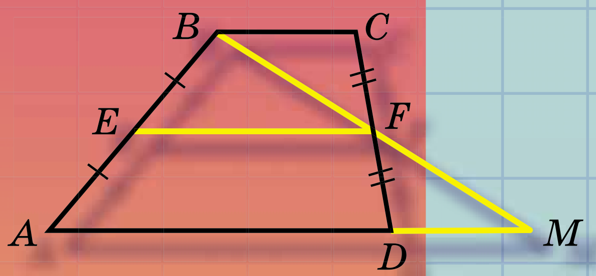
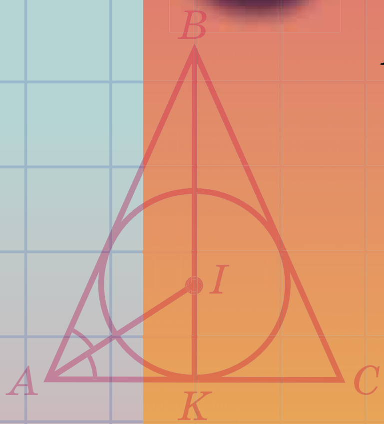
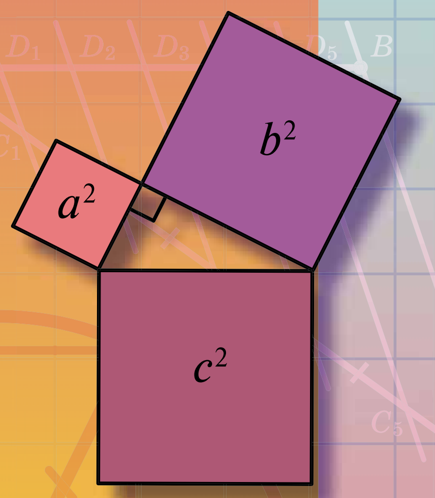
А.С. Истер

ГЕОМЕТРИЯ

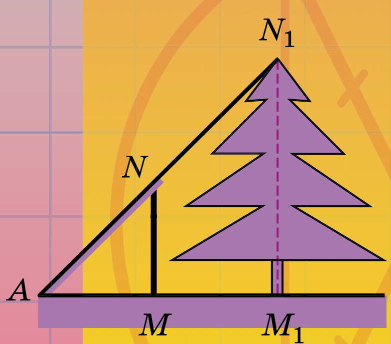
8







$a^2 + b^2 = c^2$



УДК 514(075.3)
ББК 22.151я721
І-89

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(Приказ Министерства образования и науки Украины
от 10.05.2016 № 491)

Выдано за счет государственных средств.
Продажа запрещена

Переведено по изданию:
Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / О.С. Істер. — Київ : Генеза, 2016. — 216 с. ISBN 978-966-11-0701-3.

Эксперты, которые осуществили экспертизу учебника при проведении конкурсного отбора проектов учебников для учеников 8 класса общеобразовательных учебных заведений и пришли к выводу о целесообразности предоставления учебнику грифа «Рекомендовано Министерством образования и науки Украины»:

Дунай С.М., учитель специализированной общеобразовательной средней школы № 1 с углубленным изучением иностранных языков г. Чернигова;

Тесленко О.В., методист методического центра Управления образования администрации Коминтерновского района Харьковского городского совета;

Чорный В.З., заведующий кафедры математики и методики ее обучения Тернопольского национального педагогического университета имени Владимира Гнатюка, кандидат физико-математических наук, доцент.

Истер А.С.
І-89 Геометрия : учебн. для 8 кл. общеобразоват. учебн. завед. / А.С. Истер. — Киев : Генеза, 2016. — 216 с.

ISBN 978-966-11-0750-1.

Учебник соответствует новой программе по математике, содержит достаточное количество дифференцированных упражнений и прикладных задач, упражнений для повторения, заданий для подготовки к тематическому оцениванию, в т. ч. в тестовой форме, материал для повторения курса геометрии 7 класса, задачи повышенной сложности, предметный указатель, ответы к большинству упражнений, а для самых любознательных – подборку нестандартных задач и дополнительный материал.

УДК 514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-11-0750-1 (рус.)
ISBN 978-966-11-0701-3 (укр.)

Уважаемые учащиеся!

В этом учебном году вы продолжите изучать геометрию, а учебник, который вы держите в руках, поможет вам в этом.

Изучая теоретический материал, обратите внимание на текст, напечатанный **жирным** шрифтом. Его надо запомнить.

В учебнике вы увидите условные обозначения:

– определения, важные геометрические утверждения (аксиомы, теоремы, свойства);

– вопросы к изученному теоретическому материалу;

▲ – окончание доказательства теоремы или задачи;

– «ключевая» задача, выводы которой используются при решении других задач;

– упражнения для повторения;

– рубрика «Решите и подготовьтесь к изучению нового материала»;

– упражнения повышенной сложности;

– рубрика «Интересные задачки для неленивых» и дополнительный материал.

Черным цветом обозначены номера упражнений для работы в классе, а **синим** – для работы дома.

Все упражнения распределены согласно уровням учебных достижений и выделены так, что:

с отметки 1 начинаются упражнения начального уровня;

с отметки 2 начинаются упражнения среднего уровня;

с отметки 3 начинаются упражнения достаточного уровня;

с отметки 4 начинаются упражнения высокого уровня.

Проверить свои знания и подготовиться к тематическому оцениванию можно, выполнив задания «Домашней самостоятельной работы», представленные в тестовой форме, и «Задания для проверки знаний».

После каждой главы идут упражнения для ее повторения, а в конце учебника – «Задания для проверки знаний за курс геометрии 8 класса» и «Задачи повышенной сложности». Занятия геометрией будут еще интереснее, если решать упражнения из рубрики «Интересные задачки для неленивых».

Вспомнить и повторить ранее изученный материал вам помогут «Сведения из курса геометрии 7 класса» и «Упражнения на повторение курса геометрии 7 класса», размещенные в конце учебника.

Автор старался представить теоретический материал учебника простым, доступным языком и проиллюстрировать большим количеством задач. После изучения теоретического материала в школе его обязательно нужно проработать дома.

Учебник содержит много упражнений, большинство из которых вы рассмотрите на уроках и во время выполнения домашнего задания, остальные упражнения рекомендуем решить самостоятельно.

В конце учебника в приложении «Готовимся к ВНО» представлена подборка геометрических задач, которые в разные годы предлагались абитуриентам на внешнем независимом оценивании по математике. Для их решения достаточно знаний геометрии 8-го класса. Решив эти задачи, вы сделаете еще один шаг в успешной подготовке к будущим испытаниям, ожидающим вас при поступлении в выбранный ВУЗ.

Интересные факты из истории развития геометрии как науки вы найдете в рубрике «А еще раньше...».

Уважаемые учителя!

Предлагаемый учебник содержит большое количество упражнений; упражнения большинства параграфов поданы «с запасом». Поэтому выбирайте их для использования на уроках и в качестве домашних заданий в зависимости от поставленной цели, уровня подготовки учащихся, степени индивидуализации и дифференциации обучения. Упражнения, которые не рассматривались на уроке, можно использовать на дополнительных, факультативных или индивидуальных занятиях.

Дополнительные упражнения в «Заданиях для проверки знаний» предназначены для учащихся, которые справились с основными заданиями раньше других. Правильное их решение учитель может оценить отдельно.

Упражнения для повторения разделов и задачи из приложения «Готовимся к ВНО» можно предложить учащимся, например, во время обобщающих уроков по теме или повторения и систематизации учебного материала в конце учебного года.

Организовать повторение курса геометрии 7 класса в начале учебного года и вспомнить соответствующий теоретический материал можно, предложив учащимся решить «Упражнения на повторение курса геометрии 7 класса» и прочитать соответствующие теоретические сведения, размещенные в конце учебника.

Уважаемые родители!

Если ваш ребенок пропустит один или несколько уроков в школе, нужно предложить ему самостоятельно проработать этот материал по учебнику дома. Сначала желательно, чтобы он прочитал теоретический материал, изложенный простым, доступным языком и проиллюстрированный значительным количеством задач. После этого – нужно решить задачи и упражнения из рассмотренного параграфа, которые ему по силам.

При изучении ребенком курса геометрии 8 класса вы можете предлагать ему дополнительно решать дома упражнения, которые не рассматривались на уроке. Это будет способствовать наилучшему усвоению учебного материала.

Каждая тема заканчивается тематическим оцениванием. Перед его проведением предложите ребенку решить задания «Домашней самостоятельной работы», представленные в тестовой форме, и «Задания для проверки знаний». Это поможет вспомнить основные типы задач и качественно подготовиться к тематическому оцениванию.

В конце учебника «Задачи повышенной сложности» помогут вашему ребенку углубить знания по геометрии и подготовиться к математическим соревнованиям.

Глава 1 ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

В этой главе вы:

- **вспомните** понятия прямоугольника и квадрата;
- **узнаете** о параллелограмме и его свойствах, трапеции; центральных и вписанных углах; вписанных и описанных четырехугольниках; средней линии треугольника и средней линии трапеции; теореме Фалеса;
- **научитесь** определять вид четырехугольника и обосновывать это, применять изученные определения и теоремы к решению задач.

§ 1. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ. СУММА УГЛОВ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Четырехугольником **называют фигуру, состоящую из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков.**

Никакие три из этих точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны иметь никаких других общих точек, кроме данных.

Любой четырехугольник ограничивает некоторую часть плоскости, являющуюся внутренней областью четырехугольника.

На рисунке 1 изображен четырехугольник $ABCD$. Точки A, B, C, D называют ***вершинами*** четырехугольника, а соединяющие их отрезки AB, BC, CD и DA – ***сторонами*** четырехугольника.

Вершины четырехугольника, являющиеся концами его стороны, называют ***соседними***, несоседние вершины называют ***противолежащими***. На рисунке 1 вершины A и B – соседние, A и C – противолежащие.

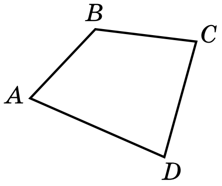


Рис. 1

Стороны четырехугольника, имеющие общую вершину, называют ***соседними***, а не имеющие общей вершины – ***противолежащими***. На рис. 1 стороны AB и BC – соседние, AB и CD – противолежащие.

Сумму длин всех сторон четырехугольника называют его ***периметром***. Периметр обозначают буквой P. Например, периметр четырехугольника $ABCD$ можно обозначить как P_{ABCD}:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA.$$

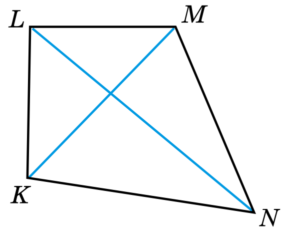


Рис. 2

Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называют ***диагоналями*** четырехугольника. На рисунке 2 отрезки KM и LN – диагонали четырехугольника $KLMN$. Каждый четырехугольник имеет две диагонали.

Углами четырехугольника $ABCD$ называют углы DAB, ABC, BCD и CDA (рис. 1). Углы четырехугольника называют ***противолежащими***, если их вершины – противолежащие вершины четырехугольника, и ***соседними***, если их вершины – соседние вершины четырехугольника. На рисунке 1 углы A и C – противолежащие, A и B – соседние.

Один из углов четырехугольника может быть больше развернутого угла. Например, на рисунке 3 в четырехугольнике $ABCD$ угол A больше развернутого. Такой четырехугольник называют ***невыпуклым***. Если все углы четырехугольника меньше 180°, его называют ***выпуклым***. Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются (рис. 2), а невыпуклого не пересекаются (рис. 4).

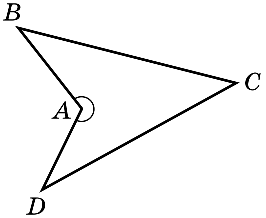


Рис. 3

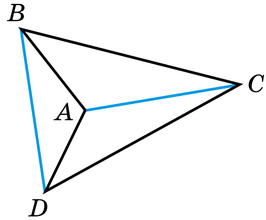


Рис. 4

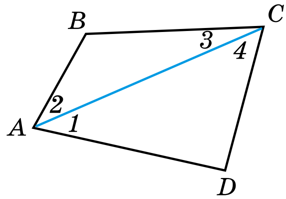


Рис. 5

Т е о р е м а (о сумме углов четырехугольника). **Сумма углов четырехугольника равна 360°.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $ABCD$ – некоторый четырехугольник. Проведем в нем диагональ AC (рис. 5). Тогда $\angle A = \angle 1 + \angle 2$, $\angle C = \angle 3 + \angle 4$. Учитывая, что $\angle 2 + \angle B + \angle 3 = 180°$ (как сумма углов $\triangle ABC$), $\angle 1 + \angle D + \angle 4 = 180°$ (как сумма углов $\triangle ADC$), будем иметь: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle 3 + \angle 4 + \angle D = (\angle 2 + \angle B + \angle 3) + (\angle 1 + \angle D + \angle 4) = 180° + 180° = 360°$. ▲

Задача. Найдите углы четырехугольника, если их градусные меры относятся как 3 : 10 : 4 : 1. Выпуклым или невыпуклым является этот четырехугольник?

Решение. Пусть углы четырехугольника равны $3x$, $10x$, $4x$ и x. Имеем уравнение $3x + 10x + 4x + x = 360$, откуда $x = 20$. Следовательно, углы четырехугольника равны $3 \cdot 20° = 60°$, $10 \cdot 20° = 200°$, $4 \cdot 20° = 80°$ и $20°$. Так как один из углов четырехугольника больше $180°$, то этот четырехугольник – невыпуклый.

Ответ. $60°$, $200°$, $80°$, $20°$; невыпуклый.

1. Какую фигуру называют четырехугольником?
2. Что называют вершинами четырехугольника, сторонами четырехугольника?
3. Какие вершины четырехугольника называют соседними, а какие – противолежащими?
4. Что называют диагоналями четырехугольника?
5. Какие стороны четырехугольника называют соседними, а какие – противолежащими?
6. Что называют периметром четырехугольника?
7. Что называют углами четырехугольника?
8. Какие углы четырехугольника называют противолежащими, а какие – соседними?
9. Какой четырехугольник называют невыпуклым, а какой – выпуклым?
10. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов четырехугольника.

1 Начальный уровень

1. (Устно.) Какие из фигур (рис. 6–9) являются четырехугольниками? Назовите выпуклые и невыпуклые четырехугольники.

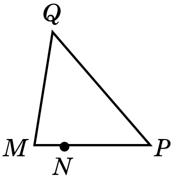


Рис. 6

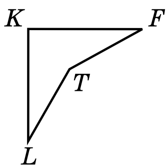


Рис. 7

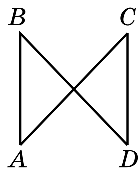


Рис. 8

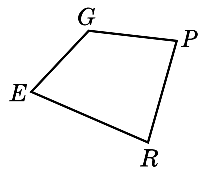


Рис. 9

2. Назовите пары противолежащих сторон четырехугольника $EGPR$ (рис. 9), пары соседних сторон, пары соседних вершин, пары противолежащих вершин.

3. Начертите четырехугольник $KLMN$. Назовите пары его противолежащих сторон, соседних сторон, противолежащих вершин, соседних вершин. Проведите диагонали этого четырехугольника.

4. Начертите выпуклый четырехугольник $ABCD$ и невыпуклый $PMLK$. Проведите диагональ в каждом из них.

5. Существует ли четырехугольник с углами:
1) $80°$, $90°$, $100°$ и $110°$; 2) $150°$, $60°$, $70°$ и $80°$?

6. Могут ли углы четырехугольника равняться:
1) $120°$, $80°$, $90°$ и $70°$; 2) $130°$, $110°$, $80°$ и $50°$?

2 Средний уровень

7. Найдите четвертый угол четырехугольника, если три его угла равны: 1) $150°$, $110°$ и $80°$; 2) $80°$, $60°$ и $30°$. Выпуклым или невыпуклым является этот четырехугольник?

8. Найдите четвертый угол четырехугольника, если три его угла равны: 1) $20°$, $70°$ и $80°$; 2) $120°$, $50°$ и $40°$. Выпуклым или невыпуклым является этот четырехугольник?

9. Найдите периметр четырехугольника, стороны которого равны 32 мм, 2,5 см, 0,4 дм и 0,07 м.

10. Найдите периметр четырехугольника, стороны которого равны 0,08 м, 0,7 дм, 6,3 см и 54 мм.

11. Могут ли все углы четырехугольника быть: 1) острыми; 2) прямыми; 3) тупыми?

12. Один из углов четырехугольника равен $120°$, а остальные – равны между собой. Найдите неизвестные углы четырехугольника.

13. Периметр четырехугольника равен 60 см, а одна из его сторон 24 см. Найдите неизвестные стороны четырехугольника, если они равны между собой.

14. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 10) $BC = CD$ и $\angle ACB = \angle ACD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

15. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 11) $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$. Докажите, что $AB = CD$.

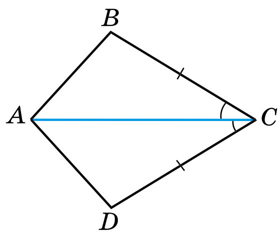


Рис. 10

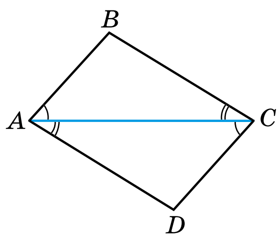


Рис. 11

3 Достаточный уровень

16. Найдите стороны четырехугольника, если они пропорциональны числам 4, 5, 8 и 9, а периметр четырехугольника равен 65 см.

17. Найдите углы четырехугольника, если они пропорциональны числам 4, 5, 7 и 8.

18. Найдите неизвестные углы четырехугольника, один из углов которого равен 90°, второй и третий относятся как 7 : 5, а четвертый равен полусумме второго и третьего.

19. Найдите неизвестные стороны четырехугольника, периметр которого равен 54 см, одна из сторон 18 см, вторая и третья относятся как 7 : 3, а четвертая равна полуразности второй и третьей.

20. Докажите, что в каждом четырехугольнике есть угол, не больше чем 90°.

21. Докажите, что в каждом четырехугольнике есть угол, не меньше чем 90°.

22. Может ли угол четырехугольника быть больше суммы остальных его углов?

4 Высокий уровень

23. Постройте четырехугольник со сторонами 6 см, 6 см, 3 см, 4 см и углом 50° между равными сторонами. Сколько решений имеет задача?

24. Постройте четырехугольник со сторонами 5 см, 5 см, 4 см, 3 см и углом 70° между равными сторонами. Сколько решений имеет задача?

