{5y}{y-2x}.$$

Тогда

$$\frac{10x}{y-2x}+\frac{5y}{2x-y}=\frac{10x}{y-2x}-\frac{5y}{y-2x}=\frac{10x-5y}{y-2x}=\frac{-5(y-2x)}{y-2x}=-5.$$

О т в е т. -5.

Если в тождествах $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ и $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ поменять местами левые и правые части, то получим тождества:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \text{ и } \frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}.$$

С помощью этих тождеств дробь, числитель которой является суммой или разностью нескольких выражений, можно записать в виде суммы или разности нескольких дробей.

Пример 6. $\frac{2x+5y-9}{xy}=\frac{2x}{xy}+\frac{5y}{xy}-\frac{9}{xy}=\frac{2}{y}+\frac{5}{x}-\frac{9}{xy}$.

Пример 7. Запишите дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби: 1) $\frac{a^2 + 2a - 7}{a}$; 2) $\frac{5m + 3n}{m + n}$.

Решение. 1) $\frac{a^2 + 2a - 7}{a} = \frac{a^2}{a} + \frac{2a}{a} - \frac{7}{a} = a + 2 - \frac{7}{a}$;

2) $\frac{5m + 3n}{m + n} = \frac{2m + 3m + 3n}{m + n} = \frac{2m + 3(m + n)}{m + n} = \frac{2m}{m + n} +$
$+ \frac{3(m + n)}{m + n} = \frac{2m}{m + n} + 3.$

Ответ. 1) $a + 2 - \frac{7}{a}$; 2) $\frac{2m}{m + n} + 3$.

1. Сформулируйте правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Докажите его.
2. Сформулируйте правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

1 Начальный уровень

60. (Устно.) Выполните действие:

1) $\frac{a}{5} + \frac{b}{5}$; 2) $\frac{x}{9} - \frac{y}{9}$; 3) $\frac{2}{a} + \frac{3}{a}$; 4) $\frac{7}{b} - \frac{5}{b}$.

61. Найдите сумму или разность:

1) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{5}$; 2) $\frac{7y}{3} - \frac{2y}{3}$; 3) $\frac{a + b}{x} - \frac{a}{x}$; 4) $\frac{7x^2}{y} + \frac{5x^2}{y}$.

62. Выполните действие:

1) $\frac{3m}{8} + \frac{2m}{8}$; 2) $\frac{9p}{17} - \frac{p}{17}$; 3) $\frac{x - y}{m} + \frac{y}{m}$; 4) $\frac{5c^2}{n} - \frac{2c^2}{n}$.

2 Средний уровень

63. Представьте в виде дроби:

1) $\frac{7a}{4x} - \frac{3a}{4x}$; 2) $\frac{x + y}{8} - \frac{x - 3y}{8}$;

3) $\frac{a + 4}{9} + \frac{5 - a}{9}$; 4) $\frac{x + 3y}{10} + \frac{4x + 7y}{10}$;

5) $\dfrac{5m-2}{8m}-\dfrac{m-10}{8m}$; 6) $\dfrac{7a+13}{6a}+\dfrac{17-a}{6a}$.

64. Упростите выражение:

1) $\dfrac{5x}{2a}+\dfrac{3x}{2a}$; 2) $\dfrac{a+b}{12}-\dfrac{a-5b}{12}$;

3) $\dfrac{b-3}{5}+\dfrac{13-b}{5}$; 4) $\dfrac{a+2b}{8}+\dfrac{3a+6b}{8}$;

5) $\dfrac{6m-3}{10m}-\dfrac{m-13}{10m}$; 6) $\dfrac{5x-3}{4x}+\dfrac{11-x}{4x}$.

65. Упростите выражение:

1) $\dfrac{3x-7y}{4xy}+\dfrac{15y-3x}{4xy}$; 2) $\dfrac{7a+p^3}{3p}-\dfrac{7a-2p^3}{3p}$;

3) $\dfrac{5a-b^4}{6b^5}-\dfrac{b^4+5a}{6b^5}$; 4) $\dfrac{3a-4}{8a}+\dfrac{4a+5}{8a}-\dfrac{1-a}{8a}$.

66. Представьте в виде дроби:

1) $\dfrac{3a-b}{ab}-\dfrac{5b+3a}{ab}$; 2) $\dfrac{9m+2k^2}{5k}-\dfrac{9m-3k^2}{5k}$;

3) $\dfrac{5b-m^2}{4m^3}-\dfrac{m^2+5b}{4m^3}$; 4) $\dfrac{4a-3}{6a}+\dfrac{a+8}{6a}-\dfrac{5-a}{6a}$.

67. Вычислите $\dfrac{3a-5}{4a^2}+\dfrac{5+a}{4a^2}$ при $a=\dfrac{1}{2}$.

68. Найдите значение выражения $\dfrac{5b-7}{6b^2}+\dfrac{7+b}{6b^2}$ при $b=\dfrac{1}{7}$.

69. Выполните действие:

1) $\dfrac{x^2}{x-5}-\dfrac{25}{x-5}$; 2) $\dfrac{36}{y+6}-\dfrac{y^2}{y+6}$;

3) $\dfrac{x-3}{x^2-9}+\dfrac{6}{x^2-9}$; 4) $\dfrac{7a-1}{a^2-b^2}-\dfrac{7b-1}{a^2-b^2}$;

5) $\dfrac{2x+y}{(x-y)^2}+\dfrac{x-4y}{(x-y)^2}$; 6) $\dfrac{9m+5n}{(m+n)^2}-\dfrac{m-3n}{(m+n)^2}$.

70. Упростите выражение:

1) $\dfrac{49}{7-m}-\dfrac{m^2}{7-m}$; 2) $\dfrac{x+7}{x^2-1}-\dfrac{6}{x^2-1}$;

3) $\dfrac{5x-2}{x^2-y^2}-\dfrac{5y-2}{x^2-y^2}$; 4) $\dfrac{3a-4b}{(a-b)^2}+\dfrac{2a-b}{(a-b)^2}$.

71. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{5}{1-x}$; 2) $\dfrac{m}{c-3}-\dfrac{p}{3-c}$;

3) $\dfrac{5x}{x-y}+\dfrac{5y}{y-x}$; 4) $\dfrac{10p}{2p-m}+\dfrac{5m}{m-2p}$.

72. Выполните действие:

1) $\dfrac{c}{a-2}+\dfrac{x}{2-a}$; 2) $\dfrac{a}{x-y}-\dfrac{8}{y-x}$;

3) $\dfrac{2m}{m-n}+\dfrac{2n}{n-m}$; 4) $\dfrac{16x}{4x-y}+\dfrac{4y}{y-4x}$.

3 Достаточный уровень

73. Выполните действие:

1) $\dfrac{m^2-m}{m^2+4m+4}-\dfrac{4-m}{m^2+4m+4}$; 2) $\dfrac{9c}{c^2-6c}-\dfrac{18+6c}{c^2-6c}$.

74. Найдите разность:

1) $\dfrac{a^2+3a}{a^2+6a+9}-\dfrac{3a+9}{a^2+6a+9}$; 2) $\dfrac{3m}{m^2-5m}-\dfrac{m+10}{m^2-5m}$.

75. Докажите тождество:

1) $\dfrac{(a-b)^2}{2ab}-\dfrac{(a+b)^2}{2ab}=-2$; 2) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

76. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{m^2}{2m-10}+\dfrac{25}{10-2m}$ при $m=25$;

2) $\dfrac{x^2+9y^2}{x-3y}+\dfrac{6xy}{3y-x}$ при $x=2016,\ y=\dfrac{1}{3}$.

77. Вычислите:

1) $\dfrac{x^2}{3x-18}+\dfrac{36}{18-3x}$ при $x=-12$;

2) $\dfrac{c^2}{c-5k} - \dfrac{25k^2-10ck}{5k-c}$ при $c = 199$, $k = 0{,}2$.

78. Представьте дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби:

1) $\dfrac{m+3}{m}$; 2) $\dfrac{a^4+a^3-5}{a^2}$; 3) $\dfrac{x^2+5x-3}{x+5}$; 4) $\dfrac{4a-4b+7}{a-b}$.

79. Представьте дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби:

1) $\dfrac{a-7}{a}$; 2) $\dfrac{m^2-m^3+7}{m^2}$; 3) $\dfrac{y^2+y+2}{y+1}$; 4) $\dfrac{5p-5q-1}{p-q}$.

4 Высокий уровень

80. Представьте выражение в виде дроби:

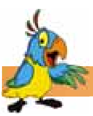
1) $\dfrac{7-4m}{(2-m)^2} - \dfrac{9-5m}{(m-2)^2}$; 2) $\dfrac{12a}{(2-a)^3} + \dfrac{3a^2+12}{(a-2)^3}$;

3) $\dfrac{m^2-6n}{(m-2)(n-3)} - \dfrac{2(m-3n)}{(2-m)(3-n)}$.

81. Упростите выражение:

1) $\dfrac{16-7a}{(3-a)^2} - \dfrac{13-6a}{(a-3)^2}$; 2) $\dfrac{15(2m-3)}{(3-m)^3} + \dfrac{5m^2}{(m-3)^3}$;

3) $\dfrac{p^2-9q}{(p-3)(q-4)} - \dfrac{3(p-3q)}{(3-p)(4-q)}$.



Упражнения для повторения

3 **82.** Представьте выражение в виде многочлена:

1) $(a-1)(a+3)^2$; 2) $(x-4)^2(x+2)$.

4 **83.** Сократите дробь

$$\frac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz}.$$

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

84. Вычислите:

1) $\frac{1}{7}+\frac{5}{14}$; 2) $\frac{5}{12}-\frac{3}{16}$; 3) $\frac{1}{8}-\frac{3}{16}+\frac{7}{24}$.

85. Представьте одночлен $15a^3b^7$ в виде произведения двух одночленов, один из которых равен:

1) $3ab^5$; 2) $-5a^2b^7$; 3) $-b^6$; 4) $15ab$.

Интересные задачки для неленивых

86. Катер по течению реки проплывает расстояние от пункта A до пункта B за 2 ч, а против течения – за 3 ч. За какое время из пункта A в пункт B проплывет плот?

§4. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ С РАЗНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

Если дроби имеют разные знаменатели, то их, как и обычные дроби, сначала приводят к общему знаменателю, а потом складывают или вычитают по правилу сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Рассмотрим, как прибавить дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Приведем эти дроби к их общему знаменателю bd. Для этого числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ умножим на d: $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, а числитель и знаменатель дроби $\frac{c}{d}$ умножим на b: $\frac{c}{d}=\frac{cb}{db}$. Дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ *привели к общему знаменателю* bd. Напомним, что d называют *дополнительным множителем* числителя и знаменателя дроби $\frac{a}{b}$, а b – дополнительным множителем числителя и знаменателя дроби $\frac{c}{d}$.

Описанную последовательность действий для сложения дробей с разными знаменателями можно записать так:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+bc}{bd},$$

или сокращенно:

$$\frac{^{d/}a}{b} + \frac{^{b/}c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Аналогично выполняют и вычитание дробей с разными знаменателями:

$$\frac{^{d/}a}{b} - \frac{^{b/}c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Пример 1. Выполните действие: 1) $\frac{3}{m} + \frac{4}{n}$; 2) $\frac{2}{a} - \frac{b}{7}$.

Решение.

1) $\frac{^{n/}3}{m} + \frac{^{m/}4}{n} = \frac{3n + 4m}{mn}$; 2) $\frac{^{7/}2}{a} - \frac{^{a/}b}{7} = \frac{14 - ab}{7a}$.

Общим знаменателем двух или более дробей может быть не только произведение их знаменателей. Вообще у дробей есть бесконечно много общих знаменателей. Часто при сложении и вычитании дробей с разными знаменателями удается найти более простой общий знаменатель, чем произведение знаменателей этих дробей. В таком случае говорят о *простейшем* общем знаменателе (аналогично *наименьшему* общему знаменателю числовых дробей).

Рассмотрим пример, где знаменатели дробей – одночлены.

Пример 2. Выполните сложение $\frac{7}{6x^2y} + \frac{3}{8xy^3}$.

Решение. Общим знаменателем данных дробей можно считать одночлен $48x^3y^2$, который является произведением знаменателей дробей, но в данном случае он не будет простейшим общим знаменателем. Попробуем найти простейший общий знаменатель, что для дробей, знаменатели которых являются одночленами, будет также одночленом. Коэффициент этого одночлена должен делиться и на 6, и на 8. Наименьшим из таких чисел будет 24. В общий знаменатель каждая из переменных должна входить с наибольшим из показателей степени, которые содержат знаменатели дробей. Таким образом, простейшим знаменателем будет одночлен $24x^2y^3$. Тогда дополнительным множителем для первой дроби станет выражение $4y^2$, так как $24x^2y^3 = 6x^2y \cdot 4y^2$, а для второй – выражение $3x$, так как $24x^2y^3 = 8xy^3 \cdot 3x$. Следовательно, имеем:

$$\frac{^{4y^2/}7}{6x^2y} + \frac{^{3x/}3}{8xy^3} = \frac{4y^2 \cdot 7 + 3x \cdot 3}{24x^2y^3} = \frac{28y^2 + 9x}{24x^2y^3}.$$

Ответ. $\frac{28y^2 + 9x}{24x^2y^3}$.

Обратите внимание, что в примере 2 при приведении дробей к общему знаменателю дополнительные множители $4y^2$ и $3x$ не содержали ни одного общего множителя, отличного от единицы. Это означает, что мы нашли простейший общий знаменатель дробей.

Рассмотрим пример, в котором знаменателями дробей являются многочлены.

Пример 3. Выполните вычитание $\frac{x+4}{xy-x^2} - \frac{y+4}{y^2-xy}$.

Р е ш е н и е. Чтобы найти общий знаменатель, разложим знаменатели на множители:

$$xy - x^2 = x(y - x) \text{ и } y^2 - xy = y(y - x).$$

Простейшим общим знаменателем дробей будет выражение $xy(y - x)$. Тогда дополнительным множителем для первой дроби станет y, а для второй – x. Выполним вычитание:

$$\frac{x+4}{xy-x^2} - \frac{y+4}{y^2-xy} = {}^{y/}\frac{x+4}{x(y-x)} - {}^{x/}\frac{y+4}{y(y-x)} = \frac{y(x+4)-x(y+4)}{xy(y-x)} =$$

$$= \frac{xy+4y-xy-4x}{xy(y-x)} = \frac{4y-4x}{xy(y-x)} = \frac{4(y-x)}{xy(y-x)} = \frac{4}{xy}.$$

О т в е т. $\frac{4}{xy}$.

Таким образом, чтобы выполнить сложение или вычитание дробей с разными знаменателями, нужно:

1) разложить на множители знаменатели дробей, если это необходимо;
2) найти общий знаменатель, лучше простейший;
3) записать дополнительные множители;
4) найти дробь, которая является суммой или разницей данных дробей;
5) упростить эту дробь и получить о т в е т.

Аналогично выполняют сложение и вычитание целого выражения и дроби.

Пример 4. Упростите выражение $a + 1 - \frac{a^2-a}{a-2}$.

Р е ш е н и е. Запишем выражение $a + 1$ в виде дроби со знаменателем 1 и выполним вычитание:

$$a + 1 - \frac{a^2-a}{a-2} = {}^{a-2/}\frac{a+1}{1} - \frac{a^2-a}{a-2} = \frac{(a-2)(a+1)-(a^2-a)}{a-2} =$$

$$= \frac{a^2 + a - 2a - 2 - a^2 + a}{a - 2} = \frac{-2}{a - 2} = -\frac{2}{a - 2} = \frac{2}{2 - a}.$$

Ответ. $\frac{2}{2 - a}$.

1. Какой знаменатель является общим для дробей $\frac{2}{n}$ и $\frac{4}{m}$?
2. Как выполнить сложение и вычитание дробей с разными знаменателями?

1 Начальный уровень

87. (Устно.) Найдите общий знаменатель дробей:

1) $\frac{a}{3}$ и $\frac{b}{6}$; 2) $\frac{x}{12}$ и $\frac{y}{8}$; 3) $\frac{a}{x}$ и $\frac{b}{y}$; 4) $\frac{c}{m}$ и $\frac{x}{3}$.

88. Выполните действие:

1) $\frac{m}{2} - \frac{y}{3}$; 2) $\frac{a}{4} + \frac{x}{8}$; 3) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$; 4) $\frac{2}{c} + \frac{k}{3}$.

89. Выполните действие:

1) $\frac{x}{5} + \frac{a}{4}$; 2) $\frac{m}{6} - \frac{n}{3}$; 3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$; 4) $\frac{t}{5} - \frac{4}{p}$.

2 Средний уровень

90. Представьте в виде дроби:

1) $\frac{3}{5a} - \frac{1}{2a}$; 2) $\frac{a}{4b} + \frac{7a}{5b}$; 3) $\frac{2a^2}{9b} + \frac{5a^2}{18b}$; 4) $\frac{7m}{12n^2} - \frac{m}{18n^2}$.

91. Выполните действие:

1) $\frac{3}{4m} + \frac{2}{5m}$; 2) $\frac{x}{6y} - \frac{3x}{8y}$; 3) $\frac{4a}{9m^2} + \frac{5a}{12m^2}$; 4) $\frac{4x^2}{15y} - \frac{x^2}{10y}$.

92. Преобразуйте в дробь выражение:

1) $\frac{2x}{3} + \frac{x - 4}{5}$; 2) $\frac{4m - 2n}{10} - \frac{m - n}{5}$; 3) $\frac{a + 2}{4a} - \frac{3 - 7a}{6a}$;

4) $\frac{2 - 3y}{y} - \frac{5 - 3x}{x}$; 5) $\frac{x + 7}{5x} - \frac{3y + 4}{15y}$; 6) $\frac{4a + b}{2a} + \frac{a - 6b}{3b}$.

93. Представьте в виде дроби:

1) $\frac{a}{4}+\frac{a-2}{3}$; 2) $\frac{2x-y}{14}-\frac{x-y}{7}$;

3) $\frac{x-6}{2x}+\frac{7-2y}{4y}$; 4) $\frac{6m-n}{3m}-\frac{8n-5m}{4n}$.

94. Выполните действие:

1) $\frac{1}{a^2}+\frac{a-2}{a}$; 2) $\frac{2+m}{m^2}-\frac{m^2-5}{m^3}$; 3) $\frac{1}{2x^5}+\frac{1-3x^2}{x^7}$;

4) $\frac{a-b}{ab}-\frac{b-a}{b^2}$; 5) $\frac{3n+m}{mn^2}+\frac{n-3m}{m^2n}$; 6) $\frac{x-2y}{xy^2}-\frac{y-2x}{x^2y}$.

95. Упростите:

1) $\frac{m+2}{m^2}-\frac{1}{m}$; 2) $\frac{5}{n^5}+\frac{3-4n^2}{n^7}$;

3) $\frac{x-y}{x^2}-\frac{y-x}{xy}$; 4) $\frac{c-2p}{cp^2}+\frac{2c-p}{pc^2}$.

96. Выполните действия:

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$; 2) $\frac{1}{c^3}-\frac{2}{c^2}+\frac{3}{c}$;

3) $\frac{1}{xy}-\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}$; 4) $\frac{a+b}{ab}-\frac{b+c}{bc}+\frac{a+c}{ac}$.

97. Выполните действия:

1) $\frac{1}{p}-\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$; 2) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}$;

3) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$; 4) $\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}+\frac{x+z}{xz}$.

98. Докажите тождество $\frac{3x+1}{7x}-\frac{y-1}{2y}-\frac{7x+y}{14xy}=\frac{1-x}{14x}$.

99. Докажите тождество $\frac{3m+2}{5m}-\frac{n-1}{2n}-\frac{5m+3n}{10mn}=\frac{m+1}{10m}$.

100. Преобразуйте в дробь выражение:

1) $x+\frac{2}{y}$; 2) $3m-\frac{1}{m}$; 3) $\frac{4}{p}-p^2$;

4) $\frac{a^2+y}{a}-a$; 5) $2x-\frac{6x^2+1}{3x}$; 6) $m+\frac{2-4mn}{4n}$.

101. Представьте выражение в виде дроби:

1) $m - \frac{3}{n}$; 2) $4p + \frac{1}{p}$; 3) $\frac{x + y^2}{y} - y$; 4) $7p - \frac{14p^2 + 3}{2p}$.

102. Упростите выражение:

1) $1 - \frac{m}{2} - \frac{n}{3}$; 2) $4 + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$;

3) $\frac{m - 2}{3} - 1 + \frac{m + 2}{4}$; 4) $\frac{1}{a + b} + a - b$.

103. Выполните действия:

1) $\frac{m}{3} + \frac{n}{4} - 1$; 2) $5 - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$;

3) $\frac{a + 3}{5} - 1 + \frac{a - 2}{2}$; 4) $\frac{1}{x - y} + x + y$.

104. Найдите сумму и разность дробей:

1) $\frac{1}{x - y}$ и $\frac{1}{x + y}$; 2) $\frac{1}{a + b}$ и $\frac{1}{a}$.

105. Найдите сумму и разность дробей:

1) $\frac{1}{2a + b}$ и $\frac{1}{2a - b}$; 2) $\frac{1}{m - n}$ и $\frac{1}{m}$.

106. Упростите выражение:

1) $\frac{2}{a} + \frac{3}{a - 1}$; 2) $\frac{c}{a - c} - \frac{c}{a}$; 3) $\frac{3}{x + y} + \frac{2}{x - y}$;

4) $\frac{x}{x - 1} + \frac{2}{x - 2}$; 5) $\frac{a + 1}{a} - \frac{a}{a - 1}$; 6) $\frac{a}{2a - 1} - \frac{a}{2a + 1}$.

107. Выполните действие:

1) $\frac{4}{b} + \frac{7}{b + 2}$; 2) $\frac{3}{m - n} - \frac{2}{m + n}$;

3) $\frac{p}{p - 2} - \frac{3}{p + 3}$; 4) $\frac{x}{1 - x} + \frac{1 + x}{x}$.

108. Выполните действие:

1) $\frac{a - 2}{2(a + 1)} + \frac{a}{a + 1}$; 2) $\frac{m}{4(a + b)} - \frac{3m}{5(a + b)}$;

3) $\frac{a - 2}{2a + 6} - \frac{a + 1}{3a + 9}$; 4) $\frac{4}{ax - ay} + \frac{5}{bx - by}$;

5) $\frac{5}{x} - \frac{30}{x(x+6)}$; 6) $\frac{6}{x^2+3x} - \frac{2}{x}$.

109. Выполните действие:

1) $\frac{m-1}{3(m+2)} + \frac{m}{m+2}$; 2) $\frac{7a}{3(b+2a)} - \frac{4a}{9(b+2a)}$;

3) $\frac{x-2}{3x-12} - \frac{x+1}{2x-8}$; 4) $\frac{3}{mx+my} + \frac{2}{nx+ny}$;

5) $\frac{4}{a} - \frac{8}{a(a+2)}$; 6) $\frac{8}{m^2+8m} - \frac{1}{m}$.

110. Представьте выражение в виде дроби:

1) $\frac{4n+m}{n^2-m^2} + \frac{1}{n+m}$; 2) $\frac{a-6}{a^2-4} + \frac{3}{a-2}$;

3) $\frac{x}{x-5} - \frac{x^2}{x^2-10x+25}$.

111. Преобразуйте выражение в дробь:

1) $\frac{4a-b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a-b}$; 2) $\frac{2}{b+3} + \frac{b+6}{b^2-9}$;

3) $\frac{m}{m+4} - \frac{m^2}{m^2+8m+16}$.

3 Достаточный уровень

112. Упростите выражение:

1) $\frac{a+4}{ab-a^2} + \frac{b+4}{ab-b^2}$; 2) $\frac{m^2}{mx-x^2} + \frac{x}{x-m}$;

3) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+2x}$; 4) $\frac{3ab-27a^2}{b^2-3ab} - \frac{3a^2-b^2}{ab-3a^2}$.

113. Упростите выражение:

1) $\frac{a-2}{ab-a^2} - \frac{2-b}{ab-b^2}$; 2) $\frac{t^2}{ta+a^2} - \frac{a}{t+a}$;

3) $\frac{4}{a^2-9} - \frac{2}{a^2+3a}$; 4) $\frac{3n^2-8m^2}{n^2-2mn} - \frac{3mn-n^2}{mn-2m^2}$.

114. Докажите тождество

$$\frac{(a-1)(a-2)}{12} - \frac{(a-1)(a-5)}{3} + \frac{(a-5)(a-2)}{4} = 1.$$

115. Представьте выражение в виде дроби:

1) $m - n - \dfrac{m^2 + n^2}{m + n}$; 2) $p - \dfrac{4}{p - 2} - 2$;

3) $a^2 - \dfrac{a^4}{a^2 - 1} + 1$; 4) $\dfrac{8p^2}{2p - 3} - 4p - 1$.

116. Представьте выражение в виде дроби:

1) $m - \dfrac{9}{m + 3} + 3$; 2) $\dfrac{6m^2}{3m + 1} - 2m + 4$.

117. Докажите, что для всех допустимых значений переменной m значение выражения $\dfrac{4m - 5}{7m - 21} - \dfrac{m - 1}{2m - 6}$ не зависит от m.

118. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x - 1}{x^2 - x + 1} + \dfrac{2 - x}{x^3 + 1}$; 2) $\dfrac{2m}{m - 5} - \dfrac{5}{m + 5} + \dfrac{2m^2}{25 - m^2}$;

3) $\dfrac{6}{m^2 - 6m} + \dfrac{m - 12}{6m - 36}$; 4) $\dfrac{3}{2a + 6} + \dfrac{a^2 - a - 3}{a^2 - 9} - 1$.

119. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a + 1}{a^2 + a + 1} + \dfrac{a + 2}{a^3 - 1}$; 2) $\dfrac{2a}{a - 3} + \dfrac{a}{a + 3} + \dfrac{2a^2}{9 - a^2}$;

3) $\dfrac{4}{m^2 + 4m} + \dfrac{m + 8}{4m + 16}$; 4) $\dfrac{2}{3b + 6} + \dfrac{b^2 - b - 2}{b^2 - 4} - 1$.

120. Докажите тождество $\dfrac{0{,}9}{0{,}25a + 0{,}5} - \dfrac{0{,}3a + 0{,}6}{0{,}5a^2 + 2a + 2} = \dfrac{3}{a + 2}$.

121. Докажите тождество $\dfrac{0{,}35}{0{,}5a - 1{,}5} - \dfrac{0{,}2a - 0{,}6}{a^2 - 6a + 9} = \dfrac{1}{2(a - 3)}$.

122. Преобразуйте выражение в дробь:

1) $\dfrac{a^2 - 2ab + 4b^2}{a^2 - 4b^2} + \dfrac{a^2 + 2ab + 4b^2}{(a + 2b)^2}$;

2) $\dfrac{2}{(a - 3)^2} - \dfrac{4}{a^2 - 9} + \dfrac{2}{(a + 3)^2}$.

123. Преобразуйте выражение в дробь:

1) $\dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2} + \dfrac{x^2 + xy + y^2}{(x + y)^2}$;

2) $\dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{2}{x^2-4} + \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

124. При каком значении a выражение $2 + \dfrac{a}{x-4}$ тождественно равно дроби $\dfrac{2x}{x-4}$?

4 Высокий уровень

125. Докажите, что значение выражения

$$\frac{a^3+3a}{a+2} - \frac{3a^2-14a+16}{a^2-4} + 2a$$

при всех допустимых значениях переменной – положительно.

126. Докажите тождество

$$a + a^2 + \frac{2a^2+3a+1}{a^2-1} - \frac{a^3+2a}{a-1} = -1.$$

127. Постройте график функции $y = 15\left(\dfrac{3x+4}{5x-10} - \dfrac{x+4}{3x-6}\right)$.

128. Найдите значение выражения

$$\frac{3a+0,5b}{9a^2-1,5ab} - \frac{12a}{9a^2-0,25b^2} - \frac{3a-0,5b}{9a^2+1,5ab}$$

при $a = -3$, $b = 19$.

129. Найдите значение выражения

$$\frac{x+0,2y}{4x^2-0,8xy} - \frac{12,5x}{12,5x^2-0,5y^2} - \frac{x-0,2y}{4x^2+0,8xy}$$

при $x = -10$, $y = 49$.

130. Существует ли такое значение x, при котором значение выражения

$$\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x} - \frac{x}{4-x^2} + \frac{x^2+4}{2x^3-8x}$$

равно нулю?

Упражнения для повторения

2 **131.** Сколько килограммов соли содержится в 60 кг ее 5-процентного раствора?

132. Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Расстояние между городами равно s км, а скорости велосипедистов v_1 км/ч и v_2 км/ч. Через t ч они встретились. Составьте формулу для вычисления t. Найдите значение t, если $s = 150$ км, $v_1 = 12$ км/ч, $v_2 = 13$ км/ч.

133. Известно, что $\frac{x}{y} = 3$. Найдите значение дроби:

1) $\frac{x+y}{y}$; 2) $\frac{x-y}{y}$; 3) $\frac{x+7y}{y}$; 4) $\frac{x^2+2xy}{xy}$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

134. Выполните умножение:

1) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16}$; 2) $\frac{3}{7} \cdot 1\frac{5}{9}$; 3) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{4}$; 4) $7\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{2}$.

135. Вычислите: 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$.

Интересные задачки для неленивых

136. Для актового зала школы приобрели люстру на 31 лампочку. Директору школы нужна возможность включать любое их количество, от 1 до 31. Какое наименьшее количество обычных выключателей для этого понадобится?

Домашняя самостоятельная работа № 1

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. Какое из выражений не является целым рациональным?

А. $\frac{1}{5}a^2xy$; **Б.** $\frac{m-3}{5}$; **В.** $\frac{5}{m-3}$; **Г.** $0,25x + y$.

2. Сократите дробь $\frac{5ax}{5xy}$.

А. $\frac{5a}{y}$; **Б.** $\frac{a}{y}$; **В.** $\frac{y}{a}$; **Г.** $\frac{a}{5y}$.

3. Выполните действие $\frac{m}{3} - \frac{5}{b}$.

А. $\frac{m-5}{3-b}$; **Б.** $\frac{3m-5b}{3b}$; **В.** $\frac{15-mb}{3b}$; **Г.** $\frac{mb-15}{3b}$.

2 **4.** Найдите допустимые значения переменной a в выражении $\frac{a-3}{a+2}$.

А. Любое число;
Б. любое число, кроме 3;
В. любое число, кроме −2;
Г. любое число, кроме −2 и 3.

5. Сократите дробь $\frac{2p+4}{p^2-4}$.

А. $\frac{2}{p-2}$; **Б.** $\frac{2}{p+2}$; **В.** $\frac{2}{p}$; **Г.** $\frac{2}{2-p}$.

6. Выполните действие $\frac{4m}{m-a} + \frac{4a}{a-m}$.

А. $\frac{4m+4a}{m-a}$; **Б.** 4; **В.** −4; **Г.** $\frac{4m+4a}{a-m}$.

3 **7.** При каких значениях x дробь $\frac{(3+x)(1-x)}{5x-5}$ равна нулю?

А. −3 и 1; **Б.** −3; **В.** 1; **Г.** Таких значений x нет.

8. Упростите выражение $\frac{2m}{m-3} + \frac{m}{m+3} + \frac{2m^2}{9-m^2}$.

А. $\frac{m}{m-3}$; **Б.** $\frac{m}{m+3}$; **В.** $\frac{5m^2+3m}{m^2-9}$; **Г.** $-\frac{1}{3}$.

9. Представьте дробь $\frac{m^3-m^4+3}{m^3}$ в виде суммы целого выражения и дроби.

А. $1 - \frac{1}{m} + \frac{3}{m^3}$; **Б.** $1 + \frac{3}{m^3}$; **В.** $1 - m + \frac{3}{m^3}$; **Г.** $1 - m + \frac{1}{m^3}$.

4 **10.** При каких значениях x выражение $\frac{x^2-9}{|x+1|-4}$ имеет смысл?

А. При любых;
Б. при $x \neq 3$;
В. при $x \neq -5$;
Г. при $x \neq 3$ и $x \neq -5$.

11. При каких значениях x дробь $\dfrac{x^2-9}{|x+1|-4}$ равна нулю?

А. 3; **Б.** 3 и −3; **В.** −3; **Г.** 3 и −5.

12. Найдите значение выражения $\dfrac{2(x-4y)}{(x-2)(y-1)} - \dfrac{x^2-8y}{(2-x)(1-y)}$ при $x = 13$, $y = 0,99$.

А. 1300; **Б.** −1300; **В.** 130; **Г.** −130.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 1–4

1

1. Какие из выражений – целые, а какие – дробные:

1) $\dfrac{1}{3}a^2b$; 2) $\dfrac{x-y}{x}$; 3) $\dfrac{c+2}{9}$; 4) $p^2 - p - 19$?

2. Сократите дробь: 1) $\dfrac{m^2}{mn}$; 2) $\dfrac{4ab}{4bc}$.

3. Выполните действие: 1) $\dfrac{a-b}{n} + \dfrac{b}{n}$; 2) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{y}$.

2

4. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\dfrac{5}{x(x-1)}$; 2) $\dfrac{2a}{a+2} + \dfrac{1}{a-3}$.

5. Сократите дробь:

1) $\dfrac{16am}{20bm}$; 2) $\dfrac{12am^2}{8mc}$; 3) $\dfrac{2m-6}{m^2-9}$; 4) $\dfrac{ax+2a}{x^2+4x+4}$.

6. Выполните действие:

1) $\dfrac{3a}{a-b} + \dfrac{3b}{b-a}$; 2) $\dfrac{5x+y}{x^2y} + \dfrac{x-5y}{xy^2}$.

3

7. Упростите выражение $\dfrac{2b}{b-4} + \dfrac{b}{b+4} + \dfrac{2b^2}{16-b^2}$.

8. Представьте дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби:

1) $\dfrac{c^2-c^3+5}{c^2}$; 2) $\dfrac{p^2-p-2}{p-1}$.

4

9. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2-4x}{16-4x}$.

Дополнительные задания

10. Найдите: 1) область определения выражения $\dfrac{x^2 - 16}{|x + 1| - 5}$;

2) значения x, при которых дробь $\dfrac{x^2 - 16}{|x + 1| - 5}$ равна нулю.

11. Упростите выражение $\dfrac{3(a - 2b)}{(a - 3)(b - 4)} - \dfrac{a^2 - 6b}{(3 - a)(4 - b)}$.

§ 5. УМНОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ. ВОЗВЕДЕНИЕ ДРОБИ В СТЕПЕНЬ

Напомним, что произведением двух обыкновенных дробей является дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель – произведению знаменателей данных дробей:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}.$$

Докажем, что это равенство является тождеством для любых значений a, b, c и d при условии, что $b \neq 0$ и $d \neq 0$.

Пусть $\dfrac{a}{b} = p$, $\dfrac{c}{d} = q$. Тогда по определению частного $a = bp$, $c = dq$. Поэтому $ac = (bp)(dq) = (bd)(pq)$. Так как $bd \neq 0$, то, снова учитывая определение частного, получим: $pq = \dfrac{ac}{bd}$. Следовательно, если $b \neq 0$ и $d \neq 0$, то $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$.

Сформулируем *правило умножения дробей*.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить отдельно числители и отдельно знаменатели сомножителей и записать первый результат в числителе, а второй – в знаменателе произведения дробей.

Пример 1. Выполните умножение $\dfrac{b^4}{9m^2} \cdot \dfrac{12m}{b^2}$.

Решение. $\dfrac{b^4}{9m^2} \cdot \dfrac{12m}{b^2} = \dfrac{b^4 \cdot 12m}{9m^2 \cdot b^2} = \dfrac{4b^2}{3m}$.

Ответ. $\dfrac{4b^2}{3m}$.

Пример 2. Найдите произведение $\dfrac{cm + cd}{2x} \cdot \dfrac{8x^3}{m^2 - d^2}$.

Р е ш е н и е. Используем правило умножения дробей и разложим на множители числитель первой дроби и знаменатель второй:

$$\frac{cm + cd}{2x} \cdot \frac{8x^3}{m^2 - d^2} = \frac{c(m + d) \cdot 8x^3}{2x(m - d)(m + d)} = \frac{4cx^2}{m - d}.$$

О т в е т. $\dfrac{4cx^2}{m - d}$.

Обратите внимание, что в примерах 1 и 2 при умножении дробей мы не находили сразу же результат умножения числителей и знаменателей. Сначала мы записали произведения в числителе и в знаменателе по правилу умножения дробей, потом сократили полученную дробь, так как она оказалась сократимой, а уже затем выполнили умножение в числителе и в знаменателе и записали ответ. Целесообразно это учитывать и в дальнейшем.

Пример 3. Умножить дробь $\dfrac{x - 2}{x^2 + 2x}$ на многочлен $x^2 + 4x + 4$.

Р е ш е н и е. Учитывая, что $x^2 + 4x + 4 = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{1}$, имеем:

$$\frac{x - 2}{x^2 + 2x} \cdot (x^2 + 4x + 4) = \frac{x - 2}{x^2 + 2x} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{1} = \frac{(x - 2)(x + 2)^2}{x(x + 2)} =$$

$$= \frac{(x - 2)(x + 2)}{x} = \frac{x^2 - 4}{x}.$$

О т в е т. $\dfrac{x^2 - 4}{x}$.

Правило умножения дробей можно распространить на произведение трех и более множителей.

Пример 4. $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{3x + 9}{x - 2} \cdot \dfrac{5x - 15}{3x^2 + 6x + 12} =$

$$= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \cdot 3(x + 3) \cdot 5(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)(x - 2) \cdot 3(x^2 + 2x + 4)} = 5.$$

Рассмотрим возведение дроби $\dfrac{a}{b}$ в степень n, где n – натуральное число.

По определению степени и правилу умножения дробей имеем:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ множителей}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ множителей}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ множителей}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Следовательно,

$$\left(\boldsymbol{\frac{a}{b}}\right)^n = \boldsymbol{\frac{a^n}{b^n}}.$$

Сформулируем правило *возведения дроби в степень.*

Чтобы возвести дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записать в числитель, а второй – в знаменатель дроби.

Пример 5. $\left(\frac{3x^2y}{5t^3}\right)^3 = \frac{(3x^2y)^3}{(5t^3)^3} = \frac{3^3(x^2)^3y^3}{5^3(t^3)^3} = \frac{27x^6y^3}{125t^9}.$

Пример 6. Представьте выражение $\left(-\frac{m^7p^{12}}{t}\right)^5$ в виде дроби.

Р е ш е н и е. $\left(-\frac{m^7p^{12}}{t}\right)^5 = (-1)^5 \cdot \frac{(m^7)^5 \cdot (p^{12})^5}{t^5} = -\frac{m^{35}p^{60}}{t^5}.$

О т в е т. $-\frac{m^{35}p^{60}}{t^5}.$

1. Сформулируйте правило умножения дробей. Докажите его.
2. Сформулируйте правило возведения дроби в степень. Докажите его.

1 Начальный уровень

137. Выполните умножение:

1) $\frac{4x}{a} \cdot \frac{b}{3m}$; 2) $\frac{2}{a} \cdot \frac{a}{5}$; 3) $\frac{5m}{4n} \cdot \frac{3}{p}$; 4) $\frac{3x}{8} \cdot \frac{1}{x}$.

138. Выполните умножение:

1) $\frac{5p}{a} \cdot \frac{x}{2b}$; 2) $\frac{b}{9} \cdot \frac{7}{b}$; 3) $\frac{4}{7a} \cdot \frac{5b}{3}$; 4) $\frac{1}{m} \cdot \frac{m}{8}$.

139. Преобразуйте в дробь выражение:

1) $\frac{a^2}{5}\cdot\frac{7}{a}$; 2) $\frac{b^4}{3}\cdot\frac{5}{b^2}$; 3) $\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{3}$; 4) $\frac{9}{x^2}\cdot\frac{x}{3}$.

140. Преобразуйте в дробь выражение:

1) $\frac{7}{b}\cdot\frac{b^2}{3}$; 2) $\frac{5}{a^3}\cdot\frac{a^5}{2}$; 3) $\frac{m}{8}\cdot\frac{1}{m^2}$; 4) $\frac{a^2}{12}\cdot\frac{4}{a}$.

2 Средний уровень

141. Выполните действие:

1) $\frac{5a}{7}\cdot\frac{21}{20a^2}$; 2) $\frac{3,5}{14a^2}\cdot\frac{4a^3}{5b}$; 3) $\frac{c^2}{30}\cdot\frac{20}{cm}$;

4) $-\frac{3m}{5a^2}\cdot\frac{a}{9m^2}$; 5) $\frac{4x^2}{7p}\cdot\left(-\frac{21p}{8x^3}\right)$; 6) $-\frac{5x^2}{7y^3}\cdot\left(-\frac{21y^2}{25x}\right)$.

142. Преобразуйте в дробь выражение:

1) $\frac{15m^2}{22}\cdot\frac{11}{10m}$; 2) $\frac{6p}{7}\cdot\frac{2,5c^2}{15p^3}$; 3) $\frac{15}{xp}\cdot\frac{x^2}{45}$;

4) $\frac{4a}{p^2}\cdot\left(-\frac{p}{8a^2}\right)$; 5) $-\frac{5c^2}{7y}\cdot\frac{49y}{10c^3}$; 6) $-\frac{6a^2}{65b^3}\cdot\left(-\frac{13b}{30a}\right)$.

143. Преобразуйте в дробь выражение:

1) $9p\cdot\frac{b}{6p^2}$; 2) $\frac{4m^3}{x^2}\cdot x^3$; 3) $9ab^2\cdot\left(-\frac{5b}{3a^3}\right)$;

4) $-7ab^3\cdot\frac{b^5}{14a}$; 5) $-4mn^2\cdot\frac{1}{8mn}$; 6) $-11a^2b\cdot\left(-\frac{5}{22a^3b^2}\right)$.

144. Выполните действие:

1) $\frac{a}{16m^2}\cdot 12m$; 2) $a^3\cdot\frac{7x^3}{a^2}$; 3) $-\frac{7y}{4x^2}\cdot 12xy^3$;

4) $5cm^4\cdot\left(-\frac{m}{15c}\right)$; 5) $-5ab^2\cdot\left(-\frac{1}{10ab}\right)$; 6) $13c^2d\cdot\frac{7}{26c^3d^2}$.

145. Упростите выражение:

1) $\frac{7c^3}{10m^2}\cdot\frac{25m^3}{14c^8}$; 2) $-\frac{8a^3}{27c^4}\cdot\frac{45c^5}{16a^3}$;

3) $\frac{4c^3}{15a^8} \cdot \left(-\frac{5a^3}{8c^4}\right)$; 4) $-\frac{1}{25p^2q^7} \cdot \left(-\frac{10p^3q^7}{11}\right)$.

146. Упростите выражение:

1) $\frac{9m^2}{25a^2} \cdot \frac{35a^3}{18m^5}$; 2) $\frac{7p^3}{18a^3} \cdot \left(-\frac{27a^4}{14p^3}\right)$;

3) $-\frac{5m^3}{21n^7} \cdot \frac{7n^2}{10m^4}$; 4) $-\frac{1}{18c^3d^4} \cdot \left(-\frac{12c^4d^4}{7}\right)$.

147. Выполните умножение:

1) $\frac{a^2 + 2a}{5} \cdot \frac{a}{4a + 8}$; 2) $\frac{7m}{a} \cdot \frac{a^2 - ab}{21}$;

3) $\frac{2a - b}{10a} \cdot \frac{15a^2}{b - 2a}$; 4) $\frac{10ab}{x + y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{5ab}$;

5) $-\frac{ab - ac}{10p} \cdot \frac{25p}{xc - xb}$; 6) $\frac{a^2 + ab}{x^2} \cdot \frac{xy}{a^2 + 2ab + b^2}$.

148. Выполните умножение:

1) $\frac{m^2 - 3m}{7} \cdot \frac{x}{2m - 6}$; 2) $\frac{5a}{x^2 + xy} \cdot \frac{x}{15}$;

3) $\frac{a - b}{16m^2} \cdot \frac{24m}{b - a}$; 4) $\frac{x^2 - y^2}{5pc} \cdot \frac{20pc}{x - y}$;

5) $\frac{3a - 3b}{12x} \cdot \left(-\frac{18x}{mb - ma}\right)$; 6) $\frac{m^2 - 2mn + n^2}{pc} \cdot \frac{p^2}{m^2 - mn}$.

149. Возведите в степень:

1) $\left(\frac{p}{4m}\right)^3$; 2) $\left(\frac{3c^2}{m}\right)^4$; 3) $\left(-\frac{3m^2n}{7}\right)^2$;

4) $\left(-\frac{2m^2}{3x^3}\right)^3$; 5) $\left(\frac{2a^3b}{x^7}\right)^5$; 6) $\left(-\frac{c^2m^3}{p}\right)^{10}$.

150. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\left(\frac{c}{5m}\right)^2$; 2) $\left(\frac{y}{2x^3}\right)^4$; 3) $\left(-\frac{4c^2m^3}{5}\right)^2$;

4) $\left(-\frac{3c^3}{m^7}\right)^3$; 5) $\left(\frac{c^3m}{2a^2}\right)^6$; 6) $\left(-\frac{ab^3}{c^2}\right)^8$.

3 Достаточный уровень

151. Упростите выражение:

1) $\dfrac{54a^2c}{81b^3} \cdot \dfrac{32ab}{13c^3} \cdot \dfrac{52bc^2}{128a^3}$; 2) $\dfrac{147x^4y^2}{p^3} \cdot 10xp^2 \cdot \dfrac{y^3}{105x^5y}$.

152. Выполните действия:

1) $\dfrac{14xz^3}{81y^2} \cdot \dfrac{27y^3}{5xz} \cdot \dfrac{45xy}{7z^2}$; 2) $\dfrac{b^3}{111m^5} \cdot 3mc^3 \cdot \dfrac{74m^3b}{c^4}$.

153. Найдите произведение:

1) $\dfrac{m^2-4m+4}{m^2+6m+9} \cdot \dfrac{m^2-9}{3m-6}$; 2) $-\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-3x+9} \cdot \dfrac{x^3+27}{25-x^2}$.

154. Выполните умножение:

1) $\dfrac{a^2+8a+16}{a^2-2a+1} \cdot \dfrac{7a-7}{a^2-16}$; 2) $-\dfrac{y^3-8}{9-y^2} \cdot \dfrac{y^2-6y+9}{y^2+2y+4}$.

155. Преобразуйте в дробь выражение:

1) $(4a+20b) \cdot \dfrac{5}{a^2-25b^2}$; 2) $(m^2-4) \cdot \dfrac{2m}{(m-2)^2}$;

3) $-\dfrac{a}{2a^2-18} \cdot (a^2-6a+9)$;

4) $(x^3+27y^3) \cdot \dfrac{5}{3x^2-9xy+27y^2}$.

156. Преобразуйте в дробь выражение:

1) $\dfrac{4}{x^2-9y^2} \cdot (6x+18y)$; 2) $(c^2+4c+4) \cdot \left(-\dfrac{c}{3c^2-12}\right)$.

157. Выполните действия:

1) $\left(\dfrac{25x^2}{8y^3}\right)^3 \cdot \left(-\dfrac{16y^5}{125x^3}\right)^2$; 2) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2} \cdot \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^3$.

158. Выполните действия:

1) $\left(-\dfrac{16m^3}{27n^5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{9n^4}{8m^2}\right)^3$; 2) $\left(\dfrac{m-n}{m+n}\right)^3 \cdot \dfrac{m^2+2mn+n^2}{m^2-2mn+n^2}$.

159. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{6ab-b}{5a+b}\cdot\dfrac{25a^2-b^2}{6a-1}$ при $a=1{,}2,\ b=6$;

2) $\dfrac{a^3+8}{a^2-1}\cdot\dfrac{a^2+a}{a^2-2a+4}$ при $a=6$.

4 Высокий уровень

160. Выполните умножение:

1) $\dfrac{x^2+ax-cx-ca}{x^2-ax+cx-ac}\cdot\dfrac{x^2+ac+xc+xa}{x^2+ac-xc-xa}$;

2) $\dfrac{5a-5b}{3c+3y}\cdot\dfrac{c^2-y^2-c-y}{a^2-b^2+a-b}$.

161. Вычислите значение выражения $\dfrac{a^2-b^2+a+b}{a^2-b^2+a-b}\cdot\dfrac{4a-4b}{8a+8b}$ при $a=100,\ b=101$.

Упражнения для повторения

162. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y)=3,\\[2mm] \dfrac{1}{3}(x-y)=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{y-1}{2}=2,\\[2mm] \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{y-1}{12}=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

163. Постройте график функции $y=\dfrac{x^3-8}{x-2}-x^2$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

164. Найдите число, взаимно обратное с числом:

1) 4; 2) -7; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) $-\dfrac{2}{5}$; 5) $0{,}16$; 6) $1{,}2$.

165. Вычислите:

1) $\dfrac{26}{45}:\dfrac{91}{135}$; 2) $2\dfrac{1}{2}:\dfrac{15}{16}$; 3) $-3\dfrac{1}{7}:2\dfrac{5}{14}$; 4) $-5\dfrac{13}{15}:\left(-1\dfrac{8}{25}\right)$.

Интересные задачки для неленивых

166. (*XV-я Всеукраинская олимпиада, 1975 г.*) При каких натуральных значениях n число $2^n + 65$ является квадратом целого числа?

§ 6. ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

Напомним, чтобы найти частное двух обыкновенных дробей, нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}.$$

Формулой это можно записать так:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}.$$

Докажем, что это равенство является тождеством для любых значений a, b, c и d при условии, что $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $d \neq 0$.

Так как $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$,

то по определению частного имеем: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Следовательно, если $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Дробь $\frac{d}{c}$ называют *обратной* дроби $\frac{c}{d}$.

Сформулируем *правило деления дробей*.

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Пример 1. Разделите дробь $\frac{21x^2}{8y^3}$ на дробь $\frac{3x}{16y^2}$.

Решение.

$$\frac{21x^2}{8y^3} : \frac{3x}{16y^2} = \frac{21x^2}{8y^3} \cdot \frac{16y^2}{3x} = \frac{21x^2 \cdot 16y^2}{8y^3 \cdot 3x} = \frac{7x \cdot 2}{y} = \frac{14x}{y}.$$

Ответ. $\frac{14x}{y}$.

Пример 2. Выполните деление $\dfrac{x^2-25}{x^2+2x} : \dfrac{3x+15}{x}$.

Решение.

$$\frac{x^2-25}{x^2+2x} : \frac{3x+15}{x} = \frac{(x-5)(x+5)}{x(x+2)} \cdot \frac{x}{3(x+5)} =$$

$$= \frac{(x-5)(x+5)x}{3x(x+2)(x+5)} = \frac{x-5}{3(x+2)} = \frac{x-5}{3x+6}.$$

Ответ. $\dfrac{x-5}{3x+6}$.

Пример 3. Упростите выражение $\dfrac{a^2-4}{5a} : (a^2+4a+4)$.

Решение. Так как $a^2+4a+4 = \dfrac{a^2+4a+4}{1}$, то:

$$\frac{a^2-4}{5a} : (a^2+4a+4) = \frac{a^2-4}{5a} : \frac{a^2+4a+4}{1} =$$

$$= \frac{(a-2)(a+2)}{5a} \cdot \frac{1}{(a+2)^2} = \frac{(a-2)(a+2)\cdot 1}{5a(a+2)^2} = \frac{a-2}{5a(a+2)} =$$

$$= \frac{a-2}{5a^2+10a}.$$

Ответ. $\dfrac{a-2}{5a^2+10a}$.

Сформулируйте правило деления дробей. Докажите его.

1 Начальный уровень

167. Выполните деление:

1) $\dfrac{2}{a} : \dfrac{3}{b}$; 2) $\dfrac{7}{x} : \dfrac{y}{2}$; 3) $\dfrac{m}{3} : \dfrac{m}{4}$; 4) $\dfrac{a^2}{2} : \dfrac{a}{7}$.

168. Выполните деление:

1) $\dfrac{5}{x} : \dfrac{2}{y}$; 2) $\dfrac{a}{2} : \dfrac{5}{b}$; 3) $\dfrac{4}{x} : \dfrac{5}{x}$; 4) $\dfrac{x^2}{3} : \dfrac{x}{2}$.

2 Средний уровень

169. Упростите выражение:

1) $\dfrac{7b}{12a} : \dfrac{21b^2}{16a}$; 2) $\dfrac{15}{2n^2} : \dfrac{3m}{8n}$; 3) $\dfrac{9b}{14a} : \dfrac{5b^2}{21a^2}$;

4) $-\frac{3x^2}{a} : \frac{6x^3}{a^2}$; 5) $14x^2 : \frac{7x}{a}$; 6) $\frac{8x^3}{7a} : (-2x^2)$;

7) $-\frac{12a^2}{b} : (16a^2)$; 8) $-40ma^5 : \left(-\frac{8m^2}{a}\right)$.

170. Выполните действие:

1) $\frac{3a^2}{b} : \frac{a}{b^2}$; 2) $-\frac{3p}{c^3} : \frac{15p^2}{c^2}$; 3) $\frac{4p}{5c} : \frac{8p^2}{15c^3}$;

4) $\frac{15m^3}{c} : (-10m^2)$; 5) $-\frac{2a^2}{b} : (-8a^2)$; 6) $-12a^2bc : \frac{4ab}{m}$.

171. Представьте частное в виде несократимой дроби:

1) $\frac{12m^2}{7c^4} : \frac{6m^4}{35c^3}$; 2) $\frac{9m^2}{22n^3} : \left(-\frac{m^5}{11n^6}\right)$;

3) $-\frac{7ab}{4cd} : \frac{21a^2b}{8cd^3}$; 4) $-\frac{27m^2n}{7c^2x} : \left(-\frac{9mn^2}{7c^2x^3}\right)$.

172. Представьте частное в виде несократимой дроби:

1) $\frac{6a^2}{5b^2} : \frac{2a^3}{15b}$; 2) $-\frac{4a^2}{27x} : \frac{a^4}{9x^3}$;

3) $\frac{5xy}{2m^2n} : \left(-\frac{15x^2y}{8mn^3}\right)$; 4) $-\frac{2ab^2}{9x^2p} : \left(-\frac{2a^2b}{27x^2p^3}\right)$.

173. Выполните деление:

1) $\frac{2a+b}{4p} : \frac{b+2a}{8p^2}$; 2) $\frac{3a-2x}{7x^2} : \frac{2x-3a}{14x}$;

3) $\frac{a^2-3a}{9y^2} : \frac{5a}{9y}$; 4) $\frac{a^2+a}{9b^2} : \frac{5+5a}{b^3}$;

5) $\frac{7ab}{c^2-3c} : \frac{14ab^2}{3c-9}$; 6) $\frac{11a}{m^2-2m} : \frac{22a^2}{6-3m}$.

174. Выполните деление:

1) $\frac{x-y}{2a^2} : \frac{y-x}{8a}$; 2) $\frac{p^2+2p}{18a^2} : \frac{7p}{9a}$;

3) $\frac{x^2+x}{9ab} : \frac{5x+5}{18a^2b}$; 4) $\frac{3x-x^2}{7p} : \frac{2x-6}{14p^2}$.

175. Упростите выражение:

1) $\dfrac{m^2-n^2}{p+2q}:\dfrac{mn+m^2}{2p+4q}$; 2) $\dfrac{6x-30}{2x+5}:\dfrac{x^2-25}{4x+10}$;

3) $\dfrac{a+2}{a-2}:\dfrac{a^2+4a+4}{5a-10}$; 4) $\dfrac{x+y}{p-2m}:\dfrac{x^2+2xy+y^2}{2m^2-mp}$.

176. Упростите выражение:

1) $\dfrac{ab+b^2}{m-3n}:\dfrac{a^2-b^2}{2m-6n}$; 2) $\dfrac{x-5}{y^2-4}:\dfrac{2x-10}{3y-6}$;

3) $\dfrac{x^2-9}{x^2+x}:\dfrac{x^2+6x+9}{7x+7}$; 4) $\dfrac{x-4y}{a^2-2ab+b^2}:\dfrac{4xy-x^2}{a-b}$.

3 Достаточный уровень

177. Выполните действия:

1) $\dfrac{4a^2}{5b^3}:\dfrac{8a^3}{7c^3}:\dfrac{14c^2}{15b^2}$; 2) $\dfrac{2a^3}{25b^3}\cdot\dfrac{10b^2}{3c^4}:\dfrac{4a^2}{15bc}$;

3) $\dfrac{c^3}{18p^4}:\left(\dfrac{9c^2}{20p^3}:\dfrac{27c^3p}{10}\right)$; 4) $\dfrac{115a^3}{34b^4}:\dfrac{92a^6}{51b^3}\cdot\dfrac{4b^2}{15a^2}$.

178. Представьте в виде несократимой дроби выражение:

1) $\dfrac{3a^2}{2b^2c^2}:\dfrac{7c^6}{6b^3}:\dfrac{9ab}{14c^2}$; 2) $\dfrac{7x^3}{4y^2}\cdot\dfrac{216x^6}{343y^3}:\dfrac{18x^8}{49y^4}$.

179. Выполните деление:

1) $\dfrac{9+6a+4a^2}{2a-1}:\dfrac{27-8a^3}{1-4a^2}$; 2) $\dfrac{8+x^3}{16-x^4}:\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+4}$;

3) $(25x^2-10xy+y^2):\dfrac{y^2-5xy}{7}$;

4) $\dfrac{(6y-4x)^2}{3}:(9y^2-12xy+4x^2)$.

180. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{x^3-8}{9x^2-16}:\dfrac{x^2+2x+4}{3x-4}$ при $x=-3$;

2) $(m^2-10mn+25n^2):\dfrac{0,2m^2-5n^2}{5}$ при $m=10,\ n=3$.

181. Найдите значение выражения:

1) $\left(\dfrac{a^2y^3}{5}\right)^3 : \left(-\dfrac{a^3y^4}{25}\right)^2$ при $a = 117\dfrac{1}{3}$, $y = 0{,}02$;

2) $\dfrac{(2x-y)^2}{(x-2y)^2} : \dfrac{4x^2-y^2}{x^2-4y^2}$ при $x = 4{,}2$, $y = 1{,}6$.

4 Высокий уровень

182. Упростите выражение $\dfrac{0{,}5a^2-32}{0{,}5a^3-62{,}5} : \dfrac{0{,}2a+1{,}6}{0{,}2a^2+a+5}$.

183. Докажите тождество $\dfrac{m^3+27}{75m^2-12} : \dfrac{\frac{1}{3}m^2-m+3}{m-0{,}4} = \dfrac{m+3}{25m+10}$.

184. Упростите $\dfrac{6ab+6-4a-9b}{a^2-12a+36} : \dfrac{9b^2-12b+4}{3ab-18b-2a+12}$.

185. Выполните действие $\dfrac{a+4}{x-a} : \dfrac{ab+4b-2a-8}{cx+xy-ac-ay}$.

Упражнения для повторения

3 **186.** Представьте дробь в виде суммы или разности двух дробей:

1) $\dfrac{2a-b}{ab}$; 2) $\dfrac{7y^2+y^3}{y^5}$;

3) $\dfrac{4m^2+5n^2}{m^2n}$; 4) $\dfrac{18x-24x^2y}{30y^2}$.

187. Вычислите значение дроби:

1) $\dfrac{m^2+6mn+9n^2}{(2m+6n)^2}$ при $m = 2\dfrac{1}{13}$, $n = -2\dfrac{1}{7}$;

2) $\dfrac{0{,}1x^2-2{,}5y^2}{x^2+10xy+25y^2}$ при $x = 100$, $y = 20$.

4 **188.** Докажите тождество

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{8}{1-x^8}.$$

Интересные задачки для неленивых

189. Украинский гроссмейстер по шахматам Василий Иванчук участвовал в чемпионате мира по блицу. В первый день он победил соперников в 70 % партий, а во второй день выиграл еще 15 партий подряд. Доля выигрышных партий за два дня достигла 80 %. Сколько партий за эти два дня сыграл Василий Иванчук?

§ 7. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Рассмотрим примеры преобразований рациональных выражений.

Пример 1. Докажите тождество $\frac{6x+y}{3x} - \frac{5y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y} = 2.$

Р е ш е н и е. Упростим левую часть равенства:

$$\frac{6x+y}{3x} - \frac{5y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y} = \frac{6x+y}{3x} - \frac{5y^2 \cdot x}{x^2 \cdot 15y} = \frac{6x+y}{3x} - \frac{y}{3x} =$$

$$= \frac{6x+y-y}{3x} = \frac{6x}{3x} = 2.$$

С помощью тождественных преобразований мы привели левую часть равенства к правой. Следовательно, равенство является тождеством.