25. Выпуклый четырехугольник называют *дельтоидом*, если он имеет две пары равных соседних сторон (рис. 12). Докажите, что:

1) диагональ BD делит пополам как угол B, так и угол D;

2) диагонали дельтоида взаимно перпендикулярны.

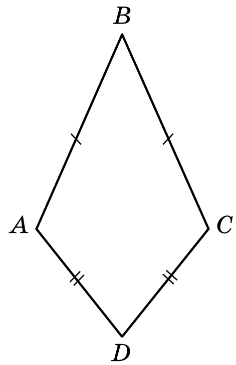


Рис. 12

26. Периметр четырехугольника $ABCD$ равен 29 см, периметр треугольника ADB – 20 см, а треугольника CDB – 21 см. Найдите длину диагонали BD.

Упражнения для повторения

27. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 70°. Найдите остальные семь углов.

28. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен 70°. Сколько решений имеет задача?

29. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 60°, а сумма меньшего катета и медианы, проведенной к гипотенузе, – 10 см. Найдите гипотенузу этого треугольника.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

30. Прямая AB является секущей для прямых KL и MN (рис. 13). Запишите все пары внутренних односторонних углов, внутренних накрест лежащих углов и соответственных углов.

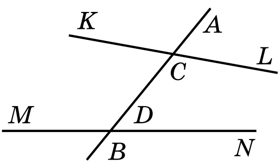


Рис. 13

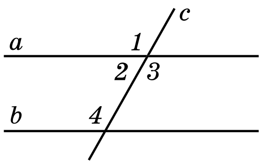


Рис. 14

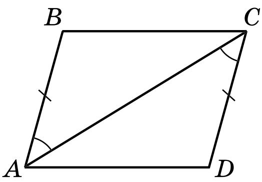


Рис. 15

31. Каково взаимное расположение прямых a и b (рис. 14), если:

1) $\angle 2 + \angle 4 = 180°$;
2) $\angle 1 > \angle 4$;
3) $\angle 3 = 120°$; $\angle 4 = 121°$;
4) $\angle 2 = 60°$; $\angle 4 = 119°$;
5) $\angle 1 = \angle 4 = 122°$;
6) $\angle 3 = \angle 4$?

32. 1) Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$ (рис. 15), если $AB = CD$ и $\angle BAC = \angle ACD$.

2) Докажите, что $BC = AD$ и $\angle BCA = \angle CAD$.

3) Параллельны ли прямые BC и AD?

Интересные задачки для неленивых

33. (*Всеукраинская математическая олимпиада, 1964 г.*) Найдите наибольшее значение n, при котором на плоскости можно разместить n точек так, чтобы каждые три из них были вершинами прямоугольного треугольника.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ, ЕГО СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ

Параллелограммом **называют четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.**

На рисунке 16 изображен параллелограмм $ABCD$, у которого $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Рассмотрим *свойства параллелограмма*.

1. Сумма двух любых соседних углов параллелограмма равна 180°.

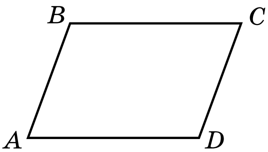


Рис. 16

Действительно, углы A и B параллелограмма $ABCD$ (рис. 16) являются внутренними односторонними углами для параллельных прямых AD и BC и секущей AB. Поэтому $\angle A + \angle B = 180°$. Аналогично это свойство можно доказать для любой другой пары соседних углов параллелограмма. ▲

2. Параллелограмм является выпуклым четырехугольником.

Так как $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle A < 180°$, $\angle B < 180°$. Аналогично $\angle C < 180°$, $\angle D < 180°$. Поэтому параллелограмм – выпуклый четырехугольник. ▲

3. В параллелограмме противолежащие стороны равны и противолежащие углы равны.

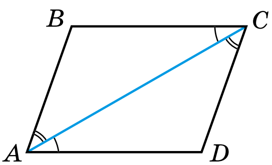


Рис. 17

Д о к а з а т е л ь с т в о. Диагональ AC разбивает параллелограмм $ABCD$ на два треугольника ABC и ADC (рис. 17). AC – их общая сторона, $\angle CAD = \angle ACB$ и $\angle CAB = \angle ACD$ (как внутренние накрест лежащие углы для каждой из пар параллельных прямых AD и BC, AB и CD и секущей AC). Тогда $\triangle ABC = \triangle CDA$ (по стороне и двум прилежащим углам). Откуда, $AB = CD$, $BC = AD$ и $\angle B = \angle D$ (как соответственные элементы равных треугольников). Так как $\angle BAC + \angle CAD = \angle BCA + \angle DCA$, то $\angle BAD = \angle BCD$. ▲

4. Периметр параллелограмма $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
5. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство. Пусть O – точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 18). $AD = BC$ (как противолежащие стороны параллелограмма), $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle BDA = \angle DBC$ (как внутренние накрест лежащие углы для параллельных прямых AD и BC и секущих AC и BD соответственно). Следовательно, $\triangle AOD = \triangle COB$ (по стороне и двум прилежащим углам). Тогда $AO = OC$, $BO = OD$ (как соответственные стороны равных треугольников). ▲

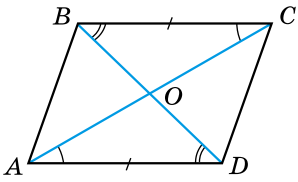


Рис. 18

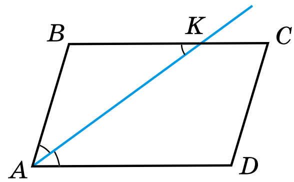


Рис. 19

Задача 1. Дано: $ABCD$ параллелограмм, AK – биссектриса угла A, $BK = 5$ см, $KC = 3$ см (рис. 19). Найдите: P_{ABCD}.

Решение. 1) $BC = BK + KC = 5 + 3 = 8$ (см);

2) $\angle KAD = \angle BKA$ (как внутренние накрест лежащие углы для параллельных прямых AD и BC и секущей AK);

3) $\angle KAD = \angle KAB$ (по условию), тогда $\angle BKA = \angle KAB$. Тогда $\triangle ABK$ – равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), $AB = BK = 5$ (см);

4) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(5 + 8) = 26$ (см).

Ответ. 26 см.

***Высотой параллелограмма* называют перпендикуляр, проведенный из любой точки стороны параллелограмма к прямой, содержащей противолежащую сторону.**

На рисунке 20 MN – высота параллелограмма, $MN \perp AD$, $MN \perp BC$.

Из каждой вершины параллелограмма можно провести две высоты. Например, на рисунке 21 BF и BT – высоты параллелограмма, проведенные соответственно к сторонам AD и CD.

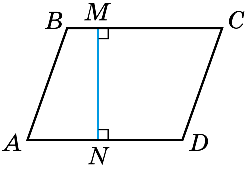


Рис. 20

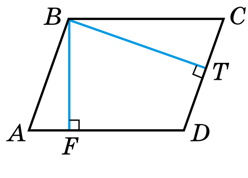


Рис. 21

Рассмотрим *признаки параллелограмма.*

Теорема (признаки параллелограмма). **Если в четырехугольнике: 1) две стороны параллельны и равны, или 2) противолежащие стороны попарно равны, или 3) диагонали точкой пересечения делятся пополам, или 4) противолежащие углы попарно равны, – то четырехугольник является параллелограммом.**

Доказательство. 1) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$ и $AD \parallel BC$ (рис. 22). Проведем диагональ AC. Рассмотрим $\triangle CAD$ и $\triangle ACB$. $\angle CAD = \angle BCA$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC). AC – общая сторона, $AD = BC$ (по условию). Следовательно, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (по двум сторонам и углу между ними). Тогда $\angle ACD = \angle CAB$ (как соответственные). Но это накрест лежащие углы при пересечении прямых AB и CD секущей AC. Поэтому $AB \parallel CD$ (по признаку параллельности прямых). Следовательно, в четырехугольнике $ABCD$ противолежащие стороны попарно параллельны. Поэтому $ABCD$ – параллелограмм.

2) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$ и $AB = CD$ (рис. 22). Проведем диагональ AC. Тогда $\triangle CAD = \triangle ACB$ (по трем сторонам). Поэтому $\angle ACD = \angle CAB$, и следовательно, $AB \parallel CD$ (по признаку параллельности прямых). Аналогично доказываем, что $AD \parallel BC$. Следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.

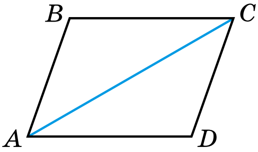


Рис. 22

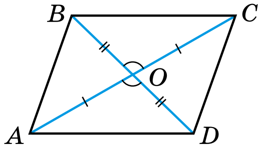


Рис. 23

3) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O и $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 23). $\angle AOD = \angle COB$ (как вертикальные). Поэтому $\triangle AOD = \triangle COB$ (по двум сторонам и углу между ними). Отсюда $AD = BC$. Аналогично доказываем, что $AB = CD$. Принимая во внимание п. 2) этой теоремы, приходим к выводу, что $ABCD$ – параллелограмм.

4) Пусть в параллелограмме $ABCD$ $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (рис. 16). Так как $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, то $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$, т. е. $2(\angle A + \angle B) = 360°$; откуда $\angle A + \angle B = 180°$. Но $\angle A$ и $\angle B$ – внутренние накрест лежащие углы для прямых AD и BC и секущей AB. Поэтому $AD \parallel BC$

(по признаку параллельности прямых). Аналогично доказываем, что $AB \parallel CD$. Следовательно, $ABCD$ – параллелограмм. ▲

Задача 2. В четырехугольнике $ABCD$, $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник (рис. 22). Рассмотрим $\triangle CAD$ и $\triangle ACB$. AC – их общая сторона, $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$ (по условию). Тогда, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $AB = CD$. Но тогда в четырехугольнике $ABCD$ противолежащие стороны попарно равны, поэтому он является параллелограммом. ▲

А еще раньше...

О некоторых видах четырехугольников (квадраты, прямоугольники, равнобокие и прямоугольные трапеции) знали еще древнеегипетские и вавилонские математики.

Термин «параллелограмм» греческого происхождения, считают, что он был введен Евклидом (около 300 г. до н. э.). Также известно, что еще раньше о параллелограмме и некоторых его свойствах уже знали ученики школы Пифагора («пифагорейцы»).

В «Началах» Евклида доказана следующая теорема: *в параллелограмме противолежащие стороны равны и противолежащие углы равны, а диагональ делит его пополам*, но не упоминается о том, что точка пересечения диагоналей параллелограмма делит каждую из них пополам.

Евклид также не упоминает ни о прямоугольнике, ни о ромбе.

Полная теория параллелограммов была разработана лишь в конце Средневековья, а в учебниках она появилась в XVII в. Все теоремы и свойства параллелограмма в этих учебниках основывались на аксиоме параллельности Евклида.

Термин «диагональ» – греческого происхождения; «диа» означает «через», а «гониос» – «угол», что можно понимать как отрезок, соединяющий вершины углов.

Следует отметить, что Евклид, как и большинство математиков того времени, для названия отрезка, соединяющего противолежащие вершины четырехугольника, в частности прямоугольника, употреблял другой термин – «диаметр». Это можно объяснить тем, что первые геометры свои рассуждения основывали на вписанных в окружность прямоугольниках. В Средние века для названия упомянутого отрезка использовали оба термина. Лишь в XVIII в. термин «диагональ» стал общепринятым.

1. Какую фигуру называют параллелограммом?
2. Сформулируйте и докажите свойства параллелограмма.
3. Что называют высотой параллелограмма?
4. Сформулируйте и докажите признаки параллелограмма.

1 Начальный уровень

34. Среди четырехугольников на рисунках 24–29 укажите параллелограммы.

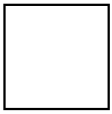


Рис. 24

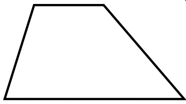


Рис. 25

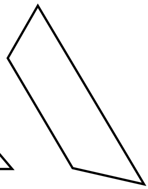


Рис. 26

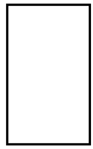


Рис. 27

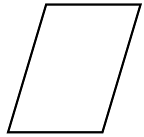


Рис. 28

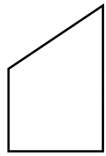


Рис. 29

35. Начертите параллелограмм $ABCD$, у которого угол D тупой.

36. Начертите параллелограмм $KLMN$, у которого угол K острый.

37. (Устно.) Одна из сторон параллелограмма равна 5 см. Какова длина противолежащей ей стороны?

38. Один из углов параллелограмма равна 70°. Найдите остальные его углы.

39. Найдите углы параллелограмма, если один из них равен 100°.

2 Средний уровень

40. Найдите периметр параллелограмма, у которого одна сторона равна 12 см, а вторая – на 3 см больше.

41. Найдите периметр параллелограмма, у которого одна сторона равна 18 см, а вторая – вдвое меньше.

42. Найдите все углы параллелограмма, если:
1) сумма двух из них равна 120°;
2) один з них на 20° больше, чем другой;
3) один из них втрое меньше, чем другой;
4) два из них относятся как 2 : 3.

43. Найдите все углы параллелограмма, если:
1) сумма двух из них равна 200°;
2) один з них на 40° меньше, чем другой;
3) один из них вдвое больше, чем другой;
4) градусные меры двух из них относятся как 4 : 5.

44. В параллелограмме $ABCD$ $\angle BAD = 80°$, $\angle ACD = 50°$. Найдите $\angle ACB$ и $\angle ABC$.

45. В параллелограмме $ABCD$ $\angle BAC = 35°$, $\angle BCA = 40°$. Найдите углы параллелограмма.

46. (Устно.) Какие ошибки допущены в изображении параллелограмма на рисунках 30–32?

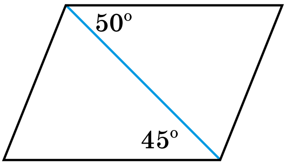


Рис. 30

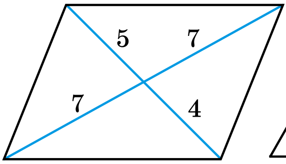


Рис. 31

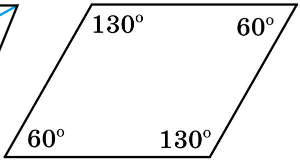


Рис. 32

47. Периметр параллелограмма равен 40 см. Найдите его стороны, если:
1) одна из них на 4 см больше, чем другая;
2) они относятся как 3 : 7.

48. Периметр параллелограмма равен 36 дм. Найдите его стороны, если:
1) одна из них на 2 дм меньше, чем другая;
2) одна из них в 5 раз больше, чем другая.

49. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите диагональ AC, если $BD = 20$ см, $AB = 15$ см, а периметр треугольника AOB равен 32 см.

50. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 33) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

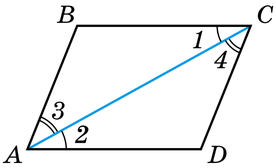


Рис. 33

51. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (рис. 33). Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

52. Постройте параллелограмм по двум сторонам и углу между ними.

53. Постройте параллелограмм по двум сторонам и диагонали.

3 Достаточный уровень

54. Биссектриса угла параллелограмма пересекает его сторону под углом 48°. Найдите углы параллелограмма.

55. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A делит сторону BC на отрезки $BM = 5$ см и $MC = 7$ см. Найдите периметр параллелограмма.

56. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$ см, $BC = 12$ см. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке P. Найдите BP и PC.

57. Постройте параллелограмм по стороне и диагоналям.

58. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.

59. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ (рис. 34) отмечены точки M и K так, что $\angle ABM = \angle CDK$. Докажите, что $BMDK$ – параллелограмм.

60. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ (рис. 34) отмечены точки M и K так, что $AM = KC$. Докажите, что $BMDK$ – параллелограмм.

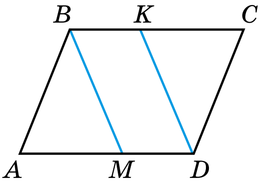


Рис. 34

61. Докажите, что биссектрисы двух соседних углов параллелограмма взаимно перпендикулярны.

62. В параллелограмме острый угол равен 60°. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, делит противолежащую сторону на отрезки 3 см и 5 см, считая от вершины острого угла. Найдите периметр параллелограмма.

63. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 6$ см, $\angle B = 120°$. Высота BK делит сторону AD на два равных отрезка. Найдите периметр параллелограмма.

64. В параллелограмме $ABCD$ из вершины острого угла A проведены высоты AL и AK. $\angle LAK = 140°$. Найдите угол C параллелограмма.

65. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN. $\angle MBN = 70°$. Найдите угол D параллелограмма.

4 Высокий уровень

66. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ делит сторону AD на два отрезка AK и KD так, что $AK - KD = 1$ см. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 40 см.

67. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ делит сторону BC на два отрезка BK и KC так, что $BK : KC = 3 : 7$. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 78 см.

68. Два угла параллелограмма относятся как 5 : 7. Найдите угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины его: 1) тупого угла; 2) острого угла.

69. Один из углов параллелограмма на 12° больше другого. Найдите угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины его:
1) острого угла; 2) тупого угла.

70. Докажите, что три высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (*ортоцентре треугольника*).

Доказательство. 1) Пусть AH_1, BH_2, CH_3 – высоты остроугольного треугольника ABC (рис. 35). Проведем через вершины треугольника прямые, параллельные противолежащим сторонам. Получим треугольник $A_1B_1C_1$. Четырехугольник ABA_1C – параллелограмм (по построению). Поэтому $BA_1 = AC$. Аналогично $ACBC_1$ – параллелограмм и $C_1B = AC$. Следовательно, $C_1B = BA_1$, точка B – середина A_1C_1. Так как $BH_2 \perp AC$ и $AC \parallel A_1C_1$, то $BH_2 \perp A_1C_1$. Поэтому BH_2 принадлежит серединному перпендикуляру к стороне A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично AH_1 и CH_3 принадлежат серединным перпендикулярам к двум другим сторонам этого треугольника. Как известно, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Следовательно, AH_1, BH_2 и CH_3 пересекаются в одной точке.

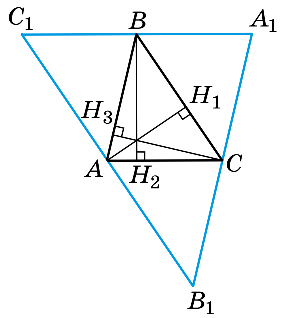


Рис. 35

2) Если $\triangle ABC$ – прямоугольный, например $\angle C = 90°$, очевидно, что три высоты пересекаются в точке C.

3) Если $\triangle ABC$ – тупоугольный, то продолжения трех высот треугольника пересекаются в одной точке. Доказательство аналогично доказательству в п. 1. ▲

Упражнения для повторения

71. Найдите второй острый угол прямоугольного треугольника, если первый равен: 1) 20°; 2) 65°.

72. Две стороны треугольника равны 7,2 см и 2,5 см. Какому наибольшему целому числу сантиметров может равняться третья сторона?

73. Внешний угол треугольника в 2 раза больше одного из внутренних углов, не смежного с ним. Докажите, что треугольник является равнобедренным.

74. Можно ли построить четырехугольник со сторонами 6 см, 6 см, 4 см и 2 см и углом 60° между равными сторонами?

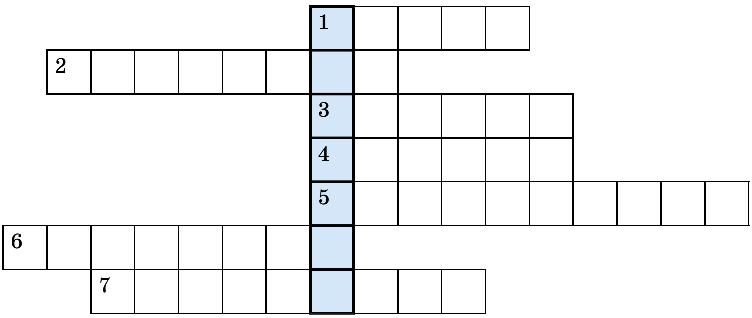
Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

75. Найдите периметр и площадь прямоугольника, стороны которого равны:

1) 5 см и 7 см;   2) 2 дм и 14 см.

Интересные задачки для неленивых

76. *Выдающиеся украинцы.* Впишите по горизонтали фамилии выдающихся украинцев (при необходимости используйте дополнительную литературу и Интернет) и получите в выделенном столбце имя древнегреческого философа, математика, религиозного и политического деятеля.



1. Выдающийся украинский ученый в области процессов сварки, доктор технических наук, Герой Украины.

2. Украинский политик, публицист, литературный критик, возглавлявший национально-демократическое движение конца 1980 – начала 1990-х годов, Герой Украины.

3. Украинский писатель, поэт, публицист, переводчик, ученый, общественный и политический деятель (1856–1916).

4. Выдающийся украинский врач мирового уровня, ученый в отраслях медицины, биокибернетики; его именем назван Институт сердечно-сосудистой хирургии, который он возглавлял в течение двадцати лет.

5. Политический деятель и публицист, организатор украинской науки; Председатель Центрального Совета Украинской Народной Республики.

6. Величайший украинский поэт, писатель, художник, общественный и политический деятель, фольклорист, этнограф.

7. Украинский просветитель-гуманист, философ, поэт, педагог.

§ 3. ПРЯМОУГОЛЬНИК И ЕГО СВОЙСТВА

***Прямоугольником* называют параллелограмм, у которого все углы прямые** (рис. 36)**.**

Так как прямоугольник является параллелограммом, то он имеет все *свойства параллелограмма*.

1. В прямоугольнике противолежащие стороны равны.
2. Периметр прямоугольника $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
3. Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам.

Кроме этих, прямоугольник имеет еще *свойства*.

4. Диагонали прямоугольника равны.

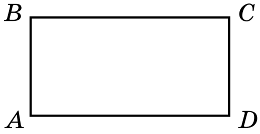


Рис. 36

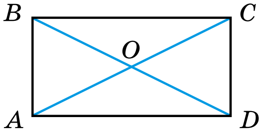


Рис. 37

Доказательство. Пусть дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 37). $\triangle ACD = \triangle DBA$ (по двум катетам). Поэтому $AC = BD$. ▲

5. Точка пересечения диагоналей прямоугольника равноудалена от всех его вершин.

Так как $AC = BD$, а $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 37), то, очевидно, что $AO = BO = OC = OD$.

Задача 1. Диагональ делит угол прямоугольника в отношении 2 : 3. Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника.

Решение. 1) Пусть $\angle ADO : \angle ODC = 2 : 3$ (рис. 37). Обозначим $\angle ADO = 2x$, $\angle ODC = 3x$. Получим уравнение: $2x + 3x = 90°$, откуда $x = 18°$. Следовательно, $\angle ADO = 2 \cdot 18° = 36°$; $\angle ODC = 3 \cdot 18° = 54°$.

2) Найдем $\angle COD$ – угол между диагоналями данного прямоугольника. $\triangle OCD$ – равнобедренный (так как $DO = OC$), поэтому $\angle OCD = \angle ODC = 54°$. В $\triangle OCD$: $COD = 180° - 2 \cdot 54° = 72°$.

Ответ. 72°.

Рассмотрим *признаки прямоугольника*.

Теорема (признаки прямоугольника). **Если у параллелограмма: 1) все углы равны, или 2) один угол прямой, или 3) диагонали равны, – то параллелограмм является прямоугольником.**

Доказательство. 1) Так как все углы параллелограмма равны, а их сумма – $360°$, то каждый из них равен $360° : 4 = 90°$. А значит параллелограмм является прямоугольником.

2) Пусть угол A параллелограмма $ABCD$ – прямой (рис. 36). Тогда $\angle C = \angle A = 90°$, $\angle B = \angle D = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$. Следовательно, все углы параллелограмма прямые, а значит он является прямоугольником.

3) Пусть у параллелограмма $ABCD$ диагонали AC и BD равны (рис. 37). AD – общая сторона треугольников ABD и DCA. Следовательно $\triangle ABD = \triangle DCA$ (по трем сторонам), откуда $\angle BAD = \angle CDA$. Но $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BCD = \angle BAD$. Получаем, что у параллелограмма все углы равны, а значит он является прямоугольником (по п. 1 этой теоремы). ▲

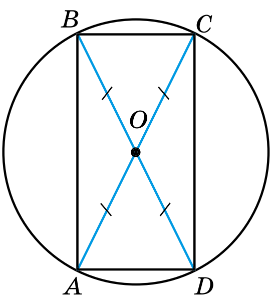


Рис. 38

Задача 2. В окружности с центром O проведены диаметры AC и BD. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

Решение. 1) Рассмотрим рис. 38. Так как $AO = OC$, $BO = OD$ (как радиусы), то, по признаку параллелограмма, $ABCD$ – параллелограмм.

2) Так как $AC = BD$ (как диаметры), то, по признаку прямоугольника, получаем, что параллелограмм $ABCD$ – прямоугольник.

Ответ. Прямоугольник.

1. Какую фигуру называют прямоугольником?
2. Сформулируйте и докажите свойства прямоугольника.
3. Сформулируйте и докажите признаки прямоугольника.

1 Начальный уровень

77. На каких из рисунков 39–43 изображен прямоугольник?

78. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ AC равна 5 см. Какова длина диагонали BD?

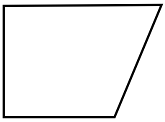


Рис. 39

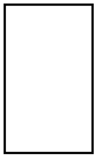


Рис. 40

Рис. 41

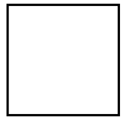


Рис. 42

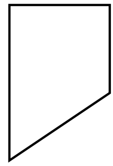


Рис. 43

79. Стороны прямоугольника равны 4 см и 7 см. Найдите его периметр.

80. Найдите периметр прямоугольника, стороны которого равны 2 см и 5 см.

81. Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали равны. Верно ли обратное утверждение? Приведите пример.

2 Средний уровень

82. Сторона BC прямоугольника $ABCD$ равна 8 см, а диагональ BD – 12 см. Найдите периметр треугольника BOC, если O – точка пересечения диагоналей прямоугольника.

83. Точка O – точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. $AC = 12$ см, периметр треугольника AOB равен 16 см. Найдите сторону AB.

84. (Устно.) Что можно сказать про вид параллелограмма, если:

1) ни один из его углов не является острым;
2) ни один из его углов не является тупым;
3) у него три равных между собой угла?

85. Докажите, что если у четырехугольника три угла прямые, то он – прямоугольник.

86. Докажите, что если у четырехугольника все углы равны, то он – прямоугольник.

87. Периметр прямоугольника равен 40 см. Найдите его стороны, если известно, что:

1) одна из них на 2 см больше другой;
2) стороны относятся как 2 : 3.

88. Периметр прямоугольника равен 50 см. Найдите его стороны, если известно, что:

1) одна из них на 5 см меньше другой;
2) стороны относятся как 4 : 1.

89. (Устно.) На рисунке 44 изображен прямоугольник $ABCD$. Найдите все углы, которые между собой равны.

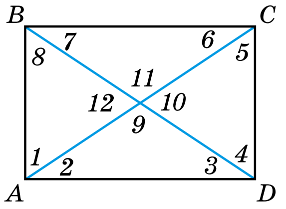


Рис. 44

90. Найдите по рисунку 44:

1) $\angle 3$, если $\angle 8 = 52°$;

2) $\angle 2$, если $\angle 10 = 40°$.

91. Найдите по рисунку 44:

1) $\angle 5$, если $\angle 2 = 37°$;

2) $\angle 12$, если $\angle 3 = 30°$.

92. Диагональ делит угол прямоугольника на два угла, один из которых на 20° больше, чем другой. Найдите эти углы.

3 Достаточный уровень

93. Докажите, что около прямоугольника можно описать окружность.

94. Найдите угол между меньшей стороной и диагональю прямоугольника, если он:

1) на 15° меньше угла между диагоналями, лежащего против меньшей стороны;

2) на 50° меньше угла между диагоналями, лежащего против большей стороны.

95. Найдите угол между большей стороной и диагональю прямоугольника, если он:

1) на 90° меньше угла между диагоналями, лежащего против большей стороны;

2) на 40° меньше угла между диагоналями, лежащего против меньшей стороны.

96. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, E – середина AB, $\angle CAB = 70°$. Найдите $\angle DOE$.

97. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. OP – биссектриса треугольника AOB, $\angle DOP = 130°$. Найдите $\angle CAB$.

98. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A диагонали пересекаются в точке O. На отрезках AO и OC отмечены точки M и N так, что $OM = OB$, $ON = OD$. Докажите, что $BMDN$ – прямоугольник.

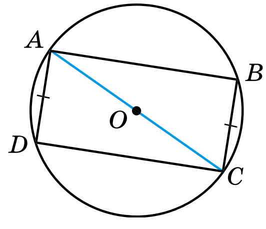


Рис. 45

99. Точки B и D принадлежат окружности с центром O, AC – диаметр окружности, $AD = BC$ (рис. 45). Докажите, что $ABCD$ – прямоугольник.

100. Перпендикуляры, проведенные из точки пересечения диагоналей прямоугольника к двум его соседним сторонам, равны 4 см и 9 см. Найдите периметр прямоугольника.

101. Биссектриса угла прямоугольника делит его сторону пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его большая сторона равна 20 см.

102. Биссектриса угла прямоугольника делит его сторону пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 8 дм.

4 Высокий уровень

103. На рисунке 46 $ABCD$ – прямоугольник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60°$.

1) $OK = a$. Найдите DB и AB;

2) $AC = m$. Найдите AK и CD.

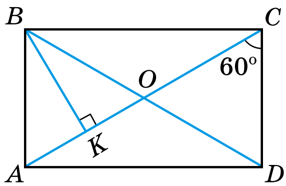


Рис. 46

104. На рисунке 46 $ABCD$ – прямоугольник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60°$, $AB = b$. Найдите BD и OK.

105. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 35$ см вписан прямоугольник $KLMN$ так, что точки K и L лежат на гипотенузе треугольника, а точки M и N – на катетах. $KL : KN = 3 : 2$. Найдите периметр прямоугольника.

106. В равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен 20 см, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол, а вершина, противолежащая этому углу, лежит на гипотенузе. Найдите периметр прямоугольника.

Упражнения для повторения

2 **107.** Из вершины тупого угла B параллелограмма $ABCD$ проведена высота BK. Найдите углы параллелограмма, если $BK = 0{,}5AB$.

3 **108.** 1) Градусная мера одного из углов треугольника равна среднему арифметическому градусных мер двух других углов треугольника. Найдите этот угол.

2) Градусная мера одного из углов четырехугольника равна среднему арифметическому трех других углов четырехугольника. Найдите этот угол.

4 **109.** Через точку P, принадлежащую внутренней области угла ABC, проведите прямую так, чтобы ее отрезок, лежащий между сторонами угла, делился точкой P пополам.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

110. Дано: $AB = BC = CD = DA$ (рис. 47).
Доказать: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

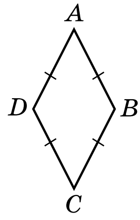


Рис. 47

Интересные задачки для неленивых

111. Можно ли разрезать квадрат размером 6×6 на прямоугольники размером 1×4?

§ 4. РОМБ И ЕГО СВОЙСТВА

Ромбом **называют параллелограмм, у которого все стороны равны** (рис. 48).

Так как ромб является параллелограммом, то он имеет все *свойства параллелограмма*.

1. Сумма любых двух соседних углов ромба равна 180°.
2. У ромба противолежащие углы равны.
3. Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.
4. Периметр ромба $P_{ABCD} = 4AB$.

Кроме того, ромб имеет еще и такое *свойство*.

5. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

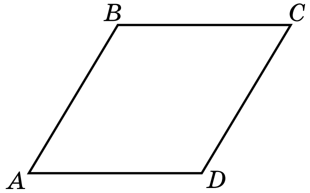


Рис. 48

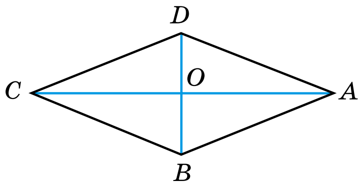


Рис. 49

Доказательство. Пусть AC и BD – диагонали ромба $ABCD$ (рис. 49), O – точка их пересечения. Поскольку $AB = AD$ и $DO = OB$, то AO – медиана равнобедренного треугольника ABD, проведенная к основанию BD. Поэтому AO является также высотой и биссектрисой треугольника ABD.

Следовательно, $AC \perp BD$ и $\angle DAO = \angle BAO$.

Аналогично можно доказать, что диагональ AC делит пополам угол DCB, а диагональ BD делит пополам углы ABC и ADC. ▲

Задача 1. Угол между высотой и диагональю ромба проведенными из одной вершины, равен 28°. Найдите углы ромба.

Решение. Пусть BD – диагональ ромба $ABCD$, а BK – его высота (рис. 50), $\angle KBD = 28°$.

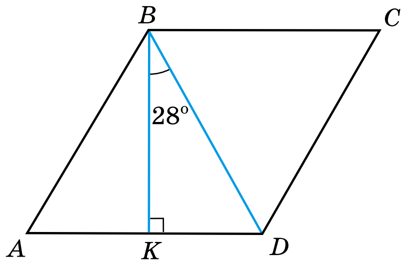


Рис. 50

1) В $\triangle BKD$ $\angle BDK = 90° - 28° = 62°$.

2) Так как BD делит угол ADC пополам, то $\angle ADC = 2 \cdot 62° = 124°$.

3) Тогда $\angle ABC = \angle ADC = 124°$; $\angle A = \angle C = 180° - 124° = 56°$.

Ответ. 124°, 56°, 124°, 56°.

Рассмотрим *признаки ромба*.

Теорема (признаки ромба). **Если в параллелограмме: 1) две соседние стороны равны, или 2) диагонали пересекаются под прямым углом, или 3) диагональ делит пополам углы параллелограмма, – то параллелограмм является ромбом.**

Доказательство. 1) Пусть $ABCD$ – параллелограмм (рис. 48). Так как $AB = AD$ (по условию) и $AB = CD$, $AD = BC$ (по свойству параллелограмма), то $AB = AD = BC = CD$. Следовательно, $ABCD$ – ромб.

2) Пусть $AC \perp BD$ (рис. 49). Поскольку $OB = OD$ (по свойству параллелограмма), то $\triangle AOB = \triangle AOD$ (по двум катетам). Следовательно, $AB = AD$. По п. 1 этой теоремы $ABCD$ – ромб.

3) Диагональ BD делит пополам угол D параллелограмма $ABCD$ (рис. 49), то есть $\angle ADB = \angle BDC$. Так как $AB \parallel DC$, BD – секущая, то $\angle ABD = \angle BDC$ (как внутренние накрест лежащие). Следовательно, $\angle ADB = \angle ABD$. Поэтому по признаку равнобедренного треугольника $\triangle ABD$ – равнобедренный и $AD = AB$. По п. 1 этой теоремы $ABCD$ – ромб. ▲

Задача 2. Докажите, что если в четырехугольнике все стороны равны, то этот четырехугольник – ромб.

Доказательство. Пусть $AB = BC = CD = DA$ (рис. 48).

1) Так как противолежащие стороны четырехугольника $ABCD$ попарно равны, то $ABCD$ – параллелограмм по признаку параллелограмма.

2) У параллелограмма $ABCD$ соседние стороны равны. Поэтому $ABCD$ – ромб (по признаку ромба). ▲

А еще раньше...

Слово «ромб» греческого происхождения, которое в древние времена означало вращающееся тело, веретено, волчок. Ромб тогда связывали с сечением веретена, на которое намотаны нити.

В «Началах» Евклида термин «ромб» встречается единожды, а свойства ромба Евклид вообще не рассматривал.

1. Какую фигуру называют ромбом?
2. Сформулируйте и докажите свойства ромба.
3. Сформулируйте и докажите признаки ромба.

1 Начальный уровень

112. (Устно.) Какие из четырехугольников на рисунках 51–55 являются ромбами?

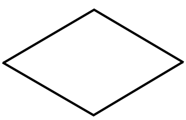


Рис. 51

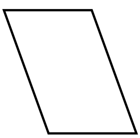


Рис. 52

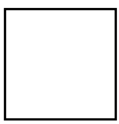


Рис. 53

Рис. 54

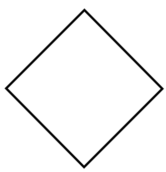


Рис. 55

113. Начертите ромб $ABCD$, у которого угол B тупой.

114. Начертите ромб $ABCD$, у которого угол A острый.

115. Периметр ромба равен 28 см. Найдите его сторону.

116. Сторона ромба равна 5 дм. Найдите его периметр.

117. Острый угол ромба равен 50°. Какой угол образует диагональ, проведенная из этого угла, со стороной ромба?

118. Тупой угол ромба равен 110°. Какой угол образует диагональ, проведенная из этого угла, со стороной ромба?

119. Диагональ ромба образует с его стороной угол 60°. Найдите тупой угол ромба.

120. Диагональ ромба образует с его стороной угол 20°. Найдите острый угол ромба.

2 Средний уровень

121. В ромбе $ABCD$ угол A равен 36°. Найдите углы треугольника AOB, где O – точка пересечения диагоналей ромба.

122. O – точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$, $\angle B = 118°$. Найдите углы треугольника BOC.

123. Сумма длин трех сторон ромба равна 15 см. Найдите его периметр.