Пример 2. Упростите выражение

$$\left(\frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{1}{y-2x}\right) : \left(\frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2}\right).$$

Р е ш е н и е. Сначала выполним действие в каждой из скобок, а потом – действие деления:

$$1)\ \frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{1}{y-2x} = \frac{2x}{(2x-y)(2x+y)} - \frac{{}^{2x+y/}1}{2x-y} =$$

$$= \frac{2x-(2x+y)}{(2x-y)(2x+y)} = \frac{2x-2x-y}{(2x-y)(2x+y)} = -\frac{y}{(2x-y)(2x+y)} =$$

$$= \frac{y}{(y-2x)(2x+y)};$$

$$2)\ \frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2} = \frac{{}^{2x+y/}2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{(2x+y)^2} =$$

$$= \frac{2x(2x+y)-4x^2}{(2x+y)^2} = \frac{4x^2+2xy-4x^2}{(2x+y)^2} = \frac{2xy}{(2x+y)^2};$$

3) $$\frac{y}{(y-2x)(2x+y)} : \frac{2xy}{(2x+y)^2} = \frac{y \cdot (2x+y)^2}{(y-2x)(2x+y) \cdot 2xy} =$$

$$= \frac{2x+y}{2x(y-2x)} = \frac{2x+y}{2xy-4x^2}.$$ О т в е т: $\dfrac{2x+y}{2xy-4x^2}$.

Решение можно было записать и в виде «цепочки»:

$$\left(\frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{1}{y-2x}\right) : \left(\frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2x}{(2x-y)(2x+y)} - \frac{{}^{2x+y/}1}{2x-y}\right) : \left(\frac{{}^{2x+y/}2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{(2x+y)^2}\right) =$$

$$= \frac{2x-(2x+y)}{(2x-y)(2x+y)} : \frac{2x(2x+y)-4x^2}{(2x+y)^2} =$$

$$= \frac{(2x-2x-y)(2x+y)^2}{(2x-y)(2x+y)(4x^2+2xy-4x^2)} = \frac{-y(2x+y)}{(2x-y)\cdot 2xy} =$$

$$= -\frac{2x+y}{2x(2x-y)} = \frac{2x+y}{2x(y-2x)} = \boldsymbol{\frac{2x+y}{2xy-4x^2}}.$$

Каждое выражение, содержащее сумму, разность, произведение и частное рациональных дробей, можно представить в виде рациональной дроби.

Пример 3. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение дроби $\dfrac{\dfrac{3x^3-y}{y}+1}{\dfrac{3x+y}{y}-1}$ – неотрицательно.

Р е ш е н и е. Можно представить эту дробь в виде частного $\left(\dfrac{3x^3-y}{y}+1\right) : \left(\dfrac{3x+y}{y}-1\right)$ и далее преобразовать ее, как предложено в примере 2.

А можно, используя основное свойство дроби, умножить числитель и знаменатель данной дроби на их общий знаменатель, то есть на y:

$$\frac{\dfrac{3x^3-y}{y}+1}{\dfrac{3x+y}{y}-1} = \frac{\left(\dfrac{3x^3-y}{y}+1\right)y}{\left(\dfrac{3x+y}{y}-1\right)y} = \frac{\dfrac{(3x^3-y)y}{y}+y}{\dfrac{(3x+y)y}{y}-y} = \frac{3x^3-y+y}{3x+y-y} =$$

$= \dfrac{3x^3}{3x} = x^2$, но $x^2 \geqslant 0$ при любом значении x.

2 Средний уровень

190. Выполните действия:

1) $\dfrac{12a+b}{3a}-\dfrac{7b^2}{a^2}\cdot\dfrac{a}{21b}$;
2) $\dfrac{m^2-n^2}{x^2-9}\cdot\dfrac{x-3}{m-n}-\dfrac{m}{x+3}$;
3) $\dfrac{a-b}{2a+b}+\dfrac{1}{a-b}:\dfrac{2a+b}{a^2-b^2}$;
4) $x-\dfrac{x^2-xy}{x+y}\cdot\dfrac{x}{x-y}$.

191. Выполните действия:

1) $\dfrac{10x+y}{5x}-\dfrac{3y^2}{x^2}\cdot\dfrac{x}{15y}$;
2) $\dfrac{a^2-4}{9-b^2}:\dfrac{a-2}{3+b}-\dfrac{2}{3-b}$;
3) $\dfrac{x+y}{3x-y}+\dfrac{1}{x+y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{3x-y}$;
4) $m+\dfrac{m^2+mn}{n-m}\cdot\dfrac{m}{m+n}$.

192. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{x}{7}+\dfrac{7}{x}+2\right)\cdot\dfrac{1}{x+7}$;
2) $\left(1+\dfrac{m}{3n}\right):\left(1-\dfrac{m}{3n}\right)$;
3) $\left(\dfrac{a}{a+2}-3a\right)\cdot\dfrac{a+2}{a}$;
4) $\left(2+\dfrac{x}{x+1}\right):\dfrac{9x+6}{5x^2+5x}$.

193. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{m}{5}+\dfrac{5}{m}-2\right)\cdot\dfrac{1}{m-5}$;
2) $\left(1-\dfrac{x}{y}\right):\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$;
3) $\left(\dfrac{b}{b-3}-2b\right)\cdot\dfrac{b-3}{b}$;
4) $\left(3-\dfrac{m}{m+2}\right):\dfrac{4m+12}{m^2+2m}$.

194. Докажите тождество:

1) $\left(1-\dfrac{2a}{b}+\dfrac{a^2}{b^2}\right)\cdot\dfrac{b}{a-b}=\dfrac{a-b}{b}$;
2) $\left(\dfrac{m}{n^2}-\dfrac{1}{m}\right):\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right)=\dfrac{m+n}{n}$.

195. Докажите тождество:

1) $\left(1+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)\cdot\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{x+y}{y}$;
2) $\left(\dfrac{2m}{n^2}-\dfrac{1}{2m}\right):\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2m}\right)=\dfrac{2m-n}{n}$.

3 Достаточный уровень

196. Выполните действия:

1) $\left(\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}\right)\cdot\dfrac{x^2-4}{4x}$;

2) $\left(\dfrac{a+3}{a-3}-\dfrac{a-3}{a+3}\right):\dfrac{24a}{a^2-6a+9}$.

197. Выполните действия:

1) $\dfrac{8m}{m^2-1}:\left(\dfrac{m+1}{m-1}-\dfrac{m-1}{m+1}\right)$; 2) $\left(\dfrac{a-2}{a+2}+\dfrac{a+2}{a-2}\right)\cdot\dfrac{a^2-4a+4}{2a^2+8}$.

198. Упростите выражение:

1) $\dfrac{36}{a-3}:\left(\dfrac{a+3}{a-3}-\dfrac{a-3}{a+3}+\dfrac{36}{a^2-9}\right)$;

2) $\left(\dfrac{2x+y}{x-2y}+\dfrac{2x-y}{x+2y}\right)\cdot\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+y^2}$.

199. Упростите выражение:

1) $\dfrac{16}{x+2}:\left(\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{16}{x^2-4}-\dfrac{x-2}{x+2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{5a+1}{a-2}+\dfrac{5a-1}{a+2}\right)\cdot\dfrac{a^2-4}{5a^2+2}$.

200. Докажите тождество

$$\left(\frac{a}{a-5}-\frac{a}{a+5}-\frac{a^2+25}{25-a^2}\right)\cdot\frac{a-5}{a^2+10a+25}=\frac{1}{a+5}.$$

201. Докажите тождество

$$\left(\frac{b}{b+7}+\frac{b^2+49}{b^2-49}-\frac{b}{b-7}\right):\frac{b-7}{b^2+14b+49}=b+7.$$

202. Выполните действия:

1) $\left(\dfrac{1}{1-a^2}-\dfrac{1}{a^2+2a+1}\right):\dfrac{2a}{a^2-1}$;

2) $\left(\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x+3}{2x+2}+\dfrac{6}{2x^2-2}\right)\cdot\dfrac{4x^2-4}{5}$.

203. Выполните действия:

1) $\left(\dfrac{1}{4-a^2}-\dfrac{1}{a^2-4a+4}\right)\cdot\dfrac{a^2-4}{2a}$;

2) $\left(\dfrac{a+1}{3a-3}-\dfrac{a+2}{3a+3}+\dfrac{21-a}{3a^2-3}\right):\dfrac{4}{a^2-1}$.

204. Докажите тождество:

1) $\left(2-\dfrac{2a^2-a}{a^2-a+1}\right):\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{a-1}{a^2-a+1}\right)=a+1$;

2) $\left(\dfrac{m-2}{m^2-2m+4}-\dfrac{6m-13}{m^3+8}\right)\cdot\dfrac{2m^3+16}{18-6m}=\dfrac{3-m}{3}$.

205. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения от значения переменной не зависит:

1) $\dfrac{a+2}{16}\cdot\left(\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{3a-8}{a^2-2a+4}-\dfrac{4a-28}{a^3+8}\right)$;

2) $\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{3}{a^3+1}+\dfrac{3}{a^2-a+1}\right)\left(a-\dfrac{2a-1}{a+1}\right)$.

206. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной b значение выражения $\dfrac{b-2}{15}\cdot\left(\dfrac{1}{b-2}+\dfrac{9b+6}{b^3-8}-\dfrac{1-2b}{b^2+2b+4}\right)$ от b не зависит.

207. Представьте в виде рациональной дроби:

1) $\left(\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}\right)^2$;

2) $\left(\dfrac{a^2}{b}-1\right)^2+\left(\dfrac{a^2}{b}+1\right)^2$;

3) $\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y}{x^2}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}\right)^2$;

4) $\left(\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a-b}{b}\right)^2-\left(\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{a-b}{b}\right)^2$.

208. Преобразуйте выражение в дробь:

1) $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2$; 2) $\left(\dfrac{m}{n^2}+1\right)^2-\left(\dfrac{m}{n^2}-1\right)^2$.

209. Упростите выражение:

1) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$; 2) $\dfrac{\dfrac{7x-a}{a}+1}{\dfrac{7x+a}{a}-1}$; 3) $\dfrac{\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2p}}{\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{2p^2}}$;

4) $\dfrac{c-\dfrac{6c-9}{c}}{\dfrac{3}{c}-1}$; 5) $\dfrac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-1}{x}}$; 6) $\dfrac{\dfrac{1}{n-m}-\dfrac{1}{n+m}}{\dfrac{1}{n-m}+\dfrac{1}{n+m}}$.

210. Упростите выражение:

1) $\dfrac{1+\dfrac{4}{m}}{1-\dfrac{4}{m}}$; 2) $\dfrac{\dfrac{3p+m}{m}-1}{\dfrac{3p-m}{m}+1}$; 3) $\dfrac{\dfrac{1}{4t}+\dfrac{1}{t}}{\dfrac{1}{4t^2}+\dfrac{1}{t^2}}$;

4) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{2x-1}{x}}$; 5) $\dfrac{\dfrac{m}{2-m}+\dfrac{2+m}{m}}{\dfrac{m}{2+m}+\dfrac{2-m}{m}}$; 6) $\dfrac{\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}}$.

4 Высокий уровень

211. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения от значений переменных не зависит:

$$\frac{8}{4a-b}:\left(\frac{2a-0,5b}{4a^2+ab+0,25b^2}+\frac{24ab}{64a^3-b^3}+\frac{1}{2a-0,5b}\right).$$

212. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{1,5a-4}{0,5a^2-a+2}-\frac{2a-14}{0,5a^3+4}+\frac{1}{a+2}\right):\frac{4}{a+2} \text{ при } a=197.$$

213. Известно, что $x-\dfrac{1}{x}=7$. Найдите значение выражения $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

214. Известно, что $x+\dfrac{1}{x}=3$. Найдите значение выражения $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

215. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{8x^2+2x}{8x^3-1}-\dfrac{2x+1}{4x^2+2x+1}\right)\left(1+\dfrac{2x+1}{2x}-\dfrac{4x^2+10x}{4x^2+2x}\right)$;

2) $\dfrac{p^2-2p+1}{4}\cdot\left(\dfrac{2p}{p^3+1}:\dfrac{1-p}{p^2-p+1}+\dfrac{2}{p-1}\right):\dfrac{p-1}{p+1}$.

216. Докажите, что значение выражения

$$\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{4x}{x^2-1}\right)\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4x}{x^2-1}\right)$$

не зависит от значения переменной.

217. Докажите, что значение выражения

$$\left(\frac{m^2-3m}{m^3+3m^2+3m+1}+\frac{1}{m^2+2m+1}\right)\left(\frac{3-m}{m^2-2m+1}-\frac{2}{1-m}\right)$$

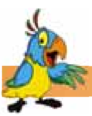
положительно при всех допустимых значениях переменной.

218. Преобразуйте в рациональную дробь или целое выражение:

1) $1-\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{x+1}}$; 2) $\dfrac{m}{m-\dfrac{1}{m-\dfrac{m}{1-m}}}$.

219. Преобразуйте в рациональную дробь или целое выражение:

1) $1+\dfrac{2x}{1-\dfrac{x}{x+2}}$; 2) $\dfrac{1}{n-\dfrac{1}{n+\dfrac{n}{n-1}}}$.



Упражнения для повторения

220. Представьте выражение в виде степени:

1) $x^7x^3 : x^2$; 2) $(x^5 : x^2) : x$; 3) $(a^2)^3 \cdot a$; 4) $(x^3)^5 : x^4$.

221. Докажите, что число $8^9 - 4^{12}$ делится на 7.

222. Постройте график функции:

1) $y=\begin{cases}2x+4, & \text{если } x<0,\\ 4-x, & \text{если } x\geqslant 0;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}2x+5, & \text{если } x<-1,\\ 3, & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 4,\\ x-1, & \text{если } x>4.\end{cases}$

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

223. При каких значениях переменной выражение имеет смысл:

1) $\frac{x-1}{7}$; 2) $\frac{7}{x-1}$; 3) $\frac{x+2}{x(x+3)}$;

4) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}$; 5) $\frac{x^2}{x^2-9}$; 6) $\frac{x-5}{x^2-4x}$?

224. При каких значениях переменной значение дроби равно нулю:

1) $\frac{(m-1)m}{m+2}$; 2) $\frac{x^2-2x}{8}$; 3) $\frac{(m+2)m}{m^2-4}$; 4) $\frac{x}{x^2+x}$?

225. Решите уравнение:

1) $2(x-3)=4(x+7)-11$; 2) $5(x-2)-7(x+1)=9(x-8)$.

226. Решите уравнение, используя основное свойство пропорции:

1) $\frac{2x-4}{7}=\frac{3x+1}{9}$; 2) $\frac{2x-11}{5}=\frac{3x+17}{10}$.

Интересные задачки для неленивых

227. (*Из книги «Универсальная арифметика» Ньютона*). Некто решил разделить определенную сумму средств поровну между нищими. Если бы у него было на 8 динаров больше, то он дал бы каждому по 3 динара, но он дал лишь по 2 динара и еще 3 у него осталось. Сколько было нищих?

§8. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАВНОСИЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Напомним, что

два уравнения называют *равносильными*, если они имеют одни и те же корни. Равносильными считают и те уравнения, которые корней не имеют.

Так, например, равносильными будут уравнения $x+3=5$ и $4x=8$, поскольку корнем каждого из них является число 2.

Уравнения $x-3=7$ и $2x=18$ – не равносильны, так как корнем первого уравнения является число 10, а корнем второго – число 9.

Ранее, в 7 классе, вы знакомились со свойствами, которые преобразуют уравнения в равносильные им уравнения.

1) Если в любой части уравнения раскрыть скобки или привести подобные слагаемые, то получим уравнение, равносильное данному;
2) если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному;
3) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Рассмотрим уравнения:

$$3(x-1)+2x=x+7; \quad \frac{x+2}{3}-\frac{x+7}{6}=x; \quad \frac{2}{x-1}=14+\frac{1}{x}.$$

Левая и правая части каждого из них являются рациональными выражениями.

Уравнения, левая и правая части которых являются рациональными выражениями, называют *рациональными уравнениями*.

В первых двух из записанных выше уравнений левая и правая части являются целыми выражениями. Такие уравнения называют ***целыми рациональными уравнениями***. Если хотя бы одна часть уравнения – дробное выражение, то его называют ***дробным рациональным уравнением***. Третье из записанных выше уравнений является дробным рациональным.

Как решать целые рациональные уравнения, мы рассмотрели при изучении математики в предыдущих классах. Рассмотрим теперь, как решать дробные рациональные уравнения, то есть уравнения с переменной в знаменателе.

1. *Применение условия равенства дроби нулю.*

Напомним, что $\frac{P}{Q}=0$, когда $\begin{cases} P=0, \\ Q\neq 0. \end{cases}$

Пример 1. Решите уравнение $\frac{x}{x-2}=3$.

Р е ш е н и е. С помощью тождественных преобразований и свойств уравнений приведем уравнение к виду $\frac{P}{Q}=0$, где P и Q – целые рациональные выражения. Имеем:

$$\frac{x}{x-2}=3; \quad \frac{x}{x-2}-\frac{3}{1}=0; \quad \frac{x-3(x-2)}{x-2}=0; \quad \frac{x-3x+6}{x-2}=0.$$

Окончательно получим уравнение: $\dfrac{6-2x}{x-2}=0.$

Чтобы дробь $\dfrac{6-2x}{x-2}$ равнялась нулю, нужно, чтобы числитель $6-2x$ равнялся нулю, а знаменатель $x-2$ не равнялся нулю.

Тогда $6-2x=0$, откуда $x=3$. При $x=3$ знаменатель $x-2=3-2=1\neq 0$. Следовательно, $x=3$ – единственный корень уравнения.

Решение последнего, равносильного данному, уравнения, учитывая условие равенства дроби нулю, удобно записывать так:

$$\frac{6-2x}{x-2}=0; \qquad \begin{cases} 6-2x=0, \\ x-2\neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3, \\ x\neq 2; \end{cases} \qquad x=3.$$

Ответ. 3.

Значит, решая дробное рациональное уравнение, можно:

1) с помощью тождественных преобразований привести уравнение к виду $\dfrac{P}{Q}=0$;

2) приравнять числитель P к нулю и решить полученное целое уравнение;

3) исключить из его корней те, при которых знаменатель Q равен нулю, и записать ответ.

2. ***Использование основного свойства пропорции.***

Если $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{M}{N}$, то $PN=MQ$, где $Q\neq 0$, $N\neq 0$.

Пример 2. Решите уравнение $\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{x}{x-2}+1.$

Решение. Найдем область допустимых значений (ОДЗ) переменной в уравнении. Так как знаменатели дробей не могут равняться нулю, то $x-1\neq 0$ и $x-2\neq 0$. Имеем: $x\neq 1$ и $x\neq 2$, то есть ОДЗ переменной x содержит все числа, кроме 1 и 2.

Сложив выражения в правой части уравнения, приведем его к виду: $\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{x+x-2}{x-2}$, получив пропорцию: $\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2x-2}{x-2}$.
По основному свойству пропорции имеем:

$(2x+1)(x-2)=(2x-2)(x-1).$

Решим это уравнение:

$2x^2-4x+x-2=2x^2-2x-2x+2$, откуда $x=4$.

Так как число 4 принадлежит ОДЗ переменной исходного уравнения, то 4 является его корнем.

Запись решения, чтобы не забыть учесть ОДЗ, удобно закончить так:

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2}{x-2}; \qquad \begin{cases} (2x+1)(x-2) = (2x-2)(x-1), \\ x-1 \neq 0, \\ x-2 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 2x - 2x + 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2; \end{cases} \qquad x = 4.$$

О т в е т. 4.

Таким образом, для решения дробного рационального уравнения можно:

1) найти область допустимых значений (ОДЗ) переменной в уравнении;

2) привести уравнение к виду $\boldsymbol{\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}}$**;**

3) записать целое уравнение $\boldsymbol{P \cdot N = M \cdot Q}$ **и решить его;**

4) исключить из полученных корней те, которые не принадлежат ОДЗ, и записать ответ.

3. ***Метод умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель дробей.***

Пример 3. Решите уравнение $\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{5}{x^2-x} + \frac{5}{x^2+x}$.

Р е ш е н и е. Найдем ОДЗ переменной и простейший общий знаменатель всех дробей уравнения, разложив знаменатели на множители:

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x(x-1)} + \frac{5}{x(x+1)}.$$

Областью допустимых значений переменной будут те значения x, при которых $x \neq 0$, $x - 1 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$, то есть все значения x, кроме чисел 0; 1 и -1. А простейшим общим знаменателем будет выражение $x(x-1)(x+1)$.

Умножим обе части уравнения на это выражение:

$$\left.\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x(x-1)} + \frac{5}{x(x+1)}\right| \cdot x(x-1)(x+1).$$

Получим: $x(x-2) = 5(x+1) + 5(x-1)$, а после упрощения: $x^2 - 12x = 0$, то есть $x(x-12) = 0$, откуда $x = 0$ или $x = 12$.

Число 0 не принадлежит ОДЗ переменной исходного уравнения, поэтому не является его корнем.

Следовательно, число 12 – единственный корень уравнения.

О т в е т. 12.

Решая дробное рациональное уравнение, можно:

1) найти ОДЗ переменной в уравнении;
2) найти простейший общий знаменатель дробей, входящий в уравнение;
3) умножить обе части уравнения на этот общий знаменатель;
4) решить полученное целое уравнение;
5) исключить из его корней те, которые не принадлежат ОДЗ переменной уравнения, и записать ответ.

Пример 4. Являются ли равносильными уравнения

$$\frac{x-2}{x+1} = 0 \text{ и } \frac{2x-x^2}{x-3} = 0?$$

Р е ш е н и е. Поскольку уравнения являются равносильными в случае, когда они имеют одни и те же, или не имеют корней, найдем корни данных уравнений.

Первое уравнение имеет единственный корень $x = 2$, а второе – два корня $x = 0$ и $x = 2$ (решите уравнения самостоятельно). Следовательно, уравнения не являются равносильными.

О т в е т. Нет.

1. Какие уравнения называют рациональными?
2. Какое уравнение называют целым рациональным, а какое – дробным рациональным?
3. Как можно решить дробное рациональное уравнение?

1 Начальный уровень

228. (Устно.) Назовите целые рациональные уравнения, дробные рациональные уравнения:

1) $\frac{2}{x} + \frac{x}{3} = 1$;   2) $x^2 - 2x(x+3) = x - 7$;

3) $\frac{x+2}{4} - \frac{x-3}{8} = 15$;   4) $\frac{4}{x+2} - \frac{8}{x-3} = 15$.

229. Является ли число 1 корнем уравнения:

1) $\frac{x}{x+2}=0$; 2) $\frac{x-1}{x+2}=0$; 3) $\frac{x}{x-1}=0$; 4) $\frac{x^2-1}{x}=0$?

230. Является ли число 2 корнем уравнения:

1) $\frac{x-2}{x+3}=0$; 2) $\frac{x}{x+3}=0$; 3) $\frac{x}{x-2}=0$; 4) $\frac{4-x^2}{x+1}=0$?

231. Решите уравнение:

1) $\frac{x}{x-2}=0$; 2) $\frac{x-3}{x}=0$; 3) $\frac{x+2}{x-1}=0$; 4) $\frac{x+5}{x}=0$.

232. Решите уравнение:

1) $\frac{x}{x+1}=0$; 2) $\frac{x-2}{x}=0$; 3) $\frac{x+3}{x-4}=0$; 4) $\frac{x+7}{x}=0$.

2 Средний уровень

233. Решите уравнение:

1) $\frac{2x-8}{x+4}=0$; 2) $\frac{3x+7}{x}=0$; 3) $\frac{x^2}{x-9}=0$; 4) $\frac{x-1}{1-x}=0$.

234. Решите уравнение:

1) $\frac{3x+12}{x-4}=0$; 2) $\frac{2x-5}{x}=0$;

3) $\frac{x^2}{x+1}=0$; 4) $\frac{2-x}{x-2}=0$.

235. Найдите корни уравнения:

1) $2-\frac{x+3}{x}=0$; 2) $\frac{x}{x+2}=2$;

3) $\frac{x}{x-4}=\frac{9}{5}$; 4) $\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x-3}$.

236. Найдите корни уравнения:

1) $\frac{2x+1}{x}-3=0$; 2) $\frac{x}{x-4}=5$;

3) $\frac{x}{x+2}=\frac{5}{3}$; 4) $\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x+4}$.

237. Равносильны ли уравнения:

1) $\dfrac{x}{x-2} = \dfrac{4}{x-2}$ и $\dfrac{x-5}{x} = \dfrac{3-x}{x}$;

2) $\dfrac{x^2+2x}{x-3} = \dfrac{x^2-4}{x-3}$ и $\dfrac{2x-3}{3x} - \dfrac{x-2}{3x} = 0$?

238. Равносильны ли уравнения:

1) $\dfrac{x-4}{x} = \dfrac{2-x}{x}$ и $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{3}{x+1}$;

2) $\dfrac{x^2-x}{x-1} = \dfrac{x^2+5}{x-1}$ и $\dfrac{3x-1}{2x} - \dfrac{2x-5}{2x} = 0$?

239. Решите уравнение, используя основное свойство пропорции:

1) $\dfrac{2x^2-1}{x+1} = 2x$; 2) $\dfrac{3x^2+1}{x} = 3x-1$;

3) $\dfrac{x-3}{2x^2+1} = \dfrac{1}{2x}$; 4) $\dfrac{4x^2-3}{2x-1} = 2x+3$.

240. Решите уравнение, используя основное свойство пропорции:

1) $\dfrac{3x^2+2}{x-2} = 3x$; 2) $\dfrac{2x^2-1}{x} = 2x+1$;

3) $\dfrac{2x-3}{2x^2+3} = \dfrac{1}{x}$; 4) $\dfrac{6x^2-1}{2x+3} = 3x-1$.

241. Найдите дробь, равную дроби $\dfrac{2}{3}$, у которой знаменатель на 5 больше числителя.

242. Найдите дробь, равную дроби $\dfrac{1}{5}$, у которой числитель на 12 меньше знаменателя.

243. Какое число нужно прибавить к числителю дроби $\dfrac{3}{10}$, чтобы получить дробь $\dfrac{1}{2}$?

244. Какое число нужно вычесть из знаменателя дроби $\dfrac{5}{18}$, чтобы получить дробь $\dfrac{1}{3}$?

3 Достаточный уровень

245. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+4}{2x-1}-\dfrac{x+8}{2x+1}=0;$ 2) $\dfrac{1}{5x}-\dfrac{1}{10x}=\dfrac{1}{30};$

3) $2+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{8-x}{2-x};$ 4) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{5x-5}=\dfrac{1}{10}.$

246. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+1}{3x+1}-\dfrac{x}{3x-1}=0;$ 2) $\dfrac{1}{6x}-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{6};$

3) $3+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{x}{x-1};$ 4) $\dfrac{1}{4x+4}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3}{8}.$

247. Равносильны ли уравнения:

$$\frac{2x+6}{x+1}+\frac{3x-7}{x-2}=5 \text{ и } \frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}?$$

248. Равносильны ли уравнения:

$$\frac{3x-12}{x-3}+\frac{x+12}{x}=4 \text{ и } \frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}?$$

249. Числитель дроби на 5 меньше знаменателя. Если к числителю прибавить 14, а из знаменателя вычесть 1, то получим дробь, обратную данной. Найдите исходную дробь.

250. Знаменатель дроби на 3 больше числителя. Если к числителю прибавить 8, а из знаменателя вычесть 1, то получим дробь, обратную данной. Найдите исходную дробь.

251. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{x^2-2}{x^2+2x}=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x+3}{x+2};$ 2) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}.$

252. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2-2}{x^2-x}=\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x+3}{x-1};$

2) $\dfrac{x^2+8}{x^2-4}=\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{3}{x-2}.$

4 Высокий уровень

253. Решите уравнение:

1) $\dfrac{|x-1|-5}{x-6}=0$; 2) $\dfrac{|x-1|-1}{x(x-2)}=0$.

254. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{|x-2|-3}{x-5}=0$; 2) $\dfrac{|x-2|-2}{x(x-4)}=0$.

255. При каких значениях a уравнение не имеет решений:

1) $\dfrac{x-2a}{x(x-8)}=0$; 2) $\dfrac{x-a+1}{x^2-3x}=0$?

256. При каких значениях a уравнение $\dfrac{(x-a)(x-2a-1)}{x-3}=0$ имеет лишь один корень?

Упражнения для повторения

3 **257.** Упростите выражение $\dfrac{10x}{x+2}-\dfrac{x-8}{3x+6}\cdot\dfrac{120}{x^2-8x}$ и найдите его значение при $x=100$.

4 **258.** Сократите дробь $\dfrac{4a^2-b^2+2a-b}{4a^2+4ab+b^2+2a+b}$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

259. Найдите значение степени:

1) $(-2)^3$; 2) 14^2; 3) $(-1)^{11}$; 4) 0^5;

5) $(0,3)^3$; 6) $(-0,8)^2$; 7) $\left(-\dfrac{2}{7}\right)^2$; 8) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^3$.

260. Вычислите:

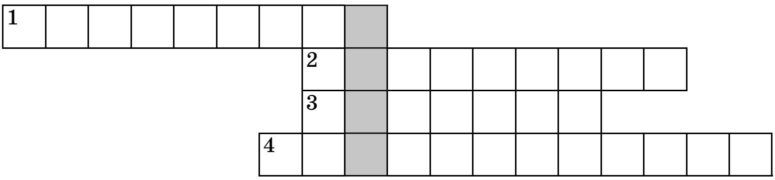
1) 2^5-3^2; 2) $(-1)^9+(-1)^8$; 3) $4^2\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2$; 4) $5^3:\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$.

261. Представьте в виде степени:

1) с основанием 2 числа 2, 4, 8, 16, 32, 128, 512;
2) с основанием 3 числа 81, 243;
3) с основанием 5 числа 5, 25, 625;
4) с основанием 10 числа 100, 10 000.

Интересные задачки для неленивых

262. *Выдающиеся украинцы.* Запишите по горизонтали фамилии выдающихся украинцев (при необходимости используйте дополнительную литературу и Интернет) и получите в выделенном столбике фамилию выдающегося французского математика, об исследовании которого мы расскажем в одной из следующих глав.



1. Украинский шахматист, гроссмейстер, чемпион мира по шахматам 2002 года.
2. Инженер-авиаконструктор, родившийся в Украине, конструктор первого вертолета.
3. Украинский футболист, обладатель «Золотого мяча» 1986 года.
4. Украинский писатель, поэт, драматург, общественный деятель, автор поэмы «Энеида».

Домашняя самостоятельная работа № 2

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. Найдите произведение $\frac{15}{m^2} \cdot \frac{m}{5}$.

А. $\frac{m}{3}$; **Б.** $\frac{3}{m}$; **В.** $\frac{5}{m}$; **Г.** $3m$.

2. Выполните деление $\frac{3}{p} : \frac{9}{p^3}$.

А. $\frac{27}{p^4}$; **Б.** $\frac{3}{p^2}$; **В.** $3p^2$; **Г.** $\frac{p^2}{3}$.

3. Укажите уравнение, корнем которого является число 2.

А. $\dfrac{x-2}{x}=0$; **Б.** $\dfrac{x}{x-2}=0$;

В. $\dfrac{x+2}{x-1}=0$; **Г.** $\dfrac{x-2}{x-2}=0$.

4. Выполните умножение $\dfrac{m^2-m}{p^2}\cdot\dfrac{ap}{m^2-2m+1}$.

А. $\dfrac{a}{p(m-1)}$; **Б.** $\dfrac{am}{p(m+1)}$; **В.** $\dfrac{am}{p(m-1)}$; **Г.** $\dfrac{am}{m-1}$.

5. $\left(-\dfrac{2p^7}{a^5}\right)^3=\ldots$

А. $\dfrac{8p^{21}}{a^{15}}$; **Б.** $-\dfrac{8p^{21}}{a^{15}}$; **В.** $-\dfrac{6p^{21}}{a^{15}}$; **Г.** $-\dfrac{8p^{10}}{a^8}$.

6. Найдите корень уравнения $\dfrac{2x^2-5}{x+1}=2x$.

А. $-2{,}5$; **Б.** $2{,}5$; **В.** $-\dfrac{2}{5}$; **Г.** корней нет.

7. Упростите выражение $(25x^2-10x+1):\dfrac{10x^2-2x}{4x}$.

А. 2; **Б.** $10x^2-2x$; **В.** $10x-2$; **Г.** $\dfrac{5x-1}{2}$.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{8}{x+1}:\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ при $x=2{,}01$.

А. 0; **Б.** 1; **В.** 2,01; **Г.** 2.

9. Укажите уравнение, которое равносильно уравнению $\dfrac{x-3}{x+3}+\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{18}{x^2-9}$.

А. $x-3=0$; **Б.** $\dfrac{x+2}{x}=0$; **В.** $\dfrac{x}{x+2}=0$; **Г.** $\dfrac{5x-x^2}{x}=0$.

10. Упростите выражение $\dfrac{0{,}1a^3+0{,}8}{0{,}2a^2-0{,}8}:\dfrac{0{,}5a^2-a+2}{0{,}25a+0{,}5}$.

А. $\dfrac{a+2}{4(a-2)}$; **Б.** $\dfrac{a+2}{a-2}$; **В.** $\dfrac{a-2}{4(a+2)}$; **Г.** $\dfrac{4(a+2)}{a-2}$.

11. Найдите значение выражения $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, если $x - \dfrac{1}{x} = 5$.

А. 3; **Б.** 7; **В.** 23; **Г.** 27.

12. Решите уравнение $\dfrac{2 - |x - 5|}{x - 7} = 0$.

А. Решений нет; **Б.** 7; **В.** 3; **Г.** 3; 7.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 5–8

1 **1.** Выполните умножение:

1) $\dfrac{c^4}{4} \cdot \dfrac{5}{c^2}$; 2) $\dfrac{12}{a^2} \cdot \dfrac{a}{3}$.

2. Выполните деление:

1) $\dfrac{p}{5} : \dfrac{p}{7}$; 2) $\dfrac{2}{a^2} : \dfrac{4}{a}$.

3. Является ли число 4 корнем уравнения:

1) $\dfrac{x^2 - 16}{x} = 0$; 2) $\dfrac{x}{x - 4} = 0$?

2 **4.** Выполните действия:

1) $\dfrac{2a^3}{15m^2} \cdot \left(-\dfrac{5m}{6a^3}\right)$; 2) $\dfrac{x^2 - xy}{a^2} \cdot \dfrac{ab}{x^2 - 2xy + y^2}$;

3) $-\dfrac{3m^2}{7c^3} : \left(-\dfrac{9m^3}{28c}\right)$; 4) $\dfrac{x^2 - 16}{3x - 6} : \dfrac{2x + 8}{5x - 10}$.

5. Возведите дробь в степень:

1) $\left(-\dfrac{2a^3}{m^2}\right)^3$; 2) $\left(\dfrac{a^2b}{c^3}\right)^{10}$.

6. Решите уравнение:

1) $\dfrac{4x + 8}{x - 3} = 0$; 2) $\dfrac{4x^2 - 8}{x + 1} = 4x$.

3 **7.** Упростите выражение $\left(\dfrac{2a + 1}{2a - 1} - \dfrac{2a - 1}{2a + 1}\right) : \dfrac{2a^2}{4a^2 - 1}$.

8. Докажите тождество

$$\left(\frac{7}{x+7}+\frac{x^2+49}{x^2-49}-\frac{7}{7-x}\right)\cdot\frac{x-7}{x^2+14x+49}=\frac{1}{x+7}.$$

9. Найдите значение выражения $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, если $x+\dfrac{1}{x}=9$.

Дополнительные задания

10. Упростите выражение $\dfrac{0,2a^3-1,6}{0,1a^2-1,6}:\dfrac{0,5a^2+a+2}{0,25a-1}$.

11. Решите уравнение $\dfrac{|2-x|-3}{x-5}=0$.

§ 9. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Напомним, что в 7 классе мы изучали степень с натуральным показателем. По определению:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}},$$

где n – натуральное число, $n>1$ и $a^1=a$.

В математике, а также при решении задач практического содержания, например в физике или химии, встречаются степени, показатель которых равен нулю или является целым отрицательным числом. Степень с отрицательным показателем можно встретить и в научной или справочной литературе. Например, массу атома гелия записывают так: $6{,}64\cdot10^{-27}$ кг. Как понимать смысл записи 10^{-27}?

Рассмотрим степени числа 3 с показателями 1, 2, 3, 4, ...:

$$3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \ldots \text{ – это соответственно } 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots$$

В этой строке каждое следующее число втрое больше предыдущего. Продолжим строку в противоположном направлении, уменьшая каждый раз показатель степени на 1. Получим:

$$\ldots,\ 3^{-3},\ 3^{-2},\ 3^{-1},\ 3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \ldots$$

Число 3^0 должно быть втрое меньше числа 3^1, равного числу 3. Но втрое меньшим числа 3 является число 1, следовательно, $3^0=1$. Равенство $a^0=1$ справедливо для любого основания a при условии, что $a\neq0$.

Нулевая степень отличного от нуля числа а равна единице, то есть $a^0=1$ при $a\neq0$.

Вернемся к строке со степенями числа 3, где слева от числа $3^0 = 1$ записано число 3^{-1}. Это число втрое меньше, чем 1, то есть равно $\frac{1}{3}$. Следовательно, $3^{-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$. Рассуждая аналогично, получаем: $3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$; $3^{-3} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$ и т. д.

Приходим к следующему определению степени с целым отрицательным показателем:

если $a \neq 0$ и n – натуральное число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Пример 1. Замените степень дробью:

1) 5^{-7}; 2) x^{-1}; 3) $(a + b)^{-9}$.

Решение. По определению:

1) $5^{-7} = \frac{1}{5^7}$; 2) $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$; 3) $(a + b)^{-9} = \frac{1}{(a + b)^9}$.

Пример 2. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем:

1) $\frac{1}{a^2}$; 2) $\frac{1}{m - n}$; 3) $\frac{1}{7^{13}}$.

Решение.

1) $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$; 2) $\frac{1}{m - n} = (m - n)^{-1}$; 3) $\frac{1}{7^{13}} = 7^{-13}$.

Пример 3. Вычислите: 1) 4^{-2}; 2) $(-9)^0$; 3) $(-5)^{-3}$.

Решение. 1) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$; 2) $(-9)^0 = 1$;

3) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$.

Рассмотрим, как возвести дробь $\frac{a}{b}$ в целую отрицательную степень. Если n – натуральное число и $a \neq 0$, имеем:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 : \frac{a^n}{b^n} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Следовательно,

если $a \neq 0$, $b \neq 0$, n – натуральное число, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Пример 4. Найдите значение выражения:

1) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 2) $27 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-4}$.

Решение. 1) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2} = \frac{9}{49}$.

2) Учитывая порядок выполнения арифметических действий, сначала возведем дробь в степень, а затем выполним умножение:

$$27 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-4} = 27\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{27 \cdot 16}{81} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

Ответ. 1) $\frac{9}{49}$; 2) $5\frac{1}{3}$.

1. Какое значение принимает выражение a^0 при $a \neq 0$?
2. Сформулируйте определение степени с целым отрицательным показателем.
3. Докажите тождество $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$.

1 Начальный уровень

263. (Устно.) Верно ли равенство:

1) $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$; 2) $4^0 = 0$; 3) $19^{-5} = -\frac{1}{19^5}$; 4) $(-4)^0 = 1$?

264. Замените дробью степень с целым отрицательным показателем:

1) 4^{-5}; 2) a^{-1}; 3) p^{-10};
4) c^{-8}; 5) $(2a)^{-3}$; 6) $(a + b)^{-4}$.

265. Запишите степень с целым отрицательным показателем в виде дроби:

1) b^{-3}; 2) 7^{-1}; 3) 2^{-7};
4) t^{-6}; 5) $(3m)^{-2}$; 6) $(c - d)^{-7}$.

266. Запишите дробь в виде степени с целым отрицательным показателем:

1) $\frac{1}{9^4}$; 2) $\frac{1}{p^5}$; 3) $\frac{1}{10^9}$; 4) $\frac{1}{m}$; 5) $\frac{1}{(ab)^4}$; 6) $\frac{1}{(m - n)^4}$.

267. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем:

1) $\frac{1}{c^3}$; 2) $\frac{1}{19^7}$; 3) $\frac{1}{t^5}$; 4) $\frac{1}{b}$; 5) $\frac{1}{(cm)^6}$; 6) $\frac{1}{(a+x)^2}$.

2 Средний уровень

268. Вычислите:

1) 7^{-2}; 2) $(-2)^{-2}$; 3) $(-1)^{-5}$; 4) 12^{-1};

5) $(-7)^{-1}$; 6) 10^{-3}; 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 8) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$;

9) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$; 10) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}$; 11) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 12) $\left(-2\frac{1}{5}\right)^{-1}$;

13) $0{,}1^{-1}$; 14) $(-0{,}2)^{-2}$; 15) $(1{,}2)^{-2}$; 16) $(-0{,}25)^{-3}$.

269. Вычислите:

1) 2^{-3}; 2) $(-1)^{-6}$; 3) 15^{-1}; 4) $(-9)^{-1}$;

5) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$; 6) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$; 7) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 8) $\left(-3\frac{1}{7}\right)^{-1}$;

9) $0{,}2^{-1}$; 10) $(-0{,}1)^{-2}$; 11) $(1{,}5)^{-2}$; 12) $(-0{,}5)^{-4}$.

270. Представьте числа 16; 8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$ в виде степени с основанием 2.

271. Представьте числа 100; 10; 1; 0,1; 0,01 в виде степени с основанием 10.

272. Найдите значение выражения:

1) -5^{-2}; 2) $(-0{,}8)^{-2}$; 3) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 4) $-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

273. Вычислите:

1) -2^{-3}; 2) $(-0{,}4)^{-2}$; 3) $-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 4) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

274. Представьте выражение в виде дроби, не содержащей степени с отрицательным показателем:

1) $2a^{-3}$; 2) $3mb^{-1}$; 3) $a^2b^{-3}c$; 4) $a^{-3}b^{-7}$.

275. Представьте выражение в виде дроби, не содержащей степени с отрицательным показателем:

1) $4b^{-5}$; 2) $7a^{-1}p$; 3) $mn^{-2}p^{7}$; 4) $c^{-2}b^{-5}$.

3 Достаточный уровень

276. Вычислите:

1) $81 \cdot 3^{-5}$; 2) $-25 \cdot 10^{-2}$; 3) $27 \cdot (-18)^{-1}$;

4) $2\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$; 5) $-8 \cdot 2^{-4} + 30$; 6) $8^{-2} + 6^{-1}$;

7) $2{,}5^{-1} + (-13)^{0}$; 8) $4^{-3} - (-4)^{-2}$; 9) $(-8)^{-2} + (0{,}4)^{-1}$;

10) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2} \cdot 10^{-3}$; 11) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} : \left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 12) $1{,}25^{-2} + 2{,}5^{-3}$.

277. Найдите значение выражения:

1) $-64 \cdot 4^{-4}$; 2) $36 \cdot (-27)^{-1}$; 3) $-3\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}$;

4) $-7 \cdot 0{,}1^{-2} + 5^{0}$; 5) $5^{-2} - 10^{-1}$; 6) $3{,}2^{-1} + \left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

7) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 20^{-2}$; 8) $1{,}5^{-2} - 1{,}2^{-3}$.

278. Сравните с нулем выражение:

1) 8^{-13}; 2) $(-3{,}7)^{-10}$; 3) $(-2{,}9)^{-11}$; 4) $-(-2{,}1)^{-7}$.

279. Сравните с нулем значение выражения a^{n}, если:

1) $a > 0$ и n – целое число;
2) $a < 0$ и n – четное отрицательное число;
3) $a < 0$ и n – нечетное отрицательное число.

280. Сравните с нулем значение выражения b^{m}, если:

1) $b = 5$, $m = -13$;
2) $b = -1$, $m = -200$;
3) $b = -3$, $m = -41$.

281. Преобразуйте выражение так, чтобы оно не содержало степеней с отрицательным показателем:

1) $\frac{m^{2}n^{2}p^{-3}}{cx^{3}a^{-4}}$; 2) $\frac{7^{0}a^{-1}b^{2}}{5^{-2}x^{-3}m^{-1}}$.

282. Используя отрицательный показатель степени, представьте дробь в виде произведения:

1) $\frac{3x^2}{p}$; 2) $\frac{15m}{n^2c^3}$; 3) $\frac{2x}{b^5(a-b)^2}$; 4) $\frac{(x+y)^7}{(x-y)^3}$.

283. Представьте дробь в виде произведения, используя понятие степени с отрицательным показателем:

1) $\frac{5m^2}{x}$; 2) $\frac{7c^2}{y^7n^5}$; 3) $\frac{p}{c^4(x-y)^3}$; 4) $\frac{(a+2)^5}{(a-5)^2}$.

284. Представьте выражение в виде дроби:

1) $m^{-3} + n^{-2}$; 2) $ab^{-1} + ba^{-1} + c^0$;
3) $(m + n^{-1})(m^{-1} + n)$; 4) $(a^{-1} + b^{-1}) : (a^{-2} - b^{-2})$.

285. Представьте выражение в виде дроби:

1) $xy^{-3} + x^{-1}y^2$; 2) $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} - y^{-1})$.

4 Высокий уровень

286. Вычислите:

1) $(1 + (1 - 5^{-2})^{-1})^{-1}$; 2) $(1 - (1 + 3^{-1})^{-2})^{-2}$.

287. Найдите значение выражения

$(1 + (1 - 3^{-1})^{-1})^{-1} + (1 - (1 + 3^{-1})^{-1})^{-1}$.

288. Упростите выражение $(1 - x^{-2})\left(1 - \frac{1}{x^{-1} - 1} + \frac{1}{x^{-1} + 1}\right)$.

Упражнения для повторения

289. Представьте выражение в виде дроби:

1) $\frac{a^2 + 2a}{a^2 - 4a + 4} - \frac{4a}{a^2 - 4a + 4}$; 2) $\frac{3p}{p^2 - 2p} - \frac{8 - p}{p^2 - 2p}$.

290. Даша сказала Маше: «Дай мне 2 грн, и тогда денег у нас станет поровну». Маша ответила Даше: «Лучше ты дай мне 2 грн, и тогда денег у меня станет вдвое больше, чем у тебя». Сколько денег у каждой из девочек?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

291. Представьте в виде степени:

1) a^5a^3; 2) $b^7 : b^3$; 3) $(c^5)^4$;
4) m^7m; 5) $t^{10} : t$; 6) $(p^7)^2$.

292. Возведите в степень одночлен:

1) $(mn^2)^7$; 2) $(-2p^3)^2$; 3) $(-5cm^2)^3$; 4) $(-a^2c^3)^{10}$.

293. Упростите выражение:

1) $(5m^2n)^3 \cdot (0{,}2m^3n)^2$; 2) $(-0{,}1p^7c^3)^4 \cdot (10pc^2)^3$.

Интересные задачки для неленивых

294. (*Задача Стэнфордского университета*). Среди дедушкиных бумаг был найден счет с записью:

72 индейки – ∗67,9∗ долларов.

Первую и последнюю цифры стоимости индеек, так как они стерлись и их было невозможно разобрать, заменили звездочками. Что это за цифры и сколько стоила одна индейка?

§ 10. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с ненулевым основанием и целым показателем.

Следовательно,

для любого $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любых целых m и n:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (ab)^n = a^nb^n;$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

Эти свойства можно доказать на основании формулы $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ и свойств степени с натуральным показателем.

Докажем, например, формулу $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ для случая, когда m и n – отрицательные целые числа.

Пусть $m = -p$, $n = -q$, где p и q – натуральные числа. Имеем:

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \cdot a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} =$$
$$= a^{-p+(-q)} = a^{m+n}.$$

Следовательно, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, где m и n – отрицательные целые числа. В случае, когда один из показателей m или n – целое отрицательное число, а второй – натуральное число или нуль, формула доказывается аналогично.

Пример 1. Выполните действие:

1) a^2a^{-7}; 2) $b^{15} : b^{20}$; 3) $(x^{-3})^2 \cdot x^{-14}$.

Решение.

1) $a^2a^{-7} = a^{2+(-7)} = a^{-5}$; 2) $b^{15} : b^{20} = b^{15-20} = b^{-5}$;

3) $(x^{-3})^2 \cdot x^{-14} = x^{-3\cdot 2} \cdot x^{-14} = x^{-6} \cdot x^{-14} = x^{-6+(-14)} = x^{-20}$.

Пример 2. Упростите выражение $(4a^5b^{-6})^{-2}$.

Решение. $(4a^5b^{-6})^{-2} = 4^{-2}(a^5)^{-2}(b^{-6})^{-2} = \dfrac{1}{16}a^{-10}b^{12}$.

Пример 3. Вычислите $\dfrac{9^4 \cdot 3^{-22}}{27^{-5}}$.

Решение. Представим 9 и 27 в виде степени с основанием 3 и воспользуемся свойствами степени:

$$\frac{9^4 \cdot 3^{-22}}{27^{-5}} = \frac{(3^2)^4 \cdot 3^{-22}}{(3^3)^{-5}} = \frac{3^8 \cdot 3^{-22}}{3^{-15}} = \frac{3^{-14}}{3^{-15}} = 3^{-14-(-15)} = 3^1 = 3.$$

Ответ. 3.

Сформулируйте свойства степени с целым показателем.

1 Начальный уровень

295. (Устно.) Какие из равенств являются тождествами:

1) $m^3 \cdot m^{-7} = m^{-21}$; 2) $a^7 \cdot a^{-9} = a^{-2}$; 3) $a^5 \cdot a^{-5} = a$;

4) $c^8 : c^{-5} = c^{13}$; 5) $c^4 : c^5 = c$; 6) $m : m^8 = m^{-7}$;

7) $(a^7)^{-1} = a^{-7}$; 8) $(b^{-2})^{-3} = b^{-6}$; 9) $(t^5)^{-2} = t^{10}$?

296. Представьте произведение в виде степени:

1) a^5a^{-2}; 2) $a^{-7}a^6$; 3) a^9a^{-9}; 4) $a^{-4}a^{-3}$.

297. Представьте произведение в виде степени:

1) b^7b^{-3}; 2) $b^{-6}b^3$; 3) $b^{-5}b^{-7}$; 4) $b^{-8}b^8$.

298. Представьте частное в виде степени:

1) $m^3 : m^{-2}$; 2) $m^5 : m^6$; 3) $m^{-3} : m^{-3}$; 4) $m^{-1} : m^{-8}$.

299. Представьте частное в виде степени:

1) $c^5 : c^{-1}$; 2) $c^2 : c^8$; 3) $c^{-2} : c^{-3}$; 4) $c^{-4} : c^{-4}$.

300. Возведите степень в степень:

1) $(x^{-4})^{-2}$; 2) $(x^{-1})^{17}$; 3) $(x^0)^{-5}$; 4) $(x^7)^{-4}$.

301. Возведите степень в степень:

1) $(n^{-2})^{-7}$; 2) $(n^{15})^{-1}$; 3) $(n^{-8})^0$; 4) $(n^5)^{-3}$.

2 Средний уровень

302. Представьте a^{-10} в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями, если один из множителей равен:

1) a^{-3}; 2) a^7; 3) a^{-1}; 4) a^{12}.

303. Представьте степень в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями: 1) m^8; 2) m^{-2}; 3) m^{-17}; 4) m^0.

304. Вычислите:

1) $2^7 \cdot 2^{-6}$; 2) $5^{-3} \cdot 5$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$; 5) $3^8 : 3^9$; 6) $7^{-15} : 7^{-16}$;

7) $9 : 9^{-1}$; 8) $\left(\frac{1}{15}\right)^{-15} : \left(\frac{1}{15}\right)^{-15}$; 9) $(2^{-2})^3$;

10) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{-2}$; 11) $(0{,}1^{-1})^4$; 12) $\left(\left(\frac{1}{19}\right)^{-8}\right)^0$.

305. Найдите значение выражения:

1) $3^9 \cdot 3^{-8}$; 2) $2^{-3} \cdot 2$; 3) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^5$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$; 5) $10^4 : 10^5$; 6) $8^{-12} : 8^{-13}$;

7) $7 : 7^{-1}$; 8) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-7} : \left(\frac{2}{7}\right)^{-7}$; 9) $(3^{-1})^4$;

10) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$; 11) $(0{,}2^3)^{-1}$; 12) $\left(\left(\frac{7}{13}\right)^0\right)^{-12}$.

306. Представьте выражение в виде степени с основанием a:

1) $a^7 : a^3 \cdot a^{-12}$; 2) $(a^5)^{-3} \cdot a^{12}$; 3) $(a^{-8})^3 : a^4$;

4) $a^0 \cdot (a^{-3})^4 \cdot a^5$; 5) $a^{-3} \cdot a^0 : a^5 : a$; 6) $(a^3)^{-2} \cdot (a^{-1})^{-6}$.

307. Представьте выражение в виде степени с основанием b:

1) $b^3 : b^7 \cdot b^2$; 2) $(b^{-2})^4 \cdot b^{10}$; 3) $(b^3)^{-2} : b^3$;

4) $b^7 \cdot (b^{-2})^3 \cdot b^0$; 5) $b^0 \cdot b^{-4} : b^3 : b$; 6) $(b^{-4})^{-1} \cdot (b^2)^{-2}$.

308. Упростите выражение:

1) $4a^{-8}b^7 \cdot 5a^{10}b^{-3}$; 2) $0,4m^{-6}n^4 \cdot 10m^6n^{-9}$;

3) $\frac{1}{3}x^{-4}y^6 \cdot (-9x^5y^{-3})$; 4) $\left(-\frac{2}{7}b^{-6}m^{-4}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{6}b^{-4}m^{-2}\right)$.

309. Упростите выражение:

1) $10m^3n^{-2} \cdot 2m^{-5}n^4$; 2) $0,02a^{-8}b^3 \cdot 100a^8b^{-7}$;

3) $-\frac{1}{8}x^{-3}y^7 \cdot 16x^4y^{-10}$; 4) $\left(-1\frac{1}{4}p^{-3}c^{-5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}p^{-2}c^{-3}\right)$.

310. Представьте степень в виде произведения:

1) $(xy)^{-2}$; 2) $(ab^{-2})^{-3}$; 3) $(x^{-4}y^3)^{-1}$;

4) $(m^0c^{-3})^{-2}$; 5) $(0,1a^{-2})^{-1}$; 6) $\left(\frac{1}{3}m^{-3}p\right)^{-2}$;

7) $(-2c^{-3}p)^{-3}$; 8) $\left(\frac{2}{3}b^{-1}c^{-8}\right)^{-1}$.

311. Представьте степень в виде произведения:

1) $(p^{-2}n)^{-5}$; 2) $(a^{-2}b^3)^{-4}$; 3) $(0,2m^{-4})^{-1}$;

4) $\left(\frac{1}{5}a^{-2}b\right)^{-2}$; 5) $(-4ab^{-2})^{-3}$; 6) $\left(\frac{3}{4}c^{-2}b^{-3}\right)^{-1}$.

3 Достаточный уровень

312. Представьте выражение в виде степени:

1) $64m^{-3}$; 2) $0,01p^{-8}$;

3) $0,0025c^{-8}p^{12}$; 4) $5\frac{1}{16}c^{12}x^{-20}$.

313. Вычислите:

1) $((5^{-2})^{-6} \cdot (5^{-8})^2)^{-1}$; 2) $\dfrac{10^{-8} \cdot (10^{-2})^4}{(10^{-5})^3}$;

3) $\dfrac{(3^{-2})^3 \cdot (3^{-1})^5}{(3^6)^{-2}}$; 4) $\dfrac{(7^{-2})^{-5} \cdot (7^4)^{-3}}{(7^3)^{-4} \cdot (7^{-1})^{-8}}$.

314. Найдите значение выражения:

1) $((4^{-4})^{-2} \cdot (4^{-5})^2)^{-1}$; 2) $\dfrac{2^{-8} \cdot (2^{-2})^5}{(2^{-4})^6 \cdot (2^2)^4}$.

315. Найдите значение выражения:

1) $243 \cdot 3^{-6}$; 2) $64 \cdot (2^{-3})^3$; 3) $5^{-8} \cdot 25^5 : 125$;

4) $49^{-1} \cdot \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-4}$; 5) $\dfrac{36^{-3} \cdot 6^{-8}}{(-6)^{-13}}$; 6) $\dfrac{8^{-3} \cdot 2^{-10}}{16^{-5}}$.

316. Вычислите:

1) $128 \cdot 2^{-5}$; 2) $81 \cdot (3^{-2})^3$; 3) $7^{-8} \cdot 343^3 : 49$;

4) $36^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^{-6}$; 5) $\dfrac{100^{-2} \cdot 10^{-7}}{1000^{-3}}$; 6) $\dfrac{5^{-3} \cdot 25^8}{125^5}$.

317. Упростите выражение:

1) $3{,}5a^3b^7 : (0{,}5a^{-2}b^9)$; 2) $3\dfrac{1}{2}x^{-12}y^{-1} : \left(-1\dfrac{3}{4}x^6y^{-4}\right)$.

318. Упростите выражение:

1) $\dfrac{13a}{b^{-5}} \cdot \dfrac{b^{-8}}{26a^{-2}}$; 2) $-\dfrac{12a^{-3}}{35x} \cdot \dfrac{7x^{-7}}{6a^{-8}}$.

319. Упростите выражение:

1) $4{,}9m^3n^{-4} : (0{,}7mn^{-2})$; 2) $\dfrac{7c^{-3}}{x^5} \cdot \left(-\dfrac{x^7}{21c^{-1}}\right)$.

320. Представьте в виде выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\left(\dfrac{p^{-8}c^{12}}{m^{-4}t^{15}}\right)^{-2}$; 2) $\left(\dfrac{b^{-3}}{c^5}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{b^{-2}}{c^{-4}}\right)^3$;

3) $\left(\dfrac{7x^{-2}}{3y^{-4}}\right)^{-2} \cdot 49x^{-4}y^3$; 4) $\left(\dfrac{a^{-3}b}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{2}{a^{-2}b^2}\right)^{-3}$.

321. Представьте в виде выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\left(\dfrac{c^{-7}a^2}{b^{-2}x}\right)^{-3}$; 2) $\left(\dfrac{x^{-4}}{y^2}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{x^{-3}}{y^{-3}}\right)^2$;

3) $\left(\dfrac{5a^{-2}}{2b^{-3}}\right)^{-2} \cdot 25a^{-4}b^2$; 4) $\left(\dfrac{m^{-2}n^3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{8}{m^{-3}n^4}\right)^{-2}$.

4 Высокий уровень

322. Упростите выражение (n – целое число):

1) $\dfrac{25^n}{5^{2n-3}}$; 2) $\dfrac{12^n}{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}$; 3) $\dfrac{a^{4n}b^{2n-1}}{a^{2n}b^{3+2n}}$.

323. Упростите выражение (m – целое число):

1) $\dfrac{49^m}{7^{2m-2}}$; 2) $\dfrac{18^m}{2^{m+2} \cdot 3^{2m-1}}$; 3) $\dfrac{x^{9m}y^{3m-2}}{x^{3m}y^{4+3m}}$.

324. Сократите дробь:

1) $\dfrac{5^{n+2} - 5^n}{12}$ (n – целое число); 2) $\dfrac{x^7 + x^{10}}{x^{-1} + x^2}$;

3) $\dfrac{m^{-3} + 5 - m^7}{5m^2 - m^9 + m^{-1}}$.

325. Сократите дробь:

1) $\dfrac{18}{4^{n+1} - 4^n}$ (n – целое число); 2) $\dfrac{x^9 + x^5}{x^{-3} + x}$;

3) $\dfrac{b^{-5} + 3 - b^2}{3b^3 - b^5 + b^{-2}}$.

326. Докажите, что для любых целых значений m и n выражение принимает одно и то же значение:

1) $\dfrac{2^m \cdot 3^{n-1} - 2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n}$;

2) $\dfrac{7^{2m} \cdot 4^n}{49^{m+1} \cdot 2^{2n-1} - 49^{m-1} \cdot 2^{2n+1}}$.

Упражнения для повторения

327. Известно, что 3 кг огурцов и 2 кг помидоров вместе стоили 34 грн. После того как огурцы подешевели на 20 %, а помидоры подорожали на 10 %, за 2 кг огурцов и 3 кг помидоров заплатили 36 грн. Найдите начальную цену килограмма огурцов и килограмма помидоров.

328. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечетных натуральных чисел делится на 8.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

329. Выполните действия:

1) $2{,}7 \cdot 10^3$; 2) $1{,}32 \cdot 10^5$; 3) $4{,}7 \cdot 10^{-3}$; 4) $3{,}42 \cdot 10^{-4}$.

Интересные задачки для неленивых

330. (*Олимпиада Нью-Йорка, 1977 г.*) Решите уравнение $2^x + 1 = y^2$ в натуральных числах[1].

§ 11. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ЧИСЛА

В физике, химии, технике, астрономии часто имеют дело как с очень большими, так и с очень малыми значениями величин. Например,

масса Земли равна 5 976 000 000 000 000 000 000 000 кг, а диаметр молекулы водорода 0,00000000025 м.

Читать или записывать такие числа в виде десятичных дробей неудобно, неудобно и использовать десятичную их запись при вычислениях. В таких случаях имеет смысл записывать число в виде $a \cdot 10^n$, где n – целое число, $1 \leqslant a < 10$. Например,

5 976 000 000 000 000 000 000 000 кг $= 5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг;

0,00000000025 м $= 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ м.

Говорят, что числа 5 976 000 000 000 000 000 000 000 и 0,00000000025 записаны в ***стандартном виде***.

[1] Решить в натуральных числах – значит найти те решения, которые являются натуральными числами.

***Стандартным видом числа* называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n – целое число.**

Если число записано в стандартном виде, то показатель степени n называют ***порядком числа***. Например, порядок числа, которым записана масса Земли в килограммах, равен 24, а порядок числа, которым записан диаметр молекулы водорода в метрах, равен –10.

В стандартном виде можно записать любое положительное число. Порядок числа дает представление об этом числе.

Если порядок числа x равен 4, это значит, что $1 \cdot 10^4 \leqslant x < 10 \cdot 10^4$, то есть $10\,000 \leqslant x < 100\,000$. Если порядок числа y равен –2, то $1 \cdot 10^{-2} \leqslant y < 10 \cdot 10^{-2}$, то есть $0{,}01 \leqslant y < 0{,}1$. Большой положительный порядок числа показывает, что число очень большое. Большой по модулю отрицательный порядок числа показывает, что число очень маленькое.

Следовательно, если говорят, что одно число *на порядок больше* второго, это означает, что оно в 10 раз больше второго, если на два порядка – в 100 раз больше и т. д.

Пример 1. Представьте число 272 000 в стандартном виде.

Решение. В данном числе поставим запятую так, чтобы в целой части была одна цифра, отличная от нуля. В итоге будем иметь 2,72. Запятой отделили 5 цифр с конца числа, чем уменьшили данное число в 10^5 раз. Следовательно, $272\,000 = 2{,}72 \cdot 10^5$.

Ответ. $2{,}72 \cdot 10^5$.

Пример 2. Представьте число 0,00013 в стандартном виде.

Решение. В данном числе перенесем запятую на 4 знака вправо, будем иметь 1,3. При этом число увеличили в 10^4 раз (на 4 порядка). Следовательно, $0{,}00013 = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$.

Ответ. $1{,}3 \cdot 10^{-4}$.

Пример 3. Выполните действия и представьте результат в стандартном виде:

1) $(5{,}7 \cdot 10^8) \cdot (3{,}6 \cdot 10^{-2})$; 2) $(2{,}1 \cdot 10^7) : (4{,}2 \cdot 10^{-3})$.

Решение.

1) $(5{,}7 \cdot 10^8) \cdot (3{,}6 \cdot 10^{-2}) = (5{,}7 \cdot 3{,}6) \cdot (10^8 \cdot 10^{-2}) = 20{,}52 \cdot 10^6 = 2{,}052 \cdot 10^1 \cdot 10^6 = 2{,}052 \cdot 10^7$;

2) $(2{,}1 \cdot 10^7) : (4{,}2 \cdot 10^{-3}) = \dfrac{2{,}1 \cdot 10^7}{4{,}2 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{2{,}1}{4{,}2} \cdot \dfrac{10^7}{10^{-3}} = 0{,}5 \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^9$.

Ответ. 1) $2{,}052 \cdot 10^7$; 2) $5 \cdot 10^9$.

Пример 4. Найдите сумму $2{,}3 \cdot 10^4 + 3{,}7 \cdot 10^3$ и запишите результат в стандартном виде.

Решение. Имеем два слагаемых разных порядков.

$$2{,}3 \cdot 10^4 + 3{,}7 \cdot 10^3 = 2{,}3 \cdot 10^4 + 3{,}7 \cdot 10^4 \cdot 10^{-1} =$$
$$= 10^4(2{,}3 + 3{,}7 \cdot 10^{-1}) = (2{,}3 + 0{,}37) \cdot 10^4 = 2{,}67 \cdot 10^4.$$

Ответ. $2{,}67 \cdot 10^4$.

Какую запись числа называют его стандартным видом?

1 Начальный уровень

331. (Устно.) Записано ли число в стандартном виде:

1) $0{,}42$; 2) $2{,}9$; 3) $3{,}7 \cdot 10^{-8}$; 4) $0{,}05 \cdot 10^{-12}$; 5) $19{,}2 \cdot 10^2$; 6) $1{,}92 \cdot 10^{-29}$; 7) $1{,}92 \cdot 8^{-29}$; 8) $1{,}001 \cdot 10^7$?

332. Какие из чисел представлены в стандартном виде:

1) $3{,}0017$; 2) $4{,}2 \cdot 10^{-5}$; 3) $0{,}03$; 4) 117; 5) $10{,}5 \cdot 10^7$; 6) $1{,}115 \cdot 1017$; 7) $2{,}7 \cdot 10^{-3}$; 8) $2{,}7 \cdot 5^{-3}$?

333. (Устно.) Назовите порядок представленного в стандартном виде числа:

1) $1{,}7 \cdot 10^5$; 2) $2{,}001 \cdot 10^{-17}$; 3) $4{,}5 \cdot 10^1$; 4) $3{,}7$.

334. Назовите порядок данного в стандартном виде числа:

1) $2{,}7 \cdot 10^{-5}$; 2) $3{,}8 \cdot 10^{12}$; 3) $2{,}45 \cdot 10^0$; 4) $4{,}11 \cdot 10^{-1}$?

2 Средний уровень

335. Запишите в стандартном виде число:

1) 200 000; 2) 5800; 3) 20 500; 4) 739; 5) 107,5; 6) 37,04; 7) 2700,5; 8) 300,8; 9) 0,37; 10) 0,0029; 11) 0,000007; 12) 0,010203.

336. Представьте число в стандартном виде:

1) 50 000; 2) 470 000; 3) 5 030 000; 4) 975; 5) 32,5; 6) 409,1; 7) 12900,5; 8) 87,08; 9) 0,43; 10) 0,00017; 11) 0,00004; 12) 0,90807.

337. Представьте число в стандартном виде:

1) $27 \cdot 10^5$; 2) $427 \cdot 10^{-3}$; 3) $0{,}00027 \cdot 10^5$; 4) $0{,}0037 \cdot 10^{-4}$.

338. Запишите число в стандартном виде:

1) $58 \cdot 10^{-8}$; 2) $237{,}2 \cdot 10^{7}$;
3) $0{,}2 \cdot 10^{-4}$; 4) $0{,}0017 \cdot 10^{5}$.

339. Округлите число до сотен и запишите полученный результат в стандартном виде:

1) 137 152; 2) 12 311; 3) 2197,2; 4) 1000,135.

340. Представьте значение данной величины в виде десятичной дроби или целого числа:

1) территория Украины составляет $6{,}037 \cdot 10^{5}$ км^2;

2) диаметр молекулы воды равен $2{,}8 \cdot 10^{-7}$ мм;

3) население г. Киева на 1 января 2015 года составляло приблизительно $2{,}888 \cdot 10^{6}$ человек;

4) масса птички колибри равна $1{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг.

341. Запишите в виде десятичной дроби или целого числа:

1) $2{,}735 \cdot 10^{4}$; 2) $3{,}7 \cdot 10^{-3}$; 3) $3{,}17 \cdot 10^{7}$; 4) $1{,}2 \cdot 10^{-5}$.

342. Выполните умножение, результат запишите в стандартном виде:

1) $(1{,}7 \cdot 10^{3}) \cdot (3 \cdot 10^{-8})$; 2) $(2{,}5 \cdot 10^{-5}) \cdot (6 \cdot 10^{-2})$.

343. Выполните умножение, результат запишите в стандартном виде:

1) $(1{,}2 \cdot 10^{-8}) \cdot (4 \cdot 10^{5})$; 2) $(1{,}5 \cdot 10^{7}) \cdot (8 \cdot 10^{3})$.

344. Выполните деление и результат запишите в стандартном виде:

1) $(4{,}2 \cdot 10^{7}) : (2{,}1 \cdot 10^{3})$; 2) $(1{,}4 \cdot 10^{5}) : (2{,}8 \cdot 10^{-2})$.

345. Выполните деление и результат запишите в стандартном виде:

1) $(7{,}2 \cdot 10^{5}) : (2{,}4 \cdot 10^{2})$; 2) $(1{,}7 \cdot 10^{-3}) : (8{,}5 \cdot 10^{-7})$.

346. Сравните числа:

1) $1{,}7 \cdot 10^{5}$ и $2{,}8 \cdot 10^{5}$; 2) $1{,}3 \cdot 10^{-4}$ и $1{,}29 \cdot 10^{-4}$.

347. Сравните числа:

1) $2{,}8 \cdot 10^{-3}$ и $3{,}7 \cdot 10^{-3}$; 2) $1{,}42 \cdot 10^{5}$ и $1{,}5 \cdot 10^{5}$.

348. Выполните действие и результат запишите в стандартном виде:

1) $2{,}7 \cdot 10^{3} + 3{,}2 \cdot 10^{3}$; 2) $4{,}7 \cdot 10^{-15} - 3{,}2 \cdot 10^{-15}$.

349. Выполните действие и результат запишите в стандартном виде:

1) $4{,}7 \cdot 10^{-8} + 5{,}1 \cdot 10^{-8}$; 2) $2{,}9 \cdot 10^{7} - 1{,}8 \cdot 10^{7}$.

3 Достаточный уровень

350. Сравните числа:

1) $2{,}9 \cdot 10^8$ и $1{,}8 \cdot 10^9$; 2) $1{,}12 \cdot 10^{-7}$ и $1{,}12 \cdot 10^{-8}$.

351. Сравните числа:

1) $1{,}7 \cdot 10^5$ и $1{,}7 \cdot 10^4$; 2) $1{,}8 \cdot 10^{-6}$ и $8{,}9 \cdot 10^{-7}$.

352. Выполните действия и результат запишите в стандартном виде:

1) $2{,}7 \cdot 10^4 + 3{,}2 \cdot 10^5$; 2) $1{,}42 \cdot 10^{-1} - 2{,}8 \cdot 10^{-2}$.

353. Выполните действия и результат запишите в стандартном виде:

1) $2{,}7 \cdot 10^{-5} + 1{,}7 \cdot 10^{-4}$; 2) $3{,}7 \cdot 10^3 - 2{,}3 \cdot 10^2$.

354. Площадь Автономной Республики Крым равна $2{,}61 \cdot 10^4$ км^2, а площадь Черновицкой области – $8{,}1 \cdot 10^3$ км^2. Сколько процентов составляет площадь Черновицкой области от площади Автономной Республики Крым? (Ответ округлите до целых.)

355. Расстояние от Земли до ближайшей после Солнца звезды α-Центавра равно $4{,}1 \cdot 10^{13}$ км. За какое время свет от Земли достигнет звезды α-Центавра? (Скорость света $3 \cdot 10^5$ км/с.)

356. Выразите:

1) $8{,}3 \cdot 10^6$ т в граммах; 2) $3{,}72 \cdot 10^{-3}$ г в тоннах;
3) $4{,}9 \cdot 10^{-5}$ км в сантиметрах; 4) $4{,}97 \cdot 10^7$ см в метрах.

357. Представьте:

1) $3{,}87 \cdot 10^5$ см в километрах; 2) $4{,}92 \cdot 10^{-2}$ км в метрах;
3) $3{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг в центнерах; 4) $1{,}8 \cdot 10^9$ т в килограммах.

4 Высокий уровень

358. Порядок числа a равен –18. Найдите порядок числа:

1) $100a$; 2) $0{,}00001a$; 3) $a \cdot 10^7$; 4) $\dfrac{a}{10^{-3}}$.

359. Порядок числа b равен 15. Найдите порядок числа:

1) $1000b$; 2) $0{,}01b$; 3) $b \cdot 10^{-3}$; 4) $\dfrac{b}{10^5}$.

Упражнения для повторения

360. Вычислите значение выражения:

1) $\dfrac{2x^4 - 6x^2}{12x^3 - 4x^5}$ при $x = -0{,}5$; 2) $\dfrac{8y^6 - 8y^4}{4y^4 + 4y^3}$ при $y = 10$.

361. При каких значениях a уравнение

$$\frac{(x + a - 1)(x + 2a - 3)}{x - 5} = 0$$

имеет всего один корень?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

362. Функция задана формулой $y = \dfrac{x - 2}{x + 4}$.

1) Найдите область определения функции.

2) Перенесите таблицу в тетрадь и заполните ее, вычислив соответствующие значения функции:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y										

363. Постройте график функции:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -5x$; 3) $y = -\dfrac{2}{3}x + 5$;

4) $y = -5$; 5) $y = 4$; 6) $y = 0{,}3x + 2$.

364. Принадлежит ли графику функции $y = x^2 - x$ точка:

1) $A(1; 1)$; 2) $B(-1; 2)$; 3) $C(0; 0)$; 4) $D(5; 30)$?

Интересные задачки для неленивых

365. (*Киевская математическая олимпиада, 1989 г.*) Два игрока по очереди ходят в игре со следующими правилами: в клеточках бесконечного листа первый игрок ставит крестики, а второй – нолики. Может ли второй игрок играть так, чтобы первый никогда не смог заполнить крестиками какой-нибудь квадрат 2×2?

§ 12. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$, ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА

Пример 1. Пешеход должен преодолеть путь в 16 км. Если он будет двигаться со скоростью v км/ч, то зависимость времени t (в часах) для преодоления этого расстояния от скорости движения можно выразить формулой $t = \frac{16}{v}$. При увеличении значения v в несколько раз значение t во столько же раз уменьшится. В этом случае говорят, что переменные t и v ***обратно пропорциональны***.

Пример 2. Площадь прямоугольника равна 32 см^2, а одна из его сторон a см. Тогда вторую сторону b (в см) можно найти по формуле $b = \frac{32}{a}$. Здесь переменные a и b также обратно пропорциональны.

В примерах 1 и 2 переменные t, v, a и b принимают только положительные значения. В дальнейшем будем рассматривать функции, которые задают формулой вида $y = \frac{k}{x}$ (k – число, $k \neq 0$), где переменные x и y могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Каждую из таких функций называют ***обратной пропорциональностью***.

Функцию вида $y = \frac{k}{x}$, где x – независимая переменная, k – некоторое отличное от нуля число, называют *обратной пропорциональностью*.

Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ – все числа за исключением нуля, так как при $x = 0$ выражение $\frac{k}{x}$ не имеет смысла.

Построим график функции $y = \frac{k}{x}$ отдельно для каждого из случаев $k > 0$ и $k < 0$.

Пример 3. Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$.

Р е ш е н и е. Составим таблицу значений функции $y = \frac{6}{x}$ для нескольких значений аргумента:

x	–6	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	6
y	–1	–1,5	–2	–3	–6	6	3	2	1,5	1

Отметим на координатной плоскости точки из составленной таблицы (рис. 2).

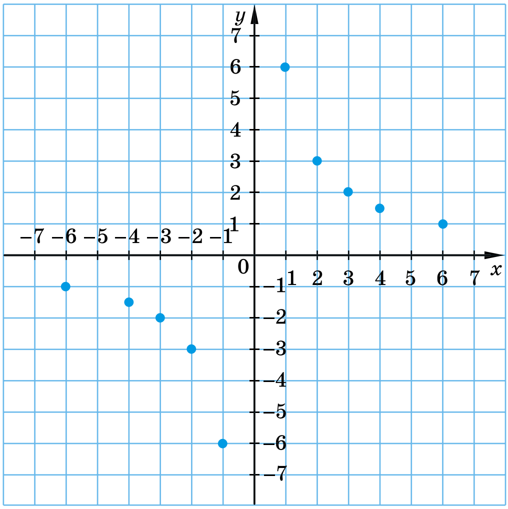


Рис. 2

Если бы мы на этой плоскости обозначили больше точек, удовлетворяющих формуле $y = \dfrac{6}{x}$, а потом соединили их плавной линией, то получили бы график функции $y = \dfrac{6}{x}$ (рис. 3).

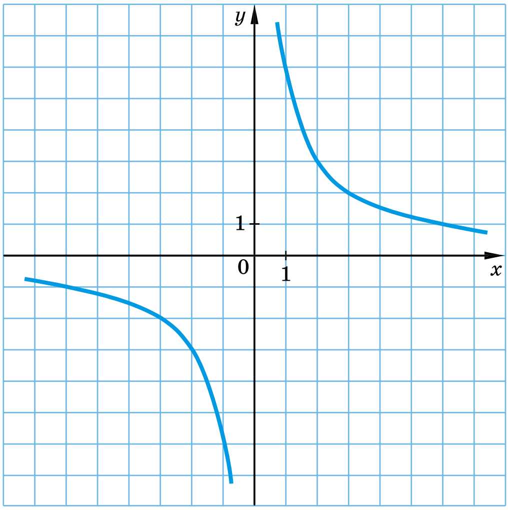


Рис. 3

График обратной пропорциональности называют ***гиперболой***. Гипербола состоит из двух *ветвей*. Для функции $y = \dfrac{6}{x}$ одна из них лежит в первой координатной четверти, а другая – в третьей. Гипербола не пересекает координатные оси: график не содержит точек, у которых $x = 0$ (т. к. нуль не принадлежит области определения функции), и не содержит точек, у которых $y = 0$ (т. к. уравнение $\dfrac{6}{x} = 0$ не имеет решений). Чем больше по модулю значение x, тем меньше по модулю значение y, и наоборот, чем меньше по модулю значение x, тем больше по модулю значение y. Это значит, что ветви гиперболы неограниченно приближаются к осям координат.

Так же выглядит график функции $y = \dfrac{k}{x}$ при любом $k > 0$.

Пример 4. Постройте график функции $y = -\dfrac{6}{x}$.

Р е ш е н и е. Рассуждая как и в предыдущем примере, построим график функции $y = -\dfrac{6}{x}$. Он изображен на рисунке 4.

Это также гипербола, одна из ветвей которой лежит во второй координатной четверти, а другая – в четвертой.

Так же выглядит график функции $y = \dfrac{k}{x}$ при любом $k < 0$.

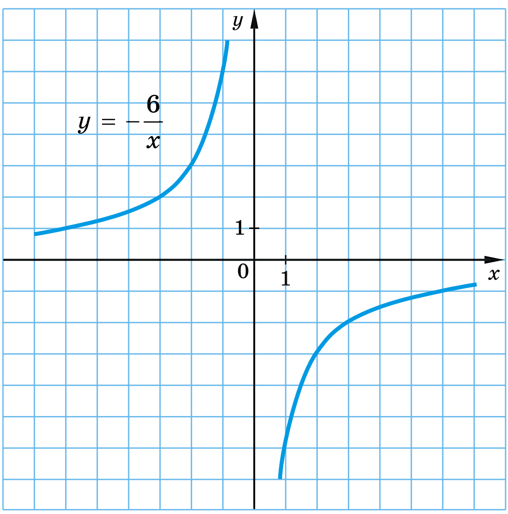


Рис. 4

Обобщим *свойства* обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$.

1. Область определения функции состоит из всех чисел за исключением нуля.
2. Область значений функции состоит из всех чисел за исключением нуля.
3. График функции – гипербола, ветви которой при $k > 0$ лежат в первой и третьей координатных четвертях, а при $k < 0$ – во второй и четвертой.
4. Ветви гиперболы неограниченно приближаются к осям координат.

Пример 5. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{4}{x}$ и $y = x - 3$. Найдите их точки пересечения и, пользуясь построенным графиком, решите уравнение $\frac{4}{x} = x - 3$.

Решение. График функции $y = \frac{4}{x}$ – гипербола, ветви которой лежат в первой и третьей координатных четвертях, а график функции $y = x - 3$ – прямая, проходящая через точки (0; –3) и (3; 0). Графики функций изображены на рисунке 5.

Они пересекаются в точках (4; 1) и (–1; –4), абсциссы 4 и –1 которых являются решениями уравнения $\frac{4}{x} = x - 3$. Действительно, при $x = 4$ выражения $\frac{4}{x}$ и $x - 3$ принимают

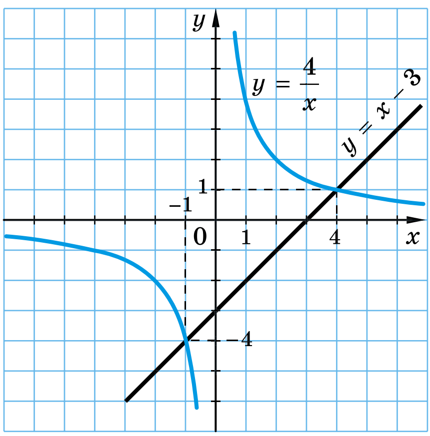


Рис. 5

равные значения: $\dfrac{4}{x} = \dfrac{4}{4} = 1$ и $x - 3 = 4 - 3 = 1$. При $x = -1$ аналогично: $\dfrac{4}{x} = \dfrac{4}{-1} = -4$ и $x - 3 = -1 - 3 = -4$.

Следовательно, числа 4 и -1 – корни уравнения $\dfrac{4}{x} = x - 3$.

Ответ: (4; 1); (−1; −4) – точки пересечения; 4, −1 – корни уравнения.

Предложенный в примере 5 метод решения уравнений называют ***графическим методом решения уравнений.***

Если абсцисса точки пересечения графиков функций – целое число, надо выполнить проверку, т. к. часто корни уравнения этим методом можно найти только приблизительно.

Пример 6. Постройте график функции $y = \dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$.

Решение. Область определения функции – все числа за исключением чисел 0 и 2, которые обращают знаменатель $x^2 - 2x$ в нуль.

Упростим дробь: $\dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x} = \dfrac{8(2 - x)}{x(x - 2)} = -\dfrac{8(x - 2)}{x(x - 2)} = -\dfrac{8}{x}$.

Значит при условии $x \neq 0$ и $x \neq 2$ функция принимает вид $y = -\dfrac{8}{x}$.

Графиком функции $y = \dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$ является гипербола $y = -\dfrac{8}{x}$ с «выколотой» точкой (2; −4), точек же с абсциссой $x = 0$ у гиперболы нет (рис. 6).

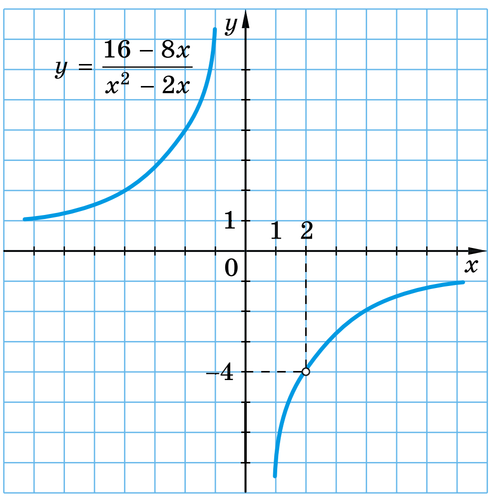


Рис. 6

1. Какую функцию называют обратной пропорциональностью?
2. Как называют график обратной пропорциональности и как он расположен в координатной плоскости?
3. Какие свойства у обратной пропорциональности?

1 Начальный уровень

366. (Устно.) Какие из функций – обратные пропорциональности:

1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = \frac{x}{8}$; 3) $y = -\frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{2}{x}$;

5) $y = \frac{0}{x}$; 6) $y = 7$; 7) $y = \frac{0,0002}{x}$; 8) $y = \frac{0,0002}{x^2}$?

367. Выпишите функции, задающие обратную пропорциональность:

1) $y = \frac{x}{7}$; 2) $y = \frac{7}{x}$; 3) $y = -\frac{3}{x}$; 4) $y = -\frac{x}{3}$;

5) $y = -9$; 6) $y = -\frac{0,01}{x}$; 7) $y = -\frac{0,01}{x^2}$; 8) $y = 0,01x$.

368. В каких координатных углах лежит график функции:

1) $y = \frac{15}{x}$; 2) $y = -\frac{9}{x}$?

2 Средний уровень

369. Вычислите значение функции $y = \frac{20}{x}$, если значение аргумента равно –2; 5; –10; 1.

370. Вычислите значение функции $y = \frac{12}{x}$, если значение аргумента равно –3; 4; –6; 1.

371. Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{100}{x}$. Перенесите таблицу в тетрадь и заполните ее:

x	–50		–20		5	10		
y		–4		1000			5	0,1

372. Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{80}{x}$. Перенесите таблицу в тетрадь и заполните ее:

x	-80	-40		1			160	
y			-5		20	16		$0{,}1$

373. Постройте график функции $y = -\frac{8}{x}$, составив таблицу значений функции для значений аргумента $-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8$.

374. Постройте график функции $y = \frac{12}{x}$, составив таблицу значений y для $x = -12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12$.

375. Не выполняя построения графика функции $y = \frac{128}{x}$, найдите, через какие из точек он проходит:

1) $A(4; 32)$; 2) $B(-8; 16)$; 3) $C(-2; -64)$; 4) $D(0; -128)$.

376. Принадлежит ли графику функции $y = -\frac{162}{x}$ точка:

1) $A(-6; 27)$; 2) $B(9; 18)$; 3) $C(0; -162)$; 4) $D(81; -2)$?

377. (Устно.) График каких функций проходит через точку $A(4; -3)$:

1) $y = \frac{12}{x}$; 2) $y = -\frac{12}{x}$; 3) $y = -\frac{24}{x}$; 4) $y = x - 7$?

378. На 145 грн купили y кг конфет по x грн за килограмм. Выразите формулой зависимость y от x. Является ли эта зависимость обратной пропорциональностью?

3 Достаточный уровень

379. Постройте график функции $y = \frac{10}{x}$. По графику найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно -2; $2{,}5$; -1;

2) значение аргумента, при которых значение функции равно 10; -4; 2;

3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения; положительные значения.

380. Постройте график функции $y = -\dfrac{4}{x}$. По графику найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно $-0{,}5$; 2; -4;

2) значение аргумента, при которых функция равна 4; -1; 2;

3) значение аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения; положительные значения.

381. График обратной пропорциональности проходит через точку $M(-4;\ 12)$. Задайте эту функцию формулой.

382. Запишите формулу обратной пропорциональности, если ее график проходит через точку $P\left(12;\ 1\dfrac{1}{6}\right)$.

383. Функция задана формулой $y = \dfrac{8}{x}$ для $1 \leqslant x \leqslant 4$. Запишите область значений этой функции.

384. Решите графически уравнение:

1) $\dfrac{8}{x} = 2$; 2) $2x = \dfrac{18}{x}$; 3) $-\dfrac{4}{x} = 3 - x$.

385. Решите графически уравнение:

1) $\dfrac{6}{x} = 3$; 2) $\dfrac{4}{x} = x$; 3) $4 - x = -\dfrac{5}{x}$.

4 Высокий уровень

386. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{4}{|x|}$; 2) $y = -\dfrac{8}{|x|}$.

387. Постройте график функции $y = \begin{cases} -\dfrac{6}{x}, & \text{если } x \leqslant -2, \\ -1{,}5x, & \text{если } -2 < x < 2, \\ -\dfrac{6}{x}, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$

388. Постройте график функции $y = \begin{cases} \dfrac{4}{x}, & \text{если } x \leqslant -2, \\ x, & \text{если } -2 < x < 2, \\ \dfrac{4}{x}, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$

389. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{24}{(x+3)^2 - (x-3)^2}$; 2) $y = \dfrac{6x - 18}{3x - x^2}$.

Упражнения для повторения

390. Найдите значение выражения:

1) 3^{-4}; 2) $(-19)^{-1}$; 3) $\left(1\dfrac{1}{7}\right)^{-2}$; 4) $(-0,2)^{-3}$.

391. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{2}{3}a^{-1}b\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{9}{10}a^{-3}b^{-2}\right)^{-1}$; 2) $\left(\dfrac{4mn^{-2}}{5a}\right)^{-1} \cdot 8m^{-3}n^{-2}a^5$.

392. Вычислите $((1 - (1 + 2^{-1})^{-1})^{-1})^{-4}$.

Интересные задачки для неленивых

393. Выражение $(x^2 - x - 1)^{13}$ преобразовали в многочлен. Найдите сумму коэффициентов этого многочлена.

Домашняя самостоятельная работа № 3

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. Представьте $a^{-5}a^2$ в виде степени с основанием a.

А. a^{-3}; **Б.** a^3; **В.** a^{-10}; **Г.** a^{10}.

2. Укажите число, представленное в стандартном виде.

А. $12 \cdot 10^{-7}$; **Б.** $1,7 \cdot 8^{10}$; **В.** $0,05 \cdot 10^{15}$; **Г.** $1,7 \cdot 10^8$.

3. Укажите функцию, являющуюся обратной пропорциональностью.

А. $y = \frac{x}{2}$; **Б.** $y = \frac{2}{x}$; **В.** $y = 2x$; **Г.** $y = 2$.

4. Вычислите $(-5)^{-3}$.

А. 15; **Б.** $\frac{1}{25}$; **В.** $-\frac{1}{125}$; **Г.** $\frac{1}{125}$.

5. Упростите выражение $-4a^{-5}b^7 \cdot 1\frac{1}{4}a^{-3}b^{-2}$.

А. $-a^{-8}b^5$; **Б.** $-5a^{-8}b^5$; **В.** $-5a^{15}b^{-14}$; **Г.** $5a^{-8}b^5$.

6. Укажите стандартный вид числа 217,38.

А. $2{,}1738 \cdot 10^2$; **Б.** $2{,}1738 \cdot 10^{-2}$;
В. $2{,}1738 \cdot 10$; **Г.** $2{,}1738 \cdot 10^4$.

7. Представьте частное $(3{,}5a^5b^{-3}) : (0{,}5a^{-3}b^{-2})$ в виде выражения, не содержащего степень с отрицательным показателем.

А. $\frac{5a^8}{b}$; **Б.** $7a^8b$; **В.** $\frac{7a^8}{b}$; **Г.** $\frac{7a^2}{b^5}$.

8. Найдите значение выражения $\frac{2^{-3} \cdot 4^8}{8^5}$.

А. $\frac{1}{8}$; **Б.** $\frac{1}{4}$; **В.** $\frac{1}{2}$; **Г.** 4.

9. Укажите формулу обратной пропорциональности, график которой проходит через точку $A(-6;\ 1{,}5)$.

А. $y = -4x$; **Б.** $y = -\frac{6}{x}$; **В.** $y = -\frac{9}{x}$; **Г.** $y = \frac{9}{x}$.

10. Вычислите $(1 + (1 - 2^{-1})^{-2})^{-3}$.

А. $\frac{64}{125}$; **Б.** $\frac{1}{8}$; **В.** $\frac{1}{25}$; **Г.** $\frac{1}{125}$.

11. Сократите дробь $\frac{x^{-2} + x^3}{x^2 + x^{-3}}$.

А. Дробь несократима; **Б.** 1; **В.** x; **Г.** $\frac{1}{x}$.

12. Порядок числа a равен -16. Укажите порядок числа $0{,}0001a$.

А. -12; **Б.** -20; **В.** -4; **Г.** -16.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 9–12

1. Представьте в виде степени с основанием a:
1) a^2a^{-3}; 2) $a^{-5}a^{-4}$; 3) $a^5 : a^{-7}$; 4) $(a^{-2})^3$.

2. Записано ли число в стандартном виде:
1) $0{,}37 \cdot 10^5$; 2) $2{,}4 \cdot 10^{-12}$; 3) $1{,}5 \cdot 10^8$; 4) $3{,}5 \cdot 8^{10}$?

3. Какие из функций задают обратную пропорциональность:

1) $y = \frac{x}{5}$; 2) $y = \frac{5}{x}$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = -\frac{6}{x^2}$?

4. Вычислите:

1) 2^{-3}; 2) $(-5)^{-1}$; 3) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 4) $(2{,}7 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{-8})$.

5. Упростите выражение:

1) $-7a^{-3}b^9 \cdot 1\frac{1}{7}a^{-5}b^{-3}$; 2) $\left(-\frac{2}{3}x^3y\right) \cdot \left(-\frac{9}{10}x^{-5}y^{-1}\right)$.

6. Представьте число в стандартном виде:
1) 27 000; 2) 0,002; 3) 371,5; 4) 0,0109.

7. Преобразуйте в выражение, не содержащее степень с отрицательным показателем:

1) $(4{,}2a^7b^{-9}) : (0{,}7a^{-3}b^{-5})$; 2) $\left(\frac{2x^4}{5y^7}\right)^{-2} \cdot 4x^8y^{-18}$.

8. Постройте график функции $y = -\frac{12}{x}$. По графику найдите:

1) значения функции при $x = 4$; -2;
2) значения аргумента, при которых функция равна -6; 1;
3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения; положительные значения.

9. Сократите дробь:

1) $\frac{48}{5^{n+2} - 5^n}$; 2) $\frac{x^{-3} + x^2}{x + x^6}$.

Дополнительные задания

10. Вычислите $((1 + (1 - 2^{-1})^{-1})^{-1})^{-3}$.

11. Постройте график функции $y = \begin{cases} \dfrac{8}{x}, & \text{если } x \leqslant -2, \\ -4, & \text{если } -2 < x < 3, \\ -\dfrac{12}{x}, & \text{если } x \geqslant 3. \end{cases}$

Упражнения для повторения главы 1

К § 1

394. Из рациональных выражений

$$m^3 - mp^2; \quad \frac{t^2 + 2}{t - 7}; \quad \frac{p\left(3 - \frac{2}{x}\right)}{x^2}; \quad \frac{17}{x - y}; \quad \frac{x^2 + ax - a^2}{19}; \quad \frac{(x + p) : y}{a - b}$$

выпишите: 1) целые рациональные выражения;
2) дробные рациональные выражения;
3) рациональные дроби.

395. Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

1) $c^2 - 3c$; 2) $\dfrac{m + 2}{m - 8}$; 3) $\dfrac{a}{a - 9} + \dfrac{a - 9}{a}$; 4) $\dfrac{3 + c}{c(c - 1)}$.

396. Турист прошел 12 км вдоль шоссе со скоростью a км/ч и 8 км по степной дороге со скоростью b км/ч. Сколько времени потратил турист на весь путь? Составьте выражение и найдите его значение, если $a = 5$; $b = 4$.

397. Вычислите значение дроби $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{0,1x}$ при $x = -100$, $y = 99$.

398. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\dfrac{1}{|x| + 7}$; 2) $\dfrac{p}{|m| - m}$; 3) $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{|a|}}$; 4) $\dfrac{3}{|2x - 7| - 3}$.

399. При каких значениях x равна нулю дробь:

1) $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$; 2) $\dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$; 3) $\dfrac{|x| - 2}{(x - 2)(x + 5)}$; 4) $\dfrac{|x| - x}{x(x - 3)}$?

К § 2

400. Сократите дробь:

1) $\dfrac{5m}{20n}$; 2) $\dfrac{4x}{5x}$; 3) $\dfrac{p}{10p}$; 4) $\dfrac{-3}{6t}$; 5) $\dfrac{ax}{xb}$; 6) $\dfrac{mn}{2m}$.

401. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a^2b^3}{ab^7}$; 2) $\dfrac{-63xa^5}{81xa^6}$; 3) $\dfrac{p(a-2)}{m(a-2)}$; 4) $\dfrac{7a-14b}{3a-6b}$;

5) $\dfrac{a-2y}{a^2-2ay}$; 6) $\dfrac{m^2-1}{7m+7}$; 7) $\dfrac{x^2-4x+4}{3x-6}$; 8) $\dfrac{x^2-2xy}{2y-x}$.

402. Приведите дробь:

1) $\dfrac{c}{a^2}$ к знаменателю a^5; 2) $\dfrac{p}{3c}$ к знаменателю $12c^7$.

403. Представьте частное в виде дроби и сократите ее:

1) $(x^3+8) : (x+2)$;

2) $(a^2-5a+25) : (a^3+125)$.

404. Вычислите значение дроби:

1) $\dfrac{10xy-5x^2}{8y^2-4xy}$ при $x = 0{,}2$; $y = 0{,}25$;

2) $\dfrac{a^2-4b^2}{3a^2b-6ab^2}$ при $a = 20$; $b = -10$.

405. Приведите дробь $\dfrac{3}{a-2}$ к знаменателю:

1) $7a-14$; 2) a^2-2a; 3) $16-8a$; 4) a^2-4.

406. Докажите тождество $\dfrac{22{,}5a^2-2{,}5b^2}{7{,}5a^2-2{,}5ab} = \dfrac{3a+b}{a}$.

407. Найдите значение дроби $\dfrac{2x-8y}{0{,}2x^2-3{,}2y^2}$ при $x+4y=5$.

408. Представьте выражение $5a+4b$ в виде дроби со знаменателем:

1) 5; 2) $-a$; 3) $2b$; 4) $2a-3b$.

409. Сократите дробь

$$\frac{x^2-y^2-z^2+2yz}{y^2-x^2-z^2-2xz}.$$

К § 3

410. Выполните действие:

1) $\frac{4m}{7}+\frac{m}{7}$; 2) $\frac{9p}{8a}-\frac{2p}{8a}$; 3) $\frac{m-n}{p}+\frac{n}{p}$; 4) $\frac{12a^2}{5m}-\frac{3a^2}{5m}$.

411. Упростите выражение:

1) $\frac{3m-7}{12m}+\frac{13-5m}{12m}-\frac{6m-2}{12m}$; 2) $\frac{m^2+1}{a(m-1)}-\frac{2}{a(m-1)}$;

3) $\frac{x-8}{x^2-25}+\frac{13}{x^2-25}$; 4) $\frac{a-4}{a-2}-\frac{2}{2-a}$.

412. Найдите значение выражения $\frac{n+1}{n^2-16}+\frac{3}{n^2-16}$ при $n=14$.

413. Преобразуйте в дробь выражение:

1) $\frac{9b+1}{b^2-4}+\frac{8-b}{4-b^2}-\frac{7b-1}{b^2-4}$; 2) $\frac{5m}{m^3-1}-\frac{1-4m}{1-m^3}+\frac{m^2}{m^3-1}$.

414. При каком значении a выражения $\frac{2x+3}{x-2}$ и $\frac{2x}{x-2}+\frac{a}{2-x}$ тождественно равны?

415. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения $\frac{8+3a}{5-4a}+\frac{13a-14}{4a-5}-\frac{2a+7}{5-4a}$ от значений переменной не зависит.

416. Упростите выражение:

1) $\frac{16m^2}{(4m-1)(4m+1)}-\frac{8m}{16m^2-1}-\frac{1}{(1-4m)(1+4m)}$;

2) $\frac{8x-9}{(2x+1)^2}-\frac{8x^3+3x-1}{(1+2x)^2}-\frac{5x-7}{1+4x^2+4x}$.

417. Докажите, что выражение $\frac{x+6}{(2-x)^4}+\frac{x^2-3}{(x-2)^4}-\frac{5x-1}{(2-x)^4}$ при условии $x\neq 2$ принимает положительные значения для всех значений x.

418. Найдите, при каких натуральных значениях n значение дроби будет натуральным числом:

1) $\frac{n+2}{n}$; 2) $\frac{n^2+6}{n}$; 3) $\frac{n^2-10n+16}{n}$.

419. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2}{x-1} + \dfrac{1}{1-x}$.

К § 4

420. Выполните действие:

1) $\dfrac{c}{5} - \dfrac{a}{4}$; 2) $\dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{12}$; 3) $\dfrac{p}{x} - \dfrac{x}{a}$; 4) $\dfrac{4}{m} + \dfrac{n}{7}$.

421. Выполните действие:

1) $\dfrac{2}{3p} - \dfrac{4}{9p}$; 2) $\dfrac{7x^2}{12m} + \dfrac{x^2}{m}$; 3) $\dfrac{3x-2y}{12} + \dfrac{y+x}{6}$;

4) $\dfrac{3a+b}{6} - \dfrac{4a-b}{8}$; 5) $\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{p-2}{p^3}$; 6) $\dfrac{4a+b}{2a} - \dfrac{6b-a}{3b}$.

422. Упростите выражение:

1) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{mn}$; 2) $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{x}$; 3) $\dfrac{a+b}{a} + \dfrac{a-b}{b} - \dfrac{1}{ab}$.

423. Представьте в виде дроби:

1) $2x - \dfrac{1}{x}$; 2) $4p - \dfrac{4p^2-1}{p}$; 3) $\dfrac{2}{m} + \dfrac{3}{m-1}$;

4) $\dfrac{m}{1-m} + \dfrac{1+m}{m}$; 5) $\dfrac{c}{3c-1} + \dfrac{c}{3c+1}$; 6) $\dfrac{x}{x-y} - \dfrac{x}{x+y}$.

424. Выполните действие:

1) $\dfrac{2c-7}{2(c+5)} + \dfrac{4-c}{c+5}$; 2) $\dfrac{a-1}{3a+6} - \dfrac{a}{4a+8}$;

3) $\dfrac{7}{x} - \dfrac{14}{x(x+2)}$; 4) $\dfrac{9}{m^2+4m} - \dfrac{5}{m+4}$;

5) $\dfrac{b}{a^2-b^2} + \dfrac{1}{a+b}$; 6) $\dfrac{x+3}{x^2+2x+1} - \dfrac{1}{x+1}$.

425. Докажите, что для всех значений переменной a значение выражения

$$\frac{(a-3)(a-7)}{12} - \frac{(a-7)(a-1)}{8} + \frac{(a-1)(a-3)}{24}$$

не зависит от a.

426. Упростите выражение:

1) $\dfrac{4m+18}{m^2-9}-\dfrac{5}{m-3}+\dfrac{1}{m+3}$;   2) $\dfrac{2x}{2x+3}+\dfrac{5}{3-2x}-\dfrac{4x^2+9}{4x^2-9}$;

3) $\dfrac{9x}{3xy+2y^2}-\dfrac{4y}{3x^2+2xy}$;   4) $\dfrac{4a}{4a^2-1}-\dfrac{2a+1}{6a-3}+\dfrac{2a-1}{4a+2}$;

5) $\dfrac{2x-1}{x^2+x+1}+\dfrac{4x^2+3x-7}{x^3-1}$;   6) $\dfrac{a^2}{3ab-2-a+6b}-\dfrac{a}{3b-1}$.

427. Докажите тождество:

1) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0$;

2) $\dfrac{yz}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{xz}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{xy}{(z-x)(z-y)}=1$.

428. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение выражения $\dfrac{3x+2}{9x^2-6x+4}-\dfrac{18x}{27x^3+8}-\dfrac{1}{3x+2}$ равно нулю.

429. Найдите значения a и b, при которых равенство является тождеством:

1) $\dfrac{3x}{x+2}-\dfrac{9x+3}{3x-1}=\dfrac{ax+b}{3x^2+5x-2}$;   2) $\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x+3}=\dfrac{18}{x^2-9}$.

430. Лодка, собственная скорость которой v км/ч, преодолела путь длиной s км и вернулась назад за t ч. Выразите t через s и v, если скорость течения 3 км/ч. Упростите полученное выражение и найдите его значение при $v = 12$, $s = 45$.

К § 5

431. Выполните умножение:

1) $\dfrac{7}{m}\cdot\dfrac{m}{9}$;   2) $\dfrac{p^2}{4}\cdot\dfrac{5}{p}$;   3) $\dfrac{4}{b}\cdot\dfrac{b^3}{3}$;   4) $\dfrac{c}{5}\cdot\dfrac{10}{c^2}$.

432. Представьте выражение в виде дроби:

1) $\dfrac{4}{15m^2}\cdot\dfrac{5m}{16}$;   2) $\dfrac{t^3}{15}\cdot\dfrac{20}{tk}$;   3) $-\dfrac{24m}{5a^2}\cdot\dfrac{15a}{8m^3}$;

4) $-12x\cdot\left(-\dfrac{p}{16x^2}\right)$;   5) $15m^2n\cdot\dfrac{7}{25m^3n}$;   6) $\dfrac{7c^3}{12a^8}\cdot\left(-\dfrac{8a^5}{21c}\right)$.

433. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x^2 - 3x}{7} \cdot \dfrac{21}{x^2 - 9}$; 2) $-\dfrac{3x - y}{6x + 6} \cdot \dfrac{8x + 8}{y - 3x}$;

3) $\dfrac{a^2 - 2a + 1}{15m^2} \cdot \dfrac{5m}{a^2 - 1}$; 4) $\dfrac{c^2 + 2c}{12ab} \cdot \dfrac{20a^2b}{c^2 + 4c + 4}$.

434. Возведите в степень:

1) $\left(\dfrac{c}{2m}\right)^3$; 2) $\left(-\dfrac{p}{a^2}\right)^3$; 3) $\left(-\dfrac{3a^3}{b^2}\right)^4$; 4) $\left(-\dfrac{t^2c^3}{p^{10}}\right)^8$.

435. Выполните действие:

1) $\dfrac{a^7 + a^5}{a^6 - a^4} \cdot \dfrac{a^6 - a^8}{a^3 + a^5}$; 2) $-\dfrac{a^2 - 25}{a^2 - 4b^2} \cdot \left(-\dfrac{a + 2b}{2a - 10}\right)$;

3) $\dfrac{5c^5 - 3c^4}{c^3 - 8} \cdot \dfrac{2c - 4}{3c^2 - 5c^3}$; 4) $(a^2 + 4a + 4) \cdot \left(-\dfrac{4}{10 + 5a}\right)$.

436. Представьте выражение в виде дроби:

1) $\left(-\dfrac{25x^2y^3}{9t}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3t^4}{5xy^2}\right)^3$; 2) $\dfrac{(a - b)^3}{a + b} \cdot \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$.

437. Выполните умножение:

$$\frac{x^2 + (a + b)x + ab}{x^2 - (a - c)x - ac} \cdot \frac{x^2 - c^2}{x^2 - a^2}.$$

438. Докажите, что значение выражения

$$\frac{0,5x^2 + 2}{0,5x^2 - x + 2} \cdot (2 - x) \cdot \frac{4 + 0,5x^3}{8 - 0,5x^4}$$

не зависит от любого из допустимых значений переменной.

439. Докажите, что значение выражения

$$\frac{a^2 - ab + ac - bc}{a^2 + ab - ac - bc} \cdot \frac{a^2 + bc - ab - ac}{a^2 + bc + ab + ac}$$

при всех допустимых значениях переменных – неотрицательно.

К § 6

440. Выполните деление:

1) $\dfrac{c}{3} : \dfrac{a}{2}$; 2) $\dfrac{p}{4} : \dfrac{c}{17}$; 3) $\dfrac{3}{a} : \dfrac{7}{a}$; 4) $\dfrac{5}{m^2} : \dfrac{3}{m}$.

441. Упростите выражение:

1) $\frac{12a}{5b^2} : \frac{16a}{15b}$; 2) $-\frac{7m^2}{n^2} : \frac{21m}{n^3}$; 3) $-\frac{5a^3}{4b^2} : (-10a^2)$;

4) $20m^2n : \left(-\frac{4m^3}{p}\right)$; 5) $\frac{5c^2}{9m^3} : \frac{25c^3}{81m}$; 6) $-\frac{22x^2}{39a} : \left(-\frac{33x^3}{26a^4}\right)$.

442. Выполните действие:

1) $\frac{ax - xy}{a} : \frac{a^2 - ay}{x}$; 2) $\frac{a^2 - b^2}{5a} : \frac{3a + 3b}{10a^2}$;

3) $\frac{x^2 - 36}{a - 2b} : \frac{x^2 + 12x + 36}{2b - a}$; 4) $\frac{3a - a^2}{a^2 - 4a + 4} : \frac{3 - a}{4 - 2a}$.

443. Представьте выражение в виде дроби:

1) $\frac{27 + x^3}{81 - x^4} : \frac{x^2 - 3x + 9}{x^2 + 9}$;

2) $\frac{(10x - 4y)^2}{100} : (2,5x^2 - 0,4y^2)$.

444. Представьте дробь $\dfrac{\dfrac{a^2 + 5a}{a^2 - 9}}{\dfrac{a^2 - 25}{a^2 - 3a}}$ в виде рациональной дроби.

445. Докажите, что значение выражения

$$\frac{2x^3 + 2y^3}{xy - x^2} : \frac{x^3 - x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}$$

при всех допустимых значениях переменной принимает только неположительные значения.

446. Вычислите значение выражения

$$\frac{27a^3 - 64b^3}{b^2 - 4} : \frac{9a^2 + 12ab + 16b^2}{b^2 + 4b + 4}$$

при $a = 4$; $b = 3$.

447. Докажите тождество:

$$\frac{a^2 - 16}{a^2 - ab + 5a - 5b} : \frac{a^2 + 5a + 4}{a^2 - ab + a - b} = \frac{a - 4}{a + 5}.$$

К § 7

448. Выполните действия:

1) $\left(\frac{2a}{2a-1}+1\right)\cdot\frac{6a-3}{4a^2-a}$; 2) $\left(m+\frac{m^2}{3-m}\right):\frac{m+3}{m-3}$;

3) $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}\right):\frac{ab}{a+b}$; 4) $\left(p-\frac{p^2-3}{p+1}\right)\cdot\frac{p^2-1}{p+3}$.

449. Докажите тождество:

1) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right):(a+b)=\frac{a+b}{ab}$;

2) $\frac{m-n}{mn}:\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)=\frac{mn}{m+n}$.

450. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{1}{a+b}-\frac{a}{b^2+ab}\right)\cdot\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}-\frac{b}{a^2-ab}\right)$;

2) $\left(\frac{6a+1}{a-3}+\frac{6a-1}{a+3}\right):\frac{2a^2+1}{a-3}$.

451. Вычислите значение выражения

$$\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{b}\right)$$

при $a = 4$; $b = 3$.

452. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения от значения переменной не зависит:

1) $\frac{2x}{x+3}+(x-3)^2\left(\frac{2}{x^2-6x+9}+\frac{1}{9-x^2}\right)$;

2) $\left(\frac{3}{4m^2-9}-\frac{2m}{4m^2-12m+9}\right)\cdot\frac{8m^3-18m}{4m^2+9}+\frac{3}{2m-3}$.

453. Докажите тождество:

1) $\left(\frac{a}{a-3}+\frac{10}{a-3}+\frac{25}{a^2-3a}\right):\left(\frac{5}{a^2}+\frac{2}{a}+\frac{1}{5}\right)=\frac{5a}{a-3}$;

2) $\left(\frac{a-1}{a^2-a+1}-\frac{4a-5}{a^3+1}\right):\frac{2-a}{4a^2-4a+4}=\frac{4(2-a)}{a+1}$.

454. Известно, что $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 23$. Найдите значение выражения $x + \dfrac{1}{x}$.

455. Упростите выражение:

$$\left(\frac{4}{x^2 - 6x} - \frac{2}{6 - x} + 1\right)\left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{2}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\right).$$

456. Докажите, что выражение

$$\frac{x^2}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{8x^2 - 32}{x^3 - 2x^2} + \frac{x^5 - 8x^2}{x} : (x^2 - 4)$$

при всех допустимых значениях переменной принимает только положительные значения.

457. Докажите, что выражение

$$\left(\frac{3m + 2}{3m^2 + 1} - \frac{18m^3 - m - 9}{9m^4 - 1} + \frac{3m - 2}{3m^2 - 1}\right) : \frac{m^2 + 10m + 25}{9m^4 - 1}$$

для всех $m < -5$ принимает только отрицательные значения.

458. Может ли значение выражения

$$\left(\frac{1}{x^2 - xy} - \frac{3y^2}{x^4 - xy^3} - \frac{y}{x^3 + x^2y + xy^2}\right)\left(y + \frac{x^2}{x + y}\right)$$

при некоторых значениях переменных x и y равняться нулю?

К § 8

459. Является ли число 3 корнем уравнения:

1) $\dfrac{x}{x + 2} = 0$; 2) $\dfrac{x - 3}{x + 1} = 0$; 3) $\dfrac{x + 2}{x - 3} = 0$; 4) $\dfrac{x^2 - 9}{x} = 0$?

460. Решите уравнение:

1) $\dfrac{3x - 9}{2 - x} = 0$; 2) $\dfrac{2x - 4}{2 - x} = 0$; 3) $\dfrac{x}{x + 3} - 2 = 0$;

4) $\dfrac{x}{x - 3} = \dfrac{2}{5}$; 5) $\dfrac{x^2 - x}{x + 2} = \dfrac{x^2 - 8}{x + 2}$; 6) $\dfrac{4x^2 - 1}{x + 1} = 4x$.

461. Какое число надо прибавить и к числителю, и к знаменателю дроби $\dfrac{5}{12}$, чтобы получить дробь $\dfrac{1}{2}$?

462. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2x-1}{3x+1}-\dfrac{2x+1}{3x-5}=0;$ 2) $4+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{2-x};$

3) $\dfrac{8}{3x-3}+\dfrac{2+x}{x-1}=\dfrac{5}{2-2x}-\dfrac{5}{18};$ 4) $\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}.$

463. Катер проплывает 80 км по течению реки за то же время, что и 64 км против течения. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения равна 2 км/ч.

464. Решите уравнение:

1) $\dfrac{5}{(3x-1)^2}+\dfrac{1}{(3x+1)^2}=\dfrac{6}{9x^2-1};$ 2) $\dfrac{|4x+3|}{x-1}=\dfrac{7}{x-1}.$

465. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторое задание за 8 дней. Первый может выполнить это задание самостоятельно вдвое быстрее, чем второй. За сколько дней каждый из них может выполнить это задание самостоятельно?

466. Решите уравнение, где x – переменная, a и b – отличные от нуля числа:

1) $\dfrac{a}{x}=5;$ 2) $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x}=2.$

К § 9

467. Замените дробью степень с целым отрицательным показателем:

1) $8^{-3};$ 2) $c^{-1};$ 3) $(3m)^{-2};$ 4) $(a+2)^{-5}.$

468. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем:

1) $\dfrac{1}{8^2};$ 2) $\dfrac{1}{c};$ 3) $\dfrac{1}{(ab)^3};$ 4) $\dfrac{1}{(1-m)^4}.$

469. Вычислите:

1) $9^{-2};$ 2) $4^{-1};$ 3) $(-5)^{-1};$ 4) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-2};$

5) $0{,}1^{-3};$ 6) $\left(2\dfrac{1}{7}\right)^{-1};$ 7) $0{,}25^{-4};$ 8) $(-2{,}5)^{-3}.$

470. Вычислите значение выражения:

1) $100x^{-2}$ при $x=1;\ 10;\ 100;$ 2) $a^{-3}b$ при $a=4;\ b=8.$

471. Найдите значение выражений a^n и $-a^n$, если:

1) $a = -1$; $n = 8$; 2) $a = 5$; $n = -2$.

472. Не выполняя вычислений, сравните:

1) 7^{-3} и $(-7)^3$; 2) $(-1{,}2)^0$ и $(-5)^{-5}$; 3) $(-13)^{-4}$ и $(-13)^4$;
4) $(-12)^6$ и 12^{-6}; 5) -14^{-2} и $(-14)^{-2}$; 6) $(-9)^{-5}$ и -9^{-5}.

473. Вычислите:

1) $-0{,}25^{-2} : (-4^3)$; 2) $0{,}02 \cdot (-0{,}5)^{-3}$;

3) $0{,}4^{-2} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^{-1}$; 4) $(-1{,}8)^0 - 4^{-1} \cdot 0{,}05^{-2}$.

474. Представьте выражение в виде дроби:

1) $(1 + a^{-3})(1 + a)^{-2}$; 2) $\left(\frac{1}{x^{-1}} - \frac{1}{y^{-1}}\right) \cdot (y - x)^{-1}$.

475. Вычислите $\dfrac{0{,}6^{-4} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^{-6}}{(0{,}36)^{-5} \cdot \left(2\frac{7}{9}\right)^{-6}}$.

476. Решите уравнение $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{x-1}{2x}\right)^{-1} = 3$.

477. Упростите выражение $\left(\frac{1}{b^{-8}} - \frac{1}{a^{-8}}\right) \cdot \left(\frac{a^{-8} + b^{-8}}{a^{-16} - b^{-16}}\right)$.

К § 10

478. Представьте в виде степени с основанием a:

1) a^3a^{-5}; 2) $a^8a^{-7}a^{-2}$; 3) $a^7 : a^{-3}$;
4) $a^{-5} : a^{-4}$; 5) $(a^2)^{-6}$; 6) $(a^{-3})^{-5}$.

479. Вычислите:

1) $4^{-5} \cdot 4^6$; 2) $2^{-7} \cdot 2^4$; 3) $3^{-9} : 3^{-7}$;

4) $5^{17} : 5^{19}$; 5) $((0{,}3)^{-1})^{-2}$; 6) $\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{-9}\right)^0$.

480. Упростите выражение:

1) $12a^{-2}b \cdot \frac{1}{3}ab^{-3} \cdot \frac{3}{4}a^{-3}b^2$; 2) $\left(-\frac{7}{12}x^{-2}\right) \cdot (-6x^3) \cdot \frac{1}{7}x^{-8}$.

481. Представьте выражение x^{-12}, где $x \neq 0$, в виде степени с основанием: 1) x^2; 2) x^{-3}.

482. Найдите значение выражения

$$\frac{9}{28}x^{-2}y^7 \cdot \frac{14}{15}x^7y^{-2} \cdot (-10x^{-5}y^{-6})$$

при $x = -1{,}19$; $y = -0{,}1$.

483. Упростите выражение:

1) $(-3p^{-3}ca^{-2})^{-2} \cdot (0{,}1pc^{-2}a)^2$; 2) $\left(\frac{1}{4}a^{-4}b^{-2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-3}}{4b}\right)^{-3}$.

484. Докажите тождество $(a^{-2} - a^{-1} + 1) : (a^{-2} + a) = \frac{1}{a+1}$.

485. Представьте выражение $x^3 + 5 + x^{-5}$ в виде произведения двух множителей, один из которых равен:

1) x; 2) x^{-1}; 3) x^{-3}.

486. Докажите, что при любом целом значении k выполнимо равенство:

1) $3 \cdot 7^k + 4 \cdot 7^k = 7^{k+1}$; 2) $5 \cdot 4^k - 4^k = 4^{k+1}$.

К § 11

487. Какие из чисел записаны в стандартном виде? Для чисел, записанных в стандартном виде, назовите порядок числа:

1) $3{,}7 \cdot 108$; 2) $0{,}29 \cdot 10^{11}$; 3) $2{,}94$;
4) $10{,}94$; 5) $1{,}135 \cdot 10^{-11}$; 6) $0{,}311$;
7) $1{,}02 \cdot 10^{15}$; 8) $1{,}02 \cdot 15^{10}$.

488. Представьте число в стандартном виде:

1) 130 000; 2) 783,5; 3) 0,0012; 4) 0,001002003.

489. Выполните действия с числами, представленными в стандартном виде:

1) $(2{,}7 \cdot 10^8) \cdot (5 \cdot 10^{-5})$; 2) $(9{,}6 \cdot 10^{-8}) : (3{,}2 \cdot 10^{-12})$;
3) $2{,}7 \cdot 10^4 + 3{,}1 \cdot 10^4$; 4) $3{,}42 \cdot 10^{-5} - 2{,}11 \cdot 10^{-5}$.

490. Площадь бассейна реки Днепр равна $5{,}04 \cdot 10^5$ км^2, а площадь бассейна реки Южный Буг составляет 12,6 % от площади бассейна Днепра. Найдите площадь бассейна реки Южный Буг и представьте ее в стандартном виде $a \cdot 10^n$, округлив число a до сотых.

491. Выразите время в системе СИ и результат запишите в стандартном виде:

1) 1 час;
2) 1 сутки;
3) 1 месяц (30 дней);
4) 1 год (365 дней);
5) 1 век.

К § 12

492. Какие из функций задают обратную пропорциональность? В каких координатных углах лежат их графики:

1) $y = \frac{x^2}{4}$; 2) $y = \frac{4}{x^2}$; 3) $y = \frac{x}{4}$; 4) $y = \frac{4}{x}$;

5) $y = -\frac{4}{x}$; 6) $y = -\frac{x}{4}$; 7) $y = 4x$; 8) $y = -4x$?

493. Обратная пропорциональность задана формулой $y = -\frac{16}{x}$. Не выполняя построения графика, найдите:

1) значение функции для значения аргумента, равного −8; 2; −5;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно 4; −0,5; 2,5.

494. Постройте график функции:

1) $y = -\frac{10}{x}$; 2) $y = \frac{2}{x}$, где $-2 \leqslant x \leqslant 4$, $x \neq 0$.

495. Точка $A(-3;\ 4)$ принадлежит графику обратной пропорциональности. Принадлежит ли этому графику точка:

1) $B(1;\ 12)$; 2) $C(2;\ -6)$?