124. Сумма длин двух сторон ромба равна 18 см. Найдите периметр ромба.

125. $ABCD$ – ромб, $\angle 2 = 66°$ (рис. 56). Найдите $\angle 1$.

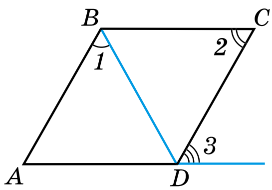


Рис. 56

126. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 58°$ (рис. 56). Найдите $\angle 2$.

127. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 55°$ (рис. 56). Найдите $\angle 3$.

128. $ABCD$ – ромб, $\angle 3 = 50°$ (рис. 56). Найдите $\angle 1$.

129. В ромбе $ABCD$ $AB = BD$. Найдите углы ромба.

130. (Устно.) Какие общие свойства имеют ромб и параллелограмм?

131. Найдите углы ромба, если:

1) сумма двух его углов равна 80°;

2) один из них на 20° больше другого.

132. Найдите углы ромба, если:

1) сумма двух его углов равна 210°;

2) один из них на 50° меньше другого.

133. (Устно.) Верно ли утверждение:

1) если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то он является ромбом;

2) если в четырехугольнике диагонали не взаимно перпендикулярны, то он не может быть ромбом;

3) существует ромб, являющийся прямоугольником;

4) ни один прямоугольник не является ромбом?

3 Достаточный уровень

134. Найдите углы ромба, если его сторона образует с диагоналями углы, разность которых равна $10°$.

135. Найдите углы ромба, если его сторона образует с диагоналями углы, которые относятся как $2 : 3$.

136. Постройте ромб:
1) по стороне и диагонали;
2) по диагоналям.

137. Постройте ромб по стороне и углу.

138. В ромбе $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN. Докажите, что $BM = BN$.

139. В ромбе $ABCD$ из вершин тупых углов проведены высоты BK и DL. Докажите, что $BK = DL$.

140. Высоты, проведенные из вершины острого угла ромба, образуют между собой угол $110°$. Найдите углы ромба.

141. Высоты, проведенные из вершины тупого угла ромба, образуют между собой угол $50°$. Найдите углы ромба.

4 Высокий уровень

142. Диагональ ромба, проведенная из вершины тупого угла, образует с высотой, проведенной из этой же вершины, угол $30°$. Меньшая диагональ ромба равна a см. Найдите:
1) углы ромба; 2) периметр ромба.

143. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам. Найдите:
1) углы ромба;
2) периметр ромба, если его меньшая диагональ равна b см.

144. На диагонали AC ромба $ABCD$ отметили точки M и N так, что $AM = CN$. Докажите, что четырехугольник $DMBN$ является ромбом (рассмотрите два случая расположения точек M и N).

145. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

146. В равносторонний треугольник ABC вписан ромб $AMNK$ так, что треугольник и ромб имеют общий угол A, а точка N лежит на стороне BC. Найдите периметр треугольника, если периметр ромба равен 40 см.

Упражнения для повторения

147. Стороны параллелограмма относятся как 5 : 2. Найдите периметр параллелограмма, если разность этих сторон равна 15 см.

148. Один из углов треугольника равен сумме двух других. Найдите наибольшую сторону этого треугольника, если медиана, проведенная к ней, равна 5 см.

149. Периметр треугольника равен $2p$ см. Может ли одна из его сторон равняться:
1) $(p - 1)$ см; 2) p см; 3) $(p + 1)$ см?

150. В четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла A пересекает биссектрисы углов B и D под прямым углом. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

151. Найдите периметр и площадь квадрата, сторона которого равна: 1) 5 см; 2) 2,1 дм; 3) $\frac{3}{4}$ м; 4) $1\frac{1}{2}$ дм.

Интересные задачки для неленивых

152. (*Киевская городская олимпиада, 1987 г.*) Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке K. Докажите, что отрезок AK длиннее диаметра окружности.

§ 5. КВАДРАТ И ЕГО СВОЙСТВА

Квадратом **называют прямоугольник, у которого все стороны равны.**

На рисунке 57 изображен квадрат $ABCD$. Так как прямоугольник является параллелограммом, то квадрат – параллелограмм, у которого все стороны равны, то есть он является ромбом. Таким образом, квадрат имеет свойства и прямоугольника, и ромба.

Сформулируем *свойства квадрата*.

1. Все углы квадрата прямые.
2. Периметр квадрата $P_{ABCD} = 4AB$.
3. Диагонали квадрата равны (рис. 58).

4. Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам (рис. 58).
5. Диагонали квадрата делят его углы пополам, то есть образуют углы по 45° со сторонами квадрата (рис. 58).
6. Точка пересечения диагоналей квадрата равноудалена от всех его вершин: *AO* = *BO* = *CO* = *DO*.

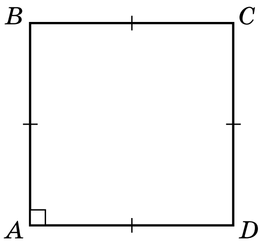


Рис. 57

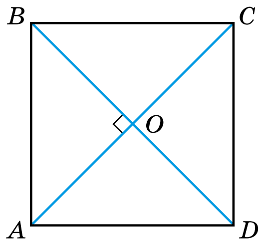


Рис. 58

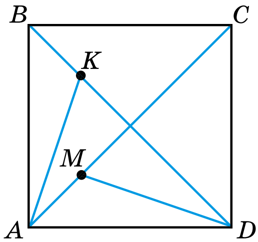


Рис. 59

Задача 1. Точки K и M принадлежат соответственно диагоналям BD и AC квадрата $ABCD$, причем $AM = \frac{1}{4}AC$, $BK = \frac{1}{4}BD$. Докажите, что $\triangle ADM = \triangle BAK$ (рис. 59).

Доказательство. 1) $\angle MAD = \angle ABK = 45°$ (по свойству квадрата), $AD = AB$ (как стороны квадрата).

2) Так как $AC = BD$ (по свойству диагоналей квадрата) и $AM = \frac{1}{4}AC$, $BK = \frac{1}{4}BD$, то $AM = BK$.

3) Тогда $\triangle ADM = \triangle BAK$ (по двум сторонам и углу между ними). ▲

Рассмотрим *признаки квадрата*.

Теорема (признаки квадрата). **1) Если у прямоугольника диагонали взаимно перпендикулярны, то он является квадратом. 2) Если у ромба диагонали равны, то он является квадратом.**

Доказательство. 1) Данный прямоугольник является параллелограммом, а параллелограмм со взаимно перпендикулярными диагоналями – ромбом. Следовательно, у данного прямоугольника все стороны равны, поэтому он является квадратом.

2) Данный ромб является параллелограммом, а параллелограмм с равными диагоналями – прямоугольником. Следовательно, у данного ромба все углы прямые, поэтому он является квадратом. ▲

Задача 2. Докажите, что если в четырехугольнике все стороны равны и все углы равны, то этот четырехугольник – квадрат.

Доказательство. 1) Так как в четырехугольнике все углы равны, то, по признаку прямоугольника, он является прямоугольником.

2) Так как в прямоугольнике все стороны равны, то он является квадратом. ▲

А еще раньше...

Термин «квадрат» происходит от латинского *quadratum* (*quadrate* – сделать четырехугольным).

Известный историк математики Д. Д. Мордухай-Болтовский (1876–1952) писал: «Первым четырехугольником, с которым познакомилась геометрия, был квадрат».

1. Какую фигуру называют квадратом?
2. Сформулируйте свойства квадрата.
3. Сформулируйте и докажите признаки квадрата.

1 Начальный уровень

153. Периметр квадрата равен 20 см. Найдите его сторону.

154. Сторона квадрата равна 7 дм. Найдите его периметр.

155. (Устно.) На рисунке 58 изображен квадрат $ABCD$. Найдите на этом рисунке равные отрезки.

156. Если четырехугольник является квадратом, то его диагонали равны и взаимно перпендикулярны. Верно ли обратное утверждение? Приведите пример.

2 Средний уровень

157. Точка пересечения диагоналей квадрата удалена от одной из его вершин на 2 см. Найдите сумму длин диагоналей этого квадрата.

158. Сумма длин диагоналей квадрата равна 32 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его вершин.

159. Сумма длин двух сторон квадрата равна 10 см. Найдите периметр квадрата.

160. Сумма длин трех сторон квадрата равна 18 дм. Найдите периметр квадрата.

161. (Устно.) Какие общие свойства у квадрата и ромба?

162. (Устно.) Какие общие свойства у квадрата и прямоугольника?

163. Разность периметра квадрата и его стороны равна 18 см. Найдите сторону квадрата и его периметр.

164. Соседние стороны прямоугольника равны. Докажите, что он является квадратом.

165. Один из углов ромба – прямой. Докажите, что этот ромб является квадратом.

166. (Устно.) Верно ли утверждение:
1) каждый квадрат является прямоугольником;
2) существует квадрат, который не является ромбом;
3) каждый ромб является квадратом;
4) каждый квадрат является ромбом;
5) любой прямоугольник является квадратом;
6) отношение периметра квадрата к его стороне является одинаковым для всех квадратов?

167. $ABCD$ – квадрат, $EF \perp BD$ (рис. 60). Найдите $\angle BFE$.

168. $ABCD$ – квадрат, $\angle BOC = 70°$ (рис. 61). Найдите $\angle OKA$.

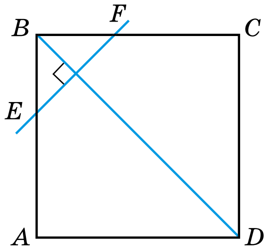


Рис. 60

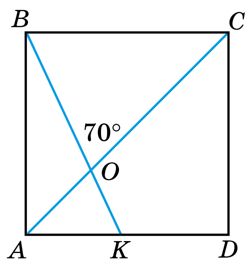


Рис. 61

3 Достаточный уровень

169. Постройте квадрат:
1) по его периметру; 2) по его диагонали.

170. Постройте квадрат по сумме его диагоналей.

171. Точка пересечения диагоналей квадрата удалена от его стороны на 3 см. Найдите периметр квадрата.

172. Периметр квадрата равен 32 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его сторон.

173. $ABCD$ – квадрат, $AE = FC$ (рис. 62). Докажите, что $BEDF$ – ромб.

174. $ABCD$ – квадрат, $AE = AF = CG = CH$ (рис. 63). Докажите, что $EFGH$ – прямоугольник.

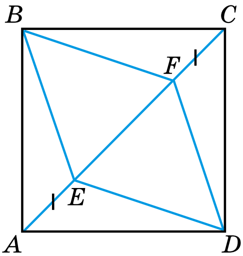


Рис. 62

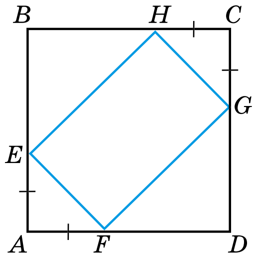


Рис. 63

175. Из точки A к окружности с центром O проведены две взаимно перпендикулярные касательные AB и AC, B и C – точки касания. Докажите, что $ABOC$ – квадрат.

4 Высокий уровень

176. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) вписан квадрат $CMNK$ так, что прямой угол у них общий, а точка N принадлежит стороне AB. Катет треугольника равен b см. Найдите периметр квадрата.

177. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) вписан квадрат $KMNL$ так, что точки K и M лежат на гипотенузе треугольника, а точки L и N – на катетах AC и BC соответственно. Периметр квадрата равен 12 см. Найдите гипотенузу треугольника.

178. Вне квадрата на его сторонах построены равносторонние треугольники. Докажите, что вершины треугольников, не являющиеся вершинами данного квадрата, являются вершинами другого квадрата.

Упражнения для повторения

2 **179.** В ромбе $ABCD$ диагональ образует с его стороной угол 30°. Найдите углы ромба.

3 **180.** Найдите углы четырехугольника $ABCD$, у которого $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 1 : 3 : 4 : 10$. Выпуклым или невыпуклым является этот четырехугольник?

181. Биссектриса угла B прямоугольника $ABCD$ делит сторону AD на отрезки AK и KD так, что $AK : KD = 3 : 5$. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 110 см.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

182. 1) Начертите четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие – непараллельны.

2) Какое наибольшее количество острых углов может быть в таком четырехугольнике?

Интересные задачки для неленивых

183. В 12 часов часовая и минутная стрелки совпадают. Через какое наименьшее количество минут стрелки опять совпадут?

Домашняя самостоятельная работа № 1

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. Укажите отрезок, являющийся диагональю четырехугольника $ABCD$.

А. AB; **Б.** BD; **В.** BC; **Г.** AD.

2. Найдите тупой угол параллелограмма, если острый его угол равен 35°.

А. 125°; **Б.** 135°; **В.** 145°; **Г.** 155°.

3. Найдите сторону квадрата, если его периметр равен 36 см.

А. 4 см; **Б.** 6 см; **В.** 9 см; **Г.** 12 см.

4. Периметр прямоугольника равен 24 см, а одна из его сторон на 2 см больше другой. Найдите длину меньшей стороны прямоугольника.

А. 5 см; **Б.** 6 см; **В.** 7 см; **Г.** 8 см.

5. $ABCD$ – ромб, $\angle A = 50°$ (рис. 64). Найдите $\angle ABD$.

А. 55°; **Б.** 75°; **В.** 50°; **Г.** 65°.

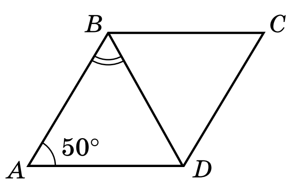


Рис. 64

6. Укажите правильное утверждение:

А. если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то он является ромбом;

Б. отношение периметра ромба к его стороне одинаково для всех ромбов;

В. если диагонали четырехугольника равны, то он – прямоугольник;

Г. отношение периметра прямоугольника, не являющегося квадратом, к его наибольшей стороне одинаково для всех прямоугольников.

3 **7.** Найдите наибольший угол четырехугольника, градусные меры углов которого пропорциональны числам 2, 3, 5 и 8.

А. 120°; **Б.** 130°; **В.** 150°; **Г.** 160°.

8. Высоты, проведенные из вершины тупого угла параллелограмма, образуют между собой угол 30°. Найдите тупой угол параллелограмма.

А. 120°; **Б.** 130°; **В.** 150°; **Г.** 160°.

9. Найдите острый угол ромба, если его сторона образует с диагоналями углы, разность которых равна 40°.

А. 25°; **Б.** 30°; **В.** 50°; **Г.** 60°.

4 **10.** Биссектриса угла D параллелограмма $ABCD$ делит сторону AB на отрезки AK и KB так, что $AK : KB = 1 : 3$. Найдите AB, если периметр параллелограмма равен 60 см.

А. 26 см; **Б.** 24 см; **В.** 20 см; **Г.** 15 см.

11. Из вершины тупого угла A ромба $ABCD$ проведена высота AK. $\angle CAK = 30°$, $AC = 6$ см. Найдите периметр ромба.

А. 18 см; **Б.** 24 см; **В.** 30 см; **Г.** 36 см.

12. В $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$, $AC = BC$) вписан квадрат $KLMN$ так, что $K \in AB$; $L \in AB$; $M \in CB$; $N \in AC$. Найдите периметр квадрата, если $AB = 12$ см.

А. 24 см; **Б.** 20 см; **В.** 12 см; **Г.** 16 см.

Задания для проверки знаний к § 1–5

1 **1.** Начертите четырехугольник $MNPL$ и проведите в нем диагонали.

2. Найдите углы параллелограмма, если один из них равен 80°.

3. Найдите периметр квадрата, если его сторона равна 7 см.

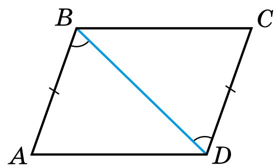


Рис. 65

2 **4.** Периметр прямоугольника равен 18 см. Найдите его стороны, если одна из них на 1 см больше, чем другая.

5. $ABCD$ – ромб. $\angle ABD = 50°$. Найдите углы ромба.

6. На рисунке 65 $\angle ABD = \angle BDC$, $AB = DC$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

7. Найдите углы четырехугольника, если они пропорциональны числам 2, 3, 4, 6. Какой это четырехугольник – выпуклый или невыпуклый?

8. Высоты, проведенные из вершины острого угла ромба, образуют между собой угол 120°. Найдите углы ромба.

9. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ делит сторону BC на отрезки BK и KC так, что $BK : KC = 4 : 3$. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 88 см.

Дополнительные задания

10. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 23$ см вписан прямоугольник $KLMN$ так, что точки K и L принадлежат гипотенузе треугольника, а точки M и N – катетам. Сторона KL прямоугольника на 2 см больше стороны LM. Найдите периметр прямоугольника.

11. Из вершины тупого угла B ромба $ABCD$ проведена высота BM, $\angle DBM = 30°$. Периметр ромба равен 40 см. Найдите меньшую диагональ ромба.

§ 6. ТРАПЕЦИЯ

***Трапецией* называют четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.**

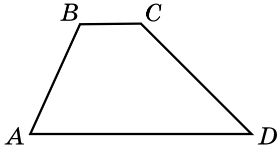


Рис. 66

На рисунке 66 изображена трапеция $ABCD$. Параллельные стороны трапеции называют ее ***основаниями***, а не параллельные – ***боковыми сторонами***. На рисунке 66 AD и BC – основания трапеции, AB и CD – ее боковые стороны.

Рассмотрим некоторые *свойства трапеции*.

1. Сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180°.

Так как $AD \parallel BC$, то $\angle A + \angle B = 180°$ (как сумма внутренних односторонних углов). Аналогично $\angle C + \angle D = 180°$. ▲

2. Трапеция является выпуклым четырехугольником.

Поскольку $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle A < 180°$, $\angle B < 180°$. Аналогично $\angle C < 180°$, $\angle D < 180°$. Следовательно, трапеция – выпуклый четырехугольник. ▲

Высотой трапеции **называют перпендикуляр, проведенный из любой точки основания трапеции к прямой, содержащей другое ее основание.**

Как правило, высоту трапеции проводят из ее вершины. На рисунке 67 BK – высота трапеции $ABCD$.

Трапецию называют ***прямоугольной***, если один из ее углов – прямой. На рисунке 68 – прямоугольная трапеция $ABCD$ ($\angle A = 90°$). Очевидно, что $\angle B = 90°$, AB является меньшей боковой стороной прямоугольной трапеции и ее высотой.

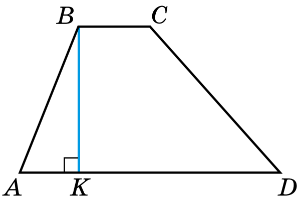


Рис. 67

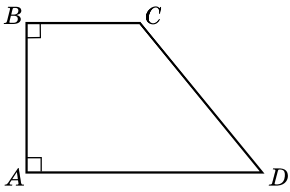


Рис. 68

Трапецию называют ***равнобокой***, если ее боковые стороны равны. На рисунке 69 – равнобокая трапеция $ABCD$.

Рассмотрим некоторые важные *свойства равнобокой трапеции*.

1. В равнобокой трапеции углы при основании равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = CD$. Проведем высоты трапеции BK и CM из вершин ее тупых углов B и C (рис. 70). Получили прямоугольник $BKMC$. Поэтому $BK = CM$.

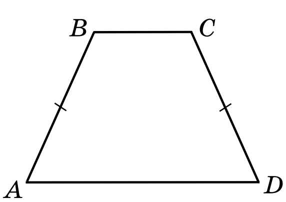


Рис. 69

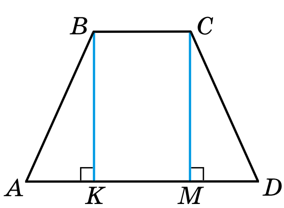


Рис. 70

2) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (по катету и гипотенузе). Поэтому $\angle BAD = \angle CDA$.

3) Также $\angle ABK = \angle DCM$. Но $\angle KBC = \angle MCB = 90°$, поэтому $\angle ABC = \angle ABK + 90°$ и $\angle DCB = \angle DCM + 90°$. Следовательно, $\angle ABC = \angle DCB$. ▲

2. Диагонали равнобокой трапеции равны.

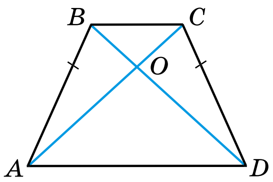


Рис. 71

Доказательство. Рассмотрим рисунок 71. $\angle BAD = \angle CDA$ (как углы при основании равнобокой трапеции), $AB = DC$, AD – общая сторона треугольников ABD и DCA. Поэтому $\triangle ABD = \triangle DCA$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $AC = BD$. ▲

Задача. O – точка пересечения диагоналей равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 71). Докажите, что $AO = OD$, $BO = OC$.

Доказательство. $\triangle ABD = \triangle DCA$ (доказано выше). Поэтому $\angle ODA = \angle OAD$. По признаку равнобедренного треугольника $\triangle AOD$ – равнобедренный. Поэтому $AO = OD$. Поскольку $AC = BD$ и $AO = OD$, то $OC = BO$ (так как $OC = AC - AO$, $BO = BD - OD$). ▲

Теорема (признак равнобокой трапеции). **Если в трапеции углы при основании равны, то трапеция – равнобокая.**

Доказательство. 1) Пусть в трапеции $ABCD$ углы при большем основании AD равны (рис. 70), то есть $\angle BAD = \angle CDA$. Проведем высоты BK и CM, они равны.

2) Тогда $\triangle BAK = \triangle CDM$ (по катету и противолежащему углу). Следовательно, $AB = DC$. Таким образом, трапеция равнобокая, что и требовалось доказать. ▲

А еще раньше...

Термин «трапеция» греческого происхождения (по-гречески «трапедзион» означает «столик», в частности столик для обеда; слова «трапеция» и «трапеза» – однокоренные).

В «Началах» Евклид под термином «трапеция» подразумевал любой четырехугольник, не являющийся параллелограммом. Большинство математиков Средневековья использовали термин «трапеция» с тем же смыслом.

Трапеция в современной трактовке впервые встречается у древнегреческого математика Посидония (I в.), но начиная только с XVIII в. этот термин стал общепринятым для четырехугольников, у которых две стороны параллельны, а две другие – не параллельны.

1. Какую фигуру называют трапецией?
2. Что называют основаниями трапеции, боковыми сторонами трапеции?

3. Сформулируйте свойства трапеции.
4. Что такое высота трапеции?
5. Какую трапецию называют прямоугольной, а какую – равнобокой?
6. Сформулируйте и докажите свойства равнобокой трапеции.
7. Сформулируйте и докажите признак равнобокой трапеции.

1 Начальный уровень

184. На каких из рисунков 72–76 изображена трапеция?

Рис. 72

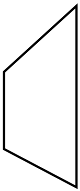


Рис. 73

Рис. 74

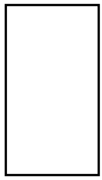


Рис. 75

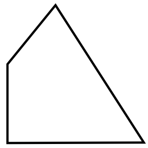


Рис. 76

185. Начертите трапецию $PKML$ ($PK \parallel ML$). Укажите основания трапеции, боковые стороны трапеции.

186. Начертите трапецию $DMFK$ ($DM \parallel FK$). Укажите основания трапеции, боковые стороны трапеции.

187. Начертите прямоугольную трапецию $ABCD$, у которой $\angle A = \angle B = 90°$.

188. Начертите равнобокую трапецию $ABCD$ ($AB = CD$).

189. Два угла трапеции равны 20° и 100°. Найдите два других ее угла.

190. Два угла трапеции равны 110° и 40°. Найдите два других ее угла.

2 Средний уровень

191. Основания равнобокой трапеции равны 8 см и 10 см, а периметр – 28 см. Найдите боковую сторону трапеции.

192. Основания равнобокой трапеции равны 7 см и 5 см, а боковая сторона – 3 см. Найдите периметр трапеции.

193. Существует ли трапеция, у которой два противолежащих угла:

1) острые; 2) прямые; 3) тупые?

В случае положительного ответа начертите такую трапецию.

194. Существует ли трапеция, у которой:
1) основания равны; 2) три стороны равны?
В случае положительного ответа начертите такую трапецию.

195. Существует ли трапеция, у которой:
1) три угла прямые; 2) два противолежащих угла равны?
В случае положительного ответа начертите такую трапецию.

196. Стороны AD и BC – основания трапеции $ABCD$. Докажите, что $\angle CAD = \angle ACB$.

197. Могут ли углы трапеции, взятые последовательно, относиться как: 1) $2 : 3 : 4 : 1$; 2) $2 : 3 : 5 : 2$?

198. Могут ли углы трапеции, взятые последовательно, относиться как: 1) $3 : 1 : 2 : 2$; 2) $3 : 1 : 2 : 4$?

199. В трапеции, не являющейся равнобокой, два угла равны $40°$ и $140°$. Можно ли найти два других ее угла?

200. Высота равнобокой трапеции, проведенная из вершины острого угла, образует с боковой стороной угол $38°$. Найдите углы трапеции.

201. Высота равнобокой трапеции, проведенная из вершины тупого угла, образует с боковой стороной угол $56°$. Найдите углы трапеции.

202. В трапеции $ABCD$ AB – большее основание. Прямые BC и AD пересекаются в точке E. $\angle ECD = 40°$, $\angle BEA = 70°$. Найдите углы трапеции.

203. В трапеции $ABCD$ BC – меньшее основание. На отрезке AD выбрали точку E так, что $BE \parallel CD$; $\angle ABE = 60°$, $\angle BEA = 40°$. Найдите углы трапеции.

204. В прямоугольной трапеции острый угол вдвое меньше тупого. Найдите углы трапеции.

205. В прямоугольной трапеции тупой угол на $40°$ больше, чем острый. Найдите углы трапеции.

206. В равнобокой трапеции боковая сторона вдвое больше высоты. Найдите углы трапеции.

3 Достаточный уровень

207. В трапеции $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180°$. Определите вид трапеции.

208. В прямоугольной трапеции острый угол равен $60°$. Большая боковая сторона равна большему основанию и равна 16 см. Найдите меньшее основание.

209. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45°. Меньшая боковая сторона равна меньшему основанию и равна 18 см. Найдите большее основание.

210. В равнобокой трапеции диагональ равна большему основанию и образует с ним угол 40°. Найдите углы трапеции.

211. В равнобокой трапеции боковая сторона равна меньшему основанию, а диагональ образует с этим основанием угол 20°. Найдите углы трапеции.

212. Диагональ AC трапеции $ABCD$ делит угол A пополам. Докажите, что боковая сторона AB равна основанию BC.

213. O – точка пересечения биссектрис углов A и B трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Докажите, что $\angle AOB = 90°$.

214. BK и CM – высоты равнобокой трапеции $ABCD$, проведенные из вершин ее тупых углов, $AD = a$, $BC = b$. Докажите, что $AK = MD = \frac{a-b}{2}$; $AM = KD = \frac{a+b}{2}$.

215. Высота равнобокой трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание трапеции на отрезки 2 см и 7 см. Найдите основания трапеции.

4 Высокий уровень

216. (*Признак равнобокой трапеции*). Если в трапеции диагонали равны, то она – равнобокая. Докажите.

217. Меньшее основание равнобокой трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.

218. В равнобокой трапеции $ABCD$ AD – большее основание. $AD = CD$, $\angle BAC = 18°$. Найдите углы трапеции.

219. Основания равнобокой трапеции равны a и b, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что высота трапеции равна $\frac{a+b}{2}$.

220. В прямоугольной трапеции острый угол и угол между меньшей диагональю и меньшим основанием равны по 60°. Найдите отношение оснований трапеции.

221. В прямоугольной трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне, а тупой угол втрое больше, чем острый. Найдите отношение оснований.

222. Постройте трапецию по основаниям a и b ($a > b$) и боковым сторонам c и d.

Упражнения для повторения

223. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 75°. Найдите внешний угол при вершине треугольника.

224. Тупой угол ромба равен 120°, а его меньшая диагональ – 5 см. Найдите периметр ромба.

225. Докажите, что параллелограмм, у которого все высоты равны, является ромбом.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

226. Начертите окружность, радиус которой 3 см. Проведите в ней диаметр и хорду.

227. Точка O – центр окружности (рис. 77). Найдите:
1) $\angle COB$, если $\angle CAO = 50°$;
2) $\angle CAO$, если $\angle COB = 110°$.

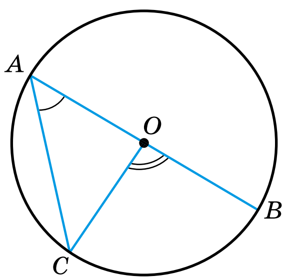


Рис. 77

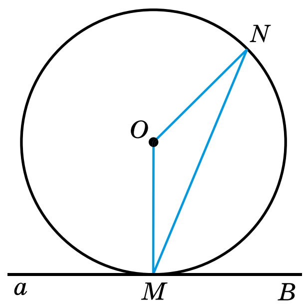


Рис. 78

228. Точка O – центр окружности, а точка M – точка касания прямой a с окружностью (рис. 78). Найдите:
1) $\angle NMB$, если $\angle MON = 140°$;
2) $\angle MON$, если $\angle BMN = 65°$.

Интересные задачки для нелентивых

229. Четыре магазина некоего предпринимателя расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где ему следует разместить товарный склад, чтобы сумма расстояний от склада до всех магазинов была наименьшей?

§ 7. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

Центральным углом **называют угол с вершиной в центре окружности.**

На рисунке 79 $\angle AOB$ – центральный угол, стороны которого пересекают окружность в точках A и B. Точки A и B разбивают окружность на две дуги. Часть окружности, лежащую внутри угла, называют *дугой окружности*, соответствующей этому центральному углу. Если центральный угол меньше развернутого, то соответствующая ему дуга меньше полуокружности (на рисунке 79 она выделена цветом). Если центральный угол больше развернутого, то соответствующая ему дуга больше полуокружности. Развернутому углу соответствует дуга, являющаяся полуокружностью. Дугу обозначают символом $\smile$, который записывают перед названием дуги или над ним. Чтобы уточнить, о какой именно из двух дуг, на которые центральный угол разделил окружность, идет речь, на каждой из них отмечают произвольную точку, отличную от концов дуги. Например, M и N (рис. 79). Тогда эти дуги можно записать так: $\smile AMB$ (или $\overset{\frown}{AMB}$) и $\smile ANB$ (или $\overset{\frown}{ANB}$). Если понятно, о какой именно дуге идет речь, то для ее обозначения достаточно указать лишь концы дуги, например $\overset{\frown}{AB}$ (или $\smile AB$).

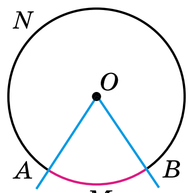


Рис. 79

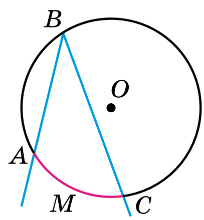


Рис. 80

Дугу окружности можно измерять в градусах.

Градусной мерой дуги окружности **называют градусную меру соответствующего ей центрального угла.**

Например, если $\angle AOB = 70°$, то $\overset{\frown}{AMB} = 70°$ (рис. 79).

Очевидно, что градусная мера дуги, являющаяся полуокружностью, равна $180°$, а дуги, являющейся окружностью, – $360°$. На рисунке 79: $\overset{\frown}{ANB} = 360° - 70° = 290°$.

Вписанным углом **называют угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.**

На рисунке 80 стороны вписанного угла ABC пересекают окружность в точках A и C. Говорят, что этот угол *опирается на дугу AMC*.

Очевидно, что точки пересечения сторон вписанного угла с окружностью делят ее на две дуги. Той, на которую опирается вписанный угол, будет дуга, не содержащая его вершину. Например, на рисунке 80 стороны вписанного угла ABC делят окружность на две дуги: $\overset{\frown}{ABC}$ и $\overset{\frown}{AMC}$. Так как $\overset{\frown}{AMC}$ не содержит вершины угла (точки B), то является дугой, на которую опирается вписанный угол ABC. Эта дуга выделена цветом.

Т е о р е м а (о вписанном угле). **Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\angle ABC$ является вписанным в окружность с центром O и опирается на дугу AMC (рис. 80). Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$. Рассмотрим три возможных положения центра окружности относительно вписанного угла.

1) Пусть центр окружности – точка O – принадлежит одной из сторон угла, например BC (рис. 81). Центральный угол AOC является внешним углом треугольника AOB. Тогда, по свойству внешнего угла, $\angle AOC = \angle ABO + \angle OAB$. Но $\triangle AOB$ – равнобедренный ($AO = OB$ как радиусы), поэтому $\angle ABO = \angle OAB$. Следовательно, $\angle AOC = 2\angle ABO$, то есть $\angle ABC = \angle ABO = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOC}$. Но $\angle AOC = \overset{\frown}{AMC}$. Таким образом, $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOC}$.

2) Пусть центр окружности лежит внутри вписанного угла (рис. 82). Проведем луч BO, пересекающий окружность в точке L. Тогда $\angle ABC = \angle ABL + \angle LBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AL} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{LC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AL} + \overset{\frown}{LC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$.

3) Пусть центр окружности лежит вне вписанного угла (рис. 83). Тогда $\angle ABC = \angle ABL - \angle CBL = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AL} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{LC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AL} - \overset{\frown}{LC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$. ▲

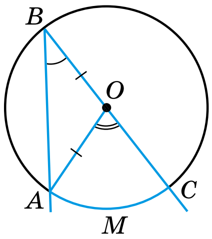


Рис. 81

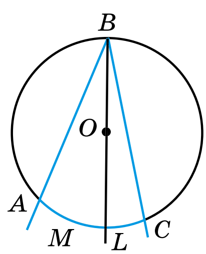


Рис. 82

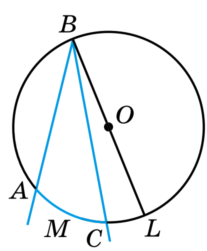


Рис. 83

С л е д с т в и е 1. **Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны** (рис. 84).

С л е д с т в и е 2. **Вписанный угол, опирающийся на диаметр, – прямой** (рис. 85).

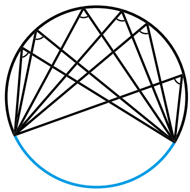


Рис. 84

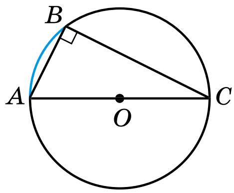


Рис. 85

Задача 1. Докажите, что угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг окружности, одна из которых лежит между сторонами угла, а вторая – между их продолжениями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\angle AFC$ с вершиной внутри круга (рис. 86). Докажем, что $\angle AFC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$.

$\angle AFC$ – внешний угол треугольника BCF, поэтому:

$\angle AFC = \angle FBC + \angle FCB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$. ▲

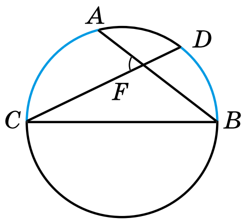


Рис. 86

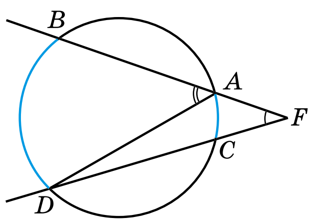


Рис. 87

Задача 2. Докажите, что угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, измеряется полуразностью большей и меньшей дуг окружности, лежащих между его сторонами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\angle BFD$, вершина которого лежит вне круга, а FB и FD – секущие (рис. 87). Докажем, что $\angle DFB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$.

$\angle BAD$ – внешний угол треугольника ADF, поэтому:

$\angle DAB = \angle ADC + \angle DFB$; то есть $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \angle DFB$.

Поэтому $\angle DFB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$. ▲

А еще раньше...

Доказательство теоремы о вписанном угле встречается в «Началах» Евклида. Но еще раньше этот факт, как предположение, впервые высказал Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.).

О том, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым, было известно вавилонянам 4000 лет тому назад, а первое доказательство этого факта приписывают Фалесу Милетскому.

1. Какой угол называют центральным?
2. Что называют градусной мерой дуги окружности?
3. Какой угол называют вписанным?
4. Сформулируйте и докажите теорему о вписанном угле.

1 Начальный уровень

230. (Устно.) Какие из углов на рисунке 88 являются вписанными в окружность?

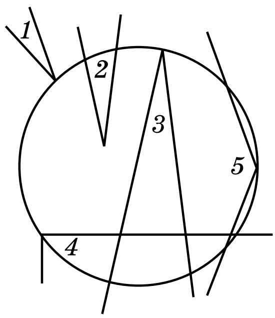


Рис. 88

231. Определите градусную меру угла, вписанного в окружность, если соответствующий ему центральный угол равен: 1) $70°$; 2) $190°$.

232. Определите градусную меру центрального угла, если градусная мера соответствующего ему вписанного угла равна: 1) $20°$; 2) $100°$.

233. Точки A и B принадлежат окружности и лежат по одну сторону от хорды CD. Найдите $\angle CAD$, если $\angle CBD = 55°$.

2 Средний уровень

234. Точки A и B принадлежат окружности и лежат по разные стороны от хорды MN. Докажите, что $\angle MAN + \angle MBN = 180°$.