496. Прямоугольный параллелепипед, стороны основания которого равны x см и y см, имеет высоту 10 см и объем 120 см^3. Выразите формулой зависимость y от x. Является ли эта зависимость обратной пропорциональностью? Какова область определения функции? Постройте ее график.

497. На рисунке 7 изображен график зависимости времени, необходимого для преодоления пути из пункта A в пункт B, от скорости. С помощью графика определите:

1) время, необходимое для преодоления пути из A в B при скорости движения 10 км/ч; 20 км/ч;
2) скорость, с которой нужно двигаться, чтобы добраться из A в B за 2 ч; за 8 ч;
3) расстояние между пунктами A и B.

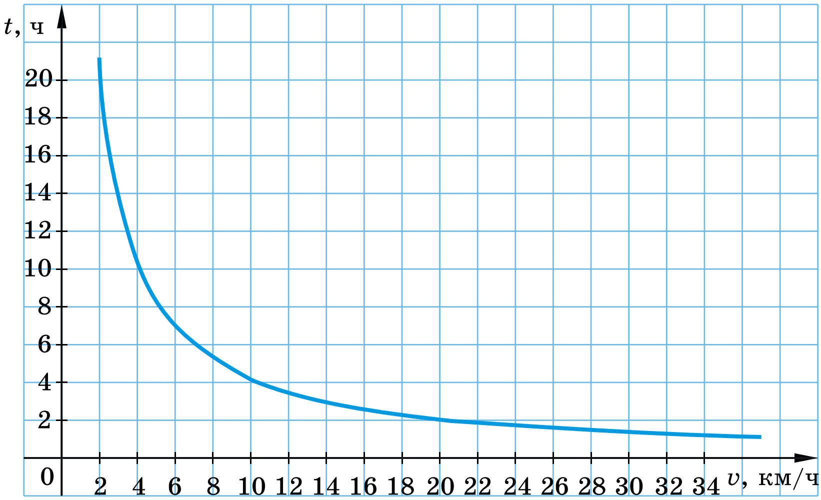


Рис. 7

498. Не выполняя построения графика функции $y = \frac{4}{x}$, найдите те его точки, координаты которых между собой равны.

499. Не выполняя построения графика функции $y = -\frac{9}{x}$, найдите те его точки, координаты которых являются противоположными числами.

500. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{30x - 18x^2}{3x^3 - 5x^2}$;

2) $y = \dfrac{4 + x}{x^2 + x} + \dfrac{3}{x + 1}$.

Глава 2

Квадратные корни. Действительные числа

В этой главе вы:

- **познакомитесь** с понятиями арифметического квадратного корня, множества и подмножества; функциями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$;
- **научитесь** применять определение арифметического квадратного корня и его свойства для решения уравнений, упрощения и вычисления значений выражений, а также строить графики функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

§ 13. ФУНКЦИЯ $y = x^2$, ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА

Пример 1. Пусть сторона квадрата равна a см. Тогда его площадь (в см^2) можно найти по формуле $S = a^2$. В этой формуле каждому положительному значению переменной a соответствует единственное значение переменной S.

Если обозначить независимую переменную через x, а зависимую – через y, то получим функцию, которую задают формулой $y = x^2$. В этой формуле переменная x может принимать любые значения (положительные, отрицательные, значение нуль).

Составим таблицу значений функции $y = x^2$ для нескольких значений аргумента:

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Отметим на координатной плоскости точки $(x; y)$, координаты которых записаны в таблице (рис. 8). Если на этой плоскости отметить больше точек, координаты которых удовлетворяют формуле $y = x^2$, а потом соединить их плавной линией, то получим график функции $y = x^2$ (рис. 9). График этой функции называют ***параболой***, точку (0; 0) – ***вершиной параболы***. Вершина делит параболу на две части, каждую из которых называют ***ветвью параболы***.

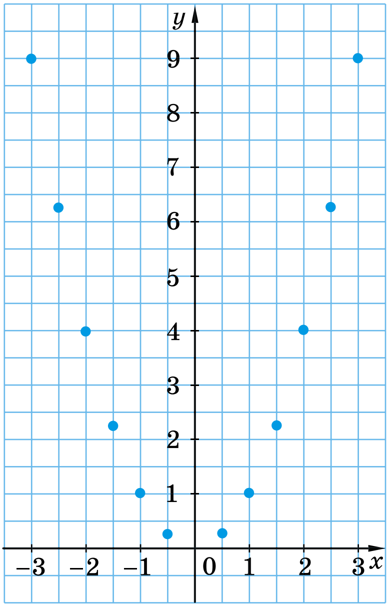


Рис. 8

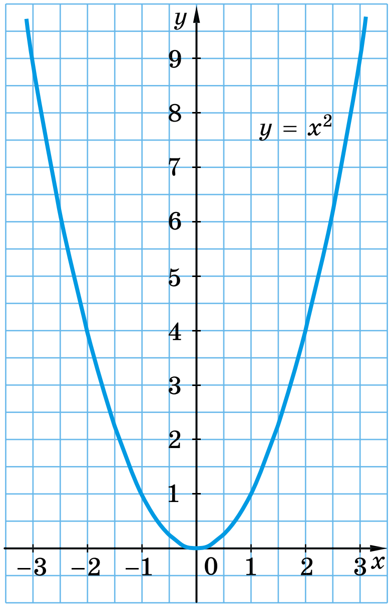


Рис. 9

Сформулируем некоторые *свойства функции* $y = x^2$.

1. Область определения функции состоит из всех чисел.
***2. Область значений функции состоит из всех неотрицательных чисел*, то есть $y \geqslant 0$.**

Действительно, так как $x^2 \geqslant 0$ для любого x, то $y \geqslant 0$.

3. Графиком функции является парабола с вершиной в точке* (0; 0)*, ветви которой направлены вверх. Все точки параболы, за исключением вершины, лежат выше оси абсцисс.
4. Противоположным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции.

Действительно, это следует из того, что $(-x)^2 = x^2$ при любом значении x.

Пример 2. Решите графически уравнение $x^2 = 3 - 2x$.

Решение. График функции $y = x^2$ – парабола, а функции $y = 3 - 2x$ – прямая, проходящая через точки (0; 3) и (2; –1). Построим эти графики в одной системе координат (рис. 10). Они пересекутся в двух точках с абсциссами $x = 1$ и $x = -3$.

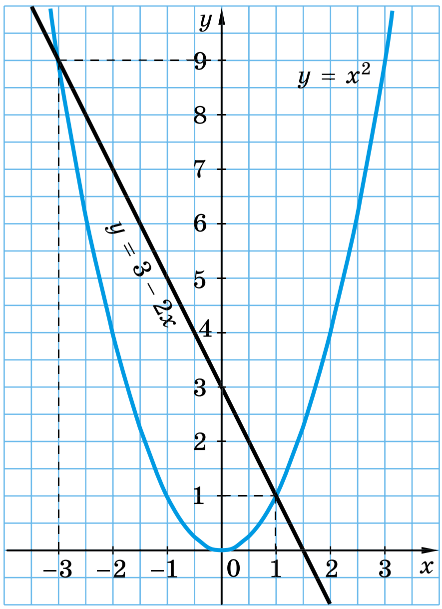


Рис. 10

Убедимся, что числа 1 и -3 являются корнями уравнения:
1) для $x = 1$: $x^2 = 1^2 = 1$ и $3 - 2x = 3 - 2 \cdot 1 = 1$;
2) для $x = -3$: $x^2 = (-3)^2 = 9$ и $3 - 2x = 3 - 2 \cdot (-3) = 9$.
Следовательно, -3 и 1 – корни уравнения $x^2 = 3 - 2x$.
Ответ. -3; 1.

Пример 3. Между какими последовательными целыми числами лежит корень уравнения $\frac{6}{x} = x^2$?

Решение. Решим уравнение графически, построив графики функций $y = \frac{6}{x}$ и $y = x^2$ в одной системе координат. Так как $x^2 \geqslant 0$ для любого x, то в данном уравнении и $\frac{6}{x} \geqslant 0$. Откуда $x > 0$. Поэтому рассмотрим графики функций только для $x > 0$. Это ветвь гиперболы и ветвь параболы, лежащие в первой координатной четверти (рис. 11).

Графики пересекаются в одной точке, абсцисса которой является корнем уравнения и заключена между числами 1 и 2.

Таким образом, корень уравнения $\frac{6}{x} = x^2$ лежит между числами 1 и 2.

Ответ. Между числами 1 и 2.

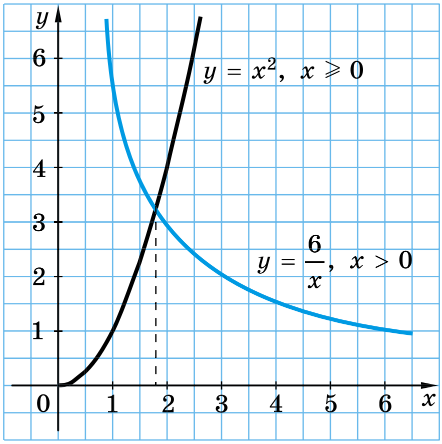


Рис. 11

1. Как называют график функции $y = x^2$?
2. Сформулируйте свойства функции $y = x^2$.

1 Начальный уровень

501. (Устно.) Прямой, гиперболой или параболой является график функции:

1) $y = \frac{6}{x}$; 2) $y = 6x$; 3) $y = 6$;

4) $y = x^2$; 5) $y = 2x - 3$; 6) $y = -\frac{8}{x}$?

502. Для функции $y = x^2$ найдите значения y, соответствующие значениям $x = -3;\ 0;\ 5$.

503. Для функции $y = x^2$ найдите значения y, соответствующие значениям $x = -2;\ 1;\ 6$.

2 Средний уровень

504. По графику функции $y = x^2$ (рис. 9) найдите:

1) значение y, соответствующее значению $x = -2{,}5;\ -1;\ 1{,}5;\ 3$;
2) значение x, при котором $y = 1;\ 3{,}5;\ 9$;
3) несколько значений x, при которых значения функции больше числа 2; меньше числа 2.

505. Используя график функции $y = x^2$ (рис. 9), найдите:

1) значение y, соответствующее значению $x = -3; -0{,}5; 2{,}5$;
2) значение x, при котором $y = 4; 5$;
3) несколько значений x, при которых значение функции меньше числа 1; больше числа 1.

506. Постройте график функции $y = x^2$ для $-1 \leqslant x \leqslant 4$.

507. Постройте график функции $y = x^2$ для $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

508. Проходит ли график функции $y = x^2$ через точку:

1) $A(-1; -1)$; 2) $B(-5; 25)$; 3) $C(0; 0)$; 4) $D(25; 5)$?

509. Принадлежит ли графику функции $y = x^2$ точка:

1) $A(-4; 16)$; 2) $B(16; -4)$; 3) $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; 4) $D(0; 2)$?

3 Достаточный уровень

510. Найдите область значений функции $y = x^2$, если:

1) $-3 \leqslant x \leqslant 0$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

511. Сравните значение функции $y = x^2$ при:

1) $x = 2{,}7$ и $x = -2{,}7$; 2) $x = -1{,}9$ и $x = 1{,}8$;
3) $x = 0$ и $x = -3{,}2$; 4) $x = -1{,}1$ и $x = 1{,}2$.

512. Решите графически уравнение:

1) $x^2 = 3x$; 2) $x^2 = -\frac{8}{x}$.

513. Решите графически уравнение: 1) $x^2 = 4$; 2) $x^2 = -2x$.

4 Высокий уровень

514. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{4x^2 - x^4}{4 - x^2}$.

515. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3}{x}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - x^4}{1 - x^2}$.

Упражнения для повторения

516. При каких значениях a верно равенство:

1) $a^2 = (-a)^2$; 2) $a^2 = |a|^2$; 3) $a^2 = -a^2$; 4) $(-a)^2 = -a^2$?

517. Найдите:

1) наименьшее значение выражения $x^2 - 19$; $18 + (x - 3)^2$;
2) наибольшее значение выражения $17 - x^2$; $-9 - (x + 7)^2$.
При каких значениях x достигается это значение?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

518. Вычислите:

1) $25^2 + (-6)^2$; 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(1\frac{3}{5}\right)^2$;

3) $0{,}01^2 : (-0{,}1)^2$; 4) $(-4)^2 \cdot (-0{,}5)^2$.

519. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна:

1) 9 см^2; 2) 0,25 м^2.

520. Решите уравнение:

1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $x^2 = \frac{4}{9}$.

521. 1) Постройте графики функций $y = x^2$ и $y = 9$ и найдите координаты точек их пересечения.

2) Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = x^2$ и $y = 0$?

3) Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = x^2$ и $y = a$, если $a > 0$?

4) Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = x^2$ и $y = a$, если $a < 0$?

Интересные задачки для неленивых

522. В ящике лежат только черные, белые и зеленые шары. Какие бы n ($n > 2$) шаров наугад не вытащили из ящика, среди них обязательно будут белый и черный. Какое наибольшее количество шаров может лежать в этом ящике?

§ 14. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Если известна сторона квадрата, можно легко найти его площадь. Но часто приходится решать и обратную задачу: по известной площади квадрата находить его сторону.

Пример 1. Площадь квадрата равна 16 см^2. Чему равна длина его стороны?

Решение. Пусть длина стороны квадрата равна x см, тогда его площадь будет x^2 см^2. Имеем уравнение: $x^2 = 16$, корнями которого являются числа 4 и -4. Действительно, $4^2 = 16$ и $(-4)^2 = 16$. Длина не может выражаться отрицательным числом, поэтому условию задачи удовлетворяет только один из корней уравнения – число 4. Следовательно, длина стороны квадрата равна 4 см.

Корни уравнения $x^2 = 16$, то есть числа, квадраты которых равны 16, называют ***квадратными корнями*** из числа 16.

***Квадратным корнем из числа a* называют число, квадрат которого равен *a*.**

Например, квадратными корнями из числа 100 являются числа 10 и -10, потому что $10^2 = 100$ и $(-10)^2 = 100$. Квадратным корнем из числа 0 является число 0, потому что $0^2 = 0$. Квадратного корня из числа -16 мы не найдем, ведь среди известных нам чисел не существует числа, квадрат которого равнялся бы -16.

Число 4, являющееся неотрицательным корнем уравнения $x^2 = 16$, называют ***арифметическим квадратным корнем*** из числа 16.

***Арифметическим квадратным корнем из числа a* называют неотрицательное число, квадрат которого равен *a*.**

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$ ($\sqrt{\ }$ – знак арифметического квадратного корня, или радикал). Выражение, стоящее под знаком корня, называют ***подкоренным выражением***. Запись $\sqrt{a}$ читают следующим образом: *квадратный корень из а* (слово *арифметический* при чтении принято опускать, поскольку в школе рассматривают только арифметические корни).

Пример 2. 1) $\sqrt{81} = 9$, так как $9 \geqslant 0$ и $9^2 = 81$;

2) $\sqrt{0} = 0$, так как $0 \geqslant 0$ и $0^2 = 0$;

3) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, так как $\frac{2}{3} \geqslant 0$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$;

4) $\sqrt{1\frac{24}{25}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$, так как $\frac{7}{5} \geqslant 0$ и $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = 1\frac{24}{25}$.

Вообще равенство $\sqrt{a} = x$ является верным, если выполняются два условия: 1) $x \geqslant 0$; 2) $x^2 = a$.

Так как $x^2 \geqslant 0$ для всех значений переменной x, то $a \geqslant 0$.

Выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла, если $a < 0$.

Например, не имеют смысла выражения $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-2,9}$.

Действие нахождения значения арифметического квадратного корня называют ***извлечением квадратного корня***. Из небольших чисел квадратный корень желательно извлекать устно. Извлекать квадратный корень из больших чисел поможет таблица квадратов двузначных натуральных чисел на форзаце или калькулятор.

Пример 3. Найдите значение корня $\sqrt{4096}$.

Решение. По таблице квадратов двузначных натуральных чисел имеем: $64^2 = 4096$. Поэтому $\sqrt{4096} = 64$.

Пример 4. Вычислите $\sqrt{37^2 - 12^2}$.

Решение. Сначала нужно найти значение выражения $37^2 - 12^2$, а потом извлечь из него корень:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1369 - 144} = \sqrt{1225} = 35.$$

Ответ. 35.

Рассмотрим уравнение $\sqrt{x} = m$, где m – некоторое число. Если $m \geqslant 0$, то по определению квадратного корня следует, что $x = m^2$. Если же $m < 0$, то уравнение не имеет решений, так как по определению число $\sqrt{x}$ – неотрицательное.

Систематизируем данные о решениях уравнения $\sqrt{x} = m$ в виде схемы:

$\boxed{\sqrt{x} = m,\ \ m \text{ – число}}$

$\boxed{\text{Если } m \geqslant 0, \text{ то } x = m^2}$ $\boxed{\text{Если } m < 0, \text{ то корней нет}}$

Пример 5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = 7$;
$x = 7^2$;
$x = 49$;

2) $\sqrt{x} = -3$;
$-3 < 0$;
решений нет;

3) $\sqrt{2x-1} = 5$;
$2x - 1 = 5^2$;
$2x = 26$;
$x = 13$.

Ответ. 1) 49; 2) решений нет; 3) 13.

1. Что называют квадратным корнем из числа a?
2. Что называют арифметическим квадратным корнем из числа a?
3. При каких значениях a выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла?
4. Имеет ли решения уравнение $\sqrt{x} = m$, если $m \geqslant 0$, $m < 0$, и если имеет, то какие?

1 Начальный уровень

523. (Устно.) Существует ли квадратный корень из числа:
1) 9; 2) 16; 3) -4; 4) 0?

524. Найдите значение квадратного корня из числа:
1) 4; 2) 25.

525. Найдите значение квадратного корня из числа:
1) 0; 2) 1; 3) 36.

526. (Устно). Имеет ли смысл выражение:
1) $\sqrt{1}$; 2) $\sqrt{0}$; 3) $\sqrt{-4}$?

527. Имеет ли смысл выражение:
1) $\sqrt{4}$; 2) $\sqrt{-36}$?

528. Докажите, что число:
1) 2 является арифметическим квадратным корнем из числа 4;
2) -2 не является арифметическим квадратным корнем из числа 4;
3) 0,1 является арифметическим квадратным корнем из числа 0,01;
4) 0,2 не является арифметическим квадратным корнем из числа 0,4.

529. Докажите, что: 1) $\sqrt{169} = 13$; 2) $\sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$.

2 Средний уровень

530. Вычислите:

1) $\sqrt{16}$; 2) $\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{0,25}$; 4) $\sqrt{6400}$;

5) $\sqrt{0,09}$; 6) $\sqrt{\dfrac{1}{121}}$; 7) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}}$; 8) $\sqrt{20\dfrac{1}{4}}$.

531. Вычислите:

1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{36}$; 3) $\sqrt{0,16}$; 4) $\sqrt{4900}$;

5) $\sqrt{0,04}$; 6) $\sqrt{\dfrac{1}{64}}$; 7) $\sqrt{1\dfrac{11}{25}}$; 8) $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}$.

532. Верно ли равенство:

1) $\sqrt{900} = 30$; 2) $\sqrt{4} = -2$;

3) $\sqrt{0,9} = 0,3$; 4) $\sqrt{0,64} = 0,8$?

533. С помощью таблицы квадратов двузначных натуральных чисел или калькулятора найдите:

1) $\sqrt{1296}$; 2) $\sqrt{9409}$; 3) $\sqrt{2916}$; 4) $\sqrt{30,25}$.

534. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{64} + \sqrt{25}$; 2) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{0,36}$; 3) $2\sqrt{100} - \sqrt{144}$;

4) $\sqrt{81} : \sqrt{0,01}$; 5) $-5\sqrt{0,64} + 3,9$; 6) $\sqrt{5^2 - 25}$;

7) $\sqrt{6^2 + 8^2}$; 8) $\sqrt{2(0,2^2 + 0,46)}$.

535. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{49} + \sqrt{9}$; 2) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{100}$; 3) $2\sqrt{121} - \sqrt{81}$;

4) $\sqrt{64} : \sqrt{0,25}$; 5) $-5\sqrt{0,36} + 2,8$; 6) $\sqrt{10^2 - 8^2}$;

7) $\sqrt{3^2 + 4^2}$; 8) $\sqrt{0,3^2 - 0,09}$.

536. Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{12 + a}$ при $a = 4$; -8; -12;

2) $\sqrt{m + n}$ при $m = 0{,}09$; $n = 0{,}07$;

3) $x + 4\sqrt{x}$ при $x = 49$; 121;

4) $3\sqrt{b} - b$ при $b = 1{,}96$; $0{,}04$.

537. Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{16 - b}$ при $b = -9$; 15; 2) $2\sqrt{m} - m$ при $m = 1{,}69$; $0{,}49$.

538. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 0$; 3) $\sqrt{x} = -2$;

4) $\sqrt{x} - 3 = 0$; 5) $2\sqrt{x} = 8$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{x} = 2$.

539. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = 1$; 2) $\sqrt{x} = -3$; 3) $\sqrt{x} - 5 = 0$; 4) $3\sqrt{x} = 21$.

3 Достаточный уровень

540. Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt{12 \cdot 14 - 13^2}$; 2) $\sqrt{2009^2 - 2008^2}$; 3) $\sqrt{1000^2 - 1001^2}$?

541. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\frac{5}{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{x^2}$; 3) $\sqrt{x^5}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{-x}}$?

542. При каких значениях y имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{2y}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{y^3}}$; 3) $\sqrt{y^6}$; 4) $\sqrt{-y}$?

543. Решите уравнение:

1) $3\sqrt{x} + 7 = 0$; 2) $2\sqrt{\frac{x}{8}} - 4 = 0$;

3) $\frac{16}{\sqrt{x+3}} = 4$; 4) $7\sqrt{2x-5} - 14 = 0$.

544. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{2}\sqrt{3x} - 3 = 0$; 2) $2\sqrt{\frac{x}{3}} + 6 = 0$;

3) $\frac{14}{\sqrt{2x}} = 28$; 4) $2\sqrt{2x+7} - 6 = 0$.

4 Высокий уровень

545. При каких значениях a имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{-a^2}$; 2) $\sqrt{-(a+3)^2}$;

3) $\sqrt{a^{10} + 1}$; 4) $\frac{\sqrt{a}}{a-3}$?

546. Решите уравнение:

1) $\sqrt{|2x-1|}=3$; 2) $\sqrt{5+\sqrt{x}}=3$; 3) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=2$.

547. Решите уравнение:

1) $\sqrt{|2x+3|}=5$; 2) $\sqrt{9+\sqrt{x}}=4$.

Упражнения для повторения

548. Упростите выражение:

$$\frac{4a}{a+2}-(a-2)^2\cdot\left(\frac{3}{(a-2)^2}+\frac{2}{a^2-4}\right).$$

549. Решите уравнение с двумя переменными:

1) $x^2-6x+9+y^2=0$; 2) $|x+2|+y^2+2y+1=0$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

550. Представьте в виде обычной дроби или смешанного числа:

1) 0,3; 2) 0,25; 3) 1,2; 4) 2,5.

551. Представьте в виде десятичной дроби:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $2\frac{1}{5}$; 4) $3\frac{1}{4}$.

552. Запишите обычную дробь в виде бесконечной десятичной периодической дроби:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{11}$; 3) $\frac{7}{9}$; 4) $\frac{5}{6}$.

Интересные задачки для неленивых

553. Существуют ли такие простые числа x, y, z и t, для которых справедливо равенство

$$xyzt+4=x^2+y^2+z^2+t^2?$$

§ 15. МНОЖЕСТВО. ПОДМНОЖЕСТВО. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Понятие множества является одним из основных понятий математики. Под ***множеством*** будем понимать совокупность объектов, имеющих общую природу (или объединенных по общему признаку), сами объекты при этом будем называть ***элементами множества***.

Как правило, множества обозначают большими латинскими буквами. Если, например, множество A состоит из чисел 1, 2, 3, а множество B – из знаков @ и !, то это записывают так: $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{@,\ !\}$. Числа 1, 2, 3 – элементы множества A, а знаки @ и ! – элементы множества B. Тот факт, что число 1 принадлежит множеству A, записывают с помощью уже известного нам символа $\in$, а именно: $1 \in A$. Тот факт, что число 1 не принадлежит множеству B, записывают так: $1 \notin B$.

Множества, количество элементов которых можно выразить натуральным числом, называют ***конечными***.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют ***пустым множеством***. Его обозначают символом $\varnothing$. Так, например, пустым множеством является множество корней уравнения $|x| = -1$.

Множества, количество элементов которых нельзя выразить натуральным числом и которые не являются пустыми, называют ***бесконечными***.

Если каждый элемент множества *B* является элементом множества *A*, то говорят, что множество *B* является подмножеством множества *A*.

Записывают это следующим образом: $B \subset A$. Схематическая иллюстрация этого факта представлена на рисунке 12.

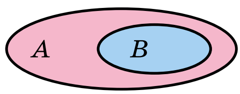


Рис. 12

Пример 1. Пусть $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{1,\ 2\}$, $C = \{4,\ 5\}$. Тогда множество B является подмножеством множества A, то есть $B \subset A$. Множество C не является подмножеством множества A, так как множество C содержит элемент – число 5, которое не является элементом множества A.

Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества, то есть $\varnothing \subset A$.

Целые числа и дробные числа образуют множество *рациональных чисел*.

Множество натуральных чисел обозначают буквой N, множество целых чисел – буквой Z, множество рациональных чисел – буквой Q. Они являются бесконечными множествами.

Можно утверждать, что $5 \in N$, $\frac{2}{3} \notin Z$, $-7 \in Z$, $@ \notin Q$.

Любое рациональное число можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где m – целое число, n – натуральное число.

Например, $9 = \frac{9}{1}$; $\quad 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$; $\quad -5 = \frac{-5}{1}$; $\quad -0,2 = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$.

Рациональное число можно также представить и в виде десятичной дроби. Для этого достаточно числитель дроби разделить на ее знаменатель. Например,

$$\frac{3}{8} = 0,375; \qquad \frac{-5}{4} = -1,25; \qquad \frac{8}{33} = 0,242424\ldots = 0,(24).$$

В последнем случае мы получили бесконечную десятичную периодическую дробь. Дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{-5}{4}$ также можно представить в виде бесконечных десятичных периодических дробей, дописав справа в десятичной части бесконечное много нулей:

$$\frac{3}{8} = 0,375 = 0,375000\ldots; \qquad \frac{-5}{4} = -1,25 = -1,25000\ldots$$

Таким образом,

каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Справедливо и обратное утверждение:

каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа.

Например,

$$1,2000\ldots = 1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}; \qquad 0,(3) = \frac{1}{3}; \qquad -1,(15) = -1\frac{5}{33}.$$

В правильности этих равенств легко убедиться, выполнив соответствующее деление.

Но в математике существуют числа, которые нельзя записать в виде $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное.

Числа, которые нельзя записать в виде $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное, называют *иррациональными числами*.

Префикс «*ир*» означает отрицание, *иррациональные* значит *не рациональные*.

Например, иррациональными являются числа π, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{7}$. Приближенные значения таких чисел можно находить с определенной точностью (то есть округленными до определенного разряда) с помощью микрокалькулятора или компьютера:

$$\pi \approx 3{,}1415926; \qquad \sqrt{2} \approx 1{,}4142135; \qquad -\sqrt{7} \approx -2{,}6457513.$$

Каждое иррациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной непериодической дроби.

Рациональные числа вместе с иррациональными числами образуют множество *действительных чисел*.

Множество действительных чисел обозначают буквой $\boldsymbol{R}$.

Так как каждое натуральное число является целым числом, то множество $\boldsymbol{N}$ является подмножеством множества $\boldsymbol{Z}$. Аналогично, множество $\boldsymbol{Z}$ является подмножеством множества $\boldsymbol{Q}$, а множество $\boldsymbol{Q}$ – подмножеством множества $\boldsymbol{R}$ (рис. 13).

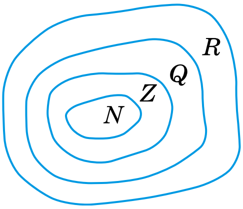


Рис. 13

Действительные числа, записанные в виде бесконечных десятичных непериодических дробей, можно сравнивать по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби. Например, $\sqrt{2} > 1{,}4$ (так как $\sqrt{2} \approx 1{,}41$); $-\sqrt{7} < -2{,}6$ (так как $-\sqrt{7} \approx -2{,}63$).

В задачах с практическим содержанием действительные числа (для выполнения арифметических действий) заменяют на их приближенные значения, округленные до определенного разряда.

Пример 2. Вычислите $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3} + \sqrt{3}$ с точностью до тысячных.

Решение.

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3} + \sqrt{3} \approx 2{,}3562 + 0{,}3333 + 1{,}7321 = 4{,}4218 \approx 4{,}422.$$

Заметим, что при сложении, вычитании, умножении, делении и возведении в степень действительных чисел справедливы те же свойства и ограничения, что и при действиях с рациональными числами.

А еще раньше...

Понятие числа появилось очень давно. Оно является одним из самых общих понятий математики. Потребность в измерениях и подсчетах обусловила появление положительных рациональных чисел. Именно тогда возникли и использовались натуральные числа и дробные числа, которые рассматривались как отношение натуральных чисел.

Следующим этапом развития понятия числа является введение в практику отрицательных чисел. В Древнем Китае эти числа появились во II в. до н. э. Там умели складывать и вычитать отрицательные числа. Отрицательные числа толковали как долг, а положительные – как имущество. В Индии в VII в. эти числа воспринимали так же, но еще и умели их умножать и делить.

Уже древние вавилоняне около 4 тыс. лет назад знали ответ на вопрос: «Какова должна быть длина стороны квадрата, чтобы его площадь равнялась S?». Ими были составлены таблицы квадратов чисел и квадратных корней. Вавилоняне использовали и метод нахождения приближенного значения квадратного корня из числа S, не являющегося квадратом натурального числа. Суть метода заключалась в том, что число S записывали в виде $a^2 + b$, где b было достаточно малым в сравнении с a^2, и применяли формулу

$$\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

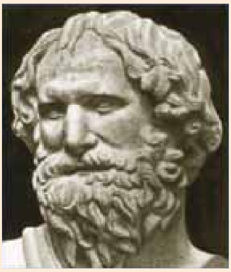
Например, с помощью этого метода:

$$\sqrt{102} = \sqrt{10^2 + 2} \approx 10 + \frac{2}{2 \cdot 10} = 10{,}1.$$

Проверим точность результата: $10{,}1^2 = 102{,}01$.

Такой метод вычисления приближенного значения квадратного корня использовался и в Древней Греции. Его детально описал *Герон Александрийский* (I в. н. э.).

В эпоху Возрождения (XV – нач. XVII в.) европейские математики обозначали корень латинским словом *Radix* (корень), потом – сокращенно – буквой *R*. Так появился термин «радикал», которым называют знак корня. Впоследствии для обозначения корня стали использовать точку, а потом ромбик. Спустя некоторое время – уже знак $\vee$ и горизонтальную черточку над подкоренным выражением. Затем знак $\vee$ и черточка были объединены, и современные математики стали использовать знак квадратного корня в привычном нам виде: $\sqrt{}$.



Герон Александрийский (I в. н. э.)

1. Какие числа образуют множество рациональных чисел?
2. Какие числа образуют множество действительных чисел?
3. Какой дробью можно записать любое рациональное число?
4. Как можно записать любую бесконечную десятичную периодическую дробь?
5. Какие числа называют иррациональными?
6. В каком виде можно представить любое иррациональное число?

1 Начальный уровень

554. (Устно.) Правильно ли, что:

1) 5 – натуральное число; 2) $-2{,}1$ – целое число;

3) $\sqrt{3}$ – рациональное число; 4) $-\frac{5}{7}$ – действительное число?

555. Из чисел $\sqrt{7}$; 0,222...; 52; $-2{,}(4)$; π; 19; $-3{,}7$; 0; $-\sqrt{5}$; $-2\frac{1}{9}$

выпишите: 1) натуральные числа;
2) целые неотрицательные числа;
3) рациональные отрицательные числа;
4) иррациональные числа.

556. Из чисел 8; $-\sqrt{7}$; -5; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{17}$; 3,(7); $\sqrt{13}$; $-1\frac{1}{3}$; 0; 5,137

выпишите: 1) натуральные числа;
2) целые неположительные числа;
3) рациональные положительные числа;
4) иррациональные числа.

2 Средний уровень

557. Представьте число в виде отношения целого числа к натуральному:

1) 31; 2) -8; 3) $2\frac{1}{7}$; 4) $-5{,}1$.

558. Представьте число в виде отношения целого числа к натуральному:

1) -21; 2) 10; 3) $-3\frac{1}{5}$; 4) 2,8.

559. Из множества $\left\{\frac{1}{8};\ \frac{7}{9};\ \frac{7}{3};\ \frac{5}{5};\ \frac{2}{3};\ \frac{10}{1}\right\}$ выделите подмножество: 1) правильных дробей; 2) неправильных дробей.

560. Из множества $\{27;\ 36;\ 48;\ 19;\ 2;\ 11\}$ выделите подмножество: 1) четных чисел; 2) нечетных чисел.

561. Представьте число $\frac{2}{33}$ в виде бесконечной десятичной дроби и округлите ее: 1) до сотых; 2) до тысячных.

562. Представьте число $\frac{4}{11}$ в виде бесконечной десятичной дроби и округлите ее: 1) до сотых; 2) до тысячных.

563. (Устно.) Верно ли, что:

1) $7 \notin \boldsymbol{N}$; 2) $10 \in \boldsymbol{Z}$; 3) $5 \notin \boldsymbol{Q}$;
4) $32 \in \boldsymbol{R}$; 5) $-3{,}9 \notin \boldsymbol{N}$; 6) $-9{,}2 \in \boldsymbol{Q}$;
7) $-3{,}17 \notin \boldsymbol{R}$; 8) $\sqrt{3} \in \boldsymbol{Q}$; 9) $\sqrt{64} \in \boldsymbol{N}$;
10) $-\sqrt{27} \notin \boldsymbol{R}$; 11) $\sqrt{\frac{4}{9}} \notin \boldsymbol{Z}$; 12) $\sqrt{1\frac{7}{9}} \in \boldsymbol{Q}$?

564. Сравните:

1) $1{,}366$ и $1{,}636$; 2) $-2{,}63$ и $-2{,}36$; 3) $-\frac{1}{17}$ и 0;
4) π и $3{,}2$; 5) $-\pi$ и $-3{,}1$; 6) $1{,}7$ и $1{,}(7)$;
7) $-1{,}41$ и $-\sqrt{2}$; 8) $\sqrt{3}$ и $1{,}8$; 9) $2\frac{5}{13}$ и $2{,}(39)$.

565. Сравните:

1) $-2{,}17$ и $-2{,}71$; 2) 0 и $\frac{1}{16}$; 3) $2{,}(3)$ и $2{,}3$;
4) $\sqrt{2}$ и $1{,}4$; 5) $-\sqrt{3}$ и $-1{,}7$; 6) $\frac{1}{11}$ и $0{,}(08)$.

566. Найдите приближенное значение выражения, округлив значение корня до сотых:

1) $\sqrt{17} + 2{,}12$; 2) $3{,}18 - \sqrt{5}$.

567. Найдите приближенное значение выражения, округлив значение корня до сотых:

1) $\sqrt{3} + 4{,}17$; 2) $4{,}82 - \sqrt{11}$.

568. Множество A состоит из корней уравнения $0x = 7$. Что это за множество?

569. Верно ли, что $A \subset B$, если:

1) $A = \{1\}$; $B = \{1;\ 3;\ 5\}$; 2) $A = \{\triangle;\ @\}$; $B = \{\triangle;\ \square;\ !\}$;
3) $A = \varnothing$; $B = \{1;\ 2;\ 3\}$; 4) $A = \{\alpha;\ \beta;\ \gamma\}$; $B = \{\alpha\}$;
5) A – множество простых чисел; B – множество натуральных чисел;
6) A – множество целых чисел; B – множество натуральных чисел, кратных числу 5?

570. Верно ли, что $C \subset D$, если:

1) $C = \{1;\ 7\}$; $D = \{1;\ 5;\ 17\}$; 2) $C = \{а;\ б\}$; $D = \{а;\ б;\ в;\ г\}$;
3) $C = \{m;\ n;\ l\}$; $D = \varnothing$; 4) $C = \{\Delta;\ О\}$; $D = \{\Delta;\ О\}$?

3 Достаточный уровень

571. Расположите в порядке убывания числа:

$$0{,}11;\quad 0{,}(1);\quad 0{,}01;\quad \frac{1}{10};\quad \frac{1}{2}.$$

572. Расположите в порядке возрастания числа:

$$0{,}(2);\quad 0{,}22;\quad \frac{1}{4};\quad \frac{1}{5};\quad 0{,}02.$$

573. Правильно ли, что:

1) сумма двух целых чисел – целое число;
2) частное двух рациональных чисел – число рациональное;
3) любое целое число является натуральным;
4) множество действительных чисел состоит из положительных и отрицательных чисел?

574. Запишите три рациональных числа, которые заключены между числами 1,55 и 1,(5).

575. Запишите два рациональных числа, которые заключены между числами 2,333 и 2,(3).

4 Высокий уровень

576. Используя формулу $\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \dfrac{b}{2a}$, найдите длину стороны квадрата, площадь которого: 1) 39 см^2; 2) 83 дм^2. Сравните ответ с числом, полученным с помощью калькулятора.

577. Докажите, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным.

578. Докажите, что число $\sqrt{3}$ является иррациональным.

Упражнения для повторения

579. Решите уравнение:

1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $4x^2 - 9 = 0$;

3) $\frac{1}{16} - x^2 = 0$; 4) $\frac{9}{25} - x^2 = 0$.

580. Из городов M и N одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Расстояние между городами равно s км, скорости автомобилей – v_1 и v_2 (в км/ч). Через t ч автомобили встретились. Выразите t через s, v_1 и v_2. Вычислите значение t, если $s = 375$ км; $v_1 = 78$ км/ч; $v_2 = 72$ км/ч.

Интересные задачки для неленивых

581. Два игрока по очереди берут из кучки камешки. По правилам игры разрешается за один ход взять 1; 2; 4; 8; ... (любая степень двойки) камешков. Выигрывает тот, кто возьмет последний камешек. Кто победит в этой игре при правильной стратегии, если количество камешков равно:

1) 2016; 2) 2017?

§ 16. ТОЖДЕСТВО $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geqslant 0$. УРАВНЕНИЕ $x^2 = a$

Напомним, что для любых значений $a \geqslant 0$ равенство $\sqrt{a} = x$ является верным, если выполняются два условия: 1) $x \geqslant 0$; 2) $x^2 = a$. Подставив в последнее равенство вместо x его запись в виде $\sqrt{a}$, получим тождество

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Для любого $a \geqslant 0$ справедливо тождество

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Пример 1. Вычислите:

1) $(\sqrt{7})^2$; 2) $(-\sqrt{11})^2$; 3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{18}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

Р е ш е н и е. 1) $(\sqrt{7})^2 = 7$;

2) $(-\sqrt{11})^2 = (-1)^2 \cdot (\sqrt{11})^2 = 1 \cdot 11 = 11$;

3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{18}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\sqrt{18})^2 = \frac{1}{4} \cdot 18 = 4{,}5$;

4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

О т в е т: 1) 7; 2) 11; 3) 4,5; 4) 0,75.

Рассмотрим уравнение $\boldsymbol{x^2 = a}$, где a – некоторое число.

Так как квадрат числа не может быть отрицательным, то при $a < 0$ уравнение $x^2 = a$ не имеет решений, что можно записать следующим образом: $x \in \varnothing$.

Если $a = 0$, то единственным корнем уравнения $x^2 = 0$ является число 0.

Если $a > 0$, то корни уравнения $x^2 = a$ – числа $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Действительно, $(\sqrt{a})^2 = a$ и $(-\sqrt{a})^2 = a$. Для того чтобы убедиться, что уравнение $x^2 = a$ при $a > 0$ других корней не имеет, обратимся к графическому методу решения уравнения. Построим графики функций $y = x^2$ и $y = a$, где $a > 0$ (рис. 14). Эти графики пересекутся дважды: в точках с абсциссами $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$.

Систематизируем данные о решениях уравнения $x^2 = a$ в виде схемы:

$x^2 = a$, a – число

Если $a > 0$, то $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$	Если $a = 0$, то $x = 0$	Если $a < 0$, то корней нет

Пример 2. Решите уравнение:

1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = -7$; 3) $x^2 = 7$; 4) $(2x + 1)^2 = 25$.

Р е ш е н и е. 1) $x_1 = \sqrt{9} = 3$, $x_2 = -\sqrt{9} = -3$;

2) уравнение корней не имеет, то есть $x \in \varnothing$;

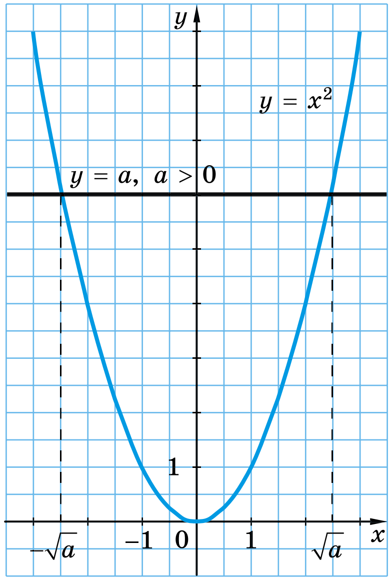


Рис. 14

3) $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 = -\sqrt{7}$. Эти корни являются иррациональными числами;

4) имеем: $2x + 1 = \sqrt{25}$ или $2x + 1 = -\sqrt{25}$

$2x + 1 = 5$ $\quad$ $2x + 1 = -5$

$2x = 4$ $\quad$ $2x = -6$

$x = 2$ $\quad$ $x = -3.$

Таким образом, получим два корня: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

Ответ. 1) ± 3; 2) $\varnothing$; 3) $\pm\sqrt{7}$; 4) 2; -3.

1. При каких значениях a верно равенство $(\sqrt{a})^2 = a$?
2. Имеет ли корни уравнение $x^2 = a$, если $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$, и если имеет, то сколько?

1 Начальный уровень

582. Вычислите: 1) $(\sqrt{3})^2$; 2) $(\sqrt{0})^2$; 3) $(\sqrt{2,1})^2$; 4) $\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2$.

583. Найдите значение выражения: 1) $(\sqrt{5})^2$; 2) $(\sqrt{4,2})^2$.

584. (Устно.) Имеет ли корни уравнение:

1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = 37$; 3) $x^2 = 0$; 4) $x^2 = -5$?

585. Имеет ли корни уравнение: 1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = -10$?

2 Средний уровень

586. Найдите значение выражения:

1) $(-\sqrt{7})^2$; 2) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2$; 4) $(-2\sqrt{5})^2$;

5) $-5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$; 6) $0,3 \cdot (-\sqrt{10})^2$; 7) $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2$; 8) $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$.

587. Вычислите:

1) $(-\sqrt{11})^2$; 2) $\sqrt{19} \cdot \sqrt{19}$; 3) $(2\sqrt{7})^2$; 4) $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{8}\right)^2$;

5) $-7 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$; 6) $0,2 \cdot (-\sqrt{5})^2$; 7) $\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2$; 8) $\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2$.

588. Вычислите:

1) $(\sqrt{15})^2 - 3,8$; 2) $5\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2$; 3) $7 : \left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^2$; 4) $\frac{1}{8}(-\sqrt{24})^2$.

589. Найдите значение выражения:

1) $2,7 + (-\sqrt{13})^2$; 2) $8\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right)^2$;

3) $12 : \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$; 4) $\frac{1}{19}(\sqrt{19})^2$.

590. Решите уравнение:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0,36$; 3) $x^2 = 121$;

4) $x^2 = -9$; 5) $x^2 = 11$; 6) $x^2 = \frac{4}{9}$.

591. Решите уравнение:

1) $x^2 = 49$; 2) $x^2 = 0,16$; 3) $x^2 = 169$;

4) $x^2 = -4$; 5) $x^2 = 5$; 6) $x^2 = \frac{9}{16}$.

592. Найдите корни уравнения:

1) $x^2 - 0,05 = 0,04$; 2) $24 + x^2 = 25$;

3) $x^2 + 12 = 0$; 4) $\frac{1}{3}x^2 = 7$.

593. Решите уравнение:

1) $x^2 + 0{,}01 = 0{,}26$; 2) $x^2 - 14 = 2$;

3) $17 - x^2 = 0$; 4) $-\frac{1}{4}x^2 = 5$.

594. Принадлежит ли графику функции $y = x^2$ точка:

1) $M(\sqrt{5}; 5)$; 2) $N(7; \sqrt{7})$; 3) $P(-\sqrt{3}; 3)$; 4) $T(\sqrt{10}; \sqrt{10})$?

595. Найдите длину стороны квадрата, площадь которого равна:

1) 36 см^2; 2) 49 дм^2; 3) 0,09 м^2; 4) $\frac{25}{36}$ дм^2.

3 Достаточный уровень

596. Вычислите:

1) $(-(\sqrt{5})^2)^2$; 2) $(2\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{2})^2$;

3) $36 \cdot \left(-\frac{1}{3}\sqrt{17}\right)^2 - \frac{1}{5}(2\sqrt{15})^2$; 4) $\sqrt{59{,}29} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{34}\right)^2$;

5) $(-3\sqrt{5})^2 - 3(\sqrt{5})^2$; 6) $\left(-\frac{4}{5}\sqrt{\frac{25}{32}}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{9}}\right)^2$.

597. Вычислите:

1) $((-\sqrt{7})^2)^2$; 2) $(3\sqrt{7})^2 - (7\sqrt{3})^2$;

3) $16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2 + \frac{1}{3}(4\sqrt{3})^2$; 4) $\sqrt{70{,}56} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{42}\right)^2$;

5) $(5\sqrt{2})^2 - 5 \cdot (-\sqrt{2})^2$; 6) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\sqrt{\frac{36}{65}}\right)^2$.

598. Решите уравнение:

1) $(x - 2)^2 = 36$; 2) $(y + 3)^2 = 4$; 3) $(x - 1)^2 = 0$;

4) $(x + 3)^2 = 7$; 5) $\left(y - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{4}{81}$; 6) $(x + 5)^2 = -9$.

599. Решите уравнение:

1) $(x + 1)^2 = 16$; 2) $(y - 2)^2 = 25$; 3) $(m + 2)^2 = 0$;

4) $(x - 2)^2 = 3$; 5) $\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$; 6) $(m - 3)^2 = -4$.

600. Приведите пример уравнения вида $x^2 = a$, где x – переменная, a – число, которое:

1) имеет один целый корень;
2) имеет два целых корня;
3) не имеет корней;
4) имеет два рациональных корня;
5) имеет корни, но они не являются рациональными.

601. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{4}{x-1}$; 2) $(2x-3)^2 + (2x+3)^2 = 20$.

602. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{12}{x+2}$; 2) $(3x+1)^2 + (3x-1)^2 = 4$.

4 Высокий уровень

603. Решите уравнение:

1) $\sqrt{7 + \sqrt{2 + x^2}} = 3$; 2) $2|x^2 - 5| + 3 = 5$.

604. Найдите корни уравнения:

1) $\sqrt{1 + \sqrt{x^2 + 4}} = 2$; 2) $2|x^2 - 4| + 1 = 11$.

605. При каких значениях b выполняется равенство:

1) $(\sqrt{b})^2 = -b$; 2) $(\sqrt{b-4})^2 = b - 4$; 3) $b(\sqrt{b})^2 = b^2$?

606. При каких значениях m уравнение $mx^2 = 1$:

1) имеет два корня;
2) имеет один корень;
3) не имеет корней?

Упражнения для повторения

3 **607.** Упростите выражение: $\left(x - \dfrac{4x-9}{x-2}\right) : \left(2x - \dfrac{2x}{x-2}\right)$.

4 **608.** Известно, что $2x - 4y = 1$. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{4}{x-2y}$; 2) $\dfrac{8y-4x}{5}$; 3) $\dfrac{x^2-4y^2}{2,5x+5y}$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

609. Сравните значения выражений:

1) $\sqrt{4 \cdot 9}$ и $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$; 2) $\sqrt{\dfrac{25}{36}}$ и $\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$.

610. Вычислите: 1) $|-2,5| + |3,7|$; 2) $\left|\dfrac{4}{9}\right| \cdot \left|-\dfrac{3}{16}\right|$.

611. Упростите выражение:
1) $|5a|$, если $a \geqslant 0$; 2) $|7b|$, если $b < 0$.

Интересные задачки для неленивых

612. Одни часы со стрелками спешат на 1 минуту в сутки, а другие – отстают на 30 секунд в сутки. Сейчас эти часы показывают одинаковое время. Через сколько суток они опять покажут одинаковое время?

§17. СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Сравним значения выражений $\sqrt{4 \cdot 9}$ и $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$:

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6, \ \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Имеем: $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$, то есть корень из произведения двух чисел равен произведению их корней. Это свойство справедливо для произведения любых двух неотрицательных чисел.

Теорема (о корне из произведения). ***Корень из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел, то есть при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$:***

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доказательство. Так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ имеют смысл, причем $\sqrt{a} \geqslant 0$, $\sqrt{b} \geqslant 0$. Поэтому $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. Кроме того, $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$.

Имеем: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$ и $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab$. Тогда по определению арифметического квадратного корня: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Доказанная теорема распространяется и на случай, когда множителей под знаком корня три и больше.

Следствие. ***Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.***

Доказательство. Докажем это следствие, например, для трех чисел $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Имеем:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab}\sqrt{c} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}.$$

Пример 1. 1) $\sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30$;

2) $\sqrt{32 \cdot 72} = \sqrt{(16 \cdot 2) \cdot (36 \cdot 2)} = \sqrt{16 \cdot 36 \cdot 4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{4} =$ $= 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$.

Замечание 1. Очевидно, что выражение $\sqrt{ab}$ имеет смысл при условии $ab > 0$, то есть когда переменные a и b – одного знака, а значит и тогда, когда переменные a и b одновременно отрицательны. В таком случае тождество, рассмотренное выше, принимает вид $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$, где $-a \geqslant 0$ и $-b \geqslant 0$. Учитывая оба случая, можно записать, что

$$\boldsymbol{\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}}, \textbf{ где } \boldsymbol{ab \geqslant 0}.$$

Если в равенстве $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ поменять местами левую и правую части, получим тождество:

$$\boldsymbol{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}}, \textbf{ где } \boldsymbol{a \geqslant 0,\ b \geqslant 0}.$$

Произведение корней из неотрицательных чисел равно корню из произведения этих чисел.

Пример 2. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$.

Рассмотрим квадратный корень из дроби.

Теорема (о корне из дроби). ***Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель – положителен, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя, то есть при $a \geqslant 0$ и $b > 0$:***

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство. Так как $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ имеют смысл и $\sqrt{a} \geqslant 0$, $\sqrt{b} > 0$. Поэтому $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$.

Кроме того,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Имеем: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$ и $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$. Тогда по определению квадратного корня: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Пример 3. 1) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$; 2) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

З а м е ч а н и е 2. По аналогии с замечанием 1, тождество, только что рассмотренное нами, можно записать и так:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}, \text{ где } ab \geqslant 0,\ b \neq 0.$$

Если в равенстве $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ поменять местами левую и правую части, получим тождество:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ где } a \geqslant 0,\ b > 0.$$

Частное, числитель которого является корнем из неотрицательного числа, а знаменатель — корнем из положительного числа, равно корню из частного этих чисел.

Пример 4. 1) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$;

2) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{20}{45}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

Рассмотрим, как извлечь квадратный корень из квадрата.

Т е о р е м а (о корне из квадрата). ***Для любого значения а справедливо равенство***

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $|a| \geqslant 0$ и $|a|^2 = a^2$ для любого a, то по определению квадратного корня: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример 5. 1) $\sqrt{7^2} = |7| = 7$; 2) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Рассмотрим квадратный корень из степени.

Теорема (о корне из степени). ***Для любого значения a и натурального числа k справедливо равенство***

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|.$$

Доказательство. $\sqrt{a^{2k}} = \sqrt{(a^k)^2}$. По теореме о корне из квадрата имеем $\sqrt{(a^k)^2} = |a^k|$. Следовательно, $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$.

Пример 6. Вычислите: $\sqrt{1,7^4}$.

Решение. $\sqrt{1,7^4} = \sqrt{(1,7^2)^2} = |1,7^2| = 2,89$.

Пример 7. Упростите выражение: 1) $\sqrt{a^{12}}$;
2) $\sqrt{p^6}$, где $p < 0$.

Решение. 1) $\sqrt{a^{12}} = \sqrt{(a^6)^2} = |a^6|$. Так как $a^6 \geqslant 0$ для любого a, то $|a^6| = a^6$. Следовательно, $\sqrt{a^{12}} = a^6$.

2) $\sqrt{p^6} = \sqrt{(p^3)^2} = |p^3|$. Так как $p < 0$, то $p^3 < 0$, поэтому $|p^3| = -p^3$. Следовательно, если $p < 0$, то $\sqrt{p^6} = -p^3$.

Ответ. 1) a^6; 2) $-p^3$.

1. Сформулируйте и докажите теорему о корне из произведения.
2. Чему равно произведение корней?
3. Сформулируйте и докажите теорему о корне из дроби.
4. Чему равно частное корней?
5. Сформулируйте и докажите теоремы о корне из квадрата и из степени.

1 Начальный уровень

613. (Устно.) Верны ли вычисления:

1) $\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$; 2) $\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{\sqrt{4}}{25} = \dfrac{2}{25}$?

614. Верны ли вычисления:

1) $\sqrt{36 \cdot 4} = \sqrt{36} \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$; 2) $\sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \dfrac{3}{5}$?

2 Средний уровень

615. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{25 \cdot 9}$; 2) $\sqrt{16 \cdot 900}$;
3) $\sqrt{0,25 \cdot 1,44}$; 4) $\sqrt{0,04 \cdot 169}$;
5) $\sqrt{2,25 \cdot 0,09 \cdot 100}$; 6) $\sqrt{1,96 \cdot 0,01 \cdot 6,25}$.

616. Вычислите:

1) $\sqrt{36 \cdot 49}$; 2) $\sqrt{100 \cdot 4}$;
3) $\sqrt{0,49 \cdot 1,69}$; 4) $\sqrt{0,09 \cdot 196}$;
5) $\sqrt{1,44 \cdot 0,16 \cdot 400}$; 6) $\sqrt{2,89 \cdot 10\,000 \cdot 0,25}$.

617. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; 2) $\sqrt{\frac{121}{400}}$; 3) $\sqrt{\frac{36}{625}}$;
4) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 5) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 6) $\sqrt{44\frac{4}{9}}$.

618. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; 2) $\sqrt{\frac{289}{900}}$; 3) $\sqrt{\frac{9}{784}}$;
4) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; 5) $\sqrt{1\frac{19}{81}}$; 6) $\sqrt{42\frac{1}{4}}$.

619. Вычислите:

1) $\sqrt{0,2^2}$; 2) $\sqrt{(-0,9)^2}$; 3) $2\sqrt{3^2}$; 4) $-3\sqrt{9^2}$;
5) $0,5\sqrt{(-10)^2}$; 6) $-\frac{1}{5}\sqrt{5^2}$; 7) $-3\sqrt{(-7)^2}$; 8) $\frac{2}{7}\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2}$.

620. Вычислите:

1) $\sqrt{1,7^2}$; 2) $\sqrt{(-0,3)^2}$; 3) $3\sqrt{4^2}$; 4) $-2\sqrt{7^2}$;
5) $\frac{1}{3}\sqrt{(-9)^2}$; 6) $-0,1\sqrt{20^2}$; 7) $-5\sqrt{(-3)^2}$; 8) $\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2}$.

621. Представьте выражение в виде произведения корней:

1) $\sqrt{2 \cdot 7}$; 2) $\sqrt{35}$; 3) $\sqrt{17b}$; 4) $\sqrt{6p}$.

622. Представьте выражение в виде произведения корней:

1) $\sqrt{3 \cdot 11}$; 2) $\sqrt{15}$; 3) $\sqrt{19a}$; 4) $\sqrt{10b}$.

623. Представьте выражение в виде частного корней:

1) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; 2) $\sqrt{3\frac{2}{7}}$; 3) $\sqrt{\frac{7}{m}}$; 4) $\sqrt{\frac{p}{23}}$.

624. Представьте выражение в виде частного корней:

1) $\sqrt{\frac{3}{11}}$; 2) $\sqrt{9\frac{1}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{a}{37}}$; 4) $\sqrt{\frac{5}{b}}$.

625. Вычислите значение произведения:

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; 2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$; 3) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{0,05}$;

4) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{2,5}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{13}} \cdot \sqrt{\frac{13}{36}}$; 6) $\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}}$.

626. Вычислите значение произведения:

1) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$; 2) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$; 3) $\sqrt{0,02} \cdot \sqrt{50}$;

4) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{0,9}$; 5) $\sqrt{\frac{5}{7}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{7}{9}}$; 6) $\sqrt{\frac{11}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{11}$.

627. Вычислите значение частного:

1) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{0,3}}$; 3) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{1,5}}$;

4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$; 5) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,27}}{\sqrt{0,75}}$.

628. Вычислите значение частного:

1) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{2,7}}{\sqrt{0,3}}$; 3) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{2,5}}$;

4) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}}$; 5) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,18}}{\sqrt{1,28}}$.

629. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{9^4}$; 2) $\sqrt{2^6}$; 3) $\sqrt{5^8}$;

4) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 5) $\sqrt{(-3)^4}$; 6) $\sqrt{(-1)^{12}}$.

630. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{10^4}$; 2) $\sqrt{3^6}$; 3) $\sqrt{2^8}$;
4) $\sqrt{(-5)^4}$; 5) $\sqrt{(-1)^{10}}$; 6) $\sqrt{(-2)^{12}}$.

631. Замените выражение тождественно равным ему:

1) $\sqrt{m^2}$; 2) $4\sqrt{p^2}$; 3) $-0,1\sqrt{a^2}$; 4) $\dfrac{17}{\sqrt{c^2}}$.

632. Замените выражение тождественно равным ему:

1) $\sqrt{t^2}$; 2) $-2\sqrt{b^2}$; 3) $\dfrac{1}{7}\sqrt{x^2}$; 4) $\dfrac{7}{\sqrt{a^2}}$.

3 Достаточный уровень

633. Вычислите:

1) $\sqrt{4\dfrac{33}{64}\cdot 52\dfrac{9}{16}}$; 2) $\sqrt{1\dfrac{4}{9}}\cdot\sqrt{1\dfrac{3}{13}}$;
3) $\sqrt{20^2-16^2}$; 4) $\sqrt{0,85^2-0,84^2}$.

634. Вычислите:

1) $\sqrt{4\dfrac{21}{25}\cdot 23\dfrac{73}{81}}$; 2) $\sqrt{1\dfrac{1}{36}}\cdot\sqrt{1\dfrac{12}{37}}$;
3) $\sqrt{37^2-12^2}$; 4) $\sqrt{0,25^2-0,24^2}$.

635. Вычислите:

1) $\sqrt{90\cdot 490}$; 2) $\sqrt{72\cdot 32}$; 3) $\sqrt{4,9\cdot 32,4}$;
4) $\sqrt{4,5}\cdot\sqrt{72}$; 5) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{39}$; 6) $\sqrt{22}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{77}$.

636. Вычислите:

1) $\sqrt{40\cdot 640}$; 2) $\sqrt{45\cdot 125}$; 3) $\sqrt{14,4\cdot 8,1}$;
4) $\sqrt{1,6}\cdot\sqrt{90}$; 5) $\sqrt{17}\cdot\sqrt{34}\cdot\sqrt{2}$; 6) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{14}$.

637. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{3^4\cdot 6^2\cdot(-2)^6}$; 2) $\sqrt{2^{10}\cdot 5^2}-\sqrt{(-4)^4}$; 3) $\sqrt{25^3}$; 4) $\sqrt{9^5}$.

638. Вычислите:

1) $\sqrt{(-2)^4\cdot 7^2}-\sqrt{(-3)^6}$; 2) $\sqrt{36^3}$.

639. Вычислите, предварительно разложив подкоренное выражение на простые множители: 1) $\sqrt{12\,544}$; 2) $\sqrt{186\,624}$.

640. Упростите выражение:

1) $\sqrt{0{,}36x^2}$, если $x \geqslant 0$;
2) $\sqrt{121y^2}$, если $y < 0$;
3) $-3\sqrt{\frac{1}{9}p^2}$, если $p < 0$;
4) $5\sqrt{x^4}$;
5) $\sqrt{25a^6}$, если $a \geqslant 0$;
6) $\sqrt{\frac{25}{49}c^{10}}$, если $c < 0$.