235. Точки M и N принадлежат окружности и лежат по разные стороны от хорды AB. Найдите $\angle AMB$, если $\angle ANB = 70°$.

236. Точка P окружности и ее центр O лежат по разные стороны от хорды CD. Найдите $\angle COD$, если $\angle CPD = 126°$.

237. Точка A окружности и ее центр O лежат по разные стороны от хорды LK. Найдите $\angle LAK$, если $\angle LOK = 128°$.

238. Хорда разбивает окружность на две дуги в отношении 1 : 2. Найдите градусные меры вписанных углов, опирающихся на эти дуги.

3 Достаточный уровень

239. Хорда AB равна радиусу окружности. Точка C окружности и ее центр лежат по одну сторону от хорды AB. Найдите $\angle ACB$.

240. Хорды AD и BC пересекаются в точке F. $\angle ABC = 20°$, $\angle BCD = 80°$. Найдите градусную меру угла AFB.

241. Хорды AB и CD пересекаются в точке M. $\angle ABC = 35°$, $\angle BAD = 55°$. Докажите, что хорды AB и CD взаимно перпендикулярны.

242. O – центр окружности, $\angle MBA = 50°$ (рис. 89). Найдите x.

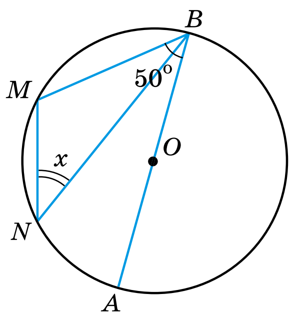


Рис. 89

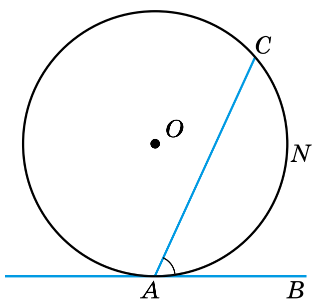


Рис. 90

4 Высокий уровень

243. Докажите, что угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания (рис. 90), равен половине дуги, лежащей между сторонами угла, то есть $\angle CAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CNA}$.

244. Равнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. $\angle AOB = 80°$. Найдите углы треугольника ABC. Сколько решений имеет задача?

245. Равнобедренный треугольник MNK вписан в окружность с центром в точке O. $\angle MOK = 100°$. Найдите углы треугольника MNK. Сколько решений имеет задача?

246. Найдите геометрическое место вершин прямоугольных треугольников с общей гипотенузой.

Упражнения для повторения

247. В прямоугольной трапеции большая боковая сторона вдвое больше меньшей. Найдите углы трапеции.

248. Стороны параллелограмма равны a и b ($a > b$). Найдите отрезки, на которые биссектриса острого угла делит его большую сторону.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

249. Из точки A к окружности проведены две касательные, B и C – точки касания (рис. 91). Найдите длины отрезков AB и AC касательных, если их сумма равна 16 см.

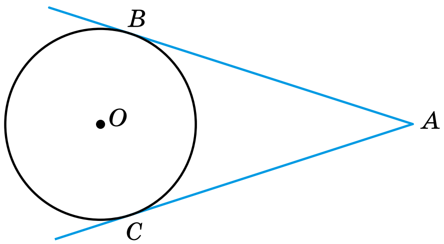


Рис. 91

Интересные задачки для неленивых

250. В каждой клетке прямоугольной доски размером 2017×2019 клеток сидит жук. По сигналу все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется свободная клетка?

§ 8. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

***Четырехугольник* называют *вписанным в окружность*, если все его вершины лежат на окружности. *Окружность* при этом называют *описанной* около четырехугольника** (рис. 92).

Теорема 1 (свойство углов вписанного четырехугольника). **Сумма противолежащих углов вписанного четырехугольника равна 180°.**

Доказательство. Пусть в окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$ (рис. 92). Тогда $\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DCB}$, $\angle C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DAB}$ (по теореме о вписанном угле).

Поэтому $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DCB} + \overset{\frown}{DAB}) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$. Тогда $\angle B + \angle D = 360° - 180° = 180°$. ▲

Следствие 1. Если около трапеции можно описать окружность, то трапеция равнобокая.

Доказательство. Пусть трапеция $ABCD$ вписана в окружность, $AD \parallel CB$ (рис. 93). Тогда $\angle A + \angle C = 180°$. Но в трапеции $\angle D + \angle C = 180°$. Поэтому $\angle A = \angle D$. Следовательно, $ABCD$ – равнобокая трапеция (по признаку равнобокой трапеции). ▲

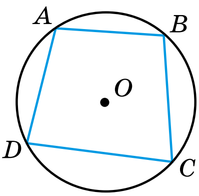


Рис. 92

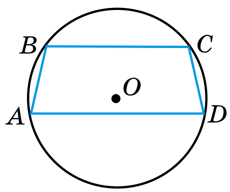


Рис. 93

Как известно из курса геометрии 7 класса, около любого треугольника можно описать окружность. Для четырехугольников это не так.

Теорема 2 (признак вписанного четырехугольника). **Если в четырехугольнике сумма двух противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.**

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180°$. Проведем через точки A, B и C окружность. Докажем (методом от противного), что вершина D четырехугольника также будет лежать на этой окружности.

1) Допустим, что вершина D лежит внутри круга (рис. 94). Продолжим CD до пересечения с окружностью в точке M. Тогда $\angle B + \angle D = 180°$ (по условию) и $\angle M + \angle B = 180°$ (по свойству углов вписанного четырехугольника). Тогда $\angle D = \angle M$. Но $\angle ADC$ – внешний, а $\angle AMC$ – не смежный с ним внутренний угол треугольника ADM. Поэтому $\angle ADC$ должен быть больше, чем $\angle AMC$.

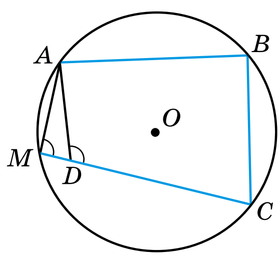


Рис. 94

Пришли к противоречию, значит, наше предположение ошибочно, и точка D не может лежать внутри круга.

2) Аналогично можно доказать, что вершина D не может лежать вне круга.

3) Следовательно, точка D лежит на окружности, ограничивающей круг (рис. 92), а значит около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. ▲

Следствие 1. **Около любого прямоугольника можно описать окружность.**

Следствие 2. **Около равнобокой трапеции можно описать окружность.**

Заметим, что, как и в треугольнике, центром описанной около четырехугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам, поскольку она равноудалена от всех его вершин. Например, в прямоугольнике такой точкой является точка пересечения диагоналей.

Четырехугольник **называют** ***описанным около окружности***, **если все его стороны касаются окружности.** ***Окружность*** **при этом называют** ***вписанной*** **в четырехугольник** (рис. 95).

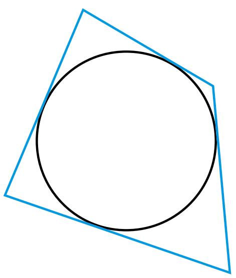


Рис. 95

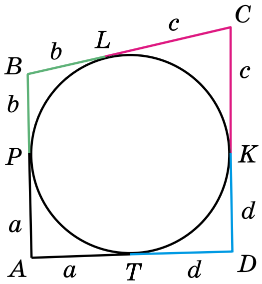


Рис. 96

Теорема 3 (свойство сторон описанного четырехугольника). **В описанном четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны.**

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ – описанный, P, L, K, T – точки касания (рис. 96). По свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности, $AP = AT = a$, $BP = BL = b$, $CK = CL = c$, $DK = DT = d$. На рисунке 96 равные отрезки обозначены одинаковым цветом.

Тогда $AD + BC = AT + TD + BL + LC = a + d + b + c$;

$AB + CD = AP + PB + CK + KD = a + b + c + d$.

Следовательно, $AD + BC = AB + CD$. ▲

Как известно из курса геометрии 7 класса, в любой треугольник можно вписать окружность. Для четырехугольников это не так.

Теорема 4 (признак описанного четырехугольника). **Если в четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.**

Доказательство этой теоремы является достаточно громоздким, поэтому его не приводим.

Следствие. **В любой ромб можно вписать окружность.**

Как и в треугольнике, центром окружности, вписанной в четырехугольник, является точка пересечения биссектрис его углов. Так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то центр вписанной в ромб окружности – точка пересечения диагоналей.

1. Какой четырехугольник называют вписанным в окружность?
2. Сформулируйте и докажите свойство углов вписанного четырехугольника.
3. Сформулируйте следствие из этого свойства.
4. Сформулируйте признак вписанного четырехугольника и следствия из него.
5. Какой четырехугольник называют описанным около окружности?
6. Сформулируйте и докажите свойство сторон описанного четырехугольника.
7. Сформулируйте признак описанного четырехугольника и следствие из него.

1 Начальный уровень

251. На каких из рисунков 97–100 изображен вписанный четырехугольник, а на каких – описанный?

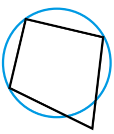


Рис. 97

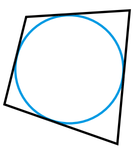


Рис. 98

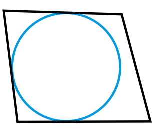


Рис. 99

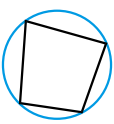


Рис. 100

252. Можно ли вокруг четырехугольника $ABCD$ описать окружность, если:
1) $\angle A = 30°$; $\angle C = 150°$; 2) $\angle B = 90°$; $\angle D = 80°$?

253. Может ли четырехугольник $MNKL$ быть вписанным в окружность, если:
1) $\angle M = 20°$; $\angle K = 150°$; 2) $\angle N = 90°$; $\angle L = 90°$?

2 Средний уровень

254. Можно ли вписать окружность в четырехугольник, стороны которого в порядке следования относятся как:
1) 5 : 3 : 4 : 7; 2) 3 : 2 : 4 : 5?

255. Может ли быть описанным четырехугольник, стороны которого в порядке следования относятся как:
1) 7 : 3 : 2 : 6; 2) 5 : 4 : 3 : 6?

256. Найдите углы A и B вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$, если $\angle C = 132°$; $\angle D = 29°$.

257. Найдите углы C и D вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$, если $\angle A = 138°$; $\angle B = 49°$.

3 Достаточный уровень

258. В равнобокую трапецию, периметр которой равен 16 см, вписана окружность. Найдите боковую сторону трапеции.

259. Боковая сторона равнобокой трапеции, описанной около окружности, равна 5 дм. Найдите периметр трапеции.

260. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_1 и BH_2, которые пересекаются в точке H. Докажите, что вокруг четырехугольника CH_1HH_2 можно описать окружность, диаметром которой будет отрезок CH.

261. Точка M лежит на стороне AB остроугольного треугольника ABC. MP и MK – перпендикуляры к сторонам AC и BC соответственно. Докажите, что около четырехугольника $MPCK$ можно описать окружность, диаметром которой будет отрезок CM.

4 Высокий уровень

262. Трапеция вписана в окружность радиуса R так, что диаметр окружности совпадает с ее большим основанием. Найдите периметр трапеции, если ее меньшее основание равно боковой стороне.

Упражнения для повторения

263. AB – основание равнобедренного треугольника ABC, I – центр вписанной окружности. $\angle AIB = \alpha$ ($\alpha > 90°$). Найдите углы треугольника ABC.

264. AB – основание равнобедренного треугольника ABC, O – центр описанной окружности. $\angle AOB = \alpha$ ($\alpha < 180°$). Найдите углы треугольника ABC. Сколько случаев следует рассмотреть?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

265. Прямая EK параллельна стороне AB треугольника ABC, $E \in AC$, $K \in BC$. Докажите, что $\angle CKE = \angle CBA$, $\angle CEK = \angle CAB$.

Интересные задачки для неленивых

266. Постройте общую внешнюю касательную к двум непересекающимся окружностям разных радиусов.

§ 9. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Теорема Фалеса. **Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.**

Доказательство. Пусть параллельные прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 пересекают стороны угла с вершиной O (рис. 101), при этом $A_1A_2 = A_2A_3$. Докажем, что $B_1B_2 = B_2B_3$.

1) Проведем через точки A_1 и A_2 прямые A_1M и A_2N, параллельные прямой OB_3. $A_1A_2 = A_2A_3$ (по условию), $\angle A_2A_1M = \angle A_3A_2N$ (как соответственные углы при параллельных прямых A_1M и A_2N), $\angle A_1A_2M = \angle A_2A_3N$ (как соответственные углы при параллельных прямых A_2M и A_3N). Поэтому $\triangle A_1A_2M = \triangle A_2A_3N$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам), а значит, $A_1M = A_2N$ (как соответственные стороны равных треугольников).

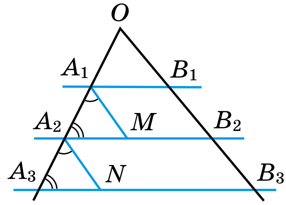


Рис. 101

2) Четырехугольник $A_1MB_2B_1$ – параллелограмм (по построению). Поэтому $A_1M = B_1B_2$. Аналогично $A_2NB_3B_2$ – параллелограмм, поэтому $A_2N = B_2B_3$.

Таким образом, $A_1M = A_2N$, $A_1M = B_1B_2$, $A_2N = B_2B_3$, следовательно $B_1B_2 = B_2B_3$, что и требовалось доказать. ▲

Следствие. **Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной из них равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.**

С помощью линейки без делений по теореме Фалеса возможно разделить отрезок на любое количество равных частей.

Задача. Разделите отрезок AB на 6 равных частей.

Решение. 1) Пусть AB – данный отрезок (рис. 102). Проведем произвольный луч AC и отложим на нем циркулем последовательно 6 отрезков: $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5 = C_5C_6$.

2) Через точки C_6 и B проведем прямую.

3) Через точки C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 с помощью угольника и линейки проведем прямые, параллельные прямой BC_6. Тогда по теореме Фалеса эти прямые разделят отрезок AB на 6 равных частей: $AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4 = D_4D_5 = D_5B$. ▲

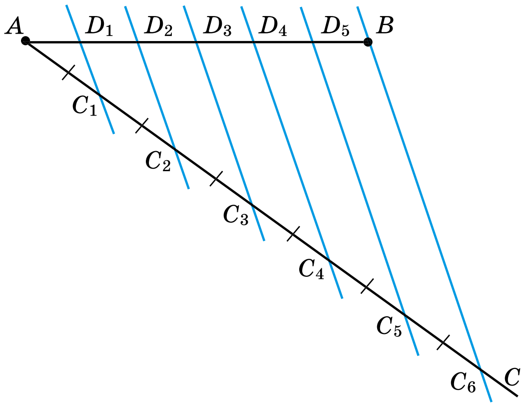


Рис. 102

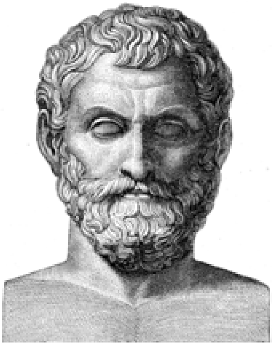
А еще раньше...

Фалес Милетский – древнегреческий математик и астроном. По давней традиции его считают одним из так называемых семи мудрецов света, ведь он был одним из самых выдающихся математиков своего времени.

В молодые годы любознательный юноша отправился путешествовать по Египту с целью познакомиться с египетской культурой и получить естественнонаучные знания. Будучи способным и одаренным, Фалес не только быстро изучил то, что в то время уже было известно египетским ученым, но и сделал ряд собственных научных открытий. Он самостоятельно определил высоту египетских пирамид по длине их тени, чем очень удивил египетского фараона Амазиса, а вернувшись на родину, создал в Милети философскую школу.

По мнению историков Фалес был первым, кто познакомил греков с геометрией и стал первым греческим астрономом. Он предсказал солнечное затмение, произошедшее 28 мая 585 года до н. э.

На гробнице Фалеса высечена надпись: «Насколько мала эта гробница, настолько велика слава этого царя астрономов в области звезд».



Фалес Милетский (ок. 625–548 до н. э.)

Сформулируйте и докажите теорему Фалеса.

1 Начальный уровень

267. (Устно.) На рисунке 103 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 3$ см, $A_2A_3 = 3$ см, $B_1B_2 = 5$ см. Найдите B_2B_3.

268. На рисунке 103 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $B_1B_2 = B_2B_3$, $A_2A_3 = 7$ см. Найдите A_1A_2.

269. На рисунке 104 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $OM_1 = M_1M_2$, $ON_1 = 4$ см. Найдите ON_2.

270. На рисунке 104 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 = 6$ см, $N_1N_2 = 6$ см, $OM_1 = 3{,}5$ см. Найдите OM_2.

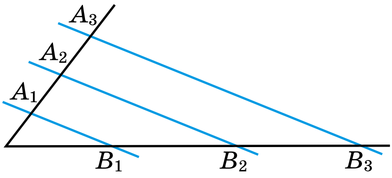


Рис. 103

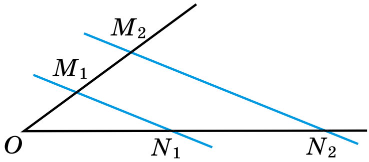


Рис. 104

2 Средний уровень

271.[1] Разделите данный отрезок на 5 равных частей.

272. Разделите данный отрезок на 7 равных частей.

[1] Задачи 271–274 необходимо решить с помощью линейки без делений.

3 Достаточный уровень

273. Разделите данный отрезок на две части в отношении 2 : 5.

274. Разделите данный отрезок на две части в отношении 3 : 2.

275. На рисунке 103 $A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. $A_1A_2 : B_1B_2 = 3 : 5$, $B_2B_3 - A_2A_3 = 8$ см. Найдите A_1A_2, A_2A_3, B_1B_2, B_2B_3.

276. На рисунке 104 $ON_1 = N_1N_2$, $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 : OM_1 = 7 : 4$, $N_1N_2 + M_1M_2 = 33$ см. Найдите ON_2 и OM_2.

4 Высокий уровень

277. M и N – соответственно середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Отрезки MD и BN пересекают диагональ AC в точках L и K соответственно. Докажите, что $AL = LK = KC$.

278. Точки E, F и G делят медиану AD треугольника ABC на четыре равные части ($AE = EF = FG = GD$). Докажите, что прямая CG делит сторону AB в отношении 3 : 2, считая от вершины A.

279. Точки M и N делят медиану AD треугольника ABC на три равные части ($AM = MN = ND$). Докажите, что прямая BN содержит медиану треугольника.

280. Точка K – середина медианы AD треугольника ABC. Отрезок BK пересекает сторону AC в точке M. Найдите $AM : MC$.

Упражнения для повторения

2 **281.** Постройте отрезок AB длиной 5 см и геометрическое место точек, равноудаленных от его концов.

3 **282.** Из точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, удаленные от центра на 5 см и 7 см. Найдите длины этих хорд.

Интересные задачки для неленивых

283. (*Всеукраинская математическая олимпиада, 1976 г.*) Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка P так, что $\angle APB = \angle ACB + 60°$, $\angle BPC = \angle BAC + 60°$, $\angle CPA = \angle CBA + 60°$. Докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из точки P к сторонам треугольника ABC, являются вершинами равностороннего треугольника.

§ 10. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ЕЕ СВОЙСТВА

Средней линией треугольника **называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.**

На рисунке 105 KL – средняя линия треугольника ABC.

Теорема 1 (свойство средней линии треугольника). **Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.**

Доказательство. Пусть KL – средняя линия треугольника ABC (рис. 105). Докажем, что $KL \parallel AB$ и $KL = \frac{1}{2}AB$.

1) Проведем через точку L прямую, параллельную AB. По теореме Фалеса она пересекает сторону AC в ее середине, то есть в точке K. Следовательно, эта прямая содержит среднюю линию KL. Поэтому $KL \parallel AB$.

2) Проведем через точку L прямую, параллельную AC, которая пересекает AB в точке M. Тогда $AM = MB$ (по теореме Фалеса). Четырехугольник $AKLM$ – параллелограмм. $KL = AM$ (по свойству параллелограмма), но $AM = \frac{1}{2}AB$. Поэтому $KL = \frac{1}{2}AB$. ▲

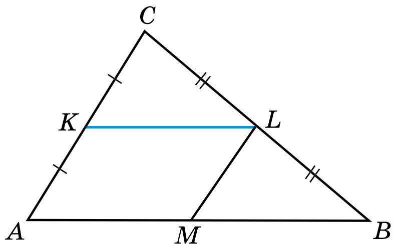


Рис. 105

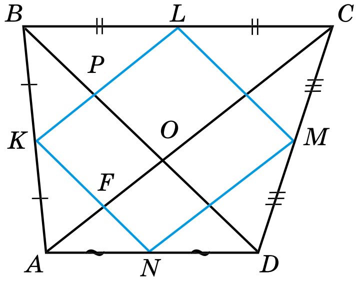


Рис. 106

Задача. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма, один из углов которого равен углу между диагоналями четырехугольника.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник, а точки K, L, M, N – середины его сторон (рис. 106).

KL – средняя линия треугольника ABC, поэтому $KL \parallel AC$ и $KL = \frac{1}{2}AC$. Аналогично $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

Таким образом, $KL \parallel MN$, $KL = MN$. Тогда $KLMN$ – параллелограмм (по признаку параллелограмма).

KN – средняя линия треугольника ABD. Поэтому $KN \parallel BD$. Следовательно, $KFOP$ – также параллелограмм, откуда: $\angle NKL = \angle BOA$. ▲

Рассмотрим свойство медиан треугольника.

Т е о р е м а 2 (свойство медиан треугольника). **Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.**

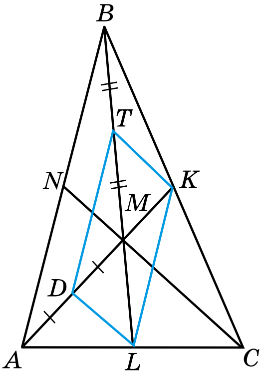


Рис. 107

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M – точка пересечения медиан AK и CN треугольника ABC (рис. 107).

1) Построим четырехугольник $LDTK$, где D – середина AM, T – середина BM.

2) DT – средняя линия треугольника ABM, поэтому $DT \parallel AB$ и $DT = \frac{1}{2}AB$.

3) KL – средняя линия треугольника ABC, поэтому $KL \parallel AB$ и $KL = \frac{1}{2}AB$.

4) Следовательно, $DT \parallel KL$ и $DT = KL$. Значит, $DTKL$ – параллелограмм (по признаку параллелограмма).

5) M – точка пересечения диагоналей TL и DK параллелограмма $DTKL$, поэтому $MT = ML$, $DM = MK$. Но $MT = BT$, $DM = AD$. Тогда $BT = TM = ML$ и $AD = DM = MK$. Следовательно, точка M делит каждую из медиан AK и BL в отношении 2 : 1, считая от вершин A и B соответственно.

6) Точка пересечения медиан AK и CN должна также делить в отношении 2 : 1 каждую медиану. Поскольку существует единственная точка – точка M, которая в таком отношении делит медиану AK, то медиана CN также проходит через эту точку.

7) Следовательно, три медианы треугольника пересекаются в одной точке и этой точкой делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника. ▲

Точку пересечения медиан еще называют *центром масс треугольника*, или *центроидом треугольника*.

1. Что называют средней линией треугольника?
2. Сформулируйте и докажите свойство средней линии треугольника.
3. Сформулируйте свойство медиан треугольника.

1 Начальный уровень

284. (Устно.) Какие отрезки на рисунке 108 являются средними линиями треугольника ABC, если $AM = MB$, $BK = KC$, $AL = LC$?

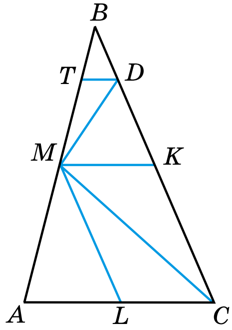


Рис. 108

285. Начертите произвольный тупоугольный треугольник MNK и его наибольшую среднюю линию.

286. Начертите равнобедренный треугольник ABC и его среднюю линию, концы которой принадлежат боковым сторонам.

287. KL – средняя линия треугольника ABC (рис. 105).

1) $AB = 14$ см. Найдите KL;

2) $KL = 6$ дм. Найдите AB.

288. KL – средняя линия треугольника ABC (рис. 105).

1) $AB = 20$ см. Найдите KL; 2) $KL = 7$ дм. Найдите AB.

2 Средний уровень

289. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон равнобедренного треугольника, равен 5 см. Найдите основание треугольника.

290. Основание равнобедренного треугольника равно 18 дм. Найдите длину отрезка, соединяющего середины боковых сторон треугольника.

291. Найдите периметр треугольника, если его средние линии равны 7 см, 8 см и 10 см.

292. Стороны треугольника равны 12 дм, 16 дм и 18 дм. Найдите периметр треугольника, сторонами которого являются средние линии данного треугольника.

293. Дано: ED – средняя линия треугольника ABC, $E \in AC$, $D \in BC$. Доказать: $\angle CED = \angle CAB$.

294. (Устно.) Определите вид треугольника, если:

1) две его средние линии равны между собой;

2) три его средние линии равны между собой.

295. Периметр треугольника равен 24 см. Найдите периметр треугольника, вершины которого являются серединами сторон данного треугольника.

296. Периметр треугольника, вершины которого – середины сторон данного треугольника, равен 18 см. Найдите периметр данного треугольника.

3 Достаточный уровень

297. Стороны треугольника относятся как 4 : 3 : 5. Найдите его стороны, если периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, равен 60 см.

298. Периметр треугольника равен 80 см. Стороны треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, относятся как 4 : 9 : 7. Найдите стороны данного треугольника.

299. Сторона треугольника равна 10 см, а одна из средних линий – 6 см. Найдите остальные стороны треугольника, если одна из них в 1,5 раза больше другой. Сколько случаев следует рассмотреть?

300. E, F, G, H – середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Найдите периметр четырехугольника $EFGH$, если $AC = 16$ см, $BD = 10$ см.

301. Диагональ прямоугольника равна 10 см. Чему равен периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного прямоугольника?

302. O – точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Точки M и K – середины сторон AD и DC соответственно. Докажите, что $MK \perp OD$.

303. AK – медиана равнобедренного треугольника ABC с основанием BC. Точки P и F – середины сторон AB и AC соответственно. Докажите, что $PF \perp AK$.

304. Докажите, что если два треугольника равны, то равны и треугольники, вершинами которых являются середины сторон данных треугольников.

4 Высокий уровень

305. Точка M – середина катета AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Расстояние от точки M до гипотенузы равно a см. Найдите гипотенузу.

306. Точка K – середина катета BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой $AB = 20$ см. Найдите расстояние от точки K до гипотенузы.

307. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

308. M – точка пересечения медиан равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Известно, что $AM = 8$ см. Найдите расстояние от середины боковой стороны до основания треугольника.

309. Середина боковой стороны равнобедренного треугольника KLM ($KL = KM$) удалена от основания треугольника на 9 см. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до вершины K.

Упражнения для повторения

2 **310.** В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 80°$, O – центр описанной окружности. Найдите $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$.

3 **311.** Одна из диагоналей ромба образует с его стороной угол 30°, а другая диагональ равна 7 см. Найдите периметр ромба.

4 **312.** В равнобокой трапеции основания равны a и b ($a > b$), а острый угол – 60°. Найдите:
1) боковую сторону трапеции;
2) периметр трапеции;
3) условие, при котором в трапецию можно вписать окружность.

Интересные задачки для неленивых

313. Существует ли треугольник, две биссектрисы которого взаимно перпендикулярны?

§ 11. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ, ЕЕ СВОЙСТВА

Средней линией трапеции **называют отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.**

Рассмотрим свойство средней линии трапеции.

Теорема (свойство средней линии трапеции). **Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.**

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данная трапеция, EF – ее средняя линия (рис. 109). Докажем, что $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$ и $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$.

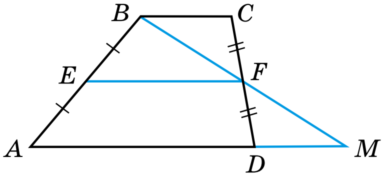


Рис. 109

1) Проведем луч BF до его пересечения с лучом AD. Пусть M – точка их пересечения. Тогда $\angle BCF = \angle MDF$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AM и секущей CD), $\angle CFB = \angle DFM$ (как вертикальные), $CF = FD$ (по условию). Следовательно, $\triangle CFB = \triangle DFM$ (по стороне и двум прилежащим углам), откуда $BF = FM$, $BC = DM$ (как соответственные стороны равных треугольников).

2) Поскольку $BF = FM$, то EF – средняя линия треугольника ABM. Тогда, по свойству средней линии треугольника, $EF \parallel AM$, а значит, $EF \parallel AD$. Но так как $AD \parallel BC$, то $EF \parallel BC$.

3) Кроме того, $EF = \frac{1}{2}AM = \frac{AD+DM}{2} = \frac{AD+BC}{2}$. ▲

Задача 1. Докажите, что отрезок средней линии трапеции, содержащийся между ее диагоналями, равен полуразности оснований.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть EF – средняя линия трапеции $ABCD$, M – точка пересечения AC и EF, N – точка пересечения BD и EF (рис. 110). Пусть $AD = a$, $BC = b$. Докажем, что $MN = \frac{a-b}{2}$.

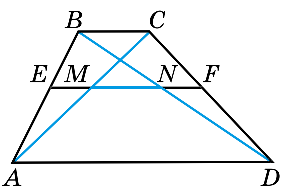


Рис. 110

1) Так как $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$ и $AE = BE$, то, по теореме Фалеса, M – середина AC, N – середина BD. Поэтому EM – средняя линия треугольника ABC, NF – средняя линия треугольника DBC. Тогда $EM = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$; $NF = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$.

2) EF – средняя линия трапеции, поэтому $EF = \frac{a+b}{2}$.

3) $MN = EF - (EM + NF) = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) = \frac{a-b}{2}$. ▲

Задача 2. В равнобокой трапеции диагональ делит острый угол пополам. Найдите среднюю линию трапеции, если ее основания относятся как 3 : 7, а периметр трапеции – 48 см.

Решение. Пусть $ABCD$ – данная трапеция, EF – ее средняя линия, $BC : AD = 3 : 7$, $\angle CAD = \angle BAC$ (рис. 111).

1) Обозначим $BC = 3x$, $AD = 7x$. Тогда

$$EF = \frac{AD+BC}{2} = \frac{7x+3x}{2} = \frac{10x}{2} = 5x \text{ (см)}.$$

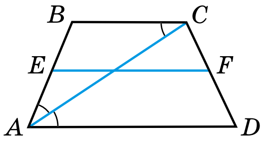


Рис. 111

2) $\angle CAD = \angle BAC$ (по условию). $\angle CAD = \angle BCA$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC). Поэтому $\angle BCA = \angle BAC$. Следовательно, $\triangle BAC$ – равнобедренный, у которого $AB = BC$ (по признаку равнобедренного треугольника). Но $AB = CD$ (по условию), значит, $AB = BC = CD = 3x$ (см).

3) Учитывая, что $P_{ABCD} = 48$ см, получим уравнение:

$7x + 3x + 3x + 3x = 48$, откуда $x = 3$ (см).

4) Тогда $EF = 5 \cdot 3 = 15$ (см).

Ответ. 15 см.

А еще раньше...

То, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований, было известно еще древним египтянам; эту информацию содержал папирус Ахмеса (примерно XVII в. до н. э.).

О свойстве средней линии трапеции знали также и вавилонские землемеры; это свойство упоминается и в трудах Герона Александрийского (первая половина I в. н. э.).

1. Что называют средней линией трапеции?
2. Сформулируйте и докажите свойство средней линии трапеции.

1 Начальный уровень

314. (Устно.) На каких из рисунков 112–115 отрезок EF является средней линией трапеции?

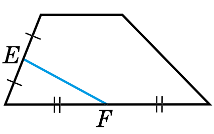


Рис. 112

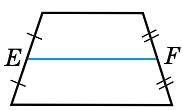


Рис. 113

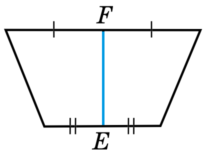


Рис. 114

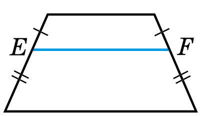


Рис. 115

315. Основания трапеции равны 8 см и 4 см. Найдите среднюю линию трапеции.

316. Найдите среднюю линию трапеции, если ее основания равны 7 см и 11 см.

2 Средний уровень

317. Найдите основание трапеции, если ее другое основание равно 9 см, а средняя линия – 7 см.

318. Одно из оснований трапеции равно 5 см, а средняя линия – 10 см. Найдите другое основание трапеции.

319. Одно из оснований трапеции равно 8 см, а другое – вдвое больше. Найдите расстояние между серединами боковых сторон трапеции.

320. Средняя линия трапеции равна 30 см. Найдите основания трапеции, если:
1) одно из них на 8 см больше другого;
2) одно из них в 4 раза меньше другого;
3) они относятся как 3 : 2.

321. Средняя линия трапеции равна 16 см. Найдите основания трапеции, если:
1) одно из них на 2 см меньше другого;
2) одно из них втрое больше другого;
3) их отношение равно 3 : 5.

322. K – точка пересечения диагонали BD трапеции $ABCD$ с ее средней линией MN. Докажите, что $BK = KD$.

323. Боковые стороны трапеции равны 7 см и 9 см, а ее средняя линия – 10 см. Найдите периметр трапеции.

324. Боковые стороны трапеции равны 10 см и 12 см, а ее периметр – 52 см. Найдите среднюю линию трапеции.

3 Достаточный уровень

325. Может ли средняя линия трапеции:
1) равняться одному из оснований;
2) быть меньше меньшего основания;
3) быть больше большего основания;
4) быть вдвое меньше большего основания?

326. EF – средняя линия трапеции $ABCD$, пересекающая диагональ BD в точке N. $EN = 5$ см, $NF = 3$ см. Найдите основания трапеции.

327. MN – средняя линия трапеции $ABCD$, пересекающая диагональ AC в точке K. Найдите MK и KN, если основания трапеции равны 18 см и 12 см.

328. В трапеции $ABCD$ AD = 30 см, BC = 12 см – основания, а точки E и T – середины AB и AE соответственно. Через E и T проведены прямые, параллельные AD. Найдите отрезки этих прямых, содержащиеся между боковыми сторонами трапеции.

329. В трапеции $ABCD$ M – середина боковой стороны AB, N – середина MB. Через точки M и N параллельно BC проведены прямые, пересекающие CD в точках K и L соответственно. MK = 12 см, NL = 8 см. Найдите основания трапеции.

330. В равнобокой трапеции $ABCD$ перпендикуляр, проведенный из вершины B к большему основанию AD, делит его на отрезки 3 см и 7 см. Найдите среднюю линию трапеции.

331. Из вершины B тупого угла равнобокой трапеции $ABCD$ к основанию AD проведена высота BK. Найдите среднюю линию трапеции, если AK = 4 см, BC = 6 см.

332. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой l. Расстояние до нее от точки A равно 7 см, а от точки M, являющейся серединой AB, – 5 см. Найдите расстояние от точки B до прямой l.

333. По одну сторону от прямой a на расстоянии 10 см и 16 см от нее отметили точки M и N. Найдите расстояние от середины отрезка MN до прямой a.

4 Высокий уровень

334. Основания трапеции равны 6 см и 14 см. Диагонали трапеции делят ее среднюю линию на три части. Найдите длину каждой из этих частей.

335. Диагонали делят среднюю линию трапеции на три части, длины которых 7 см, 8 см и 7 см. Найдите основания трапеции.

336. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90°$, $\angle C = 135°$, AB = 6 см. Найдите среднюю линию трапеции, если ее диагональ перпендикулярна боковой стороне.

337. Диагональ равнобокой трапеции делит ее тупой угол пополам, а среднюю линию – на отрезки 4 см и 6 см. Найдите периметр трапеции.

338. Диагональ равнобокой трапеции делит ее острый угол пополам, а среднюю линию – на отрезки 3 см и 7 см. Найдите периметр трапеции.

Упражнения для повторения

339. Найдите углы M и N четырехугольника $MNKL$, вписанного в окружность, если $\angle K = 37°$, $\angle L = 119°$.

340. Окружность вписана в равнобокую трапецию. Найдите периметр трапеции, если ее боковая сторона равна a см.

341. В прямоугольной трапеции тупой угол равен 120°, большее основание – 14 см, а большая боковая сторона – 8 см. Найдите меньшее основание трапеции.

Интересные задачки для неленивых

342. Все стенки и дно картонной коробки без крышки имеют форму квадрата со стороной a. Разрежьте развертку коробки двумя разрезами так, чтобы из полученных частей можно было сложить квадрат, площадь которого равна $5a^2$.

Домашняя самостоятельная работа № 2

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. На рисунке 116 изображена трапеция. Укажите ее основания.

А. KN и ML; **Б.** KL и MN;
В. KN и MN; **Г.** ML и MN.