641. Упростите выражение:

1) $\sqrt{0{,}49p^2}$, если $p \geqslant 0$;
2) $\sqrt{\frac{25}{64}m^2}$, если $m < 0$;
3) $7\sqrt{b^8}$;
4) $\sqrt{0{,}01a^{14}}$, если $a < 0$.

642. Упростите выражение:

1) $\sqrt{25m^2n^{12}}$, если $m \leqslant 0$;
2) $\sqrt{\frac{49}{169}m^{14}n^{18}}$, если $m \geqslant 0$, $n < 0$;
3) $\frac{1}{8}xy^3\sqrt{64x^4y^2}$, если $y > 0$;
4) $\sqrt{\frac{p^6m^{12}}{x^8}}$, если $p < 0$;
5) $2m^5\sqrt{\frac{p^{20}}{m^2}}$, если $m < 0$;
6) $\frac{\sqrt{x^{14}y^{16}z^{26}}}{x^3y^8z^{12}}$, если $x > 0$, $z < 0$.

643. Упростите выражение:

1) $\sqrt{64a^2b^8}$, если $a \geqslant 0$;
2) $\frac{1}{10}bc\sqrt{25b^6c^{10}}$, если $b < 0$, $c > 0$;
3) $\sqrt{\frac{x^8y^{12}}{z^2}}$, если $z < 0$;
4) $3a^2\sqrt{\frac{b^{14}}{a^4}}$, если $b > 0$.

4 Высокий уровень

644. Известно, что $x < 0$, $y < 0$. Представьте выражение:

1) $\sqrt{7xy}$ в виде произведения корней;

2) $\sqrt{\dfrac{2x}{3y}}$ в виде частного корней.

645. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(x-y)^2}$, если $x \geqslant y$;

2) $\sqrt{(m-n)^2}$, если $m < n$;

3) $\sqrt{x^2-10x+25}$, если $x \geqslant 5$;

4) $\sqrt{36-12a+a^2}$, если $a < 6$;

5) $(x+2)\sqrt{\dfrac{25}{x^2+4x+4}}$, если $x > -2$;

6) $(a-b)\sqrt{\dfrac{4}{a^2-2ab+b^2}}$, если $a < b$.

646. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(m-2)^2}$, если $m \geqslant 2$;

2) $\sqrt{p^2+8p+16}$, если $p < -4$;

3) $(a-5)\sqrt{\dfrac{1}{a^2-10a+25}}$, если $a > 5$;

4) $(x-1)\sqrt{\dfrac{9}{x^2-2x+1}}$, если $x < 1$.

647. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(\sqrt{3}-5)^2} + \left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)^2$;

2) $\sqrt{(3-\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{21}-5)^2} - \sqrt{(\sqrt{21}-4)^2}$;

4) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

648. Упростите выражение:

1) $\left(\sqrt{5-\sqrt{8}}\right)^2 - \sqrt{(\sqrt{8}-13)^2}$; 2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Упражнения для повторения

649. Разложите многочлен на множители:

1) $2x^2y^3 - 8xy^5$; 2) $49a^2 - 36$;

3) $36m^3n + 27m^2n^8$; 4) $\frac{25}{49}m^8 - n^4$.

650. Сократите дробь:

1) $\frac{m^2 - 4}{6 + 3m}$; 2) $\frac{a^2 + 10a + 25}{4a + 20}$;

3) $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$; 4) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}$.

651. Докажите тождество:

$$\left(\frac{a}{a-6} - \frac{2a}{a^2 - 12a + 36}\right) : \frac{a-8}{36 - a^2} + \frac{12a}{a-6} = -a.$$

652. Постройте график функции $y = 3x + \sqrt{x^2}$ для $x \leqslant 0$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

653. Разложите на простые множители число:

1) 18; 2) 72; 3) 175; 4) 448.

654. Упростите выражение:

1) $2a + 3a$; 2) $7b - b$; 3) $5m + m - 7m$.

655. Представьте выражение в виде многочлена:

1) $a(3a - 4)$; 2) $(b - 3)(b + 2)$.

Интересные задачки для неленивых

656. (*Внешнее независимое оценивание, 2012 г.*) Родители вместе с двумя детьми, Машей (4 года) и Богданом (7 лет), собираются провести выходной день в парке аттракционов. Родители разрешают каждому ребенку посетить не более трех аттракционов и каждый аттракцион – только по одному разу. Известно, что на аттракционы «Электрические машинки» и «Веселые горки» допускаются только дети старше 6 лет. На «Паровозик»

Богдан не пойдет. Для посещения любого аттракциона билет нужно купить каждому ребенку. Пользуясь таблицей, определите *максимальную* сумму (в грн), которую потратят родители на покупку билетов для детей.

Название аттракциона	**Стоимость билета для одного ребенка, грн**
Веселые горки	17
Паровозик	16
Электрические машинки	20
Карусель	12
Батут	15
Детская рыбалка	8
Лебеди	13

§ 18. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

Рассмотрим тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни.

1. *Вынесение множителя из-под знака корня.*

Воспользуемся теоремой о корне из произведения для преобразования выражения $\sqrt{12}$:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Говорят, что *множитель вынесли из-под знака корня*. В данном случае из-под знака корня вынесли множитель 2.

Пример 1. Вынесите множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{x^{11}}$.

Решение. Выражение $\sqrt{x^{11}}$ имеет смысл при $x \geqslant 0$, поскольку $x^{11} < 0$, если $x < 0$. Представим выражение x^{11} в виде произведения $x^{10} \cdot x$, в котором x^{10} является степенью с четным показателем. Тогда

$$\sqrt{x^{11}} = \sqrt{x^{10} \cdot x} = \sqrt{x^{10}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{(x^5)^2} \cdot \sqrt{x} = |x^5|\sqrt{x}.$$

Так как $x \geqslant 0$, то $x^5 \geqslant 0$. Поэтому $|x^5| = x^5$.

Следовательно, $\sqrt{x^{11}} = x^5\sqrt{x}$.

Ответ. $x^5\sqrt{x}$.

2. ***Внесение множителя под знак корня.***

Рассмотрим тождественное преобразование, обратное к предыдущему. Воспользуемся правилом умножения корней:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}.$$

Говорят, что *множитель внесли под знак корня*. В данном случае под знак корня внесли множитель 2.

Отметим, что под знак корня можно вносить только положительный множитель.

Пример 2. Внести множитель под знак корня:

1) $-2\sqrt{3}$; 2) $m\sqrt{5}$.

Решение.

1) $-2\sqrt{3} = -1 \cdot 2\sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} =$
$= -1 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = -\sqrt{12}$.

2) Множитель m может принимать любые значения (быть положительным, нулем или отрицательным). Поэтому рассмотрим два случая:

– если $m \geqslant 0$, то $m\sqrt{5} = |m|\sqrt{5} = \sqrt{m^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5m^2}$;

– если $m < 0$, то $m\sqrt{5} = -|m|\sqrt{5} = -\sqrt{m^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{5m^2}$.

Ответ. 1) $-\sqrt{12}$;
2) $\sqrt{5m^2}$, если $m \geqslant 0$; $-\sqrt{5m^2}$, если $m < 0$.

3. ***Сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень выражений, содержащих квадратные корни.***

Используя свойства умножения и деления корней, можно выполнять арифметические действия с выражениями, содержащими квадратные корни.

Пример 3. 1) $5\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} = 35\sqrt{6}$; 2) $7\sqrt{a} \cdot (-3\sqrt{6}) = -21\sqrt{6a}$;

3) $8\sqrt{18} : 4\sqrt{2} = \dfrac{8\sqrt{18}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$;

4) $7\sqrt{x} : (-2\sqrt{x}) = -\dfrac{7\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{7}{2}$.

Используя тождество $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geqslant 0$, можно возводить в степень выражения, содержащие квадратные корни.

Пример 4. 1) $(-5\sqrt{2})^2 = (-5)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$;

2) $(\sqrt{a})^3 = (\sqrt{a})^2\sqrt{a} = a\sqrt{a}$.

Рассмотрим примеры, где квадратные корни можно складывать.

Пример 5. Упростите выражение $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$.

Решение. Слагаемые содержат общий множитель $\sqrt{2}$. Вынесем его за скобки и выполним действие в скобках: $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(5 + 3) = 8\sqrt{2}$.

Обычно решение записывают короче: $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Заметим, что выражения $5\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$ в данном примере называют *подобными радикалами* (по аналогии с подобными слагаемыми), мы их сложили по правилу приведения подобных слагаемых.

Пример 6. Упростите выражение $\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{27a}$.

Решение. В каждом из слагаемых можно вынести множитель из-под знака корня, в результате получим подобные радикалы и приведем их: $\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{27a} =$

$= \sqrt{4 \cdot 3a} + \sqrt{16 \cdot 3a} - \sqrt{9 \cdot 3a} = 2\sqrt{3a} + 4\sqrt{3a} - 3\sqrt{3a} = 3\sqrt{3a}$.

Ответ. $3\sqrt{3a}$.

Пример 7. Упростите выражение:

1) $(\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})$; 2) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + \sqrt{15}$.

Решение. Применим формулы сокращенного умножения.

1) $(\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 7 - 4 \cdot 3 = -5$;

2) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + \sqrt{15} = ((2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2) + \sqrt{15} =$

$= 4 \cdot 5 - 4\sqrt{15} + 3 + \sqrt{15} = 23 - 3\sqrt{15}$.

Ответ. 1) -5; 2) $23 - 3\sqrt{15}$.

4. *Сокращение дробей.*

Пример 8. Сократите дробь: 1) $\dfrac{a^2 - 7}{a - \sqrt{7}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}}$.

Решение. 1) Учитывая, что $7 = (\sqrt{7})^2$, числитель дроби представим в виде разности квадратов, получим:

$$\frac{a^2 - 7}{a - \sqrt{7}} = \frac{a^2 - (\sqrt{7})^2}{a - \sqrt{7}} = \frac{(a - \sqrt{7})(a + \sqrt{7})}{a - \sqrt{7}} = a + \sqrt{7}.$$

2) Учитывая, что $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$, а $3 = (\sqrt{3})^2$, в числителе и знаменателе вынесем за скобки общий множитель, получим:

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ. 1) $a + \sqrt{7}$; 2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

5. *Избавление от иррациональности в знаменателе дроби.*

Пример 9. Преобразуйте дробь $\frac{a}{\sqrt{5}}$ так, чтобы она не содержала корня в знаменателе.

Решение. Учитывая, что $(\sqrt{5})^2 = 5$, достаточно числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{5}$:

$$\frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

В таких случаях говорят, что *избавились от иррациональности в знаменателе дроби*.

Пример 10. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{2}{\sqrt{7}-1}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{7}+1$, чтобы в знаменателе получить формулу сокращенного умножения разности двух выражений на их сумму:

$$\frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{7-1} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$.

Заметим, что выражение $\sqrt{7}+1$ называют *сопряженным* выражению $\sqrt{7}-1$. Вообще-то, если в формулах сокращенного умножения в результате умножения скобок, содержащих радикалы, получается рациональное выражение, то выражения в скобках называют *взаимно сопряженными*. Так, $\sqrt{7}-1$ и $\sqrt{7}+1$ – взаимно сопряженные выражения.

Взаимно сопряженными также являются выражения $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ и $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ и им подобные.

1. На примере выражения $\sqrt{4m}$ покажите, как можно вынести множитель из-под знака корня.

2. На примере произведения $3\sqrt{p}$ покажите, как можно внести множитель под знак корня.

3. Приведите примеры подобных радикалов.
4. По какому правилу можно складывать (вычитать) подобные радикалы?
5. На какой множитель нужно умножить числитель и знаменатель, чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби: $\frac{2}{\sqrt{7}}$; $\frac{5}{\sqrt{a}+1}$?
6. Приведите примеры взаимно сопряженных выражений.

1 Начальный уровень

657. (Устно.) Выполните действия:

1) $5\sqrt{2}+4\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{3}-2\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{7}+\sqrt{7}$; 4) $2\sqrt{5}-\sqrt{5}$.

658. Выполните действия:

1) $7\sqrt{11}+2\sqrt{11}$; 2) $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3}+6\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{7}-\sqrt{7}$.

659. Представьте в виде корня:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$; 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{b}$; 4) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{a}}$.

660. Представьте в виде корня:

1) $\sqrt{3}\sqrt{7}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$; 3) $\sqrt{5}\sqrt{a}$; 4) $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{x}}$.

2 Средний уровень

661. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{63}$; 3) $\sqrt{250}$; 4) $\sqrt{363}$;
5) $\sqrt{3^2\cdot 19}$; 6) $\sqrt{2^4\cdot 7}$; 7) $\sqrt{5^2\cdot 7^3}$; 8) $\sqrt{5^3\cdot 2^5}$.

662. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{20}$; 2) $\sqrt{50}$; 3) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{192}$;
5) $\sqrt{5^2\cdot 17}$; 6) $\sqrt{3^4\cdot 2}$; 7) $\sqrt{7^2\cdot 2^3}$; 8) $\sqrt{3^5\cdot 5^3}$.

663. Вынесите множитель из-под знака корня и упростите полученное выражение:

1) $\frac{1}{2}\sqrt{28}$; 2) $-\frac{3}{5}\sqrt{500}$; 3) $1{,}2\sqrt{75}$; 4) $-1{,}25\sqrt{48}$.

664. Вынесите множитель из-под знака корня и упростите полученное выражение:

1) $0,5\sqrt{44}$; 2) $-\frac{2}{5}\sqrt{125}$; 3) $0,7\sqrt{300}$; 4) $-1,5\sqrt{112}$.

665. Внесите множитель под знак корня:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{5}$; 3) $-2\sqrt{3}$; 4) $-5\sqrt{10}$;

5) $10\sqrt{m}$; 6) $\frac{1}{2}\sqrt{8x}$; 7) $-0,1\sqrt{10a}$; 8) $7\sqrt{\frac{1}{7}c}$.

666. Внесите множитель под знак корня:

1) $4\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{11}$; 3) $-3\sqrt{5}$; 4) $-7\sqrt{2}$;

5) $5\sqrt{p}$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{18x}$; 7) $-0,2\sqrt{10t}$; 8) $6\sqrt{\frac{1}{6}y}$.

667. Упростите выражение:

1) $\sqrt{25x} + \sqrt{49x} - \sqrt{36x}$; 2) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$;

3) $\sqrt{8a} + \frac{1}{2}\sqrt{200a} - \sqrt{50a}$; 4) $\sqrt{3m} - \sqrt{p} + \sqrt{12m}$.

668. Упростите выражение:

1) $\sqrt{100a} + \sqrt{64a} - \sqrt{121a}$; 2) $\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{75}$;

3) $\sqrt{5b} - \frac{1}{2}\sqrt{20b} + \sqrt{500b}$; 4) $\sqrt{7a} + \sqrt{b} + \sqrt{63a}$.

669. Выполните умножение:

1) $\sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{72})$; 2) $(2\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{48})\sqrt{3}$;

3) $(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$; 4) $(3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$.

670. Выполните умножение:

1) $\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{20})$; 2) $(5\sqrt{2} - \sqrt{18} + \sqrt{50})\sqrt{2}$;

3) $(1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$; 4) $(2 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7})$.

671. Упростите выражение, используя формулы сокращенного умножения:

1) $(\sqrt{11} + \sqrt{7})(\sqrt{11} - \sqrt{7})$; 2) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$;

3) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$; 4) $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 - 9$;

5) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}$; 6) $(\sqrt{3} - \sqrt{27})^2$.

672. Упростите выражение, используя формулы сокращенного умножения:

1) $(\sqrt{19}+\sqrt{3})(\sqrt{19}-\sqrt{3})$; 2) $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$;
3) $(4\sqrt{3}-\sqrt{19})(4\sqrt{3}+\sqrt{19})$; 4) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2-8$;
5) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-2\sqrt{10}$; 6) $(\sqrt{50}-\sqrt{2})^2$.

673. Разложите на множители, используя формулу разности квадратов:

1) x^2-3; 2) $17-a^2$; 3) $4a^2-5$;
4) $1-2x^2$; 5) $a-9$, где $a \geqslant 0$; 6) $b-c$, где $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

674. Разложите на множители, используя формулу разности квадратов:

1) $5-x^2$; 2) $9m^2-7$; 3) $16-3b^2$; 4) $b-2$, где $b \geqslant 0$.

675. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{7-\sqrt{a}}{49-a}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{5\sqrt{3}}$.

676. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a^2-3}{a-\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{5+\sqrt{b}}{25-b}$; 3) $\dfrac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}}$; 4) $\dfrac{7\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}}$.

677. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{m}{\sqrt{n}}$; 4) $\dfrac{6}{5\sqrt{3}}$.

678. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{9}{\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$; 4) $\dfrac{8}{3\sqrt{2}}$.

3 Достаточный уровень

679. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{13m^2}$, если $m \geqslant 0$; 2) $\sqrt{b^3}$;
3) $\sqrt{7a^6}$, если $a < 0$; 4) $\sqrt{16x^7}$.

680. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{11x^2}$, если $x \geqslant 0$; 2) $\sqrt{c^5}$;
3) $\sqrt{2p^{10}}$, если $p < 0$; 4) $\sqrt{36m^{11}}$.

681. Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt{2}$, если $a \geqslant 0$; 2) $b^3\sqrt{5}$, если $b < 0$;

3) $b\sqrt{\dfrac{3}{b}}$; 4) $x^3\sqrt{-x}$.

682. Внесите множитель под знак корня:

1) $b\sqrt{3}$, если $b \geqslant 0$; 2) $c^5\sqrt{7}$, если $c < 0$;

3) $x^2\sqrt{\dfrac{5}{x}}$; 4) $y\sqrt{-y}$.

683. Упростите выражение:

1) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2 + \sqrt{360}$;

2) $(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3})^2 - \sqrt{150}$;

3) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$.

684. Разложите на множители:

1) $\sqrt{a} - \sqrt{3a}$; 2) $\sqrt{7p} + \sqrt{4p}$; 3) $\sqrt{21} + \sqrt{7}$;

4) $\sqrt{6} - \sqrt{10}$; 5) $2\sqrt{m} - \sqrt{6m}$; 6) $\sqrt{5x} - \sqrt{10x}$.

685. Разложите на множители:

1) $\sqrt{p} + \sqrt{2p}$; 2) $\sqrt{42} - \sqrt{6}$; 3) $3\sqrt{a} + \sqrt{6a}$.

686. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x + 6\sqrt{x}}{x - 36}$; 2) $\dfrac{a + 6\sqrt{a}\sqrt{b} + 9b}{a - 9b}$; 3) $\dfrac{\sqrt{10} - 5}{2 - \sqrt{10}}$.

687. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a - 25}{a - 5\sqrt{a}}$; 2) $\dfrac{x - 4\sqrt{x}\sqrt{y} + 4y}{x - 4y}$; 3) $\dfrac{11 + \sqrt{22}}{\sqrt{22} + 2}$.

688. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{15}{\sqrt{6} - 1}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{11} + \sqrt{7}}$; 3) $\dfrac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$.

689. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{10}{\sqrt{3} + 1}$; 2) $\dfrac{3}{\sqrt{15} - \sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{1}{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}$.

4 Высокий уровень

690. Вычислите:

1) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$; 2) $\dfrac{15}{11+2\sqrt{30}}+\dfrac{15}{11-2\sqrt{30}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; 4) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)^2$.

691. Вычислите:

1) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$; 2) $\dfrac{3}{10-3\sqrt{11}}+\dfrac{3}{10+3\sqrt{11}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$; 4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)^2+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^2$.

692. Найдите сумму:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{45}+\sqrt{49}}.$$

693. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{m}+1}{m\sqrt{m}+m+\sqrt{m}}:\dfrac{1}{m^2-\sqrt{m}}$; 2) $\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}-b}-\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right):\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

Упражнения для повторения

3 **694.** Вычислите:

1) $\dfrac{216^3}{36^4}$; 2) $\dfrac{81^6}{27^8}$; 3) $\dfrac{4^8\cdot 16}{64^3}$; 4) $\dfrac{2^8\cdot 13^8}{26^7}$.

695. Решите уравнение $\dfrac{2x+1}{x}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x^2}{x^2-x}$.

4 **696.** Докажите, что значение выражения $\sqrt{10n-3}$, где $n \in N$, не может быть натуральным числом.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

697. Постройте график функции $y = x^2$ для $x \geqslant 0$. Какова область значений этой функции?

698. По графику функции $y = 2x$ найдите:

1) значение y, при котором $x = -3$, $x = 1$;
2) значение x, для которого $y = -2$, $y = 6$;
3) два значения x, при которых значение функции больше числа 3; меньше числа 3.

Интересные задачки для неленивых

699. (*Первая международная математическая олимпиада школьников, 1959 г.*) Докажите, что при любом натуральном значении n дробь $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$ является несократимой.

§ 19. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$, ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА

Пример 1. Пусть S см^2 – площадь квадрата, a см – длина его стороны. Так как $S = a^2$, то зависимость длины стороны a квадрата от его площади S можно задать формулой

$$a = \sqrt{S}.$$

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$. Очевидно, что переменная x принимает только неотрицательные значения, то есть $x \geqslant 0$.

Составим таблицу значений функции $y = \sqrt{x}$ для нескольких значений аргумента:

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Отметим эти точки на координатной плоскости (рис. 15). Если бы мы отметили на этой плоскости больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \sqrt{x}$, а потом соединили их плавной линией, то получили бы график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 16).

Графиком этой функции является ветвь параболы.

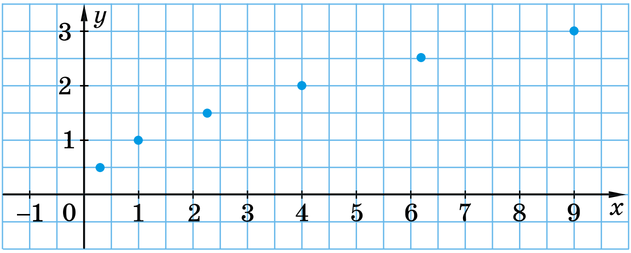


Рис. 15

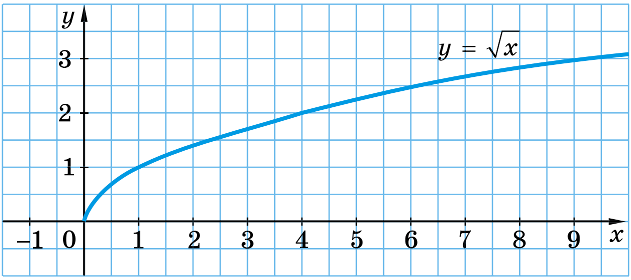


Рис. 16

Обобщим *свойства* функции $y = \sqrt{x}$.

1. Областью определения функции является множество всех неотрицательных чисел: $x \geqslant 0$.
2. Областью значений функции является множество всех неотрицательных чисел: $y \geqslant 0$.
3. График функции – ветвь параболы, выходящая из точки (0; 0), все другие точки графика лежат в первой координатной четверти.
4. Большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Последнее свойство дает возможность *сравнивать значения выражений, содержащих корни*.

Пример 2. Сравните числа:

1) $\sqrt{12}$ и $\sqrt{11}$; 2) 7 и $\sqrt{50}$; 3) $5\sqrt{2}$ и $4\sqrt{3}$.

Решение. 1) Так как $12 > 11$, то $\sqrt{12} > \sqrt{11}$.

2) $7 = \sqrt{49}$, а $49 < 50$, поэтому $\sqrt{49} < \sqrt{50}$, значит, $7 < \sqrt{50}$.

3) Внесем множитель в обоих выражениях под знак корня:

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50};\ \ 4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{48}.$$

Так как $50 > 48$, то $\sqrt{50} > \sqrt{48}$, поэтому $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$.

Пример 3. Решите графически уравнение $5\sqrt{x} = 14 - x$.

Р е ш е н и е. Поскольку мы пока не умеем строить график функции $y = 5\sqrt{x}$, разделим обе части уравнения на число 5. Получим уравнение: $\sqrt{x} = 2{,}8 - 0{,}2x$.

Построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2{,}8 - 0{,}2x$ в одной системе координат (рис. 17). Они пересекаются в точке с абсциссой 4. Проверкой убеждаемся, что число 4 – корень уравнения. Действительно, $5\sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$ и $14 - 4 = 10$.

О т в е т. 4.

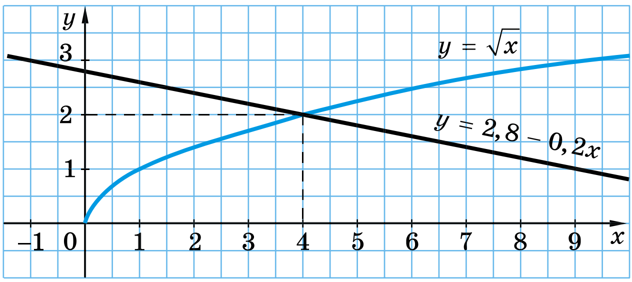


Рис. 17

Пример 4. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -2x, & \text{если } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ \dfrac{8}{x}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

О т в е т. График изображен на рисунке 18.

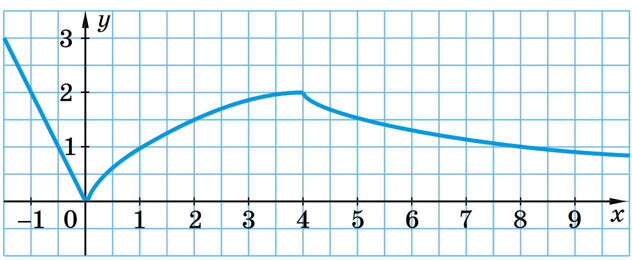


Рис. 18

1. Что представляет собой график функции $y = \sqrt{x}$?
2. Сформулируйте свойства функции $y = \sqrt{x}$.

1 Начальный уровень

700. Для функции $y = \sqrt{x}$ найдите значение y, соответствующее значению $x = 9; 0; 81$.

701. Для функции $y = \sqrt{x}$ найдите значение y, соответствующее значению $x = 1; 4; 100$.

2 Средний уровень

702. Используя график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 16), найдите:

1) значения y для $x = 1{,}5; 3; 4; 6{,}5$;

2) значения x, при которых $y = 1; 2{,}5$;

3) два значения x, при которых значение функции больше числа 2; меньше числа 2.

703. По графику функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 16) найдите:

1) значение функции для значений аргумента 0,5; 2; 5,5;

2) значение аргумента, при которых значение функции равно 0,5; 4;

3) два значения x, при которых значение функции больше числа 1; меньше числа 1.

704. Не выполняя построения графика функции $y = \sqrt{x}$, определите, через какие из данных точек он проходит:

1) $A(36; 4)$; 2) $B(4; 16)$; 3) $C(-4; 2)$;
4) $D(0; 0)$; 5) $M(1; -1)$; 6) $P(0{,}5; 0{,}25)$.

705. Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt{x}$ точка:

1) $F(16; 6)$; 2) $K(-36; 6)$;
3) $L(5; 25)$; 4) $N(0{,}9; 0{,}81)$?

706. Сравните числа:

1) $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{11}$; 2) $\sqrt{29}$ и $2\sqrt{7}$;
3) $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{10}$; 4) $4\sqrt{3}$ и $3\sqrt{7}$.

707. Сравните значения выражений:

1) $5\sqrt{2}$ и $\sqrt{51}$; 2) $\sqrt{146}$ и $7\sqrt{3}$;
3) $2\sqrt{5}$ и $3\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{7}$ и $3\sqrt{3}$.

3 Достаточный уровень

708. Сравните числа:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{84}$; 2) $0,2\sqrt{1\frac{3}{8}}$ и $0,4\sqrt{\frac{11}{32}}$.

709. Сравните числа:

1) $\frac{3}{4}\sqrt{48}$ и $\frac{3}{5}\sqrt{75}$; 2) $0,3\sqrt{1\frac{4}{9}}$ и $0,2\sqrt{1\frac{3}{4}}$.

710. Найдите область значений функции $y = \sqrt{x}$, если: 1) $0 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $1 \leqslant x \leqslant 9$.

711. Решите графически уравнение $\sqrt{x} = 6 - x$.

712. Решите графически уравнение $3 - 2x = \sqrt{x}$.

4 Высокий уровень

713. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} x - 2, & \text{если } x < 4, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geqslant 4; \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$.

714. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geqslant 1; \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}$.

Упражнения для повторения

2 **715.** Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$; 2) $\sqrt{x} = -5$; 3) $x^2 = 16$; 4) $x^2 = -1$.

3 **716.** Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{c^5}$; 2) $\sqrt{3b^{10}}$, если $b < 0$.

4 **717.** Найдите значение выражения $\left(\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}\right)^2$.

Интересные задачки для неленивых

718. Вычислите:

$$13\frac{1}{1997}\cdot 20\frac{1973}{2000}-6\frac{1991}{2000}\cdot 4\frac{3}{1997}+\frac{3}{400}.$$

Домашняя самостоятельная работа № 4

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1 **1.** Для функции $y = x^2$ найдите значение y, соответствующее значению $x = -3$.

А. 6; **Б.** –6; **В.** 9; **Г.** –9.

2. Укажите выражение, которое не имеет смысла.

А. $\sqrt{17}$; **Б.** $\sqrt{-4}$; **В.** $\sqrt{0}$; **Г.** $\sqrt{16}$.

3. Укажите число, являющееся иррациональным.

А. $\sqrt{25}$; **Б.** $\sqrt{\frac{9}{16}}$; **В.** 5; **Г.** $\sqrt{5}$.

2 **4.** Вычислите $5\sqrt{0,16}-2\sqrt{1\frac{9}{16}}$.

А. –0,5; **Б.** 0,5; **В.** 4,5; **Г.** –2,325.

5. Решите уравнение $x^2 = 36$.

А. 6; **Б.** –6; 6; **В.** 18; **Г.** решений нет.

6. Сократите дробь $\frac{2\sqrt{3}+3}{7\sqrt{3}}$.

А. $\frac{5}{7}$; **Б.** $\frac{2\sqrt{3}+1}{7}$; **В.** $\frac{2+\sqrt{3}}{7}$; **Г.** $\frac{2-\sqrt{3}}{7}$.

3 **7.** Укажите верное неравенство.

А. $\frac{2}{3}\sqrt{27} > \sqrt{13}$; **Б.** $\frac{1}{2}\sqrt{48} < \frac{1}{9}\sqrt{108}$;

В. $0,1\sqrt{120} < \frac{1}{5}\sqrt{15}$; **Г.** $\frac{2}{5}\sqrt{125} > 0,2\sqrt{300}$.

8. Решите уравнение $3\sqrt{\dfrac{x}{4}} - 6 = 0$.

А. 64; **Б.** 16; **В.** 1; **Г.** 8.

9. Вынесите множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{7a^{10}}$, если $a < 0$.

А. $-a^5\sqrt{7}$; **Б.** $a^5\sqrt{7}$; **В.** $a^{10}\sqrt{7}$; **Г.** $-a\sqrt{7}$.

4 **10.** Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{13}-12)^2} + \sqrt{(\sqrt{13}-2)^2}$.

А. $2\sqrt{13} - 14$; **Б.** 14; **В.** 10; **Г.** $2\sqrt{13} - 10$.

11. Укажите все значения a, при которых уравнение $ax^2 = -9$ имеет два различных действительных корня.

А. $a > 0$; **Б.** $a \geqslant 0$; **В.** $a < 0$; **Г.** $a \leqslant 0$.

12. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2$.

А. 20; **Б.** 18; **В.** 17; **Г.** 16.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 13–19

1 **1.** Для функции $y = x^2$ найдите значение y при $x = -4;\ 7$.

2. Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{-4}$; 3) $\sqrt{0}$; 4) $\sqrt{3,7}$?

3. Из чисел $2;\ 1\dfrac{4}{5};\ -8;\ \sqrt{3};\ 5;\ 0;\ -\sqrt{8};\ -2\dfrac{1}{3}$ выпишите:

1) натуральные числа;
2) целые неположительные числа;
3) рациональные положительные числа;
4) иррациональные числа.

2 **4.** Вычислите:

1) $\sqrt{2\dfrac{14}{25}} - 10\sqrt{0,04}$; 2) $(-3\sqrt{5})^2$;

3) $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{1,6}$; 4) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{1,5}}$.

5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = \dfrac{3}{4}$; 2) $\sqrt{x} = -1$; 3) $x^2 = 9$; 4) $x^2 = -4$.

6. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{4\sqrt{7} + 7}{5\sqrt{7}}$.

7. Сравните числа:

1) $\dfrac{3}{5}\sqrt{50}$ и $\dfrac{2}{5}\sqrt{75}$; 2) $0,2\sqrt{2\dfrac{3}{8}}$ и $0,4\sqrt{\dfrac{19}{32}}$.

8. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{b^7}$; 2) $\sqrt{5m^6}$, если $m < 0$.

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^2$.

Дополнительные задания

10. Постройте график функции $y = \begin{cases} 6 - x, & \text{если } x < 4; \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geqslant 4. \end{cases}$

11. Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{7} - 13)^2} + \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2}$.

Упражнения для повторения главы 2

К § 13

719. Укажите область определения и область значений функции $y = x^2$.

720. Постройте график функции $y = x^2$ для $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

721. Постройте график функции, которая задает зависимость площади квадрата S (в см^2) от длины его стороны a (в см). Какова область определения этой функции?

722. 1) Как изменится площадь квадрата, если каждую из его сторон увеличить в 3 раза; уменьшить в 9 раз?

2) Как нужно изменить каждую из сторон квадрата, чтобы его площадь увеличилась в 4 раза; уменьшилась в 25 раз?

723. Точка $A(m;\ n)$, где $m \neq 0$, $n \neq 0$, принадлежит графику функции $y = x^2$. Принадлежит ли этому графику точка:

1) $B(m;\ -n)$; 2) $C(-m;\ n)$; 3) $D(-m;\ -n)$?

724. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = x + 6$ и найдите координаты точек их пересечения.

725. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \leqslant 1, \\ 2 - x, & \text{если} \quad x > 1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 6 + x, & \text{если} \quad x < -2, \\ x^2, & \text{если} \quad -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{8}{x}, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$

К § 14

726. Докажите, что:

1) $\sqrt{0,49} = 0,7;$ 2) $\sqrt{2500} = 50.$

727. Вычислите:

1) $\sqrt{49};$ 2) $\sqrt{2601};$

3) $\sqrt{5,76};$ 4) $\sqrt{\dfrac{25}{36}};$

5) $\sqrt{10,89} + \sqrt{0,01} - 3,2;$ 6) $\sqrt{6\dfrac{1}{4}} - 2\sqrt{1,44} + 0,9.$

728. Найдите значение выражения $\sqrt{2x - 8y}$, если:

1) $x = 1,6;\ y = 0,4;$ 2) $x = 0,08;\ y = -0,3.$

729. Вычислите:

1) $\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{0,09} + 0,78\sqrt{100}\right) \cdot (\sqrt{2,25} + 2\sqrt{30,25});$

2) $\left(-7\sqrt{\dfrac{4}{49}} + 3\sqrt{5,29}\right) : (\sqrt{5^2 + 12^2} - \sqrt{65,61}).$

730. Решите уравнение:

1) $\sqrt{5x} + 3 = 13;$ 2) $\dfrac{1}{3}\sqrt{x - 1} = 1,2.$

731. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x - 2};$ 2) $\sqrt{(x - 3)^5};$ 3) $\dfrac{\sqrt{-x}}{x + 1};$ 4) $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$?

732. Решите уравнение относительно переменной x для всех допустимых значений a:

1) $a\sqrt{x} = 0$; 2) $a\sqrt{x} = 1$; 3) $a\sqrt{x-1} = 5$; 4) $\sqrt{ax} = 0$.

К § 15

733. Рациональным или иррациональным является данное число? Рациональное число запишите без знака корня:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $-\sqrt{4}$; 4) $\sqrt{13}$.

734. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби число:

1) $\frac{1}{3}$; 2) -29; 3) $5{,}17$; 4) $\frac{7}{27}$.

735. Между какими двумя последовательными натуральными числами заключено число:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{99}$; 4) $\sqrt{20}$?

736. Правильно ли, что:

1) разность двух целых отрицательных чисел – число целое отрицательное;

2) произведение двух рациональных чисел – число рациональное;

3) сумма кубов двух целых чисел – число натуральное;

4) сумма квадратов двух целых чисел – число целое неотрицательное?

737. Укажите два рациональных числа, заключенных между числами:

1) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$; 2) $-\sqrt{13}$ и $-\sqrt{11}$.

738. Докажите, что не существует рационального числа, которое является решением уравнения $x^2 = 7$.

739. Докажите, что:

1) $\frac{1}{2} + 0{,}1(6) = \frac{2}{3}$; 2) $0{,}8(3) - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$.

К § 16

740. Верно ли равенство:

1) $(\sqrt{19})^2 = 19$; 2) $(\sqrt{17})^2 = 17^2$;

3) $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5}$; 4) $(\sqrt{0{,}1})^2 = 0{,}1$?

741. Вычислите:

1) $\left(-\sqrt{8}\right)^2$; 2) $\sqrt{13}\cdot(-\sqrt{13})$; 3) $\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\right)^2$;

4) $\left(-0,1\sqrt{10}\right)^2$; 5) $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2$; 6) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$;

7) $\left(-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$; 8) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2$.

742. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{2}x^2 = 32$; 2) $x^2 - 5 = 0$; 3) $2x^2 = 18$; 4) $49x^2 = 1$.

743. Составьте уравнение, корнями которого являются числа:

1) 5 и −5; 2) 0,1 и −0,1; 3) $-\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4}$;

4) $-\frac{3}{7}$ и $\frac{3}{7}$; 5) $\sqrt{7}$ и $-\sqrt{7}$; 6) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

744. Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}}{9}$; 2) $\left(\sqrt{\sqrt{7}}\right)^2$; 3) $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^4$.

745. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{8}(x-1)^2 = \frac{1}{2}$; 2) $\frac{(x+2)^2}{5} = \frac{16}{5}$.

746. Известно, что $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$. Найдите $x + y$.

747. При каких значениях m уравнение $x^2 = m - 1$:
1) имеет два различных корня;
2) имеет только один корень;
3) не имеет корней?

К § 17

748. Для каких значений переменных равенство является тождеством:

1) $\sqrt{m\cdot n} = \sqrt{m}\cdot\sqrt{n}$; 2) $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$?

749. Вычислите:

1) $\sqrt{\dfrac{0{,}36 \cdot 49}{121}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{25 \cdot 100}{81}}$; 3) $\sqrt{\dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{9}{25}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{64}{9} \cdot \dfrac{4}{289}}$.

750. Вычислите:

1) $\sqrt{a^2}$ при $a = 13; -17$; 2) $-2\sqrt{x^2}$ при $x = 0{,}5; -2{,}1$.

751. Известно, что $37^2 = 1369$. Найдите:

1) $\sqrt{136900}$; 2) $\sqrt{13{,}69}$; 3) $\sqrt{0{,}1369}$.

752. Во сколько раз сторона квадрата, площадь которого равна 12 см^2, больше стороны квадрата, площадь которого равна 3 см^2?

753. Вычислите:

1) $\sqrt{4\dfrac{1}{20}} \cdot \sqrt{2\dfrac{2}{9}} - (\sqrt{7})^2$; 2) $\sqrt{1 - \left(\dfrac{8}{17}\right)^2} + \left(-\sqrt{\dfrac{2}{17}}\right)^2$;

3) $\sqrt{1 - \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2} - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2$;

4) $\sqrt{2\dfrac{1}{5}} \cdot \sqrt{1\dfrac{1}{11}} \cdot \sqrt{2\dfrac{2}{5}} + \left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^2 - (\sqrt{3})^2$.

754. Отношение площадей двух кругов равно $\dfrac{4}{9}$, а радиус одного из них равен 10 см. Найдите радиус другого.

755. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{3{,}6 \cdot 10^5}$; 2) $\sqrt{8{,}1 \cdot 0{,}1^3}$;

3) $3\sqrt{15} \cdot 2\sqrt{30} \cdot \sqrt{8}$; 4) $\sqrt{3^5 \cdot 12^3}$.

756. Упростите выражение:

1) $\sqrt{p^4 c^8 a^{12}}$; 2) $\sqrt{49(-x)^2 y^6}$, если $x < 0$, $y > 0$;

3) $\sqrt{\dfrac{m^{20}}{n^{24}}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{a^{10}}{b^{14}}}$, если $a < 0$, $b < 0$.

757. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\sqrt{0{,}16^2}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{(-0{,}09)^2}}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(\sqrt{11} - \sqrt{13}\right)^2}$.

758. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x^2-14x+49}{(x+2)^2}\sqrt{\dfrac{x^2+4x+4}{(x-7)^2}}$, если $x > 7$;

2) $\dfrac{p^2-4}{(p+3)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{p^2+6p+9}{(p+2)^2}}$, если $p < -3$.

759. Докажите, что:

1) $\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{23-8\sqrt{7}}=7$;

2) $\sqrt{15+4\sqrt{11}}-\sqrt{20-6\sqrt{11}}=5$.

К § 18

760. Выполните действия:

1) $3\sqrt{7}+2\sqrt{7}$; 2) $5\sqrt{11}-\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}$; 4) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$.

761. Упростите выражение:

1) $(\sqrt{7}-\sqrt{12})(\sqrt{7}+3\sqrt{3})$; 2) $(\sqrt{3}-\sqrt{11})(\sqrt{33}+1)$;

3) $4\sqrt{2}(2-7\sqrt{8})-7\sqrt{2}$; 4) $(\sqrt{5}+1)(2-\sqrt{5})-\sqrt{5}$;

5) $(\sqrt{3}-7)(4-\sqrt{3})-11\sqrt{3}$; 6) $(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+1$.

762. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{28x^9}$; 2) $\sqrt{\dfrac{7m^3}{36}}$;

3) $\sqrt{25a^2b^5}$, если $a < 0$; 4) $\sqrt{8x^3y^{10}}$, если $y > 0$;

5) $\sqrt{-8p^7}$; 6) $\sqrt{x^3y^3}$, если $x < 0$, $y < 0$.

763. Приведите выражение к виду $a\sqrt{b}$, где b – целое число:

1) $\sqrt{\dfrac{1}{7}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; 3) $\sqrt{4\dfrac{1}{3}}$; 4) $\sqrt{5\dfrac{1}{2}}$.

764. Упростите выражение:

1) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2$; 2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

765. Докажите справедливость равенства:

1) $\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}+5=\sqrt{27+10\sqrt{2}}$.

766. Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}$; 2) $\dfrac{x+y+\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}}$.

767. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби

$\dfrac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

768. Докажите, что $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ – число натуральное.

769. Внесите множитель под знак корня и упростите полученное выражение:

1) $(x+2)\sqrt{\dfrac{3}{x^2+4x+4}}$, если $x>-2$;

2) $(a-b)\sqrt{\dfrac{1}{a^2-2ab+b^2}}$, если $a<b$;

3) $p(p+1)\sqrt{\dfrac{7}{p^2+2p+1}}$, если $p<-1$;

4) $(b-3)\sqrt{\dfrac{1}{6-2b}}$.

К § 19

770. Можно ли вычислить значение функции $y=\sqrt{x}$ для значений $x=4$; $x=-1$; $x=100$; $x=-9$?

771. Постройте график функции $y=\sqrt{x}$, если:
1) $0 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $1 \leqslant x \leqslant 9$; 3) $4 \leqslant x \leqslant 16$.

772. Пересекает ли график функции $y=\sqrt{x}$ прямую:
1) $y=1$; 2) $y=8$; 3) $y=0$; 4) $y=-1$?
Если пересекает, то в какой точке?

773. Расположите в порядке возрастания числа:

1) $\sqrt{19{,}1}$; 3; $\sqrt{16{,}2}$; 4; $\sqrt{14}$; 2) $\dfrac{1}{4}$; $\sqrt{0{,}1}$; 0,2; $\sqrt{\dfrac{1}{11}}$.

774. При каких значениях x верно неравенство:

1) $\sqrt{x} \geqslant 1$; 2) $\sqrt{x}<2$; 3) $1<\sqrt{x} \leqslant 4$;

4) $9 \leqslant \sqrt{x}<100$; 5) $\sqrt{x}>-1$; 6) $\sqrt{x} \leqslant -2{,}5$?

Глава 3
Квадратные уравнения

В этой главе вы:

- **познакомитесь** с понятием квадратного уравнения и квадратного трехчлена;
- **научитесь** решать полные и неполные квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним; применять теорему Виета; раскладывать квадратный трехчлен на множители; решать текстовые и прикладные задачи, математическими моделями которых являются квадратные уравнения или уравнения, сводящиеся к ним.

§ 20. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В математике, физике, экономике, практической деятельности человека встречаются задачи, математическими моделями которых являются уравнения, содержащие переменную во второй степени.

Пример 1. Длина земельного участка на 15 м больше ширины, а площадь равна 375 м^2. Найдите ширину участка.

Решение. Пусть x м – ширина участка, тогда ее длина – $(x + 15)$ м. По условию задачи площадь участка равна 375 м^2. Тогда $x(x + 15) = 375$. Получаем уравнение: $x^2 + 15x - 375 = 0$.

Такое уравнение называют ***квадратным***.

Квадратным уравнением **называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.**

Например, уравнения $5x^2 - 2x - 7 = 0$, $-3x^2 + x - 8 = 0$ также являются квадратными.

Числа a, b и c называют ***коэффициентами квадратного уравнения***, число a – ***первым коэффициентом***, число b – ***вторым коэффициентом***, число c – ***свободным членом***.

В уравнении $x^2 + 15x - 375 = 0$ коэффициенты следующие: $a = 1$; $b = 15$; $c = -375$. В уравнении $5x^2 - 2x - 7 = 0$ следующие: $a = 5$; $b = -2$; $c = -7$, а в уравнении $-3x^2 + x - 8 = 0$ следующие: $a = -3$; $b = 1$ и $c = -8$.

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют ***приведенным***. Уравнение $x^2 + 15x - 375 = 0$ – приведенное, а уравнение $5x^2 - 2x - 7 = 0$ – не является приведенным.

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют *неполным квадратным уравнением*.

Например, неполным квадратным уравнением, в котором $b = 0$ и $c = 0$, является уравнение $-8x^2 = 0$; в котором $b = 0$ – уравнение $2x^2 - 3 = 0$; в котором $c = 0$ – уравнение $-7x^2 + 4x = 0$.

Таким образом, неполные квадратные уравнения бывают трех видов: **1)** $ax^2 = 0$; **2)** $ax^2 + c = 0$; **3)** $ax^2 + bx = 0$.

Рассмотрим решение каждого из них.

1. *Уравнение вида* $ax^2 = 0$.

Так как $a \neq 0$, имеем уравнение $x^2 = 0$, корнем которого является число 0.

Следовательно, уравнение имеет единственный корень: $x = 0$.

2. *Уравнение вида* $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$.

Имеем $ax^2 = -c$, то есть $x^2 = -\frac{c}{a}$. Так как $c \neq 0$, то и $-\frac{c}{a} \neq 0$.

Если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \left(\text{или сокращенно: } x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\right).$$

Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение корней не имеет.

Пример 2. Решите уравнение:

1) $-2x^2 + 50 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$.

Решение.

1) $-2x^2 = -50$; $x^2 = 25$, $x_{1,2} = \pm 5$.

2) $3x^2 = -9$; $x^2 = -3$, $x \in \varnothing$.

Ответ. 1) ± 5; 2) корней нет.

3. *Уравнение вида* $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители и решим полученное уравнение $x(ax + b) = 0$, где $a \neq 0$.

$$x = 0 \quad \text{или} \quad ax + b = 0,$$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Пример 3. Решите уравнение $2x^2 + 5x = 0$.

Решение. Имеем: $x(2x + 5) = 0$,

$x = 0$ или $2x + 5 = 0$,

$x = -2,5$.

Таким образом, $x_1 = 0$, $x_2 = -2,5$.

Ответ. 0; $-2,5$.

Систематизируем данные о решениях неполного квадратного уравнения в виде схемы:

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

Если $b = 0$, $c = 0$, имеем: $ax^2 = 0$, $x^2 = 0$, $x = 0$

Если $b = 0$, $c \neq 0$, имеем: $ax^2 + c = 0$, $ax^2 = -c$, $x^2 = -\dfrac{c}{a}$

Если $b \neq 0$, $c = 0$, имеем: $ax^2 + bx = 0$, $x(ax + b) = 0$, $x_1 = 0$ или $ax + b = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Если $-\dfrac{c}{a} > 0$, то $x_1 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

Если $-\dfrac{c}{a} < 0$, то корней нет

1. Какое уравнение называют квадратным?
2. Как называют числа a, b, c в квадратном уравнении?
3. Приведите пример квадратного уравнения.
4. Какое квадратное уравнение называют неполным?
5. Приведите примеры неполных квадратных уравнений.
6. Как решают каждый из видов неполного квадратного уравнения?

1 Начальный уровень

775. (Устно.) Какие из уравнений являются квадратными:

1) $x^2 - 2x + 3 = 0$; 2) $x^2 - 3x^3 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$;

4) $7x - x^2 = 0$; 5) $4x - 5 = 2x + 7$; 6) $1 - 5x^2 = 0$?

776. (Устно.) Среди квадратных уравнений найдите неполные; приведенные:

1) $2x^2 + 3x = 0$; 2) $x^2 - 3x + 4 = 0$; 3) $2x^2 - 3x + 5 = 0$;

4) $5x^2 = 0$; 5) $7x^2 - 21 = 0$; 6) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$.

777. Выпишите коэффициенты a, b и c квадратного уравнения:

1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$; 3) $3x - x^2 + 7 = 0$;

4) $3x^2 = 0$; 5) $7x - x^2 = 0$; 6) $2 + 4x - x^2 = 0$.

778. Составьте квадратное уравнение по его коэффициентам:

1) $a = 3$; $b = 5$; $c = -2$; 2) $a = -1$; $b = 5$; $c = 0$;

3) $a = -4$; $b = 0$; $c = 0$; 4) $a = 13$; $b = 0$; $c = -39$.

779. Перенесите таблицу в тетрадь и заполните в ней пустые ячейки:

Квадратное уравнение	Коэффициенты уравнения		
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$5x^2 - 3x - 17 = 0$			
	2	–3	4
$-15x^2 + 14x = 0$			
	–3	0	7
$-x^2 + 5x + 6 = 0$			
	–5	–1	19

2 Средний уровень

780. Приведите к виду $ax^2 + bx + c = 0$ уравнение:

1) $(5x - 1)(5x + 1) = x(7x - 13)$;

2) $(2x - 3)^2 = (x + 2)(x - 7)$.

781. Замените уравнение равносильным ему квадратным уравнением:

1) $(2x + 3)(2x - 3) = x(9x - 12)$;
2) $(4x + 1)^2 = (x - 3)(x + 2)$.

782. Какие из чисел -2; -1; 0; 1; 2 являются корнями уравнения:

1) $x^2 - 5x = 0$; 2) $3x^2 = 0$;
3) $x^2 - 3x + 2 = 0$; 4) $x^2 - 2x - 3 = 0$?

783. Какие из чисел -5; -2; 0; 2; 5 являются корнями уравнения:

1) $x^2 + 2x = 0$; 2) $-5x^2 = 0$;
3) $x^2 - x - 6 = 0$; 4) $x^2 - 25 = 0$?

784. Решите уравнение:

1) $3x^2 - 27 = 0$; 2) $3{,}7x^2 = 0$; 3) $2x^2 + 8 = 0$;
4) $-5x^2 + 10 = 0$; 5) $-5{,}7x^2 = 0$; 6) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{7}{9} = 0$.

785. Найдите корни уравнения:

1) $2x^2 - 2 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$; 3) $1{,}4x^2 = 0$;
4) $-7x^2 + 21 = 0$; 5) $-1{,}8x^2 = 0$; 6) $\frac{1}{7}x^2 - \frac{5}{7} = 0$.

786. Найдите корни уравнения:

1) $x^2 + 6x = 0$; 2) $2x^2 - 8x = 0$; 3) $4x^2 - x = 0$;
4) $0{,}1x^2 + 2x = 0$; 5) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x = 0$; 6) $3x^2 - 7x = 0$.

787. Решите уравнение:

1) $x^2 - 5x = 0$; 2) $3x^2 + 9x = 0$; 3) $5x^2 + x = 0$;
4) $0{,}2x^2 - 10x = 0$; 5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x = 0$; 6) $4x^2 + 9x = 0$.

3 Достаточный уровень

788. Составьте квадратное уравнение, которое:

1) не имеет корней;
2) имеет только один корень;
3) имеет два целых корня;
4) имеет два иррациональных корня.

789. При каком значении коэффициента a число 3 является корнем уравнения $ax^2 + 2x - 7 = 0$?

790. При каком значении коэффициента b число -2 является корнем уравнения $x^2 + bx - 8 = 0$?

791. При каких значениях коэффициентов a и b числа 1 и 2 являются корнями уравнения $ax^2 + bx + 4 = 0$?

792. При каких значениях коэффициентов b и c числа 1 и 3 являются корнями уравнения $x^2 + bx + c = 0$?

793. Решите уравнение:

1) $(x - 2)(x + 3) = -6$;

2) $\frac{1}{3}x(x + 9) = \frac{1}{8}x(x - 16)$;

3) $(3x - 1)^2 = (x - 3)^2$;

4) $(2x + 1)(3x - 1) = x(x - 2) + 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

794. Решите уравнение:

1) $(x + 3)(x - 5) = -15$;

2) $\frac{2}{3}x(x - 3) = \frac{1}{2}x(x + 4)$;

3) $(2x - 3)^2 = (3x - 2)^2$;

4) $(5x + 1)(2x - 1) = x(x + 3) - 6\left(x + \frac{1}{6}\right)$.

795. При каких значениях x значение выражения $(3x - 1)(x + 4)$ на 4 меньше, чем значение выражения $x(x + 2)$?

796. При каких значениях x значение выражения $(2x + 1)(x + 3)$ на 3 больше, чем значение выражения $x(x - 4)$?

4 Высокий уровень

797. Произведение двух чисел равно их среднему арифметическому. Найдите эти числа, если их разность равна 1.

798. Половина произведения двух чисел равна их среднему арифметическому. Найдите эти числа, если их разность равна 2.

799. Решите уравнение:

1) $x^2 - 5|x| = 0$; 2) $-\dfrac{x^3}{|x|} + 4 = 0$.

800. Решите уравнение:

1) $-x^2 + 3|x| = 0$; 2) $\dfrac{x^3}{|x|} - 9 = 0$.

Упражнения для повторения

801. Докажите тождество:

$$\frac{3x + 3}{x^2 - x} : \left(\frac{x + 3}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + x}\right) = 3.$$

802. Постройте график функции $y = \begin{cases} -\dfrac{8}{x}, & \text{если } x < -2; \\ x^2, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ 8 - 2x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

803. Найдите значение выражения $b^2 - 4ac$, если:

1) $a = 1$; $b = 5$; $c = -6$; 2) $a = 1$; $b = -6$; $c = 9$;
3) $a = 2$; $b = -3$; $c = -5$; 4) $a = 4$; $b = 5$; $c = -9$.

804. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{18}$; 2) $\sqrt{300}$; 3) $\sqrt{108}$; 4) $\sqrt{363}$.

805. Сократите дробь:

1) $\dfrac{4 + 2\sqrt{7}}{2}$; 2) $\dfrac{6 - \sqrt{12}}{2}$; 3) $\dfrac{8 - 2\sqrt{3}}{6}$; 4) $\dfrac{16 + \sqrt{20}}{8}$.

Интересные задачки для неленивых

806. Сколько существует двузначных натуральных чисел, которые равны сумме произведения и суммы своих цифр?

§21. ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим полное квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, и найдем его решения в общем виде.

Умножим левую и правую части уравнения на $4a$ (так как $a \neq 0$, то и $4a \neq 0$):

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Далее прибавим к обеим частям уравнения b^2:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2.$$

Так как $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$, получим:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом квадратного уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$.

Слово *дискриминант* происходит от латинского *различающий*. Дискриминант обозначают буквой D.

Учитывая, что $b^2 - 4ac = D$, запишем уравнение в виде:

$$(2ax + b)^2 = D$$

и продолжим его решать.

Рассмотрим все возможные случаи в зависимости от значения D.

1) $D > 0$. Тогда:

$$2ax + b = \sqrt{D} \quad \text{или} \quad 2ax + b = -\sqrt{D}$$

$$2ax = -b + \sqrt{D} \qquad\qquad 2ax = -b - \sqrt{D}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad\qquad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

(при делении на $2a$ учли, что $a \neq 0$).

Следовательно, если $D > 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Коротко это можно записать так:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

Получили ***формулу корней квадратного уравнения***.

2) $D = 0$. Тогда имеем уравнение $(2ax + b)^2 = 0$,

$2ax + b = 0$, откуда $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Таким образом, если $D = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень: $x = -\dfrac{b}{2a}$. Этот корень можно было бы найти и по формуле корней квадратного уравнения, учитывая, что $D = 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$. Поэтому можно считать, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ при $D = 0$ имеет два одинаковых корня, каждый из которых равен $-\dfrac{b}{2a}$.

3) $D < 0$. В этом случае уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, так как не существует такого значения x, при котором значение выражения $(2ax + b)^2$ было бы отрицательным.

Систематизируем данные о решениях квадратного уравнения с помощью схемы:

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

$$\downarrow$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Если $D > 0$, то $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$	Если $D = 0$, то $x = -\dfrac{b}{2a}$	Если $D < 0$, то корней нет

Пример 1. Решите уравнение: 1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$;

2) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; 3) $x^2 - 2x + 7 = 0$.

Решение. 1) $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$; $D > 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm 1}{4}$; $x_1 = -1$; $x_2 = -0{,}5$.

2) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$; $D = 0$; $x = -\dfrac{-6}{2 \cdot 9} = \dfrac{1}{3}$.

3) $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 4 - 68 = -64 < 0$, $x \in \varnothing$.

Ответ. 1) -1; $-0{,}5$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) корней нет.

Пример 2. Решите уравнение $-\frac{1}{7}x^2 - \frac{4}{7}x + 1 = 0.$

Р е ш е н и е. Умножим левую и правую части уравнения на (-7), чтобы его коэффициенты стали целыми числами, получим уравнение: $x^2 + 4x - 7 = 0$.

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 44$, тогда $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{44}}{2}$.

Так как $\sqrt{44} = \sqrt{4 \cdot 11} = 2\sqrt{11}$, то

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -2 \pm \sqrt{11}.$$

О т в е т. $-2 \pm \sqrt{11}$.

А еще раньше...

Неполные квадратные уравнения и некоторые виды полных квадратных уравнений (например, вида $x^2 \pm x = a$) вавилонские математики умели решать еще 4 тыс. лет назад. В более поздние времена некоторые квадратные уравнения в Древней Греции и Индии математики решали геометрически. Приемы решения некоторых квадратных уравнений без применения геометрии изложил древнегреческий математик *Диофант* (III в.).

Франсуа Виет
(1540–1603)

Много внимания квадратным уравнениям уделял арабский математик *Мухаммед ал-Хорезми* (IX в.). Он нашел, как решить уравнения вида $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $bx + c = ax^2$ (для положительных a, b, c) и получить их положительные корни.

Формулы, связывающие между собой корни квадратного уравнения и его коэффициенты, были найдены французским математиком *Франсуа Виетом* в 1591 году. Он пришел к следующему выводу (в современных обозначениях): «Корнями уравнения $(a + b)x - x^2 = ab$ являются числа a и b».

После публикации трудов нидерландского математика *А. Жирара* (1595–1632), а также француза *Р. Декарта* (1596–1650) и англичанина *И. Ньютона* (1643–1727) формула корней квадратного уравнения приобрела современный вид.

1. Что называют дискриминантом квадратного уравнения?
2. Сколько корней имеет квадратное уравнение в зависимости от значения дискриминанта?
3. Запишите формулу корней квадратного уравнения.

1 Начальный уровень

807. (Устно.) Сколько различных корней имеет квадратное уравнение, если его дискриминант равен:

1) 4; 2) 0; 3) −9; 4) 17?

808. Имеет ли корни квадратное уравнение, и если имеет, то сколько, если его дискриминант равен:

1) −7; 2) 49; 3) 13; 4) 0?

809. (Устно.) Правильно ли записан дискриминант квадратного уравнения:

1) $2x^2 + 3x - 1 = 0$, $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$;
2) $3x^2 - 4x + 2 = 0$, $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$;
3) $-\frac{1}{2}x^2 - 5x + 3 = 0$, $D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;
4) $\frac{1}{8}x^2 + 2x - 4 = 0$, $D = 2^2 + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot (-4)$?

810. Найдите дискриминант и определите количество корней квадратного уравнения:

1) $6x^2 - 5x - 1 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
3) $x^2 + 2x + 5 = 0$; 4) $7x^2 + 2x - 1 = 0$.

811. Найдите дискриминант и определите количество корней квадратного уравнения:

1) $2x^2 - 3x - 1 = 0$; 2) $x^2 + x + 7 = 0$;
3) $x^2 + 6x + 9 = 0$; 4) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

2 Средний уровень

812. Решите уравнение:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $2x^2 + 5x - 3 = 0$;
3) $3x^2 + 5x + 2 = 0$; 4) $x^2 + 10x + 25 = 0$;
5) $x^2 + x - 90 = 0$; 6) $x^2 - 10x - 24 = 0$.

813. Решите уравнение:

1) $x^2 - 4x - 5 = 0$; 2) $2x^2 + 7x - 4 = 0$;
3) $x^2 - 12x + 36 = 0$; 4) $x^2 - x - 56 = 0$.

814. Решите уравнение:

1) $10x^2 = 5x + 0,6$; 2) $x^2 + 3 = 4x$;

3) $x^2 + 5x = -6$; 4) $1 - 4x = 5x^2$;
5) $81y^2 + 1 = -18y$; 6) $3p = 5p^2 - 2$.

815. Решите уравнение:

1) $10x^2 = 0,4 - 3x$; 2) $x^2 + 7 = -8x$;
3) $7x = x^2 + 12$; 4) $4y = 4y^2 + 1$.

816. При каких значениях x:

1) значение многочлена $x^2 - 2x - 3$ равно нулю;
2) значения многочленов $x^2 + 2x$ и $0,5x + 2,5$ равны;
3) значение двучлена $10x^2 - 8x$ равно значению трехчлена $9x^2 + 2x - 25$?

817. При каких значениях y:

1) значение многочлена $y^2 + 4y - 5$ равно нулю;
2) значения многочленов $y^2 - 3y$ и $0,5y + 4,5$ равны;
3) значение трехчлена $4 + 2y - y^2$ равно значению двучлена $4y^2 - 6y$?

3 Достаточный уровень

818. Решите уравнение:

1) $(x - 3)^2 = 2x - 3$;
2) $3(x + 1)^2 = 2x + 2$;
3) $(x + 3)(x - 1) = 2x(x - 2) + 5$;
4) $x(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = (x + 1)^2$.

819. Решите уравнение:

1) $(x + 2)^2 = 2x + 3$;
2) $5(x - 2)^2 = 3x - 6$;
3) $(x + 2)(x - 3) = 2x(x - 4) + 6$;
4) $x(x - 1) - (x - 3)(x + 3) = (x + 2)^2 - 1$.

820. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 + 2x}{3} = \frac{4x + 1}{5}$; 2) $\frac{x + 2}{3} + \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{1}{3}$.

821. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 3x}{4} = \frac{2x + 5}{3}$; 2) $\frac{x + 1}{2} + \frac{x^2 - 1}{5} = 1$.

822. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{2}x^2 - x - 7 = 0$;
2) $-x^2 - 2x + 4 = 0$;
3) $0,1x^2 - 3x - 5 = 0$;
4) $0,5x^2 + 1,5x - 4 = 0$.

823. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{2}x^2 + x - 3 = 0$;
2) $-x^2 + 2x + 11 = 0$;
3) $0,2x^2 + 2x - 3 = 0$;
4) $0,5x^2 - 2,5x - 4 = 0$.

Высокий уровень

824. Решите уравнение:

1) $(\sqrt{x} - 2)(x^2 + x - 2) = 0$;
2) $x^2 - \frac{3x^2}{|x|} - 4 = 0$;
3) $x|x| + 3x - 4 = 0$;
4) $\frac{x^3}{|x|} - x - 2 = 0$.

825. Решите уравнение:

1) $(\sqrt{x} - 3)(x^2 - x - 6) = 0$;
2) $x^2 - \frac{2x^2}{|x|} - 3 = 0$;
3) $x|x| - 4x - 5 = 0$;
4) $\frac{x^3}{|x|} + 4x - 12 = 0$.

826. При каких значениях a имеет только один корень уравнение:
1) $2x^2 + x - a = 0$;
2) $x^2 - ax + 4 = 0$?

827. При каких значениях b имеет только один корень уравнение:
1) $4x^2 - x + b = 0$;
2) $x^2 + bx + 9 = 0$?

Упражнения для повторения

828. Сократите дробь:

1) $\frac{a^2 - 49}{a^2 - 14a + 49}$;
2) $\frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$.

829. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = 0,2x - 15$ с осями координат.

830. Известно, что $a + b = 5$, $ab = -7$. Найдите значение выражения:

1) $ab^2 + a^2b$; 2) $a^2 + b^2$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

831. Решите уравнение, сравните сумму его корней с числом, противоположным второму коэффициенту уравнения, а произведение корней – со свободным членом уравнения:

1) $x^2 - x - 6 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$.

832. 1) Пусть a, b и c – коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, x_1 и x_2 – его корни. Перенесите таблицу в тетрадь и заполните ее.

Уравнение	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	x_1x_2
$x^2 - 2x - 8 = 0$						
$2x^2 + 5x - 7 = 0$						
$3x^2 - 16x + 5 = 0$						

2) Сравните $-\frac{b}{a}$ и $x_1 + x_2$; $\frac{c}{a}$ и x_1x_2.

Интересные задачки для неленивых

833. На мониторе компьютера – число 2500. Ежеминутно компьютерная программа умножает или делит это число на 2 или на 5, получая при этом натуральное число. Может ли ровно через час на мониторе появиться число:

1) 10 000; 2) 20 000?

§22. ТЕОРЕМА ВИЕТА

Рассмотрим несколько приведенных квадратных уравнений, имеющих два различных корня. Внесем в таблицу следующие данные о них: само уравнение, его корни x_1 и x_2, сумму его корней $x_1 + x_2$, произведение его корней $x_1 \cdot x_2$.

Уравнение	x_1 и x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 6x + 8 = 0$	2 и 4	6	8
$x^2 + x - 12 = 0$	−4 и 3	−1	−12
$x^2 + 5x + 6 = 0$	−3 и −2	−5	6
$x^2 - 4x - 5 = 0$	−1 и 5	4	−5

Обратим внимание, что сумма корней каждого из уравнений таблицы равна второму коэффициенту уравнения, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Это свойство выполняется для любого *приведенного квадратного уравнения*, имеющего корни.

Приведенное квадратное уравнение в общем виде обычно записывают так: $\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$.

Теорема Виета. ***Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней – свободному члену.***

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, дискриминант которого $D = p^2 - 4q$. Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}.$$

Если $D = 0$, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два одинаковых корня: $x_1 = x_2 = \frac{-p}{2}$.

Найдем сумму и произведение корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-p + \sqrt{D} - p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} =$$

$$= \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Следовательно, $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$. Теорема доказана.

Эту теорему называют *теоремой Виета* – в честь выдающегося французского математика Франсуа Виета, который открыл это свойство. Его можно сформулировать следующим образом:

Если x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Два последних равенства, показывающих связь между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения, называют *формулами Виета*.

Используя теорему Виета, можно записать соответствующие формулы и для корней любого неприведенного квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Так как $a \neq 0$, разделим обе части уравнения на a. Получим приведенное квадратное уравнение:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Тогда по теореме Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Если x_1 и x_2 – корни неприведенного квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Пример 1. Не решая уравнения $3x^2 - 5x - 7 = 0$, найдите сумму и произведение его корней.

Решение. Найдем дискриминант уравнения, чтобы убедиться, что корни существуют: $D = 5^2 + 4 \cdot 3 \cdot 7$. Очевидно, что $D > 0$, следовательно, уравнение имеет два корня x_1 и x_2. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3}$; $x_1x_2 = -\frac{7}{3}$.

Ответ. $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$; $x_1x_2 = -\frac{7}{3}$.

Если в уравнении $x^2 + px + q = 0$ коэффициент q является целым числом, то из равенства $x_1 \cdot x_2 = q$ следует, что целыми корнями этого уравнения могут быть только делители числа q.

Пример 2. Найдите подбором корни уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни данного уравнения. Тогда $x_1 + x_2 = -3$ и $x_1x_2 = -4$. Если x_1 и x_2 – целые числа, то они являются делителями числа -4. Ищем среди этих делителей два таких, сумма которых равна -3. Нетрудно догадаться, что это числа 1 и -4. Таким образом, $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.

Ответ. 1; -4.

Пример 3. Один из корней уравнения $x^2 + px - 18 = 0$ равен 3. Найдите коэффициент p и второй корень уравнения.

Решение. Пусть $x_1 = 3$ – один из корней уравнения $x^2 + px - 18 = 0$, а x_2 – второй его корень. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = -18$. Учитывая, что $x_1 = 3$, имеем:

$$\begin{cases} 3 + x_2 = -p, \\ 3 \cdot x_2 = -18; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -6, \\ 3 + (-6) = -p; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -6, \\ p = 3. \end{cases}$$

Ответ. $p = 3$; $x_2 = -6$.

Пример 4. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2 - 3x - 1 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения:

1) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$.

Решение. По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}; \ x_1x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Тогда: 1) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{3}{2} : \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3$;

2) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1 + x_2) = \dfrac{3}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{4}$;

3) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3\dfrac{1}{4}$.

Ответ. 1) -3; 2) $-\dfrac{3}{4}$; 3) $3\dfrac{1}{4}$.

Справедливо и утверждение, обратное теореме Виета.

Теорема (обратная теореме Виета). ***Если числа m и n таковы, что $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.***

Доказательство. По условию $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$. Поэтому уравнение $x^2 + px + q = 0$ можна записать так:

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Проверим, является ли число m корнем этого уравнения, для чего подставим в левую часть уравнения вместо переменной x число m. Получим:

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0.$$

Следовательно, m – корень этого уравнения.

Аналогично подставим в левую часть уравнения вместо переменной x число n. Получим:

$$n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0,$$

то есть n – также корень этого уравнения.

Таким образом, m и n – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, что и требовалось доказать.

Пример 5. Составьте приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа -5 и 2.

Решение. Искомое квадратное уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$. По теореме, обратной теореме Виета:

$p = -(x_1 + x_2) = -(-5 + 2) = 3$; $q = x_1 \cdot x_2 = -5 \cdot 2 = -10$.

Таким образом, $x^2 + 3x - 10 = 0$ – искомое уравнение.

Ответ. $x^2 + 3x - 10 = 0$.

1. Сформулируйте и докажите теорему Виета для приведенного квадратного уравнения.
2. Чему равны сумма и произведение корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?
3. Сформулируйте теорему, обратную теореме Виета.

1 Начальный уровень

834. (Устно.) Не решая уравнения, найдите сумму и произведение его корней:

1) $x^2 - 15x + 14 = 0$;
2) $x^2 + 12x - 28 = 0$;
3) $x^2 + 17x + 52 = 0$;
4) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
5) $x^2 + 2x = 0$;
6) $x^2 - 8 = 0$.

835. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

1) $2x^2 + 4x - 5 = 0$;
2) $-x^2 + 5x - 6 = 0$;
3) $3x^2 - 6x - 8 = 0$;
4) $4x^2 - 7x = 0$.

836. Не решая уравнения, найдите сумму и произведение его корней:

1) $x^2 - 2x - 8 = 0$;
2) $x^2 + x - 6 = 0$;
3) $x^2 + 9x + 5 = 0$;
4) $2x^2 - 6x + 3 = 0$.

2 Средний уровень

837. Решите уравнение, используя формулу корней, и проверьте для него справедливость теоремы Виета:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
2) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
4) $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

838. Решите квадратное уравнение по формуле корней и проверьте для него справедливость теоремы Виета:

1) $x^2 + 3x - 28 = 0$; 2) $2x^2 - 13x + 15 = 0$.

839. Все данные уравнения имеют корни. В каких из них корни являются числами одного знака, а в каких – числами разных знаков:

1) $x^2 + 2x - 8 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
3) $3x^2 + 4x + 1 = 0$; 4) $2x^2 - 3x - 5 = 0$?

3 Достаточный уровень

840. Найдите подбором корни уравнения:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $x^2 - 6x - 7 = 0$; 4) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
5) $x^2 - 17x + 42 = 0$; 6) $x^2 - 5x - 24 = 0$.

841. Найдите подбором корни уравнения:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 2) $x^2 - x - 6 = 0$;
3) $x^2 + 4x + 3 = 0$; 4) $x^2 - 12x + 27 = 0$;
5) $x^2 + x - 6 = 0$; 6) $x^2 + 9x - 22 = 0$.

842. Докажите, что уравнение $12x^2 + 17x - 389 = 0$ не может иметь корней, являющихся числами одного знака.

843. Не решая уравнения, определите знаки его корней (если корни существуют):

1) $x^2 + 8x + 5 = 0$; 2) $x^2 - 12x - 1 = 0$;
3) $3x^2 + 14x - 7 = 0$; 4) $4x^2 - 7x + 2 = 0$.

844. Не решая уравнения, определите, имеет ли оно корни. Если имеет, то найдите знаки корней:

1) $x^2 - 13x - 2 = 0$; 2) $x^2 + 17x + 1 = 0$;
3) $5x^2 - 14x + 1 = 0$; 4) $3x^2 + 7x - 18 = 0$.

845. Один из корней уравнения $x^2 + 6x + q = 0$ равен $-3{,}5$. Найдите другой его корень и коэффициент q.

846. Один из корней уравнения $x^2 + px - 9 = 0$ равен $1{,}5$. Найдите другой его корень и коэффициент p.

847. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + px - 10 = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 + 5x_2 = 0$. Найдите корни уравнения и коэффициент p.

848. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 4x + q = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 - 3x_2 = 13$. Найдите корни уравнения и коэффициент q.

4 Высокий уровень

849. x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + 4x - 3 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$;

4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 6) $(x_1 - x_2)^2$.

850. x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 5x - 2 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$;

4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 6) $(x_1 - x_2)^2$.

Дополнительные задачи

2 **851.** Составьте приведенное квадратное уравнение, если его корни равны:

1) 2 и 3; 2) –3 и 4; 3) –7 и 2; 4) 0,3 и –0,5.

852. Составьте приведенное квадратное уравнение, корни которого равны:

1) 5 и 1; 2) 2 и –7; 3) –2 и –3; 4) 0,7 и –0,1.

3 **853.** Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны:

1) $-\frac{1}{3}$ и 5; 2) $-\frac{1}{4}$ и $-\frac{5}{6}$; 3) $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$; 4) $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$.

854. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны:

1) –2 и $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{2}$; 3) $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{7}$; 4) $3 + \sqrt{7}$ и $3 - \sqrt{7}$.

4 **855.** Составьте квадратное уравнение, корни которого соответственно на 2 больше, чем корни уравнения $x^2 - 3x - 9 = 0$.

856. Составьте квадратное уравнение, корни которого на 3 меньше, чем корни уравнения $x^2 + 2x - 7 = 0$.

Упражнения для повторения

857. Имеется два куска сплава меди и цинка. Первый содержит 20 % меди, а второй – 35 % меди. По сколько килограммов нужно взять от каждого куска, чтобы получить сплав массой 200 кг, который содержит 29 % меди?

858. Упростите выражение: $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

859. Сумма двух чисел равна 32, а одно из них в 7 раз больше другого. Найдите эти числа.

860. Разность двух чисел равна 3, а разность между квадратом большего и квадратом меньшего составляет 81. Найдите эти числа.

Интересные задачки для неленивых

861. В сборную команду Украины на Всемирной шахматной олимпиаде входит 6 шахматистов и капитан, который руководит командой, но не принимает участия в соревнованиях. Средний возраст всех членов команды на 2 года больше, чем средний возраст шахматистов. На сколько лет возраст капитана больше среднего возраста членов его команды?

§23. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕКСТОВЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

В 7 классе мы уже знакомились с задачами, которые можно решить с помощью линейных уравнений или систем линейных уравнений. Для решения прикладной задачи сначала создают ее математическую модель, то есть записывают зависимость между известными и неизвестными величинами с помощью математических понятий, отношений, формул, уравнений и т. п. Математической моделью многих задач в математике, физике, технике, практической деятельности человека может быть не только линейное уравнение или система линейных уравнений, но и квадратное уравнение.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Разность кубов двух натуральных чисел равна 279. Найдите эти числа, если одно из них на 3 больше другого.

Решение. Пусть меньшее из этих чисел равно n, тогда большее равно $n + 3$. По условию задачи имеем уравнение:

$$(n + 3)^3 - n^3 = 279.$$

Упростим левую часть уравнения.

Получим: $n^2 + 3n - 28 = 0$, откуда $n_1 = 4$; $n_2 = -7$. По условию задачи $n \in N$. Поэтому условию удовлетворяет только число 4. Следовательно, первое искомое число 4, а второе $4 + 3 = 7$.

Ответ. 4; 7.

Пример 2. В кинотеатре количество мест в ряду на 6 больше количества рядов. Сколько рядов в кинотеатре, если мест в нем 432?

Решение. Пусть в кинотеатре x рядов, тогда мест в каждом ряду – $(x + 6)$. Всего мест в зале $x(x + 6)$.

Имеем уравнение: $x(x + 6) = 432$.

Перепишем уравнение в виде $x^2 + 6x - 432 = 0$, откуда $x_1 = 18$, $x_2 = -24$.

По смыслу задачи значение x должно быть положительным. Этому условию удовлетворяет только x_1. Следовательно, в кинотеатре 18 рядов.

Ответ. 18 рядов.

Пример 3. У выпуклого многоугольника 54 диагонали. Найдите, сколько у него вершин.

Решение. Пусть у многоугольника n вершин. Из каждой его вершины выходит $(n - 3)$ диагонали. Тогда из всех n его вершин выходит $n(n - 3)$ диагонали. Но при этом каждую из его диагоналей посчитали дважды. Следовательно, всего диагоналей будет $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Получим уравнение: $\dfrac{n(n-3)}{2} = 54$, то есть $n^2 - 3n - 108 = 0$, откуда $n_1 = 12$ и $n_2 = -9$. Отрицательный корень уравнения не может быть решением задачи.

Ответ. 12.

Пример 4. Тело подбросили вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Высота h (в м), на которой через t с будет тело, вычисляется по формуле $h = 20t - 5t^2$. В какой момент времени тело окажется на высоте 15 м?

Р е ш е н и е. По условию: $15 = 20t - 5t^2$, следовательно, после упрощения имеем уравнение: $t^2 - 4t + 3 = 0$, решив которое, найдем корни: $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Оба корня являются решением задачи, так как на высоте 15 м тело окажется дважды: сначала при движении вверх (это произойдет через 1 с), а во второй раз – при падении (это произойдет через 3 с).

О т в е т. 1 с, 3 с.

Пример 5. В 9 часов утра из базового лагеря в восточном направлении отправилась группа туристов со скоростью 5 км/ч. Через час из того же лагеря со скоростью 4 км/ч отправилась другая группа туристов, но в северном направлении. В котором часу расстояние между группами туристов будет 17 км?

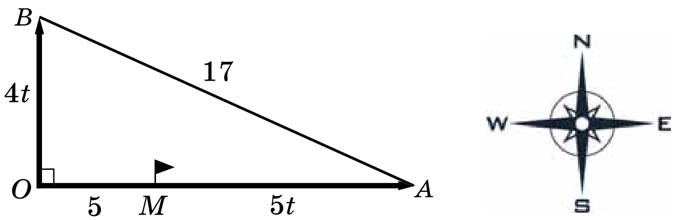


Рис. 19

Р е ш е н и е. За первый час первая группа туристов преодолеет 5 км: $OM = 5$ (рис. 19). Дальше будут двигаться обе группы.

Пусть расстояние в 17 км между группами будет через t часов после начала движения второй группы. Тогда за это время первая группа преодолеет $5t$ км, а вторая – $4t$ км, $OB = 4t$. Всего первая группа преодолеет расстояние $OA = OM + MA = 5 + 5t$ (км).

Из $\triangle AOB$ по теореме Пифагора $AB^2 = OA^2 + OB^2$, тогда имеем уравнение: $(5 + 5t)^2 + (4t)^2 = 17^2$, откуда $41t^2 + 50t - 264 = 0$.

Учитывая, что $t > 0$, получим $t = 2$ (ч).

Следовательно, расстояние 17 км между группами туристов будет в 12 часов.

О т в е т. В 12 часов.

А еще раньше...

В результате хозяйственной деятельности человека возникли прикладные задачи, решением которых люди занимаются уже на протяжении нескольких тысячелетий. Самые древние из известных нам письменных памятников, содержащих правила нахождения площадей и объемов, были составлены в Египте и Вавилоне приблизительно 4 тыс. лет назад. Около 2,5 тыс. лет назад греки переняли геометрические знания египтян и вавилонян и стали развивать теоретическую (чистую) математику.

Также в древние времена математики использовали математические модели, в частности и для геометрических построений (метод подобия фигур).

Современное понятие математической модели в качестве описания некоторого реального процесса языком математики стали использовать в середине XX в. в связи с развитием *кибернетики* – науки об общих законах получения, хранения, передачи и обработки информации. А раздел современной математики, изучающий математическое моделирование реальных процессов, даже выделили в отдельную науку – *прикладную математику*.

Существенный вклад в развитие прикладной математики был сделан нашими выдающимися земляками – математиками М.П. Кравчуком и М.В. Остроградским.

Развитие кибернетики в Украине связывают с именем академика Виктора Михайловича Глушкова – выдающегося украинского математика, доктора физико-математических наук, профессора. В 1953 г. он возглавил лабораторию вычислительной техники Института математики АН УССР, стал ее мозговым и энергетическим центром. На базе этой лаборатории в 1957 г. был создан Вычислительный центр, а в 1962 г. – Институт кибернетики АН УССР, который и возглавил В.М. Глушков. Лаборатория известна тем, что в 1951 г. в ней создали первую в Евразии Малую электронную счетную машину, а уже в Вычислительном центре завершили работу по созданию первой в Украине большой электронно-вычислительной машины «Киев». Сегодня Институт кибернетики НАН Украины носит имя В.М. Глушкова и является, в частности, разработчиком прикладных информационных технологий для решения неотложных практических задач, возникающих при моделировании экономических процессов, проектировании объектов теплоэнергетики, решении проблем экологии и защиты окружающей среды.

Объясните, как были решены задачи в примерах 1–5.

2 Средний уровень

862. Одно из двух натуральных чисел на 5 меньше другого. Найдите эти числа, если их произведение равно 204.

863. Произведение двух натуральных чисел равно 180. Найдите эти числа, если одно из них на 3 больше другого.

864. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 108 см^2, а одна из сторон на 3 см больше другой.

865. Участок прямоугольной формы, одна из сторон которого на 10 м больше другой, надо огородить забором. Найдите длину забора, если площадь участка 375 м^2.

866. Сумма двух смежных сторон прямоугольника – 17 см, а его площадь – 70 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

3 Достаточный уровень

867. Один из катетов прямоугольного треугольника на 7 см меньше другого. Найдите периметр треугольника, если его гипотенуза равна 13 см.

868. Найдите площадь прямоугольника, если сумма двух его непараллельных сторон равна 14 см, а диагональ – 10 см.

869. Произведение двух последовательных натуральных чисел на 181 больше их суммы. Найдите эти числа.

870. Кусок стекла имеет форму квадрата. Когда от него отрезали полосу шириной 30 см, его площадь стала равна 2800 см^2. Найдите первоначальные размеры куска стекла.

871. Площадь прямоугольного листа фанеры равна 300 дм^2. Его разрезали на две части, одна из которых – квадрат, а другая – прямоугольник. Найдите сторону квадрата, если сторона полученного прямоугольника, который не является стороной квадрата, равна 5 дм.

872. Найдите три последовательных целых числа, если утроенный квадрат меньшего из них на 242 больше суммы квадратов двух других.

873. Найдите три последовательных целых числа, если квадрат большего из них на 970 меньше удвоенной суммы квадратов двух других.

874. Сумма кубов двух натуральных чисел равна 468. Найдите эти числа, если их сумма равна 12.

875. От перекрестка в двух направлениях одновременно отправились два велосипедиста, один – на восток, другой – на север. Скорость первого была на 4 км/ч больше, чем скорость второго. Через 2 ч расстояние между ними составило 40 км. Какова скорость каждого из велосипедистов?

876. Периметр прямоугольника равен 44 см, а сумма площадей квадратов, построенных на его соседних сторонах, равна 244 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

4 Высокий уровень

877. Фотографию размером 10×15 (в см) вставили в рамку площадью 204 см^2 и обрамлением одинаковой ширины. Определите ширину обрамления рамки.

878. На земельном участке прямоугольной формы со сторонами 8 м и 6 м нужно разместить прямоугольную клумбу площадью 15 м^2 так, чтобы вокруг клумбы вплотную к границам участка образовалась дорожка постоянной ширины. Определите, какова ширина этой дорожки.

879. На шахматном турнире было сыграно 45 партий. Каждый из участников сыграл с каждым из остальных по одному разу. Сколько шахматистов приняли участие в турнире?

880. К Рождеству все члены семьи Петренко подготовили друг другу подарки и положили их под елку. Сколько человек в семье Петренко, если под елкой оказалось 20 подарков?

881. Высота h (в м), на которой через t с окажется мяч, подброшенный вертикально вверх, вычисляется по формуле $h = v_0t - 5t^2$, где v_0 – начальная скорость (в м/с). После удара футболиста мяч полетел вертикально вверх и через 1 с оказался на высоте 10 м. Через какое время мяч будет на высоте 10,8 м?

882. Футболист, рост которого 1,8 м, подбивает мяч головой, и через 0,4 секунды мяч оказывается на высоте 3,8 м. Через какое время мяч будет на высоте 4,25 м?

883. Сигнальная ракета, выпущенная вертикально вверх, через 2 с оказалась на высоте 40 м. Через какое время она окажется на высоте 44,2 м?

Упражнения для повторения

884. Найдите корни уравнения:

1) $3x^2 - 12 = 0$; 2) $5x^2 - 9x = 0$;
3) $3x^2 + 10x + 3 = 0$; 4) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

885. Решите уравнение:

1) $(x + 2)^2 = 5x + 7$; 2) $\frac{1}{4}x^2 - x - 5 = 0$.

886. При каких значениях a уравнение $ax^2 + 6x - 4 = 0$ имеет только один корень?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

887. Разложите на множители многочлен:

1) $4x^2 - 5x$; 2) $7x^2 + 14x$; 3) $x^2 - 36$;

4) $\frac{1}{9}x^2 - 25$; 5) $x^2 - 10x + 25$; 6) $16x^2 + 8x + 1$.

Интересные задачки для неленивых

888. Докажите, что из любых ста натуральных чисел можно выбрать несколько (возможно, и одно), сумма которых будет делиться на 100.

Домашняя самостоятельная работа № 5

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1 **1.** Укажите уравнение, являющееся квадратным.

А. $x^3 + x^2 - x = 0$; **Б.** $6x - 5 = 0$;

В. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$; **Г.** $2x^2 - 3x + 7 = 0$.

2. Если дискриминант квадратного уравнения равен 15, то квадратное уравнение...

А. не имеет корней; **Б.** имеет два различных корня;
В. имеет один корень; **Г.** имеет бесконечно много корней.

3. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + x - 5 = 0$, тогда

А. $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = -5$; **Б.** $x_1 + x_2 = -1$; $x_1x_2 = 5$;
В. $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = 5$; **Г.** $x_1 + x_2 = -1$; $x_1x_2 = -5$.

2 **4.** Укажите корни уравнения $5x^2 - 4x = 0$.

А. 0; 1,25; **Б.** 0; 0,8; **В.** 0; –0,8; **Г.** 0,8.

5. Решите уравнение $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

А. $\frac{1}{3}$; 3; **Б.** $-\frac{1}{3}$; –3; **В.** 1; 9; **Г.** корней нет.

6. Площадь прямоугольника равна 168 см^2, а одна из его сторон на 2 см меньше другой. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

А. 14 см; **Б.** 13 см; **В.** 12 см; **Г.** 11 см.

7. При каком значении a число 2 будет корнем уравнения $ax^2 + 4x - 20 = 0$?

А. −3; **Б.** 3; **В.** 7; **Г.** −7.

8. Решите уравнение $(x + 2)^2 = 4x + 5$.

А. −1; 1; **Б.** 1; **В.** $2 + \sqrt{5}$; $2 - \sqrt{5}$; **Г.** корней нет.

9. Дано три последовательных натуральных числа. Утроенный квадрат меньшего из них на 50 больше суммы квадратов двух других. Найдите меньшее из данных чисел.

А. 5; **Б.** 11; **В.** 12; **Г.** 13.

10. Решите уравнение $(\sqrt{x} - 3)(2x^2 + 3x - 5) = 0$.

А. −2,5; 1; 9; **Б.** −2,5; 1; 3; **В.** 1; 3; **Г.** 1; 9.

11. x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2 - 3x - 7 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2$.

А. 9,25; **Б.** −4,75; **В.** 23; **Г.** найти невозможно.

12. Во время деловой встречи произошло 36 рукопожатий, причем все участники пожали руку друг друга. Сколько человек участвовало в деловой встрече?

А. 8; **Б.** 9; **В.** 10; **Г.** 18.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 20–23

1. Какие из уравнений являются квадратными:

1) $x^2 - 4x + 7 = 0$; 2) $x^2 + \frac{1}{x} = 19$;

3) $x^2 - 15 = 0$; 4) $7x - 13 = 2x + 3$?

2. Сколько различных корней имеет квадратное уравнение, если его дискриминант равен:

1) 9; 2) 0; 3) −16; 4) 23?

3. Найдите сумму и произведение корней уравнения $x^2 + 2x - 17 = 0$.

4. Решите неполное квадратное уравнение:

1) $2x^2 - 18 = 0$; 2) $3x^2 - 4x = 0$.

5. Решите уравнение: 1) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; 2) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

6. Одна из сторон прямоугольника на 4 см больше другой, а площадь прямоугольника равна 192 см^2. Найдите его периметр.

7. Решите уравнение:

1) $(x + 1)^2 = 4x - 5$; 2) $\frac{1}{2}x^2 - x - 3 = 0$.

8. Найдите три последовательных натуральных числа, если квадрат большего из них на 140 меньше суммы квадратов двух других.

9. Решите уравнение $(\sqrt{x} - 2)(x^2 + 3x - 4) = 0$.

Дополнительные задачи

10. Числа x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 5x - 3 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 + x_2^2$.

11. На первенстве школы по баскетболу было сыграно 28 матчей, причем каждая команда сыграла с каждой из остальных по одному матчу. Сколько команд участвовало в первенстве школы по баскетболу?

§24. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Выражения $5x^2 - 2x + 7$ и $-x^2 + 3x - 9$ являются многочленами второй степени с одной переменной стандартного вида. Такие многочлены называют ***квадратными трехчленами***.

Квадратным трехчленом **называют многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x – переменная, a, b, c – числа, причем $a \neq 0$.**

Например, выражение $x^2 + 2x - 3$ является квадратным трехчленом, у которого $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

Пример 1. Рассмотрим квадратный трехчлен $5x^2 - 3x - 8$. Если $x = -1$, то его значение равно нулю. Действительно, $5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 8 = 0$. В таком случае число -1 называют ***корнем*** этого ***квадратного трехчлена***.

***Корнем квадратного трехчлена* называют значение переменной, при котором значение трехчлена обращается в нуль.**

Чтобы найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, нужно решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример 2. Найдите корни квадратного трехчлена $3x^2 + 2x - 16$.

Решение. Решим уравнение $3x^2 + 2x - 16 = 0$. Получим: $x_1 = 2$; $x_2 = -2\frac{2}{3}$. Следовательно, 2 и $-2\frac{2}{3}$ – корни квадратного трехчлена $3x^2 + 2x - 16$.

Ответ. 2; $-2\frac{2}{3}$.

Квадратный трехчлен, как и квадратное уравнение, может иметь два различных корня, один корень (то есть два равных корня) или не иметь корней. Это зависит от знака дискриминанта квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$, который также называют и ***дискриминантом квадратного трехчлена*** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$.

Если $D > 0$, то квадратный трехчлен имеет два различных корня, если $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет один корень (то есть два равных корня), если $D < 0$, то квадратный трехчлен не имеет корней.

Если корни квадратного трехчлена известны, то его можно разложить на линейные множители, то есть на множители, являющиеся многочленами первой степени.

Теорема (о разложении квадратного трехчлена на множители). ***Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то справедливо равенство***

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

Доказательство. Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (по теореме Виета).

Для доказательства теоремы раскроем скобки в правой части равенства:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_1x - xx_2 + x_1x_2) =$$

$$= a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) = a\left(x^2 - x \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= ax^2 + bx + c.$$

Таким образом, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, что и требовалость доказать.

Если же квадратный трехчлен не имеет корней, то на линейные множители его разложить нельзя.

Пример 3. Разложите на множители квадратный трехчлен:
1) $-2x^2 + 3x + 5$; 2) $x^2 - 2x + 5$; 3) $3x^2 - 12x + 12$.

Р е ш е н и е.

1) Корни трехчлена $-2x^2 + 3x + 5$ – числа -1 и $2{,}5$. Поэтому $-2x^2 + 3x + 5 = -2(x + 1)(x - 2{,}5)$. Это можно записать иначе, умножив первый в разложении множитель -2 на двучлен $x - 2{,}5$. Получим: $-2x^2 + 3x + 5 = (x + 1)(5 - 2x)$.

2) Квадратное уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$ не имеет корней. Поэтому квадратный трехчлен $x^2 - 2x + 5$ на множители не разлагается.

3) Квадратное уравнение $3x^2 - 12x + 12 = 0$ имеет два одинаковых корня $x_1 = x_2 = 2$. Поэтому

$$3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)(x - 2) = 3(x - 2)^2.$$

Нетрудно заметить, что если квадратный трехчлен имеет два равных корня, то он представляет собой квадрат двучлена или произведение некоторого числа на квадрат двучлена.

Пример 4. Сократите дробь $\dfrac{4x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1}$.

Р е ш е н и е. Числа 1 и $-0{,}5$ – корни квадратного трехчлена $4x^2 - 2x - 2$. Поэтому $4x^2 - 2x - 2 = 4(x - 1)(x + 0{,}5)$. Имеем:

$$\frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1} = \frac{4(x - 1)(x + 0{,}5)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{4(x + 0{,}5)}{x + 1} = \frac{4x + 2}{x + 1}.$$

О т в е т. $\dfrac{4x + 2}{x + 1}$.

При решении некоторых задач, связанных с квадратным трехчленом $ax^2 + bx + c$, бывает удобно представить его в виде $a(x - m)^2 + n$, где m и n – некоторые числа. Такое преобразование называют ***выделением квадрата двучлена*** из квадратного трехчлена.

Пример 5. Выделите из трехчлена $2x^2 + 16x - 7$ квадрат двучлена.

Р е ш е н и е. Вынесем за скобки множитель 2:

$$2x^2 + 16x - 7 = 2(x^2 + 8x - 3{,}5).$$

Воспользовавшись формулой квадрата суммы двух чисел $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, преобразуем выражение в скобках, считая, что $x^2 = a^2$, а $8x = 2ab$. Тогда $8x = 2 \cdot x \cdot 4$, откуда определяем, что число 4 является вторым слагаемым квадрата суммы, то есть $b = 4$, поэтому добавим и вычтем 4^2:

$$2(x^2 + 8x - 3,5) = 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 - 3,5) =$$

$$= 2((x + 4)^2 - 19,5) = 2(x + 4)^2 - 39.$$

О т в е т. $2(x + 4)^2 - 39$.

Пример 6. Дан квадратный трехчлен $-4x^2 + 24x - 20$. При каком значении x он принимает наибольшее значение? Найдите это значение.

Р е ш е н и е. Выделим из трехчлена квадрат двучлена:
$-4x^2 + 24x - 20 = -4(x^2 - 6x + 5) = -4(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5) = -4((x - 3)^2 - 4) = -4(x - 3)^2 + 16$.

Выражение $-4(x - 3)^2$ при любом значении x принимает неположительное значение, то есть $-4(x - 3)^2 \leqslant 0$, причем это выражение равно нулю только при $x = 3$. Поэтому при $x = 3$ значение данного в условии трехчлена равно 16 и является для него наибольшим.

Таким образом, квадратный трехчлен $-4x^2 + 24x - 20$ принимает наибольшее значение, равное 16, при $x = 3$.

О т в е т. 16 при $x = 3$.

1. Что называют квадратным трехчленом?
2. Что называют корнем квадратного трехчлена?
3. Сколько корней может иметь квадратный трехчлен?
4. Как раскладывают квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ на множители?
5. Какое преобразование квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ называют выделением квадрата двучлена?

1 Начальный уровень

889. (Устно.) Является ли квадратным трехчленом выражение:

1) $x^2 + x - 3$; 2) $x^3 - x + 7$;
3) $3x + 7$; 4) $x + 2$;
5) $\dfrac{1}{x^2 + x - 3}$; 6) $x^2 - x + x^3$;
7) $3x - 7 + 5x^2$; 8) $-7x^2 + 10x + \dfrac{1}{x}$?

890. Выпишите выражения, являющиеся квадратными трехчленами:

1) $x^3 - x$; 2) $x^2 - x - 1$; 3) $4x^2 + 17x + \dfrac{1}{5}$;

4) $4x + 17$; 5) $x^2 - x + x^7$; 6) $\frac{1}{2x^2 + x}$;
7) $-9x^2 + 18 + 5x$; 8) $-7 + 10x + 14x^2$.

891. Какие из чисел 1; 2; 3 являются корнями квадратного трехчлена:

1) $x^2 - 2x + 1$; 2) $x^2 + 8x - 9$;
3) $x^2 - 5x + 6$; 4) $x^2 - 2x - 3$?

892. Найдите дискриминант квадратного трехчлена и определите количество его корней:

1) $x^2 + 2x - 5$; 2) $x^2 + 3x + 7$;
3) $x^2 - 2x + 1$; 4) $x^2 - x - 2$.

893. Найдите дискриминант квадратного трехчлена и определите количество его корней:

1) $x^2 + x - 6$; 2) $x^2 + 6x + 9$;
3) $x^2 - 2x + 5$; 4) $x^2 + 3x - 7$.

2 Средний уровень

894. Найдите корни квадратного трехчлена:

1) $x^2 - 6x + 5$; 2) $x^2 - 4x - 12$;
3) $5x^2 - 10x + 5$; 4) $-2x^2 - 3x + 2$.

895. Найдите корни квадратного трехчлена:

1) $x^2 - 7x + 12$; 2) $x^2 - x - 20$;
3) $6x^2 - 7x + 1$; 4) $-3x^2 + 6x - 3$.

896. Можно ли разложить на множители квадратный трехчлен:

1) $16x^2 - 5x + 1$; 2) $4x^2 + 4x + 1$; 3) $2x^2 + x - 19$?

897. Разложите квадратный трехчлен на множители:

1) $x^2 - 5x + 4$; 2) $x^2 + 7x - 8$; 3) $2x^2 - 5x + 2$;
4) $-x^2 + 11x - 24$; 5) $-3x^2 + 8x + 3$; 6) $4x^2 + x - 3$.

898. Разложите квадратный трехчлен на множители:

1) $x^2 - 8x + 7$; 2) $x^2 + 8x - 9$; 3) $2x^2 - 7x + 3$;
4) $-x^2 + x + 12$; 5) $-6x^2 - 5x + 1$; 6) $7x^2 + 19x - 6$.

899. Покажите, что у квадратных трехчленов $x^2 - 2x - 3$, $3x^2 - 6x - 9$ и $-4x^2 + 8x + 12$ одни и те же корни. Разложите на множители каждый из этих трехчленов.

900. Верно ли разложен на множители квадратный трехчлен:

1) $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$;
2) $4x^2 - 8x + 4 = 4(x - 1)^2$?

901. Правильно ли разложен на множители квадратный трехчлен:

1) $3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$;
2) $2x^2 - 8x + 8 = (x - 2)^2$?

902. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$; 2) $\dfrac{x^2-5x-14}{x+2}$.

903. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$; 2) $\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$.

904. Почему нельзя представить в виде произведения линейных множителей квадратный трехчлен:

1) $x^2 + 2x + 7$; 2) $-2x^2 + 4x - 7$?

905. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

1) $x^2 + 2x - 5$; 2) $x^2 - 4x + 7$;
3) $2x^2 - 4x + 10$; 4) $3x^2 - 18x + 27$.

906. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

1) $x^2 - 2x + 7$; 2) $x^2 + 4x - 13$;
3) $3x^2 - 24x + 3$; 4) $2x^2 + 4x + 2$.

3 Достаточный уровень

907. Найдите корни квадратного трехчлена:

1) $\dfrac{1}{3}x^2 - 2x - 7$; 2) $0{,}2x^2 + 7x + 40$.

908. Найдите корни квадратного трехчлена:

1) $\dfrac{1}{4}x^2 + 2x - 15$; 2) $0{,}2x^2 - 3x - 9$.

909. Разложите трехчлен на множители, если это возможно:

1) $x^2 - 2x - 11$; 2) $2x^2 - 3x + 7$;
3) $-2x^2 - 3x + 7$; 4) $-x^2 - 5x - 8$.

910. Разложите трехчлен на множители, если это возможно:

1) $x^2 + 4x - 7$; 2) $-2x^2 + 3x - 6$.

911. Сократите дробь:

1) $\dfrac{4x - 12}{x^2 - 5x + 6}$; 2) $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 3x}$;

3) $\dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9}$; 4) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 5x - 14}$;

5) $\dfrac{2x^2 + 9x - 5}{3x^2 + 14x - 5}$; 6) $\dfrac{5x^2 - 37x + 14}{22x - 2x^2 - 56}$.

912. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 5x}$; 2) $\dfrac{x^2 - 16}{3x^2 - 10x - 8}$;

3) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10}$; 4) $\dfrac{2x^2 + 4x + 2}{3x^2 - 6x - 9}$.

913. Вычислите значение дроби:

1) $\dfrac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + 8x + 15}$ при $x = 97$;

2) $\dfrac{3x^2 - 24x + 48}{7x - 3x^2 + 20}$ при $x = -\dfrac{2}{3}$.

914. Выполните действия:

1) $\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{x}{x^2 + 2x - 8}$; 2) $\dfrac{1}{x + 4} + \dfrac{2}{x^2 + 6x + 8}$;

3) $\dfrac{x + 4}{3x + 2} \cdot \dfrac{3x^2 - 10x - 8}{x^2 - 16}$; 4) $\dfrac{-2x^2 + 5x - 2}{2x + 10} : \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 25}$.

915. Выполните действия:

1) $\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{7}{x^2 - 3x - 10}$; 2) $\dfrac{1}{x^2 - 4} : \dfrac{3x - 2}{3x^2 + 4x - 4}$.

916. Выделите из каждого квадратного трехчлена квадрат двучлена и докажите, что при любом значении x квадратный трехчлен:

1) $x^2 - 4x + 9$ принимает положительное значение;
2) $2x^2 + 8x + 8$ принимает неотрицательное значение;
3) $-x^2 + 6x - 16$ принимает отрицательное значение;
4) $-x^2 + 10x - 25$ принимает неположительное значение.

917. Выделите из каждого квадратного трехчлена квадрат двучлена и докажите, что при любом значении x квадратный трехчлен:

1) $x^2 + 6x + 17$ принимает положительное значение;
2) $-x^2 + 12x - 37$ принимает отрицательное значение.

4 Высокий уровень

918. Разложите на множители многочлен:

1) $x^3 + 3x^2 + 2x$;   2) $-2x^3 - 5x^2 + 3x$;

3) $\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{4}x^2$;   4) $-\frac{1}{2}x^5 + 2x^4 + 6x^3$.

919. Разложите на множители многочлен:

1) $x^3 - 12x^2 + 32x$;   2) $\frac{1}{3}x^4 - 4x^3 + 9x^2$.

920. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$;   2) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 + x}$.

921. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x^3 - 16x}{x + 40} \cdot \left(\dfrac{x - 4}{3x^2 + 11x - 4} - \dfrac{16}{16 - x^2}\right)$;

2) $\dfrac{1}{(2a - 2)^2} : \left(\dfrac{a}{a^2 - 2a + 1} - \dfrac{a + 2}{a^2 + a - 2}\right)$.

922. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{x - 1}{2x^2 + 3x + 1} - \dfrac{1}{x^2 - 1}\right) : \dfrac{x - 4}{x^3 - x}$;

2) $(3b - 9)^2 \cdot \left(\dfrac{b}{b^2 - 6b + 9} - \dfrac{b + 2}{b^2 - b - 6}\right)$.

Упражнения для повторения

3 **923.** Упростите выражение:

1) $\sqrt{0,16a^6x^{14}}$, если $a > 0$, $x < 0$;   2) $\sqrt{8m^3p^6}$, если $p > 0$.

924. Числа x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 2x - 10 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения:

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $x_1^3 + x_2^3$; 3) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$; 4) $x_1^4 + x_2^4$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

925. Разложите на множители:

1) $x^3 - 4x$; 2) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$;
3) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$; 4) $x^3 + x^2 - x - 1$.

926. Решите уравнение, использовав условие равенства дроби нулю:

1) $\frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4} = 0$; 2) $\frac{2x^2 + x - 28}{2x + 8} = 0$.

927. Решите уравнение, использовав основное свойство пропорции.

1) $\frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{2x - 2}{x + 5}$; 2) $\frac{x - 3}{x + 1} = \frac{x - 9}{2x + 3}$.

928. Решите уравнение с помощью умножения обеих его частей на общий знаменатель:

1) $\frac{1}{2x - 10} + \frac{2}{3x - 15} = \frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x - 1}$.

Интересные задачки для нелeнивых

929. Вкладчик внес средства на депозит в два разных банка, первый из которых начисляет 10 % годовых, а второй – 15 %. За год суммарная прибыль вкладчика составила 12 % от начального размера внесенных средств. Найдите отношение размера вклада в первом банке к размеру вклада во втором.

§25. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СВОДЯЩИХСЯ К КВАДРАТНЫМ

1. ***Дробные рациональные уравнения.***

Решение дробных рациональных уравнений часто сводится к решению квадратных уравнений. Вспомним один из методов решения дробного рационального уравнения.

Пример 1. Решите уравнение

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^3-4x}.$$

Р е ш е н и е. Чтобы найти область допустимых значений переменной и общий знаменатель, разложим на множители знаменатели дробей в уравнении:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{8}{x(x-2)(x+2)}.$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей – выражение $x(x - 2)(x + 2)$, учитывая ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq 2$, $x \neq -2$. Получим:

$$\begin{cases} x(x-2)+x+2=8, \\ x\neq 0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-x-6=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=3, \\ x_2=-2, \\ x\neq 0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases}$$

откуда $x = 3$.

О т в е т. 3.

2. *Метод разложения многочлена на множители.*

Некоторые уравнения, правая часть которых равна нулю, можно решить с помощью разложения левой части на множители.

Пример 2. Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$.

Р е ш е н и е. Вынесем в левой части уравнения общий множитель x за скобки. Получим:

$$x(x^2+2x-15)=0,$$

$$x=0 \quad \text{или} \quad x^2+2x-15=0,$$

$$x=3 \text{ или } x=-5.$$

Таким образом, уравнение $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$ имеет три корня: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = -5$.

О т в е т. 0; 3; –5.

3. *Биквадратные уравнения.*

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называют ***биквадратным уравнением***. Его можно решить с помощью введения новой переменной, то есть обозначив $x^2 = t$. Тогда $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, а исходное уравнение принимает вид:

$$at^2+bt+c=0.$$

Такой метод решения называют ***методом введения новой переменной*** или ***методом замены переменной***.

Пример 3. Решите уравнение $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$.

Решение. Сделаем замену $x^2 = t$, получим уравнение $t^2 + 5t - 36 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = 4$; $t_2 = -9$.

Вернемся к переменной x.

1) $t_1 = 4$, тогда $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$;

2) $t_2 = -9$, тогда $x^2 = -9$, корней нет.

Таким образом, корни исходного уравнения – числа 2 и -2.

Ответ. 2; -2.

4. *Метод замены переменной.*

Не только биквадратные, но и некоторые другие виды уравнений можно решить, используя замену переменной.

Пример 4. Решите уравнение $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x + 4) = 12$.

Решение. Если мы раскроем скобки в левой части уравнения, получим уравнение четвертой степени, которое не всегда возможно решить методами школьной математики. Поэтому скобки раскрывать не будем. Заметим, что в обеих скобках выражения, содержащие x, одинаковы, поэтому можно воспользоваться заменой $x^2 + 4x = t$. Получим уравнение $t(t + 4) = 12$, которое является квадратным относительно переменной t. Перепишем его в виде $t^2 + 4t - 12 = 0$, откуда $t_1 = 2$; $t_2 = -6$.

Возвращаемся к переменной x.

1) $t_1 = 2$, тогда $x^2 + 4x = 2$, то есть $x^2 + 4x - 2 = 0$, откуда $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$;

2) $t_2 = -6$, тогда $x^2 + 4x = -6$, то есть $x^2 + 4x + 6 = 0$, но $D < 0$, поэтому корней нет.

Таким образом, корнями исходного уравнения являются числа $-2 + \sqrt{6}$ и $-2 - \sqrt{6}$.

Ответ. $-2 \pm \sqrt{6}$.

Пример 5. Решите уравнение $x(x - 2) = \dfrac{4}{(x + 1)(x - 3)}$.

Решение. Раскроем скобки в каждой части уравнения:

$$x^2 - 2x = \frac{4}{x^2 - 2x - 3}.$$

Заметим, что выражения, содержащие переменную x, в обеих частях уравнения одинаковы, поэтому сделаем замену $x^2 - 2x = t$. Получим уравнение с переменной t:

$$t = \frac{4}{t - 3}.$$

Найдем его корни: $t_1 = -1$, $t_2 = 4$.

Вернемся к переменной x.
1) $t_1 = -1$, тогда $x^2 - 2x = -1$, то есть $x^2 - 2x + 1 = 0$, откуда $x = 1$;
2) $t_2 = 4$, тогда $x^2 - 2x = 4$, то есть $x^2 - 2x - 4 = 0$, откуда $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет три корня: $1; 1 \pm \sqrt{5}$.

Ответ. $1; 1 \pm \sqrt{5}$.

1. Какими методами можно решать уравнения?
2. Какое уравнение называют биквадратным?
3. Как решают биквадратное уравнение?

1 Начальный уровень

930. (Устно.) Какие из уравнений – биквадратные:

1) $x^3 + 2x^2 - 5 = 0$;
2) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;
3) $x^2 + 2x - 1 = 0$;
4) $-7x^4 - 8x^2 - 11 = 0$;
5) $\dfrac{1}{x^4} + \dfrac{4}{x^2} - 5 = 0$;
6) $8x^2 - 9x^4 - 5 = 0$?

931. Выпишите биквадратные уравнения из данных:

1) $x^2 + x - 7 = 0$;
2) $3x^4 - 2x^3 - 5 = 0$;
3) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$;
4) $x^5 - 3x^2 + 4 = 0$;
5) $7x^4 + 15x^2 - 9 = 0$;
6) $5 - 9x^4 - 8x^2 = 0$.

2 Средний уровень

932. Решите биквадратное уравнение:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$;
3) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$;
4) $2x^4 - x^2 - 6 = 0$;
5) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$;
6) $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$.

933. Найдите корни биквадратного уравнения:

1) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;
2) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$;
3) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$;
4) $3x^4 - 2x^2 - 8 = 0$;
5) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$;
6) $25x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

934. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 3} = 0$;
2) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 0$.

935. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2+2x-3}{x-4}=0$; 2) $\dfrac{x^2-x-12}{x+3}=0$.

936. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$; 2) $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}$;

3) $\dfrac{2x^2}{x-1}=\dfrac{3x-14}{1-x}$; 4) $\dfrac{x^2-5}{x-3}=\dfrac{2x-10}{3-x}$.

937. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{3x}{x-2}$; 2) $\dfrac{x^2}{x+3}=\dfrac{9}{x+3}$;

3) $\dfrac{3x^2}{1-x}=\dfrac{x-14}{x-1}$; 4) $\dfrac{x^2-3}{x-2}=\dfrac{2x-5}{2-x}$.

938. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{8}{x+3}$; 2) $\dfrac{2x-3}{x+2}=\dfrac{x}{x+6}$;

3) $\dfrac{10}{x-3}=x$; 4) $\dfrac{8}{x}=3x+2$.

939. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{3}{x+2}$; 2) $\dfrac{3x-1}{x+3}=\dfrac{x}{x+1}$;

3) $\dfrac{3}{4-x}=x$; 4) $\dfrac{6}{x}=2x-1$.

940. Решите уравнение, разложив его левую часть на множители:

1) $x^3-4x=0$; 2) $x^3+9x=0$;
3) $4x^4-x^2=0$; 4) $x^3+x^2-6x=0$.

941. Решите уравнение, разложив его левую часть на множители:

1) $x^3-9x=0$; 2) $x^3+4x=0$;
3) $16x^4-x^2=0$; 4) $x^3+x^2-12x=0$.

942. Решите уравнение:

1) $\dfrac{20}{x}-\dfrac{20}{x+1}=1$; 2) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-2}=1$.

943. Решите уравнение:

1) $\frac{12}{x} - \frac{12}{x+1} = 1;$ 2) $\frac{3}{x} + \frac{1}{x-4} = 1.$

3 Достаточный уровень

944. Решите уравнение:

1) $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x+3} = 0;$ 2) $\frac{6x^2 + 19x - 7}{1-3x} = 5;$

3) $\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4} = 3;$ 4) $\frac{4x+2}{1+2x} = 6x + 5.$

945. Решите уравнение:

1) $\frac{x^4 + x^2 - 2}{x+1} = 0;$ 2) $\frac{6x^2 + 7x - 5}{1-2x} = 4;$

3) $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 9} = 2;$ 4) $\frac{8x+2}{1+4x} = 12x + 5.$

946. Решите уравнение:

1) $\frac{x+7}{x+2} + \frac{x-4}{x-2} = 1;$ 2) $\frac{3x+3}{3x+2} + \frac{2x-6}{3x-2} = 2;$

3) $\frac{4}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{x^2+15}{x^2-25};$ 4) $\frac{2x+2}{x-3} - \frac{18}{x^2-9} = \frac{x+6}{x+3}.$

947. Найдите корни уравнения:

1) $\frac{3x+9}{x+1} + \frac{x-6}{x-1} = 3;$ 2) $\frac{2x+8}{x+5} + \frac{10}{x^2-25} = \frac{x-4}{x-5}.$

948. Решите уравнение:

1) $\frac{2x-3}{x^2+4x+4} - \frac{x+1}{x^2+2x} = \frac{5}{x};$

2) $\frac{6}{x^2-9} - \frac{4}{x^2+6x+9} = \frac{1}{x-3};$

3) $\frac{6}{x^2-36} - \frac{3}{x^2+6x} = \frac{x+12}{x^2-6x};$

4) $\frac{3x+2}{x+1} + \frac{x+4}{x-3} = \frac{3x^2+1}{x^2-2x-3}.$

949. Решите уравнение:

1) $\dfrac{21}{x^2-2x}-\dfrac{14}{x^2+2x}=\dfrac{5}{x}$;

2) $\dfrac{3}{x^2-4x+4}+\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}=0$;

3) $\dfrac{5}{x^2+10x}+\dfrac{x+20}{x^2-10x}=\dfrac{10}{x^2-100}$;

4) $\dfrac{2x+7}{x+4}-\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{5}{x^2+3x-4}$.

950. При каком значении x:

1) сумма дробей $\dfrac{6}{1-x}$ и $\dfrac{x}{x+2}$ равна их произведению;

2) сумма дробей $\dfrac{2}{x-3}$ и $\dfrac{6}{x+3}$ равна их частному?

951. Решите уравнение, разложив его левую часть на множители:

1) $x^3-2x^2-9x+18=0$;
2) $3x^3+3x^2-4x-4=0$.

952. Решите уравнение, разложив его левую часть на множители:

1) $x^3-x^2-4x+4=0$;
2) $4x^3+8x^2-3x-6=0$.

953. Решите уравнение:

1) $(x^2+3)^2-3(x^2+3)-4=0$;
2) $(x^2-x)^2+2(x^2-x)-8=0$.

954. Решите уравнение:

1) $(x^2+2)^2-2(x^2+2)-3=0$;
2) $(x^2+x)^2-5(x^2+x)-6=0$.

4 Высокий уровень

955. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{1}{2(x^2+3)}-\dfrac{1}{3(x+4)}=\dfrac{1}{x^3+4x^2+3x+12}$;

2) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{32}{x^3+2x^2-x-2}$.

956. Решите уравнение:

$$\frac{1}{x-3}-\frac{14}{x^3-x^2-9x+9}=\frac{1}{x^2+2x-3}.$$

957. Решите уравнение:

1) $x^5+x^4-6x^3-6x^2+5x+5=0$;
2) $x^3+2x^2-2x-1=0$.

958. Найдите корни уравнения:

1) $x^5-x^4-2x^3+2x^2-3x+3=0$;
2) $x^3-3x^2-6x+8=0$.

959. Решите уравнение:

1) $x-\sqrt{x}-6=0$;
2) $(x^2+2x-2)(x^2+2x-4)=8$;
3) $(x-2)^4-2(x-2)^2-3=0$;
4) $(x^2+x+1)^2-8x^2-8x-1=0$.

960. Решите уравнение:

1) $x+2\sqrt{x}-8=0$;
2) $(x^2-2x-1)(x^2-2x-3)=3$;
3) $(x+1)^4-5(x+1)^2-6=0$;
4) $(x^2-x-1)^2-4x^2+4x-1=0$.

Упражнения для повторения

961. Корни квадратного трехчлена $3x^2+bx+c$ равны -7 и $\frac{2}{3}$. Разложите этот квадратный трехчлен на множители.

962. Сумма двух чисел равна 27, а сумма их квадратов – 369. Найдите эти числа.

963. Упростите выражение $\frac{x-2}{3x+2}\cdot\frac{9x^2-4}{2x^2-5x+2}-\frac{x}{1-2x}$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

964. Из двух райцентров, расстояние между которыми 84 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Найдите скорость каждого из них, если их встреча произошла через 3 ч и скорость одного на 4 км/ч больше скорости другого.

Интересные задачки для неленивых

965. (*Внешнее независимое оценивание по математике, 2014 г.*). Известно, что $\frac{y-x}{2x} = \frac{3}{4}$, где $0 < x < y$. Во сколько раз число y больше числа x?

§ 26. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ДРОБНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дробные рациональные уравнения также могут служить математическими моделями текстовых задач.

Пример 1. Из одного города в другой, расстояние между которыми 560 км, одновременно выехали легковой и грузовой автомобили. Скорость легкового была на 10 км/ч больше скорости грузового, поэтому он прибыл в пункт назначения на 1 ч раньше грузового. Найдите скорость каждого автомобиля.

Решение. Пусть скорость грузового автомобиля – x км/ч. Систематизируем условие задачи в виде таблицы:

	s, км	v, км/ч	t, ч
Грузовой автомобиль	560	x	$\frac{560}{x}$
Легковой автомобиль	560	$x + 10$	$\frac{560}{x+10}$

Так как значение величины $\frac{560}{x+10}$ на 1 ч меньше значения величины $\frac{560}{x}$, то можем составить уравнение:

$$\frac{560}{x+10} + 1 = \frac{560}{x}.$$

У него два корня: $x_1 = 70$, $x_2 = -80$. Отрицательный корень не соответствует смыслу задачи, поэтому скорость грузового автомобиля 70 км/ч. Тогда скорость легкового автомобиля:

$70 + 10 = 80$ (км/ч).

Ответ. 70 км/ч; 80 км/ч.

Пример 2. Мастер и его ученик, работая вместе, могут выполнить задание за 8 ч. За сколько часов может выполнить это задание самостоятельно каждый из них, если мастеру на это нужно на 12 ч меньше, чем его ученику?

Р е ш е н и е. Пусть мастеру для самостоятельного выполнения задания нужно x ч, тогда ученику – $(x + 12)$ ч. Если вид и объем работ в задачах на работу не конкретизирован (как в данном случае), его принято обозначать единицей. Напомним, что *производительность труда* – это объем работы, выполняемый за единицу времени. Тогда за 1 ч мастер выполнит $\frac{1}{x}$ часть задания, а ученик – $\frac{1}{x+12}$ часть, это и есть их производительности труда. По условию задачи мастер и ученик проработали 8 ч, поэтому мастер выполнил $8 \cdot \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$ часть задания, а ученик $8 \cdot \frac{1}{x+12} = \frac{8}{x+12}$. Учитывая, что они выполнили все задание, имеем уравнение:

$$\frac{8}{x} + \frac{8}{x+12} = 1,$$

откуда $x_1 = 12$, $x_2 = -8$.

Второй корень не соответствует смыслу задачи, так как является отрицательным.

Таким образом, мастер, работая отдельно, может выполнить задание за 12 ч, а его ученик – за $12 + 12 = 24$ (ч).

Условие этой задачи, как и предыдущей, можно также систематизировать в виде таблицы:

	Время для самостоятельного выполнения, ч	**Производительность труда**	**Фактически потраченное время, ч**	**Объем выполненной работы**
Мастер	x	$\frac{1}{x}$	8	$\frac{8}{x}$
Ученик	$x + 12$	$\frac{1}{x+12}$	8	$\frac{8}{x+12}$

О т в е т. 12 ч и 24 ч.

Обратите внимание, что условия большинства задач на движение или работу можно систематизировать в виде таблицы, что поможет избежать громоздких текстовых записей.

Объясните, как решены задачи в примерах 1 и 2.

2 Средний уровень

966. Одно натуральное число на 2 больше другого. Найдите эти числа, если сумма обратных им чисел равна $\frac{5}{12}$.

967. Сумма двух натуральных чисел равна 20, а сумма чисел, им обратных, равна $\frac{5}{24}$. Найдите эти числа.

3 Достаточный уровень

968. Числитель обычной несократимой дроби на 1 меньше знаменателя. Если из числителя вычесть 7, а из знаменателя вычесть 5, то дробь уменьшится на $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.

969. Знаменатель обычной несократимой дроби на 5 больше числителя. Если знаменатель увеличить на 6, а числитель – на 4, то дробь увеличится на $\frac{1}{4}$. Найдите эту дробь.

970. Из города в деревню, расстояние между которыми 48 км, выехали одновременно два велосипедиста. Скорость одного из них была на 4 км/ч больше скорости другого, и поэтому он прибыл в деревню на 1 ч раньше другого. Найдите скорость каждого велосипедиста.

971. Из города A в город B, расстояние между которыми 420 км, одновременно выехали два автомобиля. Скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого, и поэтому он прибыл в город B на 1 ч раньше другого. Найдите скорость каждого автомобиля.

972. Чтобы ликвидировать опоздание в 40 мин, поезд на перегоне длиной в 300 км увеличил скорость на 5 км/ч по сравнению со скоростью по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

973. Автомобиль должен был проехать 810 км. Преодолев $\frac{5}{9}$ пути, он сделал остановку на 30 мин. Увеличив скорость на 10 км/ч, он все же прибыл в пункт назначения вовремя. Какова была скорость автомобиля до остановки?

974. Поезд должен был проехать 320 км. Проехав $\frac{3}{8}$ пути, он остановился на 1 ч, а потом продолжил движение со скоростью, на 10 км/ч меньше начальной. Найдите начальную скорость поезда, если в пункт назначения он прибыл через 7 ч после отправки.

975. Лодка, собственная скорость которой 18 км/ч, проплыла 40 км по течению и 16 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость течения, если она меньше, чем 4 км/ч?

976. Расстояние между двумя пристанями 48 км. На лодке путь туда и обратно можно преодолеть за 7 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения равна 2 км/ч.

977. Моторная лодка проплыла 18 км по течению реки и 28 км против течения за то же время, что и 48 км в стоячей воде. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения равна 3 км/ч.

978. Катер проплывает 30 км по течению реки и 8 км против течения за такое же время, которое необходимо плоту, чтобы проплыть по этой реке 4 км. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера равна 18 км/ч.

979. Моторная лодка проплыла 40 км по озеру, а потом 18 км по реке, впадающей в это озеро, потратив на весь путь 3 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

980. Две бригады дорожников должны были заасфальтировать по 200 м^2 дорожного полотна, причем первая бригада за день асфальтировала на 10 м^2 больше второй, и поэтому выполнила задание на 1 день раньше второй. Сколько м^2 дорожного полотна ежедневно асфальтировала каждая из бригад?

981. Для перевозки 60 т груза заказали некоторое количество грузовиков. Поскольку на каждый грузили на 1 т больше, чем планировалось, то 3 грузовика оказались лишними. Сколько грузовиков было использовано для перевозки груза?

982. Мастер и ученик, работая вместе, могут выполнить заказ за 16 ч. За сколько часов выполнит этот же заказ каждый из них самостоятельно, если мастеру на это нужно на 24 ч меньше, чем ученику?

983. Два маляра, работая вместе, могут покрасить определенную стену за 20 ч. За сколько часов может выполнить эту работу каждый из маляров самостоятельно, если одному из них для этого нужно на 9 ч больше, чем другому?

984. Из первого крана бассейн наполнялся 9 мин, после чего открыли второй кран. Через 6 мин их совместной работы оказалось, что бассейн наполнился наполовину. За сколько минут может наполнится бассейн из каждого крана отдельно, если для наполнения из первого крана на это уйдет на 9 мин больше, чем из второго?

985. Один оператор компьютерного набора может набрать рукопись на 12 дней быстрее, чем другой. Через 6 дней работы второго оператора к нему присоединился первый. Через 10 дней совместной работы оказалось, что они набрали $\frac{5}{7}$ рукописи. За сколько дней может набрать рукопись каждый оператор самостоятельно?

4 Высокий уровень

986. Пешеход двигался из деревни A в деревню B 4 ч. На обратном пути первые 10 км он прошел с той же скоростью, а потом уменьшил ее на 1 км/ч и поэтому на обратный путь затратил на 30 мин больше. Найдите расстояние между деревнями.

987. Расстояние от пристани M до пристани N по течению реки лодка преодолевает за 3 ч. Однажды, не доплыв 30 км до пристани N, лодка развернулась, поплыла обратно и причалила к пристани M через 4,5 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

988. Для промывки труб завод приобрел 6 литров кислоты. Часть кислоты использовали, а содержимое сосуда с кислотой дополнили водой до начального объема. В следующий раз из этого сосуда использовали такое же количество смеси, как кислоты в первый раз, а сосуд снова долили водой до начального объема. После этого чистой кислоты в сосуде стало втрое меньше, чем воды. Сколько литров кислоты использовали в первый раз?

Упражнения для повторения

2 **989.** Решите уравнение:

1) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0;$ 2) $\frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}.$

990. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-2x}$; 2) $\dfrac{x^2-9}{2x^2-4x-6}$.

991. Решите уравнение:

1) $x-2\sqrt{x}-8=0$; 2) $(x+7)^4-5(x+7)^2-6=0$.

Интересные задачки для неленивых

992. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2+2x}{|x|}-2$.

Домашняя самостоятельная работа № 6

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. Укажите квадратный трехчлен.

А. $2x^2+x-3x^3$; **Б.** $2x^2+x-3$;

В. $\dfrac{1}{2x^2+x-3}$; **Г.** $\dfrac{2}{x^2}+x-3$.

2. Найдите дискриминант квадратного трехчлена $2x^2-3x-7$.

А. 47; **Б.** −47; **В.** 64; **Г.** 65.

3. Укажите биквадратное уравнение.

А. $4x^2+x-3=0$; **Б.** $4x^4+x^2-3=0$;

В. $4x^3+x^2-3=0$; **Г.** $4x^4+3x^3+2x^2-x-5=0$.

4. Разложите на линейные множители квадратный трехчлен $-2x^2+3x+5$.

А. $-2(x+1)(x-2,5)$; **Б.** $2(x+1)(x-2,5)$;

В. $-2(x-1)(x+2,5)$; **Г.** $-2(x+1)(x+2,5)$.

5. Решите уравнение $\dfrac{x^2}{x-7}=\dfrac{49}{x-7}$.

А. корней нет; **Б.** 7; **В.** −7; **Г.** −7; 7.

6. Решите уравнение $x^3+2x^2-3x=0$, разложив его левую часть на множители.

А. −3; 1; **Б.** −1; 3; **В.** −1; 0; 3; **Г.** −3; 0; 1.

7. Сократите дробь $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$.

А. $\dfrac{x+2}{x+3}$; **Б.** $\dfrac{x-2}{x+3}$; **В.** $\dfrac{x-2}{x-3}$; **Г.** $\dfrac{x+2}{x-3}$.

8. При каких значениях x сумма дробей $\dfrac{6}{1+x}$ и $\dfrac{x}{3-x}$ равна их произведению?

А. таких значений x не существует; **Б.** 2;
В. 2; 9; **Г.** −9; −2.

9. Из города A в город B, расстояние между которыми 360 км, одновременно выехали два автомобиля. Скорость одного из них была на 10 км/ч больше скорости другого, и поэтому он прибыл в пункт назначения на 30 мин раньше. Найдите скорость автомобиля, движущегося медленнее.

А. 70 км/ч; **Б.** 80 км/ч; **В.** 90 км/ч; **Г.** 100 км/ч.

10. Разложите на множители многочлен $-\dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + 3x^2$.

А. $-\dfrac{1}{4}x^2(x-2)(x+6)$; **Б.** $-\dfrac{1}{4}(x-2)(x+6)$;

В. $-\dfrac{1}{4}x^2(x+2)(x-6)$; **Г.** $-\dfrac{1}{4}x(x-2)(x+6)$.

11. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$.

А. решений нет; **Б.** −4; −1; 2;
В. 1; 2; 4; **Г.** −2; 1; 4.

12. Расстояние от пристани A до пристани B против течения реки лодка преодолевает за 3 ч. Однажды, не доплыв 24 км до пристани B, она развернулась, поплыла обратно и причалила к пристани A через 3 ч 18 мин. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения равна 2 км/ч.

А. 20 км/ч; **Б.** 22 км/ч; **В.** 24 км/ч; **Г.** 26 км/ч.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 24–26

1. Из данных выражений выпишите квадратные трехчлены:

1) $2x^2 - 3x + 7$; 2) $\dfrac{1}{2x^2 - 3x + 7}$;

3) $2x^2 - 3x + 7x^3$; 4) $-8 + 2x^2 - 3x$.

2. Найдите дискриминант квадратного трехчлена и определите количество его корней:

1) $x^2 + 3x - 7$; 2) $x^2 + x + 9$.

3. Является ли биквадратным уравнение:

1) $x^2 + 8x - 9 = 0$; 2) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$;
3) $x^3 + 8x^2 - 9 = 0$; 4) $7x^2 - x^4 - 5 = 0$?

2 **4.** Разложите на множители квадратный трехчлен:

1) $x^2 + 4x - 5$; 2) $-2x^2 + 5x - 2$.

5. Найдите корни уравнения:

1) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$; 2) $\dfrac{x^2}{x+4} = \dfrac{16}{x+4}$.

6. Решите уравнение $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, разложив его левую часть на множители.

3 **7.** Сократите дробь:

1) $\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$; 2) $\dfrac{x^2 - 4}{2x^2 + 7x - 22}$.

8. Из одного города в другой одновременно выехали два велосипедиста. Скорость первого была на 3 км/ч больше скорости второго, поэтому в пункт назначения он прибыл на 1 ч раньше. Найдите скорость каждого из велосипедистов, если расстояние между городами равно 60 км.

4 **9.** Решите уравнение:

1) $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$; 2) $(x - 3)^4 - 7(x - 3)^2 - 8 = 0$.

Дополнительные задания

4 **10.** Разложите на множители многочлен:

1) $x^3 - 4x^2 - 5x$; 2) $-\dfrac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x^2$.

11. Постройте график функции

$$y = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 2x}.$$

Упражнения для повторения главы 3

К § 20

993. Перепишите уравнение в тетрадь и подчеркните одной черточкой его первый коэффициент, двумя – второй и «волной» – свободный член (в случае необходимости допишите коэффициентом число 1) по образцу: $\underline{a}x^2 \underline{\underline{+\ b}}x + c = 0$, $\underline{2}x^2 \underline{\underline{-\ 1}}x + 5 = 0$:

1) $7x^2 - 3x + 5 = 0$;
2) $-2x^2 + x - 4 = 0$;
3) $3x + x^2 - 7 = 0$;
4) $3x^2 = 0$;
5) $2x^2 - 7 = 0$;
6) $2x + 5x^2 = 0$.

994. Решите уравнение:

1) $1,8x^2 = 0$;
2) $2x^2 - 32 = 0$;
3) $5x^2 - 7x = 0$;
4) $-x^2 - 9 = 0$;
5) $\frac{1}{2}x^2 + 8x = 0$;
6) $3x^2 - 15 = 0$.

995. Является ли корнем уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$ число $1 - \sqrt{2}$?

996. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 + x}{2} + \frac{x - 1}{3} = \frac{5x + 4}{6}$;
2) $\frac{2x^2 - 3x}{4} + \frac{x + 4}{2} = \frac{x + 16}{8}$.

997. Длина прямоугольника в 1,5 раза больше его ширины. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь 54 см^2.

998. При каких значениях a число 3 является корнем уравнения:

1) $ax^2 - 7x + (a^2 + 21) = 0$;
2) $x^2 + (a^2 - 4)x - 9 = 0$?

999. При каких значениях a уравнение:

1) $x^2 - (4a - 5)x = 0$ имеет только один корень;
2) $a^2x^2 - a = 0$ имеет два корня?

К § 21

1000. Найдите дискриминант квадратного уравнения и определите количество его корней:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$;
2) $3x^2 - 2x + 3 = 0$;
3) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
4) $7x^2 + x - 1 = 0$.

1001. Решите уравнение:

1) $x^2 + 7x - 8 = 0$; 2) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;
3) $2x^2 - x - 3 = 0$; 4) $x^2 + 3x - 10 = 0$;
5) $x^2 + 4x + 7 = 0$; 6) $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

1002. Решите уравнение:

1) $x^2 = 6x - 7$; 2) $x^2 + 7x = -12$;
3) $10x = 25x^2 + 1$; 4) $2 - 9x = 5x^2$.

1003. Решите уравнение графически, а затем проверьте решение аналитически: 1) $x^2 = 3 - 2x$; 2) $x^2 = 0,5x + 3$.

1004. Решите уравнение:

1) $5(x - 2) = (3x + 2)(x - 2)$; 2) $\frac{1}{5}x^2 - 2x - 7 = 0$;
3) $x^2 + \sqrt{2}x - 12 = 0$; 4) $\sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0$.

1005. При каком значении m уравнение имеет только один корень: 1) $x^2 + 2mx + m = 0$; 2) $mx^2 - 4x + 2 = 0$?

1006. Докажите, что при любом значении a уравнение $2x^2 + ax - 3 = 0$ имеет два различных корня.

1007. Решите уравнение относительно x:

1) $x^2 - x(3 - 2a) - 6a = 0$; 2) $a^2x^2 - 3ax + 2 = 0$.

1008. Найдите корни уравнения:

1) $|x^2 + 5x - 3| = 3$; 2) $||x^2 - 5x + 1| - 4| = 3$;
3) $x^2 + x + \frac{4}{x - 2} = \frac{4}{x - 2} + 6$; 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\right)(x^2 + 2x) = 0$.

К § 22

1009. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

1) $x^2 + 17x + 60 = 0$; 2) $x^2 - 12 = 0$;
3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; 4) $-x^2 - 4x + 5 = 0$.

1010. Не используя формулы корней квадратного уравнения, найдите второй корень, если известен первый:

1) $x^2 - 7x + 10 = 0,\ x_1 = 5$; 2) $x^2 + 3x - 18 = 0,\ x_1 = -6$.

1011. Разность корней квадратного уравнения $x^2 + 2x + q = 0$ равна 6. Найдите эти корни и коэффициент q.

1012. Докажите, что уравнение $3x^2 + bx - 7 = 0$ при любом значении b имеет один положительный корень и один отрицательный.

1013. Корни уравнения $x^2 + px + 54 = 0$ относятся как $2 : 3$. Найдите коэфициент p и корни уравнения.

1014. Один из корней уравнения $5x^2 - 6x + c = 0$ вдвое больше другого. Найдите c.

1015. Сумма квадратов корней уравнения $3x^2 + bx - 12 = 0$ равна 33. Найдите b.

1016. При каких значениях a сумма корней уравнения $x^2 - 2ax + (2a - 1) = 0$ равна сумме квадратов его корней?

1017. Составьте квадратное уравнение, корни которого вдвое меньше корней уравнения $5x^2 - 16x + 4 = 0$.

К § 23

1018. Периметр прямоугольника равен 30 см, а его площадь – 54 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

1019. Найдите три последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 302.

1020. Найдите пять последовательных целых чисел, если известно, что сумма квадратов трех первых чисел равна сумме квадратов двух последних.

1021. Один из катетов прямоугольного треугольника на 2 см меньше второго, а периметр треугольника равен 24 см. Найдите площадь треугольника.

1022. В чемпионате Украины по футболу было сыграно 240 матчей. Сколько команд участвовало в чемпионате, если все команды сыграли друг с другом по два матча?

1023. Дно ящика – прямоугольник, ширина которого в 1,5 раза меньше длины. Высота ящика 0,4 м. Найдите объем ящика, если площадь его дна на 0,66 м^2 меньше суммы площадей всех боковых стенок.

1024. Коробку без крышки объемом 10 500 см^3 изготовили из листа картона прямоугольной формы, длина которого вдвое больше ширины, вырезав по углам листа квадраты со стороной 5 см. Найдите начальные размеры листа.

К § 24

1025. Найдите дискриминант каждого квадратного трехчлена и определите те из них, которые можно разложить на линейные множители:

1) $x^2 + x - 5$; 2) $x^2 + 2x + 7$; 3) $9x^2 + 6x + 1$.

1026. Найдите корни квадратного трехчлена:

1) $x^2 + 5x + 4$; 2) $x^2 - 4x - 12$;
3) $2x^2 - 12x + 18$; 4) $-4x^2 + 7x + 2$.

1027. Разложите на множители квадратный трехчлен:

1) $x^2 + 3x - 4$; 2) $2x^2 - 7x - 4$;
3) $-x^2 + 3x + 18$; 4) $-4x^2 + 9x - 2$.

1028. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

1) $x^2 + 6x - 7$; 2) $x^2 - 8x - 9$.

1029. Сократите дробь:

1) $\dfrac{4x^2 - 81}{2x^2 - 5x - 18}$; 2) $\dfrac{2x^2 + 6x - 20}{x^3 - 8}$;

3) $\dfrac{2x^2 - 12x + 18}{2x^2 - x - 15}$; 4) $\dfrac{4x^2 - 11x - 3}{-3x^2 + 10x - 3}$.

1030. Выполните действия:

1) $\dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} + \dfrac{x + 1}{x^2 + 4x + 3}$; 2) $\dfrac{2x^2 - 7}{x^2 - 3x - 4} - \dfrac{x + 1}{x - 4}$;

3) $\dfrac{x^2 - x - 20}{2 - x} \cdot \dfrac{2x - x^2}{x + 4}$; 4) $\dfrac{x + 5}{2x - 6} : \dfrac{x^2 + 11x + 30}{x - 3}$.

1031. Один из корней квадратного трехчлена $x^2 + px + 6$ равен -3. Найдите p и второй корень.

1032. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

1) $x^2 + x - 1$; 2) $2x^2 - 3x + 7$;
3) $3x^2 - 5x + 7$; 4) $-4x^2 + 9x - 2$.

1033. Укажите такое значение неизвестного коэффициента, чтобы трехчлен имел один корень:

1) $x^2 + bx + 4$; 2) $ax^2 + 8x + 64$; 3) $x^2 - 18x + c$.

1034. Разложите на множители относительно переменной x квадратный трехчлен:

1) $x^2 - 5ax - 6a^2$; 2) $x^2 + 3bx - 10b^2$.

1035. Какое наименьшее значение может принимать квадратный трехчлен $x^2 - 8x + 19$? При каком именно значении x?

1036. При каком a квадратный трехчлен $-a^2 - 4a - 17$ принимает наибольшее значение? Найдите это значение.

К § 25

1037. Решите уравнение:

1) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$; 2) $3x^4 - 2x^2 - 40 = 0$;
3) $x^4 + x^2 + 9 = 0$; 4) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$.

1038. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 0$; 2) $\dfrac{3x^2}{x + 2} = \dfrac{5x}{x + 2}$;

3) $\dfrac{x^2 + 1}{x - 2} = \dfrac{1 - 3x}{2 - x}$; 4) $\dfrac{21}{x} = 2x + 1$.

1039. Решите уравнение:

1) $x^4 - 16x^2 = 0$; 2) $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

1040. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^4 - 3x^2 - 4$ с осью абсцисс.

1041. Решите уравнение:

1) $\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{4}{x + 3} = \dfrac{1}{x}$; 2) $\dfrac{1}{2(1 - x)} + \dfrac{1}{2 - x} = \dfrac{3}{3 - x}$;

3) $\dfrac{18}{x^2 + 6x + 9} + \dfrac{7}{x + 3} = 1$; 4) $\dfrac{13x + 4}{4x^2 + 4x + 1} - \dfrac{1}{2x + 1} = 4$;

5) $\dfrac{1}{(x + 2)^2} + \dfrac{9}{(x - 2)^2} = \dfrac{6}{x^2 - 4}$;

6) $\dfrac{3}{3x^2 - x} - \dfrac{4}{9x^2 - 1} = \dfrac{4}{9x^2 - 6x + 1}$.

1042. Найдите корни уравнения:

1) $\dfrac{1}{2x + x^2} - \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{8}{4x - x^3}$; 2) $\dfrac{1}{1 - x} + \dfrac{1}{x + x^2} = \dfrac{10}{x - x^3}$;

3) $\dfrac{7x + 6}{x^3 - 27} = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 9} + \dfrac{1}{x - 3}$.

1043. Решите уравнение:

1) $x^3 - x^2 = x - 1$; 2) $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$.

1044. Найдите координаты точек пересечения графиков $y = 4x$ и $y = \dfrac{7}{x+1} - 1$.

1045. Решите уравнение:

1) $\dfrac{8x+29}{16x^4-1} + \dfrac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1} = \dfrac{25}{4x^2+1}$;

2) $\dfrac{3x}{27x^3+18x^2-12x-8} - \dfrac{1}{9x^2+12x+4} = \dfrac{x-1}{4x-9x^3}$.

1046. Найдите корни уравнения:

1) $(x^2-4x)(x-2)^2+3=0$;

2) $x(x-1)(x-2)(x-3)=24$;

3) $x^2-3x = \dfrac{8}{x^2-3x-2}$;

4) $(x+2)(x-7) = \dfrac{19}{(x-1)(x-4)}$;

5) $\dfrac{5}{x^2-x-1} + \dfrac{1}{x^2-x-5} = 2$;

6) $\dfrac{2}{x^2-11x+4} + \dfrac{3}{x^2-11x+1} = \dfrac{8}{x^2-11x-2}$.

1047. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2-13}{x+1} + \dfrac{x+1}{x^2-13} = 2{,}5$;

2) $\dfrac{x^2+3x}{1-x} + \dfrac{5x-5}{3x+x^2} = 4$.

К § 26

1048. Из города в деревню, расстояние между которыми 16 км, вышел пешеход. Через 2 ч 40 мин в том же направлении выехал велосипедист и прибыл в деревню одновременно с пешеходом. Найдите скорость велосипедиста, если она на 8 км/ч больше скорости пешехода.

1049. Поезд, опаздывавший на 2 ч, на перегоне длиной в 400 км увеличил скорость на 10 км/ч и прибыл в пункт назначения вовремя. Найдите время, за которое поезд должен был преодолеть данный перегон по расписанию.

1050. Катер проплыл 45 км по течению и 7 км против течения, потратив на весь путь 3 ч. Какова собственная скорость катера, если скорость течения 2 км/ч?

1051. В 8 часов утра от пристани по течению реки отошел плот, а в 17 часов в том же направлении отчалила лодка, догнавшая плот на расстоянии 20 км от пристани. В котором часу лодка догнала плот, если ее собственная скорость равна 18 км/ч?

1052. Рыбак отправился на лодке из пункта A против течения реки. Преодолев 5 км, он бросил весла, и через 3 ч после отплытия из пункта A его отнесло к этому пункту. Скорость лодки в стоячей воде равна 12 км/ч. Найдите скорость течения, если она меньше чем 5 км/ч.

1053. Первый оператор компьютерного набора набрал 120 страниц рукописи, а второй – 144 страницы. Первый ежедневно набирал на 4 страницы больше, чем второй, и работал на 3 дня меньше, чем второй. Сколько страниц ежедневно набирал первый оператор и сколько – второй?

1054. Рабочий день составляет 8 ч. Чтобы изготовить 15 деталей, Петру понадобится на 1 ч меньше, чем Степану. Сколько деталей в день изготавливает каждый из мастеров, если Петр в течение рабочего дня изготавливает на 20 деталей больше, чем Степан?

1055. Через первый кран водоочиститель на ферме наполняется на 4 ч быстрее, чем через второй опорожняется. Если одновременно открыть оба крана, то водоочиститель наполнится за 3 ч. За сколько часов водоочиститель может через первый кран наполниться и за сколько часов через второй кран опорожниться?

1056. Мастер может выполнить некоторое задание на 3 ч быстрее, чем его ученик. Если мастер проработает 4 ч, а потом его заменит ученик и проработает 3 ч, то задание будет выполнено. За сколько часов самостоятельно может выполнить задание мастер и за сколько – ученик?

1057. Сплав меди и цинка, содержащий 1 кг меди, сплавили с 2 кг меди. Получили сплав, в котором меди получилось на 25 % больше, чем в предыдущем сплаве. Какова масса начального сплава?

4 **1058.** Из городов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились через 5 ч. Скорость велосипедиста, выехавшего из города A, на 5 км/ч меньше, чем скорость второго велосипедиста. Если бы второй велосипедист выехал на 4,5 ч позже, чем первый, то велосипедисты встретились бы на расстоянии 75 км от города B. Найдите расстояние между городами A и B.

1059. Бригада рабочих за определенный срок должна была изготовить 800 одинаковых оконных блоков. В первые 5 дней бригада ежедневно изготовляла запланированное количество блоков, а затем ежедневно – на 5 блоков больше, чем планировала, поэтому уже за день до срока было изготовлено 830 оконных блоков. Сколько оконных блоков должна была ежедневно изготовлять бригада по плану?

«Желаем тебе стать вторым Остроградским...»

Михаил Васильевич Остроградский родился 12 сентября 1801 года в д. Пашенная Полтавской губернии (в настоящее время деревня Пашеновка). Предки Михаила Васильевича служили в казацком войске, участвовали во многих боях, не раз проявляли военную доблесть и героизм. По-видимому, именно поэтому в детстве Михаил Васильевич так мечтал стать военным. Но ему суждено было стать всемирно известным ученым.

М.В. Остроградский (1801–1862)

В детстве Михаил обладал исключительной наблюдательностью и увлекался измерениями. Учился он в пансионе при Полтавской гимназии, потом в этой гимназии. Закончив ее, стал свободным слушателем Харьковского университета, а в дальнейшем и его студентом. После окончания университета с отличием в августе 1820 года, менее чем через год (в апреле 1821 года) получил степень кандидата наук за исследования в прикладной математике. В 1822 году Остроградский уезжает в Париж, чтобы усовершенствовать свое математическое образование, и становится слушателем университета в Сорбонне. Именно там он публикует свои первые научные труды, становится известным ученым и заслуживает уважение французских математиков. За неимением средств Михаил Васильевич вынужден был покинуть Париж, преодолев пешком зимой 1828 года путь от Парижа до Петербурга.

Научные круги Петербурга встретили молодого ученого с радостью и надеждой. Его авторитет среди петербургских деятелей науки был высоким и незыблемым. В том же 1828 году Остроградский начинает преподавательскую деятельность в Морском кадетском корпусе Петербурга, его избирают адъюнктом Петербургской академии наук. А с 1830 года преподает еще в четырех высших учебных заведениях Петербурга. В 1834 году Остроградский был избран членом Американской академии наук, в 1841 году – членом Туринской академии, в 1853 – членом Римской академии Линчей и в 1856 году – членом-корреспондентом Парижской академии наук.

Лекции Остроградского посещали не только студенты, но и преподаватели, профессура, известные математики. Всем нравилась его система преподавания предмета – широта темы, но при этом выразительность и сжатость изложения, а также его остроумие. На лекциях он украшал свою речь украинскими словами, пословицами и поговорками. Поэтому студенты вспоминали его лекции с восторгом.

Любимым писателем Остроградского был Т.Г. Шевченко, с которым он был лично знаком и значительную часть произведений которого, зная наизусть, охотно декламировал. В 1858 году, когда Тарас Григорьевич возвращался из ссылки на родину через Петербург, Михаил Васильевич предложил Кобзарю остановится в его петербургской квартире.

Вернувшись из ссылки, Шевченко писал в «Дневнике»: «Великий математик принял меня с распростертыми объятиями, как земляка и как надолго выехавшего члена семьи».

Михаил Васильевич был выдающимся, оригинальным, всесторонне одаренным человеком. Его ценили не только за ум, но и за независимость, демократизм, скромность, искренность и простоту, за уважение к людям труда. Находясь на вершине славы, отмеченный за свои научные труды во всей Европе, Остроградский был прост в общении и не любил говорить о своих заслугах.

И какие бы проблемы не решал ученый (занимался он алгеброй, прикладной математикой, теорией чисел, теорией вероятностей, механикой и т. п.), все его научные труды отличаются глубиной мысли и оригинальностью, в них неизменно присутствует широта его взглядов, умение углубиться в суть проблемы, систематизировать и обобщить.

На всю жизнь Михаил Васильевич сохранил любовь к родной Земле и родному языку. Почти ежегодно летом он выезжал в Украину с целью погрузиться в полное спокойствие и полюбоваться замечательными пейзажами. Летом 1861 года Остроградский, пребывая на родине, заболел и 1 января 1862 года умер.

За свою почти 40-летнюю научную деятельность Михаил Васильевич написал свыше 50 трудов из разных отраслей математики: математического анализа, аналитической и небесной механики, математической физики, теории вероятностей. Свои педагогические взгляды М.В. Остроградский изложил в учебниках по элементарной и высшей математике.

Именем М.В. Остроградского назван Кременчугский национальный университет.

И хотя почти всю свою жизнь Михаил Остроградский занимался наукой за пределами Украины, он был широко известен своим соотечественникам. Авторитет и популярность М.В. Остроградского были настолько значимыми, что родители, отдавая ребенка на учебу, желали ему *«стать вторым Остроградским»*.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ КУРСА АЛГЕБРЫ 8 КЛАССА

1 **1.** Выполните действия:

1) $\dfrac{3m-4}{a}+\dfrac{4}{a}$; 2) $\dfrac{2}{b}:\dfrac{6}{b^2}$.

2. Представьте в виде степени с основанием a:

1) $a^{-7}:a^3$; 2) $(a^{-2})^5$.

3. Для функции $y=\sqrt{x}$ найдите значение y, соответствующее значению x, если $x = 9;\ 36$.

2 **4.** Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{2\dfrac{7}{9}}+10\sqrt{0{,}16}$; 2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{0{,}5}+(-\sqrt{7})^2$.

5. Упростите выражение $-\dfrac{5}{7}a^{-2}b^7\cdot 2\dfrac{1}{10}a^{-3}b^{-5}$.

6. Решите уравнение:

1) $2x^2+13x+6=0$; 2) $\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{3x-2}{x-1}$.

3 **7.** Упростите выражение $\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{x+3}{3x-12}\cdot\dfrac{96}{x^2+3x}$.

8. Моторная лодка проплыла 36 км против течения и вернулась обратно, затратив на весь путь 5 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

4 **9.** Постройте график функции $y=\dfrac{8x-32}{4x-x^2}$.

Дополнительные задания

4 **10.** Решите уравнение $(x^2+4x)(x^2+4x+3)=10$.

11. Докажите, что значение выражения

$\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}+\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$ является натуральным числом.

Задачи повышенной сложности

Рациональные выражения

1060. Докажите, что для положительных значений a и b ($a \neq b$) значения дроби $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$ больше соответствующих значений дроби $\dfrac{a^2 + b^2}{a + b}$.

1061. Сократите дробь $\dfrac{m^4 + m^2n^2 + n^4}{m^3 + n^3}$.

1062. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y + z}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y + z}} \cdot \left(1 + \dfrac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}\right) : \dfrac{x - y - z}{xyz}$;

2) $\dfrac{\dfrac{m - n}{2m - n} - \dfrac{m^2 + n^2 + m}{2m^2 + mn - n^2}}{(4n^4 + 4mn^2 + m^2) : (2n^2 + m)} \cdot (n^2 + n + mn + m)$;

3) $\dfrac{4}{x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}}} : \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{y}} - \dfrac{4}{y(xyz + x + z)}$;

4) $\left(\left(\dfrac{a}{b - a}\right)^{-2} - \dfrac{(a + b)^2 - 4ab}{a^2 - ab}\right)^2 \cdot \dfrac{a^4}{a^2b^2 - b^4}$;

5) $\dfrac{p^{-6} - 64}{4 + 2p^{-1} + p^{-2}} \cdot \dfrac{p^2}{4 - 4p^{-1} + p^{-2}} - \dfrac{4p^2(2p + 1)}{1 - 2p}$;

6) $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-3} + y^{-3}} : \dfrac{x^2y^2}{(x + y)^2 - 3xy} \cdot \left(\dfrac{x^2 - y^2}{xy}\right)^{-1}$.

1063. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\left(x^2 - \dfrac{1}{y^2}\right)^x \cdot \left(y + \dfrac{1}{x}\right)^{y-x}}{\left(y^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^y \cdot \left(x - \dfrac{1}{y}\right)^{x-y}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$;

2) $\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\left(\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\right)=\dfrac{(b+c-a)^2}{2bc}$;

3) $\dfrac{(x-y)^2+xy}{(x+y)^2-xy}:\dfrac{x^5+y^5+x^2y^3+x^3y^2}{(x^3+y^3+x^2y+xy^2)(x^3-y^3)}=x-y$;

4) $\left(\dfrac{2-y}{y-1}+\dfrac{2(x-1)}{x-2}\right):\left(\dfrac{y(x-1)}{y-1}+\dfrac{x(2-y)}{x-2}\right)=\dfrac{1}{x-y}$.

1064. Докажите одно из тождеств выдающегося математика Л. Эйлера (1707–1783):

$$\left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3-\left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3=a^3+b^3.$$

1065. Докажите, что значение выражения

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}$$

является отрицательным при любом значении $a > 1$.

1066. Докажите, что если $x + y = 1$, то

$$\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}=\frac{2(y-x)}{x^2y^2+3}.$$

1067. Докажите, что если для чисел x, y, z, m, n, p справедливы равенства $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{p}=1$ и $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}+\dfrac{p}{z}=0$, то для них справедливо и равенство $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}+\dfrac{z^2}{p^2}=1$.

1068. Докажите, что если $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}$, то $a^2b^2c^2=1$ или $a=b=c$.

1069. Решите уравнение относительно переменной x:

1) $\dfrac{x-2}{x-a}=0$;
2) $\dfrac{x-a}{x^2-1}=0$;
3) $(a-2)x=a^2-4$;
4) $(a^2-1)x=a^2-2a+1$.

1070. Решите уравнение относительно переменной x:

1) $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{2x}=\dfrac{2x+a}{2a}-\dfrac{a}{x}$;
2) $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{a}{b}$;
3) $\dfrac{x-a}{a}-\dfrac{x}{x-a}=\dfrac{x+a}{a}$;
4) $\dfrac{3}{x-a}+\dfrac{2}{x+a}=\dfrac{4x+7a}{x^2-a^2}$.

1071. Порядок числа a равен -3, а порядок числа b равен 5. Каким может быть порядок числа:

1) ab; 2) $\dfrac{a}{b}$; 3) $\dfrac{b}{a}$; 4) $a + b$?

Квадратные корни. Действительные числа

1072. Решите относительно переменной x уравнение:

1) $\sqrt{x} = a + 3$; 2) $a\sqrt{x} = a$; 3) $(a + 3)\sqrt{x + 2} = a^2 - 9$.

1073. Укажите целое число, ближайшее к корню уравнения:

1) $(5\sqrt{2} - 3\sqrt{3})x + 4 = 0$; 2) $(5\sqrt{2} + 7\sqrt{5})x = 13 + 2\sqrt{3}$.

1074. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{3 - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{6 - \sqrt{25 - 4\sqrt{6}}}}$;

3) $\sqrt{\left|30\sqrt{3} - 52\right| - \sqrt{52 + 30\sqrt{3}}}$.

1075. Упростите выражение:

1) $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$;

2) $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$.

1076. Вычислите:

1) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$;

2) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$.

1077. Постройте график функции:

1) $y = 4x - \sqrt{x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - x$.

1078. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}}$; 2) $\dfrac{(1 + \sqrt{3})^2 - 7}{\sqrt{7} + \sqrt{3} + 1}$;

3) $\dfrac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}}$; 4) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$.

1079. Являются ли взаимно обратными числа $\sqrt{\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}}$ и $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}$?

1080. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-4y}{(x-y):\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)}:\dfrac{x+9y+6\sqrt{xy}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}}$;

2) $\dfrac{2\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)}$.

1081. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x^2-x\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2}{2\sqrt{x^3y}}:\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\right)$

при $x>y>0$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}}+\dfrac{b-a}{\sqrt{b^2-a^2}+a-b}\right):\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}-1}$

при $b>a>0$.

1082. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{(a+2)^2-8a}}{\sqrt{a}-\dfrac{2}{\sqrt{a}}}$; 2) $\dfrac{x^2+4}{x\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}}$.

1083. Докажите тождество:

1) $\left(1+\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right):\left(\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\sqrt{1-x^2}$;

2) $\dfrac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}+\dfrac{a^2-\dfrac{ab}{\sqrt{b}}}{a-\sqrt{b}}-\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}+\dfrac{4a\sqrt{b}}{a^2-b}=a$.

1084. Известно, что $\sqrt{3-x}+\sqrt{5+x}=3$. Не вычисляя значения x, найдите значение выражения $\sqrt{(3-x)(5+x)}$.

1085. Известно, что $\sqrt{24 - x^2} - \sqrt{12 - x^2} = 2$. Не вычисляя значення x, найдите значение выражения $\sqrt{24 - x^2} + \sqrt{12 - x^2}$.

1086. Известно, что $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$, $xy = 9$. Не вычисляя значений x и y, найдите:

1) $x + y$; 2) $x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$; 3) $x^2 + y^2$.

Квадратные уравнения

1087. При каком значении a уравнение имеет только один корень:

1) $(a + 4)x^2 - (a + 5)x + 1 = 0$;

2) $(a - 4)x^2 + (2a - 8)x + 15 = 0$?

1088. Решите уравнение:

1) $2(a - 1)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$;

2) $(a + 1)x^2 - (a - 1)x - 2a = 0$.

1089. Найдите корни уравнения:

1) $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0$;

2) $x^2 - 4x + 4 + \left|x^2 + 2x - 8\right| = 0$;

3) $\left|x - \sqrt{x} - 6\right| + \sqrt{x^2 - 4x} = 0$.

1090. Докажите, что каковы бы ни были целые числа a, b, c, число 3 не может быть дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

1091. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - (a + 2)x + a - 3 = 0$ будет наименьшей?

1092. При каком значении b сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (b + 1)x + b^2 - 1,5 = 0$ будет наибольшей?

1093. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + \sqrt{a - 4} \cdot x - 5 = 0$ удовлетворяют условию $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{18}{25}$. Найдите a.

1094. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2 + 7x - 1 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

1) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$; 2) $\frac{x_1}{x_2} - 3$ и $\frac{x_2}{x_1} - 3$; 3) $x_1x_2^3$ и $x_2x_1^3$.

1095. Докажите, что если a, b и c – стороны треугольника, то уравнение $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ не имеет корней.

1096. Докажите, что модуль разности корней уравнения $5x^2 - 2(5a + 3)x + 5a^2 + 6a + 1 = 0$ не зависит от значения a.

1097. Решите уравнение:

1) $x^3 - 7x + 6 = 0$;
2) $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$;
3) $x^3 - 5x^2 + 6 = 0$;
4) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$.

1098. Решите относительно x уравнение:

1) $(a^2 + a - 2)x = a - 1$;
2) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - a} = 0$;
3) $\dfrac{x - a}{x^2 - 4x + 3} = 0$;
4) $\dfrac{x^2 - (3a + 4)x + 12a}{x - 3} = 0$;
5) $\dfrac{a(x - a)}{x + 7} = 0$;
6) $\dfrac{a^2 - 1}{ax - 1} = \dfrac{x}{a}$.

1099. При каких значениях a уравнение $\dfrac{x^2 + ax + 9}{x + 1} = 0$ имеет только один корень?

1100. Решите уравнение

$$\frac{38}{x^4 - x^2 + 20x - 100} + \frac{x + 10}{x^2 - x + 10} = \frac{x + 10}{x^2 + x - 10}.$$

1101. При каких значениях a и b трехчлен $4x^2 + 36x + (a + b)$ является полным квадратом, если $a - b = 3$?

1102. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{x^2 + 3x + 2} + \dfrac{2x}{x^2 + 4x + 3} + \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}\right)^2 \cdot \dfrac{(x - 3)^2 + 12x}{2}$;

2) $\dfrac{3a^2 + 2ab - b^2}{a^2 + 4ab + 3b^2} - 2 + \dfrac{10(ab - 3b^2)}{a^2 - 9b^2}$.

1103. Решите относительно x уравнение:

1) $\dfrac{x^2 + 1}{a^2x - 2a} - \dfrac{1}{2 - ax} = \dfrac{x}{a}$;

2) $\dfrac{x + 2}{3x - a} + \dfrac{3 - x}{3x^2 + 2xa - a^2} = \dfrac{3x + 2}{x + a}$.

1104. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x - 3}{x - 1} + \dfrac{x + 3}{x + 1} = \dfrac{x + 6}{x + 2} + \dfrac{x - 6}{x - 2}$;

2) $\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{28}{15}=\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x+4}{x+3}.$

1105. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-5}=x-11;$ 2) $\sqrt{x^2+20}=22-x^2.$

1106. Решите уравнение:

1) $|2x^2+4x-5|=|x^2+x|;$ 2) $3x^2-4=5|x-1|.$

1107. Постройте график уравнения $x^2-5xy+6y^2=0.$

1108. Решите уравнение:

1) $\left(\dfrac{2x+1}{3x-4}\right)^2+\left(\dfrac{3x-4}{2x+1}\right)^2=2;$

2) $\left(\dfrac{5x-6}{2-7x}\right)^2+\left(\dfrac{7x-2}{5x-6}\right)^2=4{,}25;$

3) $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9;$

4) $3\left(\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{x^2}{9}\right)+4\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{x}\right)-8=0.$

1109. В супермаркет привезли яблоки первого сорта на сумму 456 грн и второго сорта на сумму 360 грн. Если продать все яблоки оптом по единой цене, которая на 1 грн 80 коп. ниже цены килограмма первого сорта, то выручка будет равна запланированной. Сколько килограммов яблок привезли в супермаркет, если яблок второго сорта было на 5 кг больше, чем яблок первого?

1110. Задумали целое положительное число. К нему справа приписали цифру 7 и из полученного числа вычли квадрат задуманного числа. Разность уменьшили на 75 % и получили задуманное число. Какое число было задумано?

1111. Из города A в город B, расстояние между которыми 164 км, со скоростью 20 км/ч выехал велосипедист. Через 2 ч в том же направлении выехал мотоциклист, который, обогнав велосипедиста, прибыл в город B и сразу же отправился в обратный путь. Найдите скорость мотоциклиста, если он встретил велосипедиста через 2 ч 45 мин после того, как его обогнал.

1112. Из города M в город N со скоростью 12 км/ч выехал велосипедист. Через 1 ч оттуда же в том же направлении со скоростью 15 км/ч выехал второй велосипедист. Еще через 1 ч из города M в том же направлении выехал еще и мотоциклист, который обогнал одного из велосипедистов через 10 мин после того, как обогнал другого. Найдите скорость мотоциклиста, если она превышает 50 км/ч.

1113. Из поселка A в поселок B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Первый прибыл в B через 0,8 ч после их встречи, а второй – в A через 1,25 ч после их встречи. Сколько часов был в дороге каждый пешеход?

1114. По двум взаимно перпендикулярным дорогам в направлении перекрестка движутся пешеход и велосипедист. В некоторый момент времени пешеход находится на расстоянии 2 км, а велосипедист – 3,75 км от перекрестка дорог. Через какое время расстояние между ними будет равно 1,25 км, если скорость пешехода 5 км/ч, а велосипедиста – 15 км/ч?

1115. Сергей и Алексей должны были вместе набрать рукопись к определенному сроку. После того как была набрана половина рукописи, Алексей заболел, и потому Сергей закончил работу на 2 дня позже, чем планировалось. За сколько дней мог бы набрать рукопись каждый из них самостоятельно, если Сергею на это нужно на 5 дней меньше, чем Алексею?

1116. Из первого крана резервуар наполняется водой на 24 мин быстрее, чем из второго. Если сначала $\frac{2}{3}$ резервуара заполнить из первого крана, а потом оставшуюся часть – из второго, то будет потрачено на 33 мин больше, чем во время наполнения резервуара двумя кранами одновременно. За какое время резервуар наполняется из каждого крана отдельно?

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАССОВ И АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

Десятичные дроби

Сложение и вычитание десятичных дробей выполняют поразрядно, записывая их одна под другой так, чтобы запятая размещалась под запятой.

Примеры. 1) $\begin{array}{r} +\,7,813 \\ 9,4 \\ \hline 17,213 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} -\,12,47 \\ 5,893 \\ \hline 6,577 \end{array}$

Чтобы *перемножить две десятичные дроби*, надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятые, а потом в произведении отделить запятой справа налево столько цифр, сколько их после запятой в обоих множителях вместе.

Примеры. 1) $\begin{array}{r} \times\,4,07 \\ 2,9 \\ \hline +\,3663 \\ 814 \\ \hline 11,803 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \times\,0,017 \\ 0,9 \\ \hline 0,0153 \end{array}$

Чтобы *разделить десятичную дробь на натуральное число*, надо выполнить деление, не обращая внимания на запятую, но после окончания деления целой части делимого нужно в частном поставить запятую.

Примеры. 1) $\begin{array}{r|l} -\,42,84 & 12 \\ \cline{2-2} 36 & 3,57 \\ \cline{1-1} -\,68 & \\ 60 & \\ \cline{1-1} -\,84 & \\ 84 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$ 2) $\begin{array}{r|l} -\,0,024 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 0,0048 \\ \cline{1-1} -\,40 & \\ 40 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$

Чтобы *разделить десятичную дробь на десятичную*, нужно в делимом и делителе перенести запятую на столько цифр вправо, сколько их стоит после запятой в делителе, а затем выполнить деление на натуральное число.

Пример. $12,1088 : 2,56 = 1210,88 : 256 = 4,73$.

Обычные дроби

Частное от деления числа a на число b можно записать в виде *обычной дроби* $\frac{a}{b}$, где a – *числитель дроби*, b – ее *знаменатель*.

Основное свойство дроби: значение дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же натуральное число.

Примеры. 1) $\frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$ (сократили дробь $\frac{15}{20}$ на 5);

2) $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$ (привели дробь $\frac{3}{7}$ к знаменателю 14).

Дроби с одинаковыми знаменателями складывают и вычитают по формулам:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{и} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Примеры. 1) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$; 2) $\frac{17}{19} - \frac{3}{19} = \frac{14}{19}$;

3) $2\frac{1}{5} + 7\frac{3}{5} = 9\frac{4}{5}$; 4) $7\frac{5}{11} - 2\frac{2}{11} = 5\frac{3}{11}$.

Чтобы *сложить или вычесть дроби с разными знаменателями,* их сначала приводят к общему знаменателю, а затем выполняют действие по правилу сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Примеры. 1) ${}^{5/}\frac{1}{6} + {}^{3/}\frac{3}{10} = \frac{5+9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$;

2) ${}^{3/}\frac{7}{8} - {}^{2/}\frac{5}{12} = \frac{21-10}{24} = \frac{11}{24}$.

На следующих примерах показано, как выполнить *сложение и вычитание смешанных чисел*.

Примеры. 1) $5\,{}^{4/}\frac{1}{3} + 2\,{}^{3/}\frac{3}{4} = 7\frac{4+9}{12} = 7\frac{13}{12} = 8\frac{1}{12}$;

2) $7\,{}^{4/}\frac{4}{5} - 6\,{}^{5/}\frac{3}{4} = 1\frac{16-15}{20} = 1\frac{1}{20}$;

3) $5\,{}^{2/}\frac{4}{9} - 2\,{}^{3/}\frac{5}{6} = 3\frac{8}{18} - \frac{15}{18} = 2\frac{26-15}{18} = 2\frac{11}{18}$.

Чтобы *умножить две дроби*, нужно перемножить их числители и их знаменатели и первый результат записать числителем произведения, а второй – знаменателем:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

П р и м е р ы. 1) $\frac{5}{8} \cdot \frac{14}{15} = \frac{{}^{1}\cancel{5} \cdot \cancel{14}^{7}}{{}_{4}\cancel{8} \cdot \cancel{15}_{3}} = \frac{7}{12};$

2) $7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5};$

3) $2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{30}{7} = \frac{{}^{1}\cancel{7} \cdot \cancel{30}^{10}}{{}_{1}\cancel{3} \cdot \cancel{7}_{1}} = \frac{10}{1} = 10.$

Чтобы *разделить одну дробь на другую,* нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

П р и м е р ы. 1) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15};$

2) $2\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{7}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{{}_{1}\cancel{2} \cdot 7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}.$

Положительные и отрицательные числа

Модулем числа называют расстояние от начала отсчета до точки, изображающей это число на координатной прямой.

Модуль положительного числа и числа нуль – само это число, а модуль отрицательного – противоположное ему число:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

П р и м е р ы. $|3| = 3;$ $|-2| = 2;$ $|0| = 0;$ $|\pi| = \pi;$ $\left|-2\frac{1}{7}\right| = 2\frac{1}{7}.$

Чтобы *сложить два отрицательных числа*, нужно сложить их модули и перед полученным результатом записать знак «–».

П р и м е р. $-3 + (-7) = -10.$

Чтобы *сложить два числа с разными знаками*, нужно из большего модуля слагаемых вычесть меньший модуль и перед полученным результатом записать знак слагаемого с большим модулем.

П р и м е р ы. 1) $-5 + 5 = 0;$ 2) $7 + (-3) = 4;$
3) $-9 + 5 = -4.$

Чтобы *из одного числа вычесть другое*, нужно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому:

$$a - b = a + (-b).$$

П р и м е р ы. 1) $5 - 11 = 5 + (-11) = -6$;
2) $-3 - 7 = -3 + (-7) = -10$;
3) $-5 - (-9) = -5 + 9 = 4$;
4) $4 - (-7) = 4 + 7 = 11$.

Произведение двух чисел с одинаковыми знаками равно произведению их модулей. *Произведение двух чисел с разными знаками* равно произведению их модулей, взятому со знаком «–».

П р и м е р ы. 1) $-2 \cdot (-7) = 14$; 2) $4 \cdot (-2) = -8$.

Частное двух чисел с одинаковыми знаками равно частному от деления их модулей. *Частное двух чисел с разными знаками* равно частному от деления их модулей, взятому со знаком «–».

П р и м е р ы. 1) $-18 : (-3) = 6$; 2) $4 : (-1) = -4$;
3) $-20 : 4 = -5$.

Уравнение

Корнем, или *решением*, *уравнения* называют число, обращающее уравнение в правильное числовое равенство.

П р и м е р ы. 1) Число 3 является корнем уравнения $2x - 5 = 1$, так как $2 \cdot 3 - 5 = 1$.

2) Число -2 не является корнем уравнения $3x + 7 = 0$, так как $3 \cdot (-2) + 7 = 1 \neq 0$.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Два уравнения называют *равносильными*, если они имеют одни и те же корни. Равносильными считают и уравнения, не имеющие корней.

П р и м е р ы. 1) Уравнения $4x = 8$ и $x + 3 = 5$ – равносильны, так как каждое из них имеет единственный корень, равный 2.

2) Уравнения $7 - x = 6$ и $10x = 20$ не являются равносильными, так как корень первого – число 1, а второго – число 2.

Для решения *уравнений* используют следующие *свойства*:

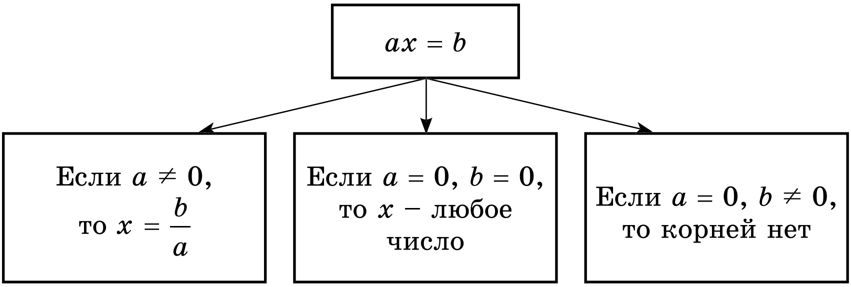
1) если в любой части уравнения раскрыть скобки или привести подобные слагаемые, получим уравнение, равносильное данному;

2) если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак на противоположный, получим уравнение, равносильное данному;

3) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, получим уравнение, равносильное данному.

Уравнение вида $ax = b$, где a и b – числа, x – переменная, называют *линейным уравнением с одной переменной*.

Решение линейного уравнения представим в виде схемы:



Примеры. 1) $-0{,}5x = 14$;
$x = 14 : (-0{,}5)$;
$x = -28$.

2) $0x = 5$;
уравнение корней не имеет.

В большинстве случаев уравнения последовательными преобразованиями приводят к линейному уравнению, равносильному данному.

Примеры. 1) $5(x + 2) - 4x = -3(x + 7)$.

Раскроем скобки: $5x + 10 - 4x = -3x - 21$.

Перенесем слагаемые, содержащие переменную, в левую часть уравнения, остальные – в правую, изменив знаки переносимых слагаемых на противоположные: $5x - 4x + 3x = -21 - 10$;

приведем подобные слагаемые: $4x = -31$;

решим полученное линейное уравнение: $x = -31 : 4$;

$x = -7{,}75$.

Ответ. $-7{,}75$.

2) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{5-x}{3} = \dfrac{x+13}{6}$.

Умножим обе части уравнения на наименьшее общее кратное знаменателей дробей – число 6:

$\dfrac{6(x+1)}{2} + \dfrac{6(5-x)}{3} = \dfrac{6(x+13)}{6}$;

$3(x + 1) + 2(5 - x) = x + 13$.

Дальше решаем, как в предыдущем примере:

$3x + 3 + 10 - 2x = x + 13$;

$3x - 2x - x = 13 - 3 - 10$;

$0x = 0$;

x – любое число.

Ответ. Любое число.

Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n называют произведение n множителей, каждый из которых равен a. *Степенью числа a* с показателем 1 называют само это число.

Примеры. 1) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$;

2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$;

3) $1{,}8^1 = 1{,}8$;

4) $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$.

Свойства степени с натуральным показателем

$a^m a^n = a^{m+n}$, $\qquad a^{m+n} = a^m a^n$,

$a^m : a^n = a^{m-n}$, $\qquad a^{m-n} = a^m : a^n$,

$(a^m)^n = a^{mn}$, $\qquad a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$,

$(ab)^n = a^n b^n$, $\qquad a^n b^n = (ab)^n$.

Примеры. 1) $a^7 a^8 = a^{7+8} = a^{15}$;

2) $m^5 : m = m^{5-1} = m^4$;

3) $(b^5)^{10} = b^{5 \cdot 10} = b^{50}$.

Используя свойства степени с натуральным показателем, можем существенно упростить вычисления.

Примеры. 1) $127^5 : 127^4 = 127^{5-4} = 127^1 = 127$;

2) $(2^3)^8 : 4^{10} = 2^{3 \cdot 8} : (2^2)^{10} = 2^{24} : 2^{20} = 2^{24-20} = 2^4 = 16$;

3) $\frac{3^5 \cdot 9^2}{27^2} = \frac{3^5 \cdot (3^2)^2}{(3^3)^2} = \frac{3^5 \cdot 3^4}{3^6} = 3^{5+4-6} = 3^3 = 27$;

4) $5^{12} \cdot 0{,}2^{12} = (5 \cdot 0{,}2)^{12} = 1^{12} = 1$;

5) $2^9 \cdot 0{,}5^8 = 2 \cdot 2^8 \cdot 0{,}5^8 = 2 \cdot (2 \cdot 0{,}5)^8 = 2 \cdot 1^8 = 2 \cdot 1 = 2$.

Одночлен

Целые выражения – числа, переменные, их степени и произведения называют *одночленами*.

Например 7; $-\frac{9}{13}b^2c$; $7a^5m^3$ – одночлены;

выражения $m + c^2$, $p^3 - 2a + 3b$; $\frac{a+b}{a-b}$ – не одночлены.

Если одночлен содержит только один числовой множитель, записанный первым, и содержит степени разных переменных, то такой одночлен называют *одночленом стандартного вида*.

Например, $2a^2b$ – одночлен стандартного вида, а одночлен $2a^2b \cdot (-3ab^7)$ не является одночленом стандартного вида.

Этот одночлен можно привести к одночлену стандартного вида:

$$2a^2b \cdot (-3ab^7) = 2 \cdot (-3) \cdot (a^2a) \cdot (bb^7) = -6a^3b^8.$$

Умножение одночленов

Примеры.

1) $-2x^2y^7 \cdot 5x = -2 \cdot 5 \cdot (x^2x) \cdot y^7 = -10x^3y^7$;

2) $\frac{1}{3}p^3c^8 \cdot \left(-\frac{2}{7}p^4m^2\right) \cdot 1\frac{1}{6}c^3m =$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{7}{6}(p^3p^4) \cdot (c^8c^3) \cdot (m^2m) = -\frac{1}{9}p^7c^{11}m^3$.

Возведение одночлена в степень

Примеры. 1) $(-2m^3n^4)^3 = (-2)^3 \cdot (m^3)^3 \cdot (n^4)^3 = -8m^9n^{12}$;

2) $(-c^5d^8)^6 = (-1)^6 \cdot (c^5)^6 \cdot (d^8)^6 = c^{30}d^{48}$.

Многочлен

Многочленом называют сумму одночленов. Многочлен, являющийся суммой одночленов стандартного вида, среди которых нет подобных слагаемых, называют *многочленом стандартного вида*.

Многочлен $3m^2n - 5mn^2 + 7m^2n + mn^2$ не является многочленом стандартного вида, но его можно привести к стандартному виду:

$$\underline{3m^2n} - \underline{\underline{5mn^2}} + \underline{7m^2n} + \underline{\underline{mn^2}} = 10m^2n - 4mn^2.$$

Сложение и вычитание многочленов

Примеры. 1) $(2x^2 + 3x - 5) + (x^2 - 3x) = \underline{\underline{2x^2}} + \underline{3x} - 5 + \underline{\underline{x^2}} - \underline{3x} = 3x^2 - 5$;

2) $(3a^2 - 5 + 2a) - (2a^2 + 7 - 3a) = \underline{3a^2} - 5 + \underline{\underline{2a}} - \underline{2a^2} - 7 + \underline{\underline{3a}} = a^2 + 5a - 12$.

Умножение одночлена на многочлен

Примеры. 1) $3a(a^3 - 2a + 7) = 3a \cdot a^3 + 3a \cdot (-2a) + 3a \cdot 7 = 3a^4 - 6a^2 + 21a$;

2) $-2xy(3x^2 - 5xy + y^2) = -2xy \cdot 3x^2 - 2xy \cdot (-5xy) - 2xy \cdot y^2 = -6x^3y + 10x^2y^2 - 2xy^3$.

Умножение многочлена на многочлен

$$\boldsymbol{(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.}$$

Примеры. 1) $(3x - 5)(x + 2) = 3x^2 + 6x - 5x - 10 = 3x^2 + x - 10$;

2) $(2a - b)(a^2 - 3ab + b^2) = 2a^3 - 6a^2b + 2ab^2 - ba^2 + 3ab^2 - b^3 = 2a^3 - 7a^2b + 5ab^2 - b^3$.

Формулы сокращенного умножения

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$,
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$,
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

Примеры. 1) $(x - 5)(x + 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$;

2) $(2m + 3)^2 = (2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot 3 + 3^2 = 4m^2 + 12m + 9$;

3) $(5x^2 - 2xy)^2 = (5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot 2xy + (2xy)^2 = 25x^4 - 20x^3y + 4x^2y^2$;

4) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) = (a - 3)(a^2 + 3a + 3^2) = a^3 - 3^3 = a^3 - 27$;

5) $\left(\frac{1}{2}b + c^2\right)\left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}bc^2 + c^4\right) = \left(\frac{1}{2}b + c^2\right) \times$

$\times \left(\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{2}b \cdot c^2 + (c^2)^2\right) = \left(\frac{1}{2}b\right)^3 + (c^2)^3 = \frac{1}{8}b^3 + c^6$.

Разложение многочленов на множители

Вынесение общего множителя за скобки

$$\underline{a}b + \underline{a}c = \underline{a}(b + c).$$

Примеры. 1) $12x^2 + 15x = \underline{3x} \cdot 4x + \underline{3x} \cdot 5 = \underline{3x}\,(4x + 5)$;

2) $25a^3b - 20a^2b^2 = \underline{5a^2b} \cdot 5a - \underline{5a^2b} \cdot 4b = \underline{5a^2b}(5a - 4b)$.

Способ группировки

$$ax + ay + bx + by = a(\underline{x + y}) + b(\underline{x + y}) = (x + y)(a + b).$$

Примеры. 1) $ab - 5a + 2b - 10 = (ab - 5a) + (2b - 10) = a(\underline{b - 5}) + 2(\underline{b - 5}) = (b - 5)(a + 2)$;

2) $a^2b + c^2 - abc - ac = (a^2b - abc) + (c^2 - ac) = ab(a - c) - c(a - c) = (a - c)(ab - c)$.

Использование формул сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$,
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

П р и м е р ы.

1) $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7)$;

2) $m^2 + 10m + 25 = m^2 + 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2 = (m + 5)^2$;

3) $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = (2a - 3b)^2$;

4) $c^3 - 64 = c^3 - 4^3 = (c - 4)(c^2 + c \cdot 4 + 4^2) =$
$= (c - 4)(c^2 + 4c + 16)$;

5) $\frac{1}{8}x^6 + y^9 = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 + (y^3)^3 =$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + y^3\right)\left(\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot y^3 + (y^3)^2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + y^3\right)\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^3 + y^6\right).$$

Функция

Если каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной, то такую зависимость называют *функциональной зависимостью*, или *функцией*.

Переменную x в этом случае называют *независимой переменной* (или *аргументом*), а переменную y – *зависимой переменной* (или *функцией* от заданного аргумента).

Все значения, которые принимает независимая переменная (аргумент), образуют *область определения функции*; все значения, которые принимает зависимая переменная (функция), образуют *область значений функции*.

Линейной называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + l$, где x – независимая переменная, k и l – некоторые числа.

Графиком любой линейной функции является прямая. Для построения графика линейной функции достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки на координатной плоскости и провести через них прямую.

П р и м е р. Построим график функции $y = -3x + 4$.

Составим таблицу для любых двух значений аргумента:

x	0	3
y	4	-5

Отметим на координатной плоскости полученные точки и проведем через них прямую (рис. 20).

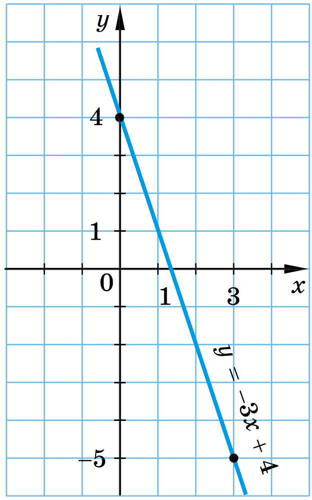


Рис. 20

Пример. Построим график функции $y = -2$. Любому значению x соответствует одно и то же значение y, равное числу -2. Графиком функции является прямая, состоящая из точек с координатами $(x; -2)$, где x – любое число. Обозначим две любые такие точки, например $(3; -2)$ и $(-4; -2)$, и проведем через них прямую (рис. 21).

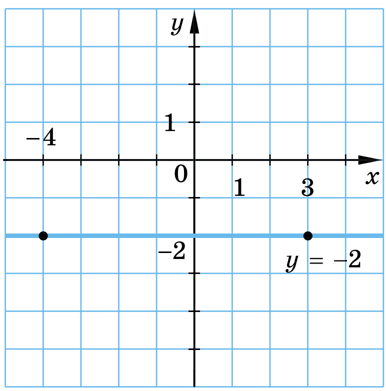


Рис. 21

Системы линейных уравнений с двумя переменными

Если нужно найти общее решение двух (или более) уравнений, то говорят, что эти уравнения образуют *систему уравнений*.

Пример. $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x - 3y = 5 \end{cases}$ – система уравнений с двумя неизвестными x и y.

Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, при которых каждое уравнение обращается в верное числовое равенство.

Пара чисел $x = 2$; $y = -1$ является решением данной выше системы, поскольку $2 \cdot 2 + (-1) = 3$ и $2 - 3 \cdot (-1) = 5$.

Пара чисел $x = 5$; $y = -7$ не является решением системы. Для этих значений переменных первое уравнение обращается в верное равенство ($2 \cdot 5 + (-7) = 3$), а второе – нет ($5 - 3 \cdot (-7) = 26 \neq 5$).

Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки

Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - 7y = 1, \\ 4x + 9y = 38. \end{cases}$

1.	Выражаем одну переменную через другую из какого-нибудь одного уравнения системы	$3x = 1 + 7y$, $x = \dfrac{1 + 7y}{3}$
2.	В другое уравнение системы подставляем вместо этой переменной получившееся выражение	$4 \cdot \dfrac{1 + 7y}{3} + 9y = 38$
3.	Решаем полученное уравнение с одной переменной	$4(1 + 7y) + 3 \cdot 9y = 3 \cdot 38$, $4 + 28y + 27y = 114$, $55y = 110$, $y = 2$
4.	Находим соответствующее значение второй переменной	$x = \dfrac{1 + 7 \cdot 2}{3}$, $x = 5$
5.	Записываем ответ	(5; 2)

Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения

Решить систему уравнений $\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19. \end{cases}$

1.	Множим (если необходимо) обе части одного или обоих уравнений системы на такие числа, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами	$\begin{cases} 7x - 4y = 2, & \vert \times 3 \\ 5x + 3y = 19; & \vert \times 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76 \end{cases}$
2.	Складываем почленно левые и правые части уравнений системы	$41x = 82$
3.	Решаем полученное уравнение с одной переменной	$x = 2$
4.	Подставляем найденное значение переменной в одно из уравнений системы (лучше исходной) и находим соответствующее значение второй переменной	$7 \cdot 2 - 4y = 2,$ $-4y = -12,$ $y = 3$
5.	Записываем ответ	(2; 3)

УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

1. Представьте в виде степени выражение:

1) $a^3 \cdot a^5$;
2) $x^5 : x^3$;
3) $(p^3)^7$;
4) $(-a^2)^3$;
5) $(t^3)^2 : t^5$;
6) $(a^7)^3 \cdot (a^3)^5$.

2. Представьте в виде многочлена:

1) $4m^2(m - 3)$;
2) $-0{,}4ab(5a + 10ab)$;
3) $7a(a^2 - 2a + 3)$;
4) $(a + 5)(a - 7)$;
5) $(3x - 1)(2x + 7)$;
6) $(a - 1)(a^2 - 2a - 1)$.

3. Упростите выражение:

1) $(4x^2 - 3x - 7) - (2x^2 - 3x + 1)$;
2) $2x(3x - 7) - 3x(2x + 1)$;
3) $(a - 2b)^2 + (a + 2b)^2$;
4) $(7x - 4m)(7x + 4m) - (7x - 4m)^2$;
5) $(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x^2 - 1)$;
6) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - (x - 1)(x^2 + 2)$.

4. Представьте многочлен в виде произведения:

1) $4a - 8$;
2) $3m^2 - 9m$;
3) $12a^2b + 16ab^3$;
4) $4x^2 - 25$;
5) $9m^4 - 36p^8$;
6) $p^2 - 10p + 25$;
7) $x^4 + 8x^2 + 16$;
8) $c^3 + 27$;
9) $p^6 - 1000$;
10) $ax - ay + 2x - 2y$.

5. Решите уравнение:

1) $-4x = -16$;
2) $2{,}5x = -20$;
3) $2x + (x - 3) = 12$;
4) $(4x - 2) - (7x - 3) = 9$;
5) $\dfrac{x + 1}{3} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x - 2}{6}$;
6) $4(x - 1) + 3(x + 2) = 7(x + 3)$;
7) $2(x + 1) + 3(x - 3) = 5x - 7$;
8) $(2x + 1)(x - 1) - (x + 1)(2x - 1) = 24$.

6. Решите систему уравнений графически:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ 3y - x = 7. \end{cases}$

7. Решите систему уравнений способом подстановки:

1) $\begin{cases} x + 2y = -5, \\ 3x - 2y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 3y = 8, \\ 5x - y = -9. \end{cases}$

8. Решите систему уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ 5x + 2y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 3y = 3, \\ 5x - 6y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x + 7y = -19, \\ 2x - 3y = 4. \end{cases}$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 1

7. 7) x – любое число; 8) $m \neq 0$. **11.** 3) $-1{,}92$; 4) $-41{,}2$. **13.** 2) $x = -3$; 3) $x = 1$ и $x = -7$; 4) нет таких значений x. **14.** 2) $y = -1$; 3) $y = -2$ и $y = 3$; 4) нет таких значений y. **15.** 1) $a \neq 1$; $a \neq -3{,}5$; 2) $t \neq 0$; $t \neq 7$; 3) $m \neq 5$; $m \neq -5$; 4) $x \neq 9$. **16.** 1) $p \neq 9$; $p \neq -2{,}5$; 2) $a \neq 0$; $a \neq 5$; 3) $c \neq 2$; $c \neq -2$; 4) $a \neq -1$. **18.** 1) $a \neq 2$; $a \neq 3$; 2) $x \neq 1$; $x \neq -1$; 3) $m \neq 0$; $m \neq 1$; 4) $k \neq 6$; $k \neq -2$. **19.** 1) $x \neq -2$; $x \neq 4$; 2) $m \neq 4$; $m \neq -4$; 3) $x \neq 0$; $x \neq -1$; 4) $a \neq 1$; $a \neq -5$. **29.** 108. **43.** 1) $-\dfrac{1}{m}$; 2) $-\dfrac{3m}{2n}$; 3) $m + 3$; 4) $\dfrac{5}{a-2}$; 5) $\dfrac{3+n}{7}$; 6) $\dfrac{m+n}{m-n}$. **44.** 4) $\dfrac{m-n}{5-a}$. **45.** 3) $\dfrac{9x+9y}{x^2-y^2}$; 4) $\dfrac{4k^2+4k+4}{k^3-1}$; 5) $-\dfrac{a}{b-a}$; 6) $-\dfrac{p^2+2p}{4-p^2}$. **47.** -10. **51.** 1) $\dfrac{1}{6}$; 2) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$; 3) $\dfrac{9(b-3c)}{5}$. **52.** 1) 2; 2) $\dfrac{(a-b)(a^2+b^2)}{a^2-ab+b^2}$; 3) $\dfrac{1}{8(3m+n)}$.
53. 1) График – прямая $y = \dfrac{x}{6}$ с «выколотой» точкой $(-6; -1)$; 2) график – прямая $y = 2 - x$ с «выколотой» точкой $(2; 0)$. **54.** 1) $y = -\dfrac{x}{5}$ с «выколотой» точкой $(5; -1)$; 2) $y = 3 + x$ с «выколотой» точкой $(-3; 0)$. **59.** Указание. Рассмотрите сумму $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_7 - b_7)$.
73. 1) $\dfrac{m-2}{m+2}$; 2) $\dfrac{3}{c}$. **74.** 1) $\dfrac{a-3}{a+3}$; 2) $\dfrac{2}{m}$. **76.** 1) 15; 2) 2015. **77.** 1) -2; 2) 198. **78.** 3) $x - \dfrac{3}{x+5}$; 4) $4 + \dfrac{7}{a-b}$. **79.** 3) $y + \dfrac{2}{y+1}$; 4) $5 - \dfrac{1}{p-q}$. **80.** 1) $\dfrac{1}{m-2}$; 2) $\dfrac{3}{a-2}$; 3) $\dfrac{m}{n-3}$. **81.** 1) $\dfrac{1}{3-a}$; 2) $\dfrac{5}{m-3}$; 3) $\dfrac{p}{q-4}$. **83.** $\dfrac{x-y-z}{x+y+z}$. **86.** 12 ч. **112.** 1) $\dfrac{4}{ab}$; 2) $\dfrac{m+x}{x}$; 3) $\dfrac{1}{x(x-2)}$; 4) $\dfrac{b^2+3ab+9a^2}{ab}$. **113.** 1) $-\dfrac{2}{ab}$; 2) $\dfrac{t-a}{a}$; 3) $\dfrac{2}{a(a-3)}$; 4) $\dfrac{n^2+2mn+4m^2}{mn}$. **115.** 1) $-\dfrac{2n^2}{m+n}$; 2) $\dfrac{p^2-4p}{p-2}$; 3) $\dfrac{1}{1-a^2}$;

4) $\frac{10p+3}{2p-3}$. **118.** 1) $\frac{1}{x+1}$; 2) $\frac{5}{m-5}$; 3) $\frac{m-6}{6m}$; 4) $\frac{1}{2(a-3)}$. **123.** 1) $\frac{2x^3}{(x-y)(x+y)^2}$; 2) $\frac{16}{(x-2)^2(x+2)^2}$. **124.** $a = 8$. **125.** Указание. После упрощения получим $a^2 + 4$. **127.** График функции – прямая $y = 4$ с «выколотой» точкой (2; 4). **128.** –8. Указание. После упрощения получим $-\frac{8}{6a+b}$. **129.** 5. Указание. После упрощения получим $-\frac{5}{5x+y}$. **130.** Нет. Указание. После упрощения получим $-\frac{1}{2x}$. **133.** 1) 4; 2) 2; 3) 10; 4) 5. **136.** 5. **153.** 1) $\frac{(m-2)(m-3)}{3(m+3)}$; 2) $\frac{(x-5)(x+3)}{x+5}$. **154.** 1) $\frac{7(a+4)}{(a-1)(a-4)}$; 2) $\frac{(y-2)(y-3)}{y+3}$. **157.** 1) $\frac{y}{2}$; 2) $\frac{x+y}{x-y}$. **158.** 1) $\frac{n^2}{2}$; 2) $\frac{m-n}{m+n}$. **159.** 1) 0; 2) 9,6. **160.** 1) $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2$; 2) $\frac{5(c-y-1)}{3(a+b+1)}$. **161.** 0. **166.** 4; 10. **177.** 1) $\frac{3c}{4ab}$; 2) $\frac{a}{c^3}$; 3) $\frac{c^4}{3}$; 4) $\frac{b}{2a^5}$. **178.** 1) $\frac{2a}{c^6}$; 2) $\frac{3x}{y}$. **179.** 1) $\frac{2a+1}{2a-3}$; 2) $\frac{1}{2-x}$; 3) $\frac{7(y-5x)}{y}$; 4) $1\frac{1}{3}$. **180.** 1) 1; 2) –5. **181.** 1) 0,1; 2) 5,032. **182.** $\frac{a-8}{a-5}$. **184.** $\frac{2a-3}{a-6}$. **185.** $\frac{c+y}{b-2}$. **187.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 0. **189.** 30. **190.** 1) 4; 2) $\frac{n}{x+3}$; 3) $\frac{2a}{2a+b}$; 4) $\frac{xy}{x+y}$. **191.** 1) 2; 2) $\frac{a}{3-b}$; 3) $\frac{2x}{3x-y}$; 4) $\frac{mn}{n-m}$. **192.** 1) $\frac{x+7}{7x}$; 2) $\frac{3n+m}{3n-m}$; 3) $-3a - 5$; 4) $\frac{5x}{3}$. **193.** 1) $\frac{m-5}{5m}$; 2) $\frac{y-x}{y+x}$; 3) $7 - 2b$; 4) $\frac{m}{2}$. **196.** 1) –2; 2) $\frac{a-3}{2(a+3)}$. **197.** 1) 2; 2) $\frac{a-2}{a+2}$. **198.** 1) 3; 2) 4. **199.** 1) 2; 2) 2. **202.** 1) $-\frac{1}{1+a}$; 2) 4. **203.** 1) $\frac{1}{2-a}$; 2) 2. **207.** 3) $\frac{2x^6+2y^6}{x^4y^4}$; 4) $\frac{4a^2-4b^2}{ab}$. Указание. Сначала раскрыть квадраты суммы и разности.

208. 2) $\frac{4m}{n^2}$. **209.** 1) $\frac{x-1}{x+1}$; 2) 1; 3) p; 4) $3-c$; 5) $\frac{x+1}{x-1}$; 6) $\frac{m}{n}$. **210.** 1) $\frac{m+4}{m-4}$; 2) 1; 3) t; 4) $\frac{1}{x-1}$; 5) $\frac{2+m}{2-m}$; 6) $\frac{x}{2}$. **211.** Указание. Значение выражения равно 2. **212.** 1. **213.** 51. **214.** 7. **215.** 1) $\frac{2x-1}{2x(2x+1)}$; 2) $\frac{1}{2}$. **217.** Указание. Значение выражения равно $\frac{1}{(m+1)^2}$. **218.** 1) $1-x^2-x$; 2) $\frac{m^3}{m^3-m+1}$. **219.** 1) x^2+2x+1; 2) $\frac{n^2}{n^3-n+1}$. **227.** 11. **241.** $\frac{10}{15}$. **242.** $\frac{3}{15}$. **243.** 2. **244.** 3. **245.** 1) 2; 2) 3; 3) −5; 4) 9. **246.** 1) 1; 2) −2; 3) 2; 4) −3. **247.** Нет, корень первого уравнения 3, а второго – 0. **248.** Нет, корень первого уравнения 4, а второго – 0. **249.** $\frac{4}{9}$. **250.** $\frac{2}{5}$. **251.** 1) −4; 2) уравнение не имеет решений. **252.** 1) −4; 2) уравнение не имеет решений. **253.** 1) −4; 2) уравнение не имеет решений. **254.** 1) −1; 2) уравнение не имеет решений. **255.** 1) $a=0$; $a=4$; 2) $a=1$; $a=4$. **256.** $a=3$; $a=1$. **257.** $\frac{10(x-2)}{x}$; 9,8. **258.** $\frac{2a-b}{2a+b}$. **276.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) −1,5; 4) −11; 5) 0,5; 6) $\frac{35}{192}$; 7) 1,4; 8) $-\frac{3}{64}$; 9) $2\frac{33}{64}$; 10) 0,064; 11) 14; 12) $\frac{88}{125}$. **277.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $-1\frac{1}{3}$; 3) 19; 4) −699; 5) $-\frac{3}{50}$; 6) $\frac{7}{8}$; 7) $\frac{5}{16}$; 8) $-\frac{29}{216}$. **279.** 1) $a^n>0$; 2) $a^n>0$; 3) $a^n<0$. **281.** 1) $\frac{m^2n^2a^4}{cx^3p^3}$; 2) $\frac{25x^3mb^2}{a}$. **282.** 1) $3x^2p^{-1}$; 2) $15mn^{-2}c^{-3}$; 3) $2xb^{-5}(a-b)^{-2}$; 4) $(x+y)^7(x-y)^{-3}$. **284.** 3) $\frac{(mn+1)^2}{mn}$; 4) $\frac{ab}{b-a}$. **285.** 2) $\frac{y+x}{xy}$. **286.** 1) $\frac{24}{49}$; 2) $5\frac{11}{49}$. **287.** $4\frac{2}{5}$. **288.** $\frac{3x^2-1}{x^2}$. **290.** 10 грн у Даши; 14 грн у Маши. **294.** Цифры 3 и 2; 5,11 долларов. **312.** 1) $(4m^{-1})^3$; 2) $(0{,}1p^{-4})^2$; 3) $(0{,}05c^{-4}p^6)^2$; 4) $\left(\frac{3}{2}c^3x^{-5}\right)^4$. **313.** 1) 625; 2) $\frac{1}{10}$;

3) 3; 4) 49. **314.** 1) 16; 2) $\frac{1}{4}$. **315.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) 49; 5) $-\frac{1}{6}$; 6) 2. **316.** 1) 4; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) 36; 5) $\frac{1}{100}$; 6) $\frac{1}{25}$. **317.** 1) $7a^5b^{-2}$; 2) $-2x^{-18}y^3$. **318.** 1) $\frac{a^3}{2b^3}$; 2) $-\frac{2a^5}{5x^8}$. **319.** 1) $7m^2n^{-2}$; 2) $-\frac{x^2}{3c^2}$. **322.** 1) 125; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{a^{2n}}{b^4}$. **323.** 1) 49; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{x^{6m}}{y^6}$. **324.** 1) $2\cdot 5^n$; 2) x^8; 3) $\frac{1}{m^2}$. **325.** 1) $\frac{6}{4^n}$; 2) x^8; 3) $\frac{1}{b^3}$. **327.** 6 грн, 8 грн. **330.** $x = 3$; $y = 3$. **354.** 31%. **355.** $\approx 1{,}3666\cdot 10^8$ с или 1582 суток. **358.** 1) –16; 2) –23; 3) –11; 4) –15. **359.** 1) 18; 2) 13; 3) 12; 4) 10. **360.** 1) 1; 2) 180. **361.** $a = -4$, $a = -1$. **365.** Да. **381.** $y = -\frac{48}{x}$. **382.** $y = \frac{14}{x}$. **383.** $2 \leqslant y \leqslant 8$. **384.** 1) 4; 2) –3; 3; 3) –1; 4. **385.** 1) 2; 2) –2; 2; 3) –1; 5. **389.** Указание. 1) После упрощений получим $y = \frac{2}{x}$; 2) график – гипербола $y = -\frac{6}{x}$ с «выколотой» точкой (3; –2). **392.** $\frac{1}{81}$. **393.** –1. **397.** –0,1. **398.** 1) x – любое число; 2) $m < 0$; 3) $a \neq 0$, $a \neq 1$; $a \neq -1$; 4) $x \neq 2$; $x \neq 5$. **399.** 1) 1; 2) нет таких значений x; 3) –2; 4) $0 < x < 3$ или $x > 3$. **404.** 1) 1; 2) 0. **407.** 2. **409.** $\frac{z - x - y}{x + y + z}$. **413.** 1) $\frac{3}{b+2}$; 2) $\frac{1}{m-1}$. **414.** $a = -3$. **415.** Указание. Значение выражения равно –3. **416.** 1) $\frac{4m-1}{4m+1}$; 2) $\frac{2x - 1 - 4x^2}{2x+1}$. **417.** Указание. После упрощения выражения будем иметь $\frac{1}{(x-2)^2}$. **418.** Указание. График функции – прямая $y = x + 1$ с «выколотой» точкой (1; 2). **419.** 1) 1; 2; 2) 1; 2; 3; 6; 3) 1; 16. **425.** Указание. Выражение тождественно равно 1. **426.** 1) 0; 2) $\frac{8}{3-2x}$; 3) $\frac{3x-2y}{xy}$; 4) $\frac{2a+1}{6(2a-1)}$; 5) $\frac{6(x+1)}{x^2+x+1}$; 6) $\frac{2a}{(1-3b)(a+2)}$. **429.** 1) $a = -24$; $b = -5$; 2) $a = 3$; $b = -6$. **430.** $\frac{2sv}{v^2-9}$; 8 ч. **436.** 1) $\frac{5xt^{10}}{3}$;

2) $a^2 - b^2$. **437.** $\frac{(x + b)(x - c)}{(x - a)^2}$. **438.** Указание. Значение выражения равно 1. **439.** Указание. Значение выражения равно $\left(\frac{a - b}{a + b}\right)^2$. **443.** 1) $\frac{1}{3 - x}$; 2) $\frac{2(5x - 2y)}{5(5x + 2y)}$. **444.** $\frac{a^2}{a^2 - 2a - 15}$. **445.** Указание. После упрощения выражения получим $-\frac{2(x + y)^2}{x^2}$. **446.** 0. **447.** Указание. $a^2 + 5a + 4 = a^2 + a + 4a + 4 = a(a + 1) + 4(a + 1) = (a + 1)(a + 4)$. **448.** 1) $\frac{3}{a}$; 2) $-\frac{3m}{m + 3}$; 3) $\frac{2}{a - b}$; 4) $p - 1$. **450.** 1) $\frac{1}{(a + b)^2}$; 2) $\frac{6}{a + 3}$. **451.** $1\frac{11}{14}$. **452.** Указание. 1) После упрощений получим 3; 2) после упрощений получим −1. **454.** 5 или −5. **455.** $\frac{1}{x^2 - 4}$. **456.** Указание. После упрощений получим $x^2 + 4$. **457.** Указание. После упрощений получим $\frac{1}{m + 5}$. **458.** Нет, так как после упрощений получим $\frac{1}{x}$. **461.** 2. **462.** 4) 0. **463.** 18 км/ч. **464.** 1) −0,5; 2) −2,5. **465.** 12 дней, 24 дня. **466.** 1) Если $a = 0$, уравнение не имеет решений; если $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{5}$; 2) если $a = b$, то уравнение не имеет решений; если $a \neq b$, то $x = \frac{a - b}{2}$. **472.** 1) $7^{-3} > (-7)^3$; 2) $(-1{,}2)^0 > (-5)^{-5}$; 3) $(-13)^{-4} > (-13)^4$; 4) $(-12)^6 > 12^{-6}$. **473.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) −0,16; 3) −10; 4) −99. **474.** 1) $\frac{a^2 - a + 1}{a^3(1 + a)}$; 2) −1. **475.** 1. **476.** $x = -3$. **477.** a^8b^8. **482.** 30. **485.** 1) $x(x^2 + 5x^{-1} + x^{-6})$; 2) $x^{-1}(x^4 + 5x + x^{-4})$; 3) $x^{-3}(x^6 + 5x^3 + x^{-2})$. **490.** $6{,}35 \cdot 10^4$ км². **491.** 1) $3{,}6 \cdot 10^3$ с; 2) $8{,}64 \cdot 10^4$ с; 3) $2{,}592 \cdot 10^6$ с; 4) $3{,}1536 \cdot 10^7$ с; 5) $3{,}15576 \cdot 10^9$ с. Указание. Учесть, что в любом веке 25 високосных лет и 75 − невисокосных. **495.** 1) Нет; 2) да. **498.** (2; 2) и (−2; −2). **499.** (3; −3) и (−3; 3).

Глава 2

510. 1) $0 \leqslant y \leqslant 9$; 2) $0 \leqslant y \leqslant 4$. **512.** 1) 0; 3; 2) -2. **513.** 1) 2; -2; 2) 0; 2. **514.** 1) График – парабола $y = x^2$ с «выколотой» точкой $(-1; 1)$; 2) график – парабола $y = x^2$ с «выколотыми» точками $(-2; 4)$ и $(2; 4)$. **515.** 1) График – парабола $y = x^2$ с «выколотой» точкой $(0; 0)$; 2) график – парабола $y = x^2$ с «выколотыми» точками $(-1; 1)$ и $(1; 1)$. **522.** $2n - 3$. **540.** 1) Нет; 2) да; 3) нет. **541.** 1) $x > 0$; 2) x – любое число; 3) $x \geqslant 0$; 4) $x < 0$. **542.** 1) $y \geqslant 0$; 2) $y > 0$; 3) y – любое число; 4) $y \leqslant 0$. **543.** 1) Корней нет; 2) 32; 3) 13; 4) 4,5. **544.** 1) 12; 2) уравнение не имеет решений; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 1. **545.** 1) $a = 0$; 2) $a = -3$; 3) a – любое число; 4) $0 \leqslant a < 3$ или $a > 3$. **546.** 1) 5; -4; 2) 16; 3) 49. **547.** 1) 11; -14; 2) 49. **548.** -1. **549.** 1) $x = 3$; $y = 0$; 2) $x = -2$; $y = -1$. **553.** Нет. **571.** $\frac{1}{2}$; 0,(1); 0,11; $\frac{1}{10}$; 0,01. **572.** 0,02; $\frac{1}{5}$; 0,22; 0,(2); $\frac{1}{4}$. **576.** 6,25 см; $9\frac{1}{9}$ дм. **577.** Указание. Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. Тогда $2n^2 = m^2$. **581.** 1) Второй; 2) первый. **596.** 1) 25; 2) -30; 3) 56; 4) 16,2; 5) 30; 6) 0. **597.** 1) 49; 2) -84; 3) 44; 4) $-2{,}1$; 5) 40; 6) $\frac{51}{65}$. **598.** 1) 8; -4; 2) -1; -5; 3) 1; 4) $-3 + \sqrt{7}$; $-3 - \sqrt{7}$; 5) $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{3}$; 6) уравнение не имеет решений. **599.** 1) 3; -5; 2) 7; -3; 3) -2; 4) $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$; 5) $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$; 6) уравнение не имеет решений. **601.** 1) 5; -5; 2) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **602.** 1) 8; -8; 2) $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$. **603.** 1) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 2) 2; -2; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{6}$. **604.** 1) $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; 2) 3; -3. **605.** 1) $b = 0$; 2) $b \geqslant 4$; 3) $b \geqslant 0$. **606.** 1) $m > 0$; 2) нет таких значений m; 3) $m \leqslant 0$. **607.** $\frac{x-3}{2x}$. **608.** 1) 8; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) $\frac{1}{5}$. **612.** 480 суток. **633.** 1) $15\frac{13}{32}$; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) 12; 4) 0,13. **634.** 1) $10\frac{34}{45}$; 2) $1\frac{1}{6}$; 3) 35; 4) 0,07. **635.** 1) 210; 2) 48; 3) 12,6; 4) 18; 5) 39;

6) 154. **636.** 1) 160; 2) 75; 3) 10,8; 4) 12; 5) 34; 6) 126. **637.** 1) 432; 2) 144; 3) 125; 4) 243. **638.** 1) 1; 2) 216. **639.** 1) 112; 2) 432. **640.** 1) $0{,}6x$; 2) $-11y$; 3) p; 4) $5x^2$; 5) $5a^3$; 6) $-\frac{5}{7}c^5$. **641.** 1) $0{,}7p$; 2) $-\frac{5}{8}m$; 3) $7b^4$; 4) $-0{,}1a^7$. **642.** 1) $-5mn^6$; 2) $-\frac{7}{13}m^7n^9$; 3) x^3y^4; 4) $-\frac{p^3m^6}{x^4}$; 5) $-2m^4p^{10}$; 6) $-x^4z$. **643.** 1) $8ab^4$; 2) $-\frac{1}{2}b^4c^6$; 3) $-\frac{x^4y^6}{z}$; 4) $3b^7$. **644.** 1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}$; 2) $\frac{\sqrt{-2x}}{\sqrt{-3y}}$. **645.** 1) $x-y$; 2) $n-m$; 3) $x-5$; 4) $6-a$; 5) 5; 6) -2. **646.** 1) $m-2$; 2) $-p-4$; 3) 1; 4) -3. **647.** 1) 4; 2) 1; 3) $9-2\sqrt{21}$; 4) $2+\sqrt{3}$. Указание. $7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3=(2+\sqrt{3})^2$. **648.** 1) -8; 2) $\sqrt{2}-1$. **656.** 96 грн. **679.** 1) $m\sqrt{13}$; 2) $b\sqrt{b}$; 3) $-a^3\sqrt{7}$; 4) $4x^3\sqrt{x}$. **680.** 1) $x\sqrt{11}$; 2) $c^2\sqrt{c}$; 3) $-p^5\sqrt{2}$; 4) $6m^5\sqrt{m}$. **681.** 1) $\sqrt{2a^2}$; 2) $-\sqrt{5b^6}$; 3) $\sqrt{3b}$; 4) $-\sqrt{-x^7}$. **682.** 1) $\sqrt{3b^2}$; 2) $-\sqrt{7c^{10}}$; 3) $\sqrt{5x^3}$; 4) $-\sqrt{-y^3}$. **683.** 1) 47; 2) $165+37\sqrt{6}$; 3) $36-12\sqrt{6}$. **684.** 1) $\sqrt{a}(1-\sqrt{3})$; 2) $\sqrt{p}(\sqrt{7}+2)$; 3) $\sqrt{7}(\sqrt{3}+1)$; 4) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$; 5) $\sqrt{2m}(\sqrt{2}-\sqrt{3m})$; 6) $\sqrt{5x}(\sqrt{x}-\sqrt{2})$. **685.** 1) $\sqrt{p}(1+\sqrt{2})$; 2) $\sqrt{6}(\sqrt{7}-1)$; 3) $\sqrt{3a}(\sqrt{3}+\sqrt{2a})$. **686.** 1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-6}$; 2) $\frac{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$; 3) $\sqrt{2{,}5}$. **687.** 1) $\frac{\sqrt{a}+5}{\sqrt{a}}$; 2) $\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt{5{,}5}$. **688.** 1) $3(\sqrt{6}+1)$; 2) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$. **689.** 1) $5(\sqrt{3}-1)$; 2) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{30}$. **690.** 1) 2; 2) 330; 3) 8; 4) 14. **691.** 1) 16; 2) 60; 3) 26; 4) 7. **692.** 1,5. **693.** 1) $m-1$; 2) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 3) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. **695.** $-\frac{1}{2}$. **696.** Указание. Воспользоваться тем, что квадрат натурального числа не может заканчиваться цифрой 7. **708.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}<\frac{1}{2}\sqrt{84}$; 2) $0{,}2\sqrt{1\frac{3}{8}}=0{,}4\sqrt{\frac{11}{32}}$. **709.** 1) $\frac{3}{4}\sqrt{48}=\frac{3}{5}\sqrt{75}$;

2) $0{,}3\sqrt{1\frac{4}{9}} > 0{,}2\sqrt{1\frac{3}{4}}$. **710.** 1) $0 \leqslant y \leqslant 2$; 2) $1 \leqslant y \leqslant 3$. **711.** 4. **712.** 1. **718.** 244,85. Указание. Обозначить $a = \frac{1}{1997}$; $b = \frac{3}{2000}$. **722.** 1) Увеличится в 9 раз; уменьшится в 81 раз. 2) Увеличится в 2 раза; уменьшится в 5 раз. **723.** 1) Нет; 2) да; 3) нет. **724.** (−2; 4), (3; 9). **729.** 1) 100; 2) 1. **730.** 1) 20; 2) 13,96. **731.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $x \geqslant 3$; 3) $x < -1$, $-1 < x \leqslant 0$; 4) $x = 0$. **732.** 1) Если $a = 0$, то $x \geqslant 0$; если $a \neq 0$, то $x = 0$; 2) если $a \leqslant 0$, то уравнение не имеет решений; если $a > 0$, то $x = \frac{1}{a^2}$; 3) если $a \leqslant 0$, то уравнение не имеет решений; если $a > 0$, то $x = \frac{25}{a^2} + 1$; 4) если $a = 0$, то x − любое число; если $a \neq 0$, то $x = 0$. **736.** 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) да. **739.** Указание. 1) Найти $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$. **744.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $3\sqrt{2}$; 4) 5. **746.** 9 или −9. **747.** 1) $m > 1$; 2) $m = 1$; 3) $m < 1$. **754.** 15 см или $6\frac{2}{3}$ см. **755.** 1) 600; 2) 0,09; 3) 360; 4) 648. **756.** 1) $p^2c^4a^6$; 2) $-7xy^3$; 3) $\frac{m^{10}}{n^{12}}$; 4) $\frac{a^5}{b^7}$. **757.** 1) 0,4; 2) 0,3; 3) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{13} - \sqrt{11}$. **758.** 1) $\frac{x-7}{x+2}$; 2) $\frac{p-2}{p+3}$. **762.** 1) $2x^4\sqrt{7x}$; 2) $\frac{m\sqrt{7m}}{6}$; 3) $-5ab^2\sqrt{b}$; 4) $2xy^5\sqrt{2x}$; 5) $-2p^3\sqrt{-2p}$; 6) $xy\sqrt{xy}$. **764.** 1) 24; 2) $\frac{\sqrt{6}}{12}$. **766.** 1) $-\frac{1}{2+\sqrt{2x}+x}$; 2) $\sqrt{x+y}+1$. **767.** $\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$. **768.** Указание. Обозначить $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} = x$ и найти x^2. **769.** 1) $\sqrt{3}$; 2) −1; 3) $\sqrt{7p^2}$; 4) $-\sqrt{\frac{3-b}{2}}$. **772.** 1) Да, (1; 1); 2) да, (64; 8); 3) да, (0; 0); 4) нет. **773.** 1) 3; $\sqrt{14}$; 4; $\sqrt{16{,}2}$; $\sqrt{19{,}1}$; 2) 0,2; $\frac{1}{4}$; $\sqrt{\frac{1}{11}}$; $\sqrt{0{,}1}$. **774.** 1) $x \geqslant 1$; 2) $0 \leqslant x < 4$; 3) $1 < x \leqslant 16$; 4) $81 \leqslant x < 10\,000$; 5) $x \geqslant 0$; 6) таких значений x нет.

Глава 3

789. $\frac{1}{9}$. **790.** -2. **791.** $a = 2$; $b = -6$. **792.** $b = -4$; $c = 3$. **793.** 1) 0; -1; 2) 0; -24; 3) -1; 1; 4) 0. **794.** 1) 0; 2; 2) 0; 24; 3) -1; 1; 4) 0. **795.** 0; $-4{,}5$; **796.** 0; -11. **797.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$ или $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\sqrt{2}}{2}+1$. **798.** $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}+2$ или $-\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}+2$. **799.** 1) 0; 5; -5; 2) 2. **800.** 1) 0; 3; -3; 2) 3. **806.** 9. **816.** 1) -1; 3; 2) 1; $-2{,}5$; 3) 5. **817.** 1) 1; -5; 2) -1; 4,5; 3) 2; $-0{,}4$. **818.** 1) 2; 6; 2) -1; $-\frac{1}{3}$; 3) 2; 4; 4) 3; -8. **819.** 1) -1; 2) 2; 2,6; 3) 4; 3; 4) 1; -6. **820.** 1) 1; $-0{,}6$; 2) -1; $\frac{1}{3}$. **821.** 1) -1; $6\frac{2}{3}$; 2) 1; $-3{,}5$. **822.** 1) $1 \pm \sqrt{15}$; 2) $-1 \pm \sqrt{5}$; 3) $15 \pm 5\sqrt{11}$; 4) $\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$. **823.** 1) $-1 \pm \sqrt{7}$; 2) $1 \pm 2\sqrt{3}$; 3) $-5 \pm 2\sqrt{10}$; 4) $\frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$. **824.** 1) 4; 1; 2) 4; -4; 3) 1; 4) 2. **825.** 1) 9; 3; 2) 3; -3; 3) 5; 4) 2. **826.** 1) $-\frac{1}{8}$; 2) -4; 4. **827.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) -6; 6. **829.** (0; -15), (75; 0). **830.** 1) -35; 2) 39. **833.** 1) Да; 2) нет. **843.** 1) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; 2) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 3) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 4) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. **844.** 1) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 2) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; 3) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; 4) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$. **845.** $x_2 = -2{,}5$; $q = 8{,}75$. **846.** $p = 4{,}5$; $x_2 = -6$. **847.** $x_1 = 5$; $x_2 = -2$; $p = -3$ или $x_1 = -5$; $x_2 = 2$; $p = 3$. **848.** $x_1 = 5$; $x_2 = -1$; $q = -5$. **849.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) 12; 3) 22; 4) $-7\frac{1}{3}$; 5) $2\frac{4}{9}$; 6) 28. **850.** 1) $-2{,}5$; 2) -10; 3) 29; 4) $-14{,}5$; 5) 7,25; 6) 33. **853.** 1) $3x^2 - 14x - 5 = 0$; 2) $24x^2 + 26x + 5 = 0$; 3) $x^2 - 5 = 0$; 4) $x^2 - 4x + 1 = 0$. **854.** 1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; 2) $16x^2 - 10x + 1 = 0$; 3) $x^2 - 7 = 0$; 4) $x^2 - 6x + 2 = 0$. **855.** $x^2 - 7x + 1 = 0$. **856.** $x^2 + 8x + 8 = 0$. **857.** 80 кг; 120 кг. **858.** $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. **861.** На 12 лет. **862.** 12 и 17. **863.** 12 и 15. **864.** 42 см. **865.** 80 м. **866.** 7 см и 10 см. **867.** 30 см. **868.** 48 см^2. **869.** 14 и 15. **870.** 70×70 см. **871.** 15 дм. **872.** 19, 20, 21 или -13, -12, -11. **873.** 18, 19, 20 или -18, -17, -16. **874.** 5 и 7. **875.** 16 км/ч и 12 км/ч. **876.** 10 см и 12 см. **877.** 1 см. **878.** 1,5 м. **879.** 10 участников.

880. 5. **881.** 1,8 с; 1,2 с. Указание. Исходя из начальных условий, сначала найти v_0. **882.** 0,7 с. **883.** 2,6 с; 3,4 с. **886.** $a = 0$ или $a = -2{,}25$. **907.** 1) $3 \pm \sqrt{30}$; 2) $\frac{-35 \pm 5\sqrt{17}}{2}$. **908.** 1) $-4 \pm 2\sqrt{19}$; 2) $\frac{15 \pm 9\sqrt{5}}{2}$. **909.** 1) $(x - 1 - 2\sqrt{3})(x - 1 + 2\sqrt{3})$; 2) разложить на множители нельзя; 3) $-2\left(x + \frac{3 + \sqrt{65}}{4}\right) \times$ $\times \left(x + \frac{3 - \sqrt{65}}{4}\right)$; 4) разложить на множители нельзя. **910.** 1) $(x + 2 - \sqrt{11})(x + 2 + \sqrt{11})$; 2) разложить на множители нельзя. **911.** 1) $\frac{4}{x - 2}$; 2) $\frac{x - 4}{x}$; 3) $\frac{2x - 1}{x - 3}$; 4) $\frac{x - 2}{x + 7}$; 5) $\frac{2x - 1}{3x - 1}$; 6) $\frac{5x - 2}{8 - 2x}$. **912.** 1) $\frac{x + 1}{x}$; 2) $\frac{x + 4}{3x + 2}$; 3) $\frac{x + 3}{x - 5}$; 4) $\frac{2(x + 1)}{3(x - 3)}$. **913.** 1) 1,93; 2) $4\frac{2}{3}$. **914.** 1) $\frac{4}{(x - 2)(x + 4)}$; 2) $\frac{1}{x + 2}$; 3) 1; 4) $\frac{(x - 2)(5 - x)}{2(x + 3)}$. **915.** 1) $\frac{1}{x - 5}$; 2) $\frac{1}{x - 2}$. **918.** 1) $x(x + 1)(x + 2)$; 2) $-2x(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ или $x(x + 3)(1 - 2x)$; 3) $\frac{1}{4}x^2(x - 1)(x + 5)$; 4) $-\frac{1}{2}x^3(x + 2)(x - 6)$. **919.** 1) $x(x - 4)(x - 8)$; 2) $\frac{1}{3}x^2(x - 9)(x - 3)$. **920.** 1) График – прямая $y = x + 2$ с «выколотой» точкой (1; 3); 2) график – прямая $y = x - 3$ с «выколотыми» точками (0; –3) и (–1; –4). **921.** 1) $\frac{x^2}{3x - 1}$; 2) $\frac{1}{4}$. **922.** 1) $\frac{x^2}{2x + 1}$; 2) 27. **923.** 1) $-0{,}4a^3x^7$; 2) $2mp^3\sqrt{2m}$. **924.** 1) 24; 2) 68; 3) 0,68; 4) 376. **929.** 3 : 2. **938.** 1) 9; –1; 2) 2; –9; 3) 5; –2; 4) –2; $1\frac{1}{3}$. **939.** 1) 4; –1; 2) 1; $-\frac{1}{2}$; 3) 1; 3; 4) 2; $-1\frac{1}{2}$. **940.** 1) 0; 2; –2; 2) 0; 3) 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 4) 0; 2; –3. **941.** 1) 0; 3; –3; 2) 0; 3) 0; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$; 4) 0; 3; –4. **942.** 1) 4; –5; 2) 1; 4. **943.** 1) 3;

-4; 2) 2; 6. **944.** 1) 1; -1; 3; 2) -6; 3) -7; 4) уравнение не имеет решений. **945.** 1) 1; 2) -3; 3) 7; 4) уравнение не имеет решений. **946.** 1) -6; 3; 2) -2; $-1\frac{2}{3}$; 3) -3; 4) -2. **947.** 1) -4; 3; 2) -2. **948.** 1) -1; $-5{,}5$; 2) -7; 3) -9; 4) уравнение не имеет решений. **949.** 1) 5; $-3{,}6$; 2) -1; 3) -15; 4) уравнение не имеет решений. **950.** 1) -3; 4; 2) 15. **951.** 1) 2; 3; -3; 2) -1; $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **952.** 1) 1; 2; -2; 2) -2; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **953.** 1) 1; -1; 2) -1; 2. **954.** 1) 1; -1; 2) 2; -3. **955.** 1) 0; 1,5; 2) $-2 \pm \sqrt{35}$. **956.** $\frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$. **957.** 1) 1; -1; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; 2) 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Указание. $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x^3 - 1) + (2x^2 - 2x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2x(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1 + 2x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 1)$. **958.** 1) 1; $\pm\sqrt{3}$; 2) -2; 1; 4. **959.** 1) 9. Указание. $\sqrt{x} = t$; 2) 0; -2; $-1 \pm \sqrt{7}$; 3) $2 \pm \sqrt{3}$; 4) 0; -1; 2; -3. **960.** 1) 4; 2) 0; 2; $1 \pm \sqrt{5}$; 3) $-1 \pm \sqrt{6}$; 4) 0; 1; -2; 3. **961.** $3(x + 7)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x + 7)(3x - 2)$. **962.** 12 и 15. **963.** 2. **964.** 12 км/ч; 16 км/ч. **965.** 2,5. **966.** 4 и 6. **967.** 8 и 12. **968.** $\frac{9}{10}$. **969.** $\frac{1}{6}$. **970.** 12 км/ч; 16 км/ч. **971.** 70 км/ч; 60 км/ч. **972.** 45 км/ч. **973.** 80 км/ч. **974.** 60 км/ч. **975.** 2 км/ч. **976.** 14 км/ч. **977.** 24 км/ч. **978.** 2 км/ч. **979.** 20 км/ч. **980.** 50 м^2, 40 м^2. **981.** 12 автомобилей. **982.** 24 ч; 48 ч. **983.** 36 ч; 45 ч. **984.** 45 мин; 36 мин. **985.** 30 дней; 42 дня. **986.** 16 км или 20 км. Указание. Пусть x км/ч – начальная скорость, тогда $4x$ км – расстояние между деревнями. Имеем уравнение $\frac{10}{x} + \frac{4x - 10}{x - 1} = \frac{9}{2}$. **987.** 27 км/ч. **988.** 3 л. Указание. Пусть в первый раз отлили x л спирта. Учитывая то, что окончательно воды в сосуде стало 4,5 л, имеем уравнение $x - \frac{x}{6} \cdot x + x = 4{,}5$. **990.** 1) $\frac{x + 5}{x}$; 2) $\frac{x + 3}{2x + 2}$. **991.** 1) 16; 2) $-7 \pm \sqrt{6}$. **995.** Да.

996. 1) $\pm\sqrt{2}$; 2) 0; $\frac{3}{4}$. **997.** 30 см. **998.** 1) 0; −9; 2) 2; −2. **999.** 1) $1\frac{1}{4}$; 2) $a > 0$. **1003.** 1) 1; −3; 2) 2; −1,5. **1004.** 1) 1; 2; 2) $5 \pm 2\sqrt{15}$; 3) $2\sqrt{2}$; $-3\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1005.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **1007.** 1) $x_1 = 3$; $x_2 = -2a$ для любого a; 2) если $a = 0$, то уравнение не имеет решений; если $a \neq 0$, то $x_1 = \frac{1}{a}$; $x_2 = \frac{2}{a}$. **1008.** 1) 1; −6; 0; −5; 2) −1; 6; 0; 5; $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$; 3) −3; 4) $\frac{1}{9}$. **1011.** $x_1 = 2$; $x_2 = -4$; $q = -8$. **1013.** $x_1 = 6$; $x_2 = 9$; $p = -15$. **1014.** 1,6. **1015.** $b = 15$ или $b = -15$. **1016.** 1; $\frac{1}{2}$. **1017.** $5x^2 - 8x + 1 = 0$. **1018.** 6 см и 9 см. **1019.** 9; 10; 11 или −11; −10; −9. **1020.** 10; 11; 12; 13; 14 или −2; −1; 0; 1; 2. **1021.** 24 см². **1022.** 16 команд. **1023.** 0,216 м³ или $\frac{121}{375}$ м³. **1024.** 40 см; 80 см. **1029.** 1) $\frac{2x + 9}{x + 2}$; 2) $\frac{2(x + 5)}{x^2 + 2x + 4}$; 3) $\frac{x - 3}{x + 2,5}$; 4) $\frac{4x + 1}{1 - 3x}$. **1030.** 1) $\frac{2}{x + 3}$; 2) $\frac{x + 2}{x + 1}$; 3) $x(x - 5)$; 4) $\frac{1}{2(x + 6)}$. **1031.** $p = 5$; $x_2 = -2$. **1033.** 1) 4; −4; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 81. **1034.** 1) $(x + a)(x - 6a)$; 2) $(x - 2b)(x + 5b)$. **1035.** 3; $x = 4$. **1036.** $a = -2$; −13. **1038.** 1) −2; 2) 0; $1\frac{2}{3}$; 3) 1; 4) 3; −3,5. **1040.** (2; 0), (−2; 0). **1041.** 1) −1; −1,5; 2) 0; $1\frac{2}{3}$; 3) −5; 6; 4) уравнение не имеет решений; 5) −4; 6) 1; −1. **1042.** 1) −3; 2) 3; −3; 3) 0. **1043.** 1) 1; −1; 2) −1; 1; −3. **1044.** (−2; −8); $\left(\frac{3}{4}; 3\right)$. **1045.** 1) $\pm\frac{7}{8}$; 2) −1. Указание. $27x^3 + 18x^2 - 12x - 8 = (3x - 2)(3x + 2)^2$. **1046.** 1) 1; 3; $2 \pm \sqrt{3}$. Указание. $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ и затем $x^2 - 4x = t$; 2) −1; 4. Указание. $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = (x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2)$, замена: $x^2 - 3x = t$; 3) 1; 2; −1; 4; 4) $\frac{5 \pm \sqrt{85}}{2}$; $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$; 5) −2; 3; $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$; 6) 1; 10; $\frac{11 \pm \sqrt{113}}{2}$.

1047. 1) 5; −3; $\frac{1 \pm \sqrt{217}}{4}$; 2) −1; $-4 \pm \sqrt{21}$. **1048.** 12 км/ч. **1049.** 10 ч. **1050.** 16 км/ч. **1051.** В 18 ч. **1052.** 2 км/ч. **1053.** 20 с; 16 с. **1054.** Петр − 60 деталей; Степан − 40 деталей. **1055.** 2 ч; 6 ч. **1056.** 6 ч; 9 ч. **1057.** 2 кг или 4 кг. **1058.** 225 км. **1059.** 40 деталей. Указание. Пусть x деталей − ежедневная норма. Тогда $5x + \left(\frac{800}{x} - 6\right)(x + 5) = 830$.

Задачи повышенной сложности

1060. Указание. $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{2ab}{a + b} > 0$.

1061. $\frac{m^2 + n^2 + mn}{m + n}$. **1062.** 1) $\frac{(x - y - z)x}{2}$; 2) $\frac{n + 1}{n - 2m}$; 3) 4; 4) $\frac{a - b}{a + b}$; 5) $1 + 2p$; 6) $-\frac{xy}{(x + y)^2}$. **1065.** Указание. После упрощения получим $\frac{16}{1 - a^{16}}$. **1067.** Возведем обе части равенства $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ в квадрат. Имеем $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} + 2 \cdot \frac{xyp + xzn + yzm}{mnp} = 1$. Из равенства $\frac{m}{x} + \frac{n}{y} + \frac{p}{z} = 0$ найдем, что $xyp + xzn + yzm = 0$. Следовательно, $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = 1$.
1068. Указание. Из условия следует, что $a - b = \frac{b - c}{bc}$; $b - c = \frac{c - a}{ac}$; $c - a = \frac{a - b}{ab}$. Перемножить полученные равенства. **1069.** 1) Если $a = 2$, уравнение не имеет решений; если $a \neq 2$, то $x = 2$; 2) если $a = 1$ или $a = -1$, то уравнение не имеет решений; если $a \neq 1$ и $a \neq -1$, то $x = a$; 3) если $a = 2$, то x − любое число; если $a \neq 2$, то $x = a + 2$; 4) если $a = 1$, то x − любое число; если $a = -1$, то уравнение не имеет решений; если $a \neq 1$ и $a \neq -1$, то $x = \frac{a - 1}{a + 1}$. **1070.** 1) Если $a \neq 0$, то $x = a$; 2) если $b \neq 0$ и $a = -b$, то уравнение не имеет решений; если $b \neq 0$ и $a \neq -b$, то $x = \frac{a - b}{a + b}$; 3) если $a \neq 0$, то

$x = \dfrac{2a}{3}$; 4) если $a = 0$, то уравнение не имеет решений; если $a \neq 0$, то $x = 6a$. **1071.** 1) От 2 до 3; 2) от −9 до −8; 3) от 7 до 8; 4) от 5 до 6. **1072.** 1) Если $a < -3$, то уравнение не имеет решений; если $a \geqslant -3$, то $x = (a + 3)^2$; 2) если $a = 0$, то $x \geqslant 0$; если $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) если $a = -3$, то $x \geqslant -2$; если $a < -3$ или $-3 < a < 3$, то уравнение не имеет решений; если $a \geqslant 3$, то $x = a^2 - 6a + 7$. **1073.** 1) −2; 2) 1. **1074.** 1) $\sqrt{3} - 1$; 2) 1; 3) −10. **1075.** 1) 2; 2) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. **1076.** 1) 1; 2) 8.

1077. 1) $y = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 5x, & \text{если } x < 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} -1, & \text{если } x \geqslant 1, \\ 1 - 2x, & \text{если } x < 1. \end{cases}$

1078. 1) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; 2) $1 + \sqrt{3} - \sqrt{7}$; 3) $\sqrt{2} - 1$; 4) $\dfrac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2} + 1)}{2}$.

1079. Да. **1080.** 1) $\dfrac{1}{xy}$; 2) $\dfrac{1 + a}{a}$. **1081.** 1) $\dfrac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y}$; 2) 1.

1082. 1) $-\sqrt{a}$, если $0 < a < 2$; $\sqrt{a}$, если $a > 2$; 2) −2, если $x < 0$; 2, если $x > 0$. **1084.** $\dfrac{1}{2}$. **1085.** 6. **1086.** 1) 19; 2) 80; 3) 343. **1087.** 1) −4; −3; 2) 19. **1088.** 1) Если $a = 1$, то $x = -\dfrac{1}{2}$; если $a \neq 1$, то $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{1 - a}$; 2) если $a = -1$, то $x = -1$; если $a \neq -1$, $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{2a}{1 + a}$. **1089.** 1) −1; 2) 2; 3) уравнение не имеет решений. **1090.** Пусть $b^2 - 4ac = 3$, тогда $b^2 = 3 + 4ac$. Правая часть равенства − нечетное число, следовательно, $b = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тогда получим $2(k^2 + k - ac) = 1$, что невозможно. **1091.** −1. **1092.** 1. **1093.** 12. **1094.** 1) $x^2 - 7x - 2 = 0$; 2) $2x^2 + 65x + 179 = 0$; 3) $16x^2 + 106x + 1 = 0$. **1095.** *Указание.* $D = (b + c - a)(b + c + a)(b - c + a)(b - c - a)$. **1096.** *Указание.* $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$. Затем воспользоваться теоремой Виета. **1097.** 1) 1; 2; −3; 2) 1; $\dfrac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$; 3) −1; $3 \pm \sqrt{3}$; 4) $\dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. *Указание.* $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 =$
$= (x^4 - 2x^3 + x^2) - (4x^2 + 4x + 1) = (x^2 - x)^2 - (2x + 1)^2$.

1098. 1) Если $a = 1$, то x − любое число; если $a = -2$, то уравнение не имеет решений; если $a \neq 1$ и $a \neq -2$, то $x = \frac{1}{a+2}$; 2) если $a = 1$, то $x = 4$; если $a = 4$, то $x = 1$; если $a \neq 1$ и $a \neq 4$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; 3) если $a = 1$ или $a = 3$, то уравнение не имеет решений; если $a \neq 1$ и $a \neq 3$, то $x = a$; 4) если $a = 1$, то $x = 4$; если $a \neq 1$, то $x_1 = 3a$, $x_2 = 4$; 5) если $a = 0$, то x – любое число, кроме – 7; если $a = -7$, то уравнение не имеет решений; если $a \neq 0$ и $a \neq -7$, то $x = a$; 6) если $a = 1$ или $a = -1$, то $x = 0$; если $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, то $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1-a^2}{a}$. **1099.** 6; –6; 10. **1100.** 9; –9. Указание. $x^4 - x^2 + 20x - 100 = x^4 - (x-10)^2$. **1101.** $a = 42$; $b = 39$. **1102.** 1) 2; 2) 1. **1103.** 1) Если $a = 1$, то $x = -1$; если $a = -2$, то $x = \frac{1}{3}$; если $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -2$, то $x_1 = \frac{a+1}{a-1}$, $x_2 = -1$; 2) если $a = -\frac{9}{4}$ или $a = -\frac{1}{4}$, то $x = -1$; если $a = -3$, то $x = -\frac{9}{8}$; если $a = 1$, то $x = \frac{7}{8}$; если $a \neq -3$, $a \neq -\frac{9}{4}$; $a \neq -\frac{1}{4}$, $a \neq 1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4a+3}{8}$. **1104.** 1) 0; 2) 2; –2; $\pm\frac{3\sqrt{21}}{7}$. **1105.** 1) 14. Указание. Пусть $\sqrt{x-5} = t$. Тогда $x = t^2 + 5$; 2) 4; –4. **1106.** 1) $\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$; $\frac{-5 \pm \sqrt{85}}{6}$; 2) $\frac{5 + \sqrt{13}}{6}$; $\frac{-5 - \sqrt{133}}{6}$. **1107.** Указание. Графиком уравнения являются две прямые $y = \frac{x}{3}$ и $y = \frac{x}{2}$. **1108.** 1) 5; 0,6; 2) $-\frac{2}{9}$; $\frac{10}{19}$; $\frac{14}{17}$; $3\frac{1}{3}$; 3) 2; $\frac{1}{2}$. Указание. $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; 4) $1 \pm \sqrt{7}$; $-3 \pm \sqrt{15}$. Указание. $\frac{x}{3} - \frac{2}{x} = t$, тогда $\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{9} = t^2 + \frac{4}{3}$.

1109. 85 кг. **1110.** 7. **1111.** 52 км/ч или $38\frac{2}{11}$ км/ч. **1112.** 60 км/ч. Указание. Следует рассмотреть две возможности в зависимости от того, какого велосипедиста мотоциклист обогнал первым. **1113.** 1,8 ч и 2,25 ч. **1114.** 0,2 ч или 0,33 ч. **1115.** Сергей – за 10 дней, Алексей – за 15 дней. **1116.** 60 мин; 84 мин.

Упражнения на повторение курса алгебры 7 класса

1. 1) a^8; 2) x^2; 3) p^{21}; 4) a^6; 5) t; 6) a^{36}. **2.** 1) $4m^3 - 12m^2$; 2) $-2a^2b - 4a^2b^2$; 3) $7a^3 - 14a^2 + 21a$; 4) $a^2 - 2a - 35$; 5) $6m^2 + 19x - 7$; 6) $a^3 - 3a^2 + b + 1$. **3.** 1) $2x^2 - 8$; 2) $-17x$; 3) $2a^2 + 8b^2$; 4) $56xm - 32m^2$; 5) $2x^3 - x^2 - x$; 6) $x^2 - 2x + 10$. **4.** 1) $4(a - 2)$; 2) $3m(m - 3)$; 3) $4ab(3a + 4b^2)$; 4) $(2x - 5)(2x + 5)$; 5) $9(m^2 - 2p^4)(m^2 + 2p^4)$; 6) $(p - 5)^2$; 7) $(x^2 + 4)^2$; 8) $(c + 3) \times (c^2 - 3c + 9)$; 9) $(p^2 - 10)(p^4 + 10p^2 + 100)$; 10) $(x - y)(a + 2)$. **5.** 1) 4; 2) -8; 3) 5; 4) $-2\frac{2}{3}$; 5) 2; 6) $\varnothing$; 7) любое число; 8) -12. **6.** 1) (4; 1); 2) (-1; 2). **7.** 1) (1; -3); 2) (-1; 4). **8.** 1) (2; 1); 2) (2; -3); 3) $\left(1; -\frac{1}{3}\right)$; 4) ($-1$; -2).

Ответы к заданиям «Домашняя самостоятельная работа»

№ задания / № работы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	Б	Г	В	А	Б	Б	А	В	Г	В	А
2	Б	Г	А	В	Б	А	В	Г	В	А	Г	В
3	А	Г	Б	В	Б	А	В	Б	В	Г	В	Б
4	В	Б	Г	А	Б	В	Г	Б	А	В	В	Г
5	Г	Б	Г	Б	А	В	Б	А	Б	Г	А	Б
6	Б	Г	Б	А	В	Г	Б	В	Б	А	Б	Б

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