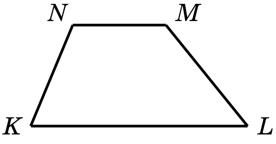


Рис. 116

2. Найдите градусную меру центрального угла, если градусная мера соответствующего ему вписанного угла равна 40°.

А. 40°; **Б.** 20°; **В.** 80°; **Г.** 30°.

3. На рисунке 117 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 = N_1N_2$; $OM_2 = 16$ см. Найдите M_1M_2.

А. 4 см; **Б.** 8 см;
В. 6 см; **Г.** найти невозможно.

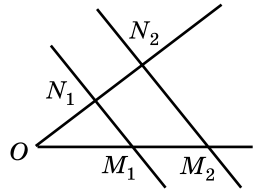


Рис. 117

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. $\angle A = 20°$, $\angle B = 100°$. Найдите углы C и D этого четырехугольника.

А. $\angle C = 80°$; $\angle D = 160°$; **Б.** $\angle C = 150°$; $\angle D = 80°$;
В. $\angle C = 20°$; $\angle D = 100°$; **Г.** $\angle C = 160°$; $\angle D = 80°$.

5. Основание равнобедренного треугольника равно 4 см, а боковая сторона – 10 см. Найдите периметр треугольника, вершины которого – середины сторон данного треугольника.

А. 11 см; **Б.** 12 см; **В.** 14 см; **Г.** 16 см.

6. Средняя линия трапеции равна 20 см, а ее основания относятся как 2 : 3. Найдите длину меньшего основания.

А. 16 см; **Б.** 24 см; **В.** 18 см; **Г.** 8 см.

7. Хорды MN и KL пересекаются в точке A; $\angle MKL = 30°$; $\angle KLN = 70°$. Найдите $\angle KAM$.

А. 30°; **Б.** 70°; **В.** 80°; **Г.** 100°.

8. Окружность вписана в равнобокую трапецию, боковая сторона которой равна 10 см. Найдите периметр трапеции.

А. 50 см; **Б.** 20 см; **В.** 30 см; **Г.** 40 см.

9. В прямоугольной трапеции острый угол равен 60°, а большая боковая сторона и меньшее основание – по 18 см. Найдите большее основание трапеции.

А. 36 см; **Б.** 24 см; **В.** 27 см; **Г.** 30 см.

10. Диагональ равнобокой трапеции делит ее острый угол пополам, а среднюю линию – на отрезки 4 см и 5 см. Найдите периметр трапеции.

А. 32 см; **Б.** 34 см; **В.** 36 см; **Г.** 38 см.

11. Точка N – середина медианы AD треугольника ABC. BN пересекает AC в точке F. Найдите AF, если $AC = 18$ см.

А. 6 см; **Б.** 9 см; **В.** 3 см; **Г.** 2 см.

12. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 36 см. Найдите расстояние от середины катета до гипотенузы.

А. 12 см; **Б.** 6 см; **В.** 18 см; **Г.** 9 см.

Задания для проверки знаний к § 6–11

1. Начертите трапецию $MKPF$ ($MK \parallel PF$). Укажите ее основания и боковые стороны.

2. Найдите градусную меру вписанного угла, если соответствующий ему центральный угол равен 70°.

3. На рисунке 118 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $OB_1 = B_1B_2$, $OA_1 = 2$ см. Найдите OA_2.

4. Найдите углы A и B четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если $\angle C = 140°$, $\angle D = 70°$.

5. Стороны треугольника равны 10 см, 12 см и 16 см. Найдите периметр треугольника, сторонами которого являются средние линии данного треугольника.

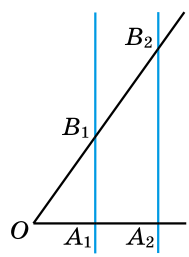


Рис. 118

6. Средняя линия трапеции равна 8 см. Найдите основания трапеции, если одно из них на 4 см больше другого.

7. Окружность вписана в равнобокую трапецию, периметр которой 20 см. Найдите боковую сторону трапеции.

8. В прямоугольной трапеции острый угол равен 60°, а большая боковая сторона и большое основание равны по 12 см. Найдите меньшее основание трапеции.

9. Диагональ равнобокой трапеции делит ее тупой угол пополам, а среднюю линию – на отрезки 9 см и 7 см. Найдите периметр трапеции.

Дополнительные задания

10. Точки K, L, M делят медиану BD треугольника ABC на четыре равные части ($BK = KL = LM = MD$). AM пересекает BC в точке F. Найдите $CF : FB$.

11. Точка D – середина катета BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Расстояние от точки D до гипотенузы треугольника на 15 см меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу треугольника.

Упражнения для повторения главы 1

К § 1

343. Начертите четырехугольник $AMCN$. Запишите вершины, стороны и углы этого четырехугольника.

344. Могут ли в четырехугольнике три угла быть прямыми, а четвертый: 1) острым; 2) тупым?

345. Два угла четырехугольника равны 40° и 80°, а два других между собой равны. Найдите неизвестные углы четырехугольника.

346. Запишите все возможные варианты обозначения четырехугольника $ABCD$.

347. Один из углов четырехугольника на 10° меньше второго, на 50° меньше третьего и вдвое меньше четвертого. Найдите углы четырехугольника.

348. Все стороны четырехугольника равны. Докажите, что сумма любых двух соседних углов этого четырехугольника равна 180°.

К § 2

1 **349.** Начертите параллелограмм $KMTL$, у которого угол K – тупой. Проведите диагонали параллелограмма и обозначьте их точку пересечения через O. Укажите на рисунке пары равных отрезков.

350. На рисунке 119 $ABCD$ – параллелограмм, $\angle 1 = 105°$. Найдите $\angle 2$.

2 **351.** В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

352. На рисунке 120 $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

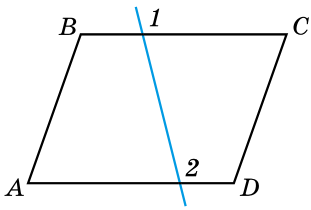


Рис. 119

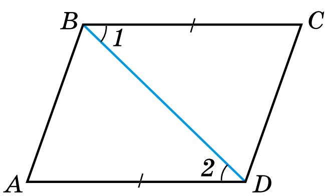


Рис. 120

3 **353.** Прямые a и b пересекаются. Постройте параллелограмм так, чтобы его диагонали лежали на этих прямых.

354. Дан параллелограмм $ABCD$ и треугольник ENM. Возможно ли, чтобы одновременно выполнялись равенства $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle M$?

355. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина AD, N – середина BC. Докажите, что отрезки AN и BM точкой пересечения делятся пополам.

356. Дано три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько параллелограммов с вершинами в этих точках можно построить?

4 **357.** Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведенными из одной вершины, равен углу параллелограмма при соседней вершине.

358. Докажите, что биссектрисы противолежащих углов параллелограмма или параллельны, или совпадают.

359. Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, равен 30°. Найдите эти высоты, если стороны параллелограмма равны 8 см и 20 см.

360. Постройте параллелограмм по двум непараллельным сторонам и высоте, проведенной к одной из них.

К § 3

361. Начертите прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см и найдите его периметр.

362. В четырехугольнике точка пересечения диагоналей делит диагонали на четыре равных отрезка. Определите вид четырехугольника.

363. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает продолжение стороны DC в точке N. Найдите $\angle AND$.

364. Постройте прямоугольник по:

1) стороне и диагонали;

2) диагонали и углу, который она образует с одной из сторон;

3) диагонали и углу между диагоналями.

365. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону CD в точке M. Найдите периметр прямоугольника, если $DM = 5$ см, $MC = 2$ см.

366. Точка пересечения диагоналей прямоугольника находится от меньшей стороны на 2 см дальше, чем от большей. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 56 см.

367. Перпендикуляр, проведенный из вершины прямого угла прямоугольника к диагонали, делит ее в отношении 1 : 3. Найдите меньшую сторону прямоугольника, если диагональ равна a см.

368. Биссектрисы углов A и D прямоугольника $ABCD$ пересекают его сторону BC в точках L и K соответственно. $BL = 7$ см, $LK = 2$ см. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$. Сколько случаев следует рассмотреть?

К § 4

369. Начертите ромб $MKLN$ с тупым углом M и проведите в нем высоты MA и MB.

370. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $\angle BAO = 25°$. Найдите углы ромба.

371. Найдите углы ромба, если отношение двух из них равно 2 : 3.

3 **372.** В ромбе $ABCD$ из вершины острого угла A проведены высоты AM и AN. Докажите, что $AM = AN$.

373. Диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, а его периметр равен m см. Найдите стороны параллелограмма.

374. Угол между продолжением высоты ромба, проведенной из вершины острого угла, и продолжением диагонали, которая соединяет вершины тупых углов, равен $40°$. Найдите углы ромба.

4 **375.** Высота ромба равна 10 см, а его периметр – 80 см. Найдите:
1) углы ромба;
2) угол между высотой, проведенной из вершины тупого угла ромба, и его меньшей диагональю.

376. Постройте ромб по диагонали и высоте.

377. На сторонах прямоугольника вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что вершины треугольников являются вершинами ромба.

К § 5

1 **378.** Начертите квадрат, сторона которого равна 3 см. Найдите периметр квадрата.

2 **379.** Разность между периметром квадрата и суммой трех его сторон равна 8 см. Найдите сторону квадрата и его периметр.

3 **380.** В данную окружность, положение центра которой известно, впишите квадрат.

381. Диагональ прямоугольника делит его угол пополам. Является ли прямоугольник квадратом?

4 **382.** На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ отметили точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Определите вид четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

383. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит по одной его вершине, а стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна d см.

К § 6

1 **384.** Начертите прямоугольную трапецию $NMLK$ и равнобокую $DCFH$. Назовите основания трапеций и их боковые стороны.

385. Найдите периметр равнобокой трапеции, основания которой 8 см и 5 см, а боковые стороны равны меньшему основанию.

386. В равнобокой трапеции один из углов на 20° больше другого. Найдите углы трапеции.

387. В прямоугольной трапеции большая боковая сторона вдвое больше высоты. Найдите углы трапеции.

388. Найдите углы равнобокой трапеции, если противолежащие ее углы относятся как 4 : 5.

389. В трапеции $ABCD$ с большим основанием AD через точку K – середину CD – провели прямую BK, которая пересекает прямую AD в точке M. Докажите, что $\triangle BKC = \triangle MKD$.

390. Высота прямоугольной трапеции, проведенная из вершины тупого угла, образует с боковой стороной угол 30° и делит пополам большее основание. Найдите большее основание трапеции, если большая боковая сторона равна m см.

391. В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой тупого угла, а ее основания равны 10 см и 6 см. Найдите периметр трапеции.

392. $ABCD$ – прямоугольная трапеция, $\angle D = \angle C = 90°$, AD – большее основание, $\angle BDC = 45°$, $\angle ABD = 90°$, $AD = 10$ см. Найдите BC и CD.

393. В равнобокой трапеции меньшее основание равно 5 см, боковая сторона – 3 см, а угол между боковой стороной и большим основанием равен 60°. Найдите периметр трапеции.

394. В равнобокой трапеции диагональ равна большему основанию, а боковая сторона – меньшему. Найдите углы трапеции.

395. Постройте трапецию по ее основаниям и диагоналям.

396. В трапеции $ABCD$ BC – меньшее основание. Через точку C проведена прямая, параллельная AB и пересекающая AD в точке E. Найдите периметр треугольника ECD, если периметр трапеции равен 56 см, а $BC = 10$ см.

К § 7

397. На рисунке 121 точка O – центр окружности.

1) $\angle 1 = 40°$. Найдите $\angle 2$.

2) $\angle 2 = 25°$. Найдите $\angle 1$.

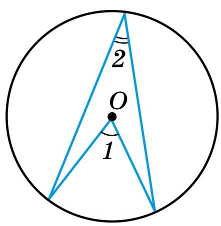


Рис. 121

398. На рисунке 121 точка O – центр окружности. Найдите $\angle 2$, если:
1) $\angle 1 - \angle 2 = 15°$; 2) $\angle 1 + \angle 2 = 54°$.

399. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Найдите $\angle BOC$, если $\angle A = \alpha$.

400. В окружность вписан угол ABC, равный 30°. Найдите длину хорды AC, если радиус окружности равен 2 см.

401. Продолжение биссектрисы угла A треугольника ABC пересекает окружность, описанную около треугольника, в точке K. Докажите, что $\overset{\smile}{BK} = \overset{\smile}{CK}$.

402. Окружность разделена четырьмя точками на части, которые относятся как 1 : 2 : 3 : 4, и точки деления соединены между собой отрезками. Определите углы полученного четырехугольника.

403. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок MN видно под заданным углом α.

К § 8

404. Можно ли вписать окружность в четырехугольник $ABCD$, если:
1) $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $CD = 4$ см, $DA = 6$ см;
2) $AB = 3$ дм, $BC = 7$ дм, $CD = 8$ дм, $DA = 10$ дм?

405. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого в порядке следования относятся как:
1) 2 : 7 : 10 : 5; 2) 3 : 5 : 8 : 4?

406. $ABCD$ – четырехугольник, описанный около окружности, $AB = 3$ см, $BC = 9$ см, $CD = 10$ см. Найдите AD.

407. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = 100°$, $\angle ADC = 80°$, $\angle BDC = 30°$. Найдите $\angle BAC$.

408. Три угла четырехугольника, вписанного в окружность, относятся в порядке следования как 3 : 4 : 6. Найдите углы четырехугольника.

409. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем AC – ее диаметр. Точка O – точка пересечения диагоналей. Найдите $\angle AOD$, если $\angle BAC = 30°$, $\angle CAD = 58°$.

410. Острый угол прямоугольной трапеции, описанной около окружности, в 5 раз меньше тупого. Найдите периметр трапеции, если ее меньшая боковая сторона равна a см.

К § 9

411. На рисунке 122 прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 – параллельны, $A_1A_2 = A_2A_3$. Найдите на этом рисунке и другие пары равных отрезков.

412. Разделите данный отрезок на 9 равных частей, используя линейку без делений.

413. Разделите данный отрезок на 3 части, длины которых относятся как 3 : 1 : 2, используя линейку без делений.

414. Точка K делит медиану AN треугольника ABC в отношении 2 : 1, считая от точки A. Докажите, что прямая CK делит сторону AB пополам.

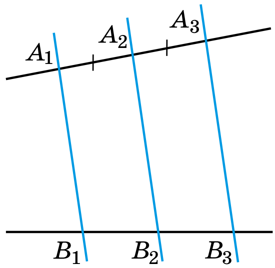


Рис. 122

К § 10

415. Отрезок, который соединяет середины двух сторон треугольника, равен 5 см. Найдите третью сторону треугольника.

416. Начертите прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) и проведите в нем наибольшую среднюю линию.

417. EF – средняя линия треугольника ABC ($E \in AC$, $F \in BC$). $CE = 3$ см, $CF = 5$ см, $EF = 7$ см. Найдите периметр треугольника ABC.

418. Одна из средних линий равностороннего треугольника равна 2 см. Найдите периметр треугольника.

419. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 7 см, а периметр – 20 см. Найдите среднюю линию, концы которой принадлежат боковым сторонам.

420. Точки D, E, F – соответственно середины сторон AB, BC и CA треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $DEFA$ – параллелограмм.

421. Сторона треугольника равна 12 см. Найдите две другие стороны треугольника, если одна из его средних линий равна 5 см, а периметр треугольника, образованного его средними линиями, равен 18 см.

422. В треугольнике проведены средние линии. Периметры параллелограммов, которые образовались при этом, равны 22 см, 24 см и 26 см. Найдите периметр данного треугольника и треугольника, образованного его средними линиями.

423. Постройте треугольник по трем точкам – серединам его сторон.

424. Последовательно соединили середины сторон квадрата, диагональ которого равна d см. Определите вид четырехугольника, который при этом образовался, и вычислите его периметр.

К § 11

425. Начертите трапецию $ABCD$ и проведите в ней среднюю линию EF. Измерьте основания трапеции и вычислите длину ее средней линии.

426. Сумма боковых сторон трапеции равна 17 см, а средняя линия – 8 см. Найдите периметр трапеции.

427. Разность оснований трапеции равна 2 см, а средняя линия – 14 см. Найдите основания трапеции.

428. Основания трапеции равны 20 см и 12 см. Боковая сторона трапеции разделена на 4 равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям. Найдите отрезки этих прямых, содержащиеся между сторонами трапеции.

429. Найдите основания трапеции, средняя линия которой 18 см и делится диагональю на отрезки, один из которых вдвое больше другого.

430. Средняя линия трапеции втрое больше меньшего основания и на 12 см меньше большего основания. Найдите основания трапеции.

431. Средняя линия трапеции диагоналями делится на отрезки, отношение которых равно $2 : 3 : 2$. Найдите отношение оснований трапеции.

432. Докажите, что если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то ее высота равна средней линии.

433. В равнобокой трапеции большее основание равно a см, боковая сторона – c см, а острый угол $60°$. Найдите среднюю линию трапеции.

Глава 2. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В этой главе вы:

- **узнаете** о подобных треугольниках и их свойствах; о средних пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и их свойстве; о свойстве биссектрисы треугольника;
- **научитесь** обосновывать подобие треугольников, использовать обобщенную теорему Фалеса и подобие треугольников для решения задач.

§ 12. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Напомним, что *отношением отрезков AB и CD* называют отношение их длин, то есть $\frac{AB}{CD}$.

Говорят, что отрезки AB и CD *пропорциональные отрезкам* A_1B_1 и C_1D_1, если

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}.$$

Например, если $AB = 6$ см; $CD = 8$ см; $A_1B_1 = 3$ см; $C_1D_1 = 4$ см, то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, действительно $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$.

Понятие пропорциональности применили и к большему количеству отрезков. Например, три отрезка AB, CD и MN пропорциональны трем отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и M_1N_1, если

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}.$$

Обобщенная теорема Фалеса (теорема о пропорциональных отрезках). **Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на его сторонах пропорциональные отрезки.**

Доказательство. Пусть параллельные прямые BC и B_1C_1 пересекают стороны угла A (рис. 123). Докажем, что

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}.$$

1) Рассмотрим случай, когда длины отрезков AC и CC_1 являются рациональными числами (целыми или дробными). Тогда существует отрезок длины h, который можно отложить целое число раз и на отрезке AC, и на отрезке CC_1.

Пусть $AC = a$, $CC_1 = b$, a и b – рациональные числа. Запишем их в виде дробей с одинаковыми знаменателями: $AC = \frac{p}{n}$, $CC_1 = \frac{q}{n}$. Поэтому $h = \frac{1}{n}$. Имеем: $AC = ph$, $CC_1 = qh$.

2) Разделим отрезок AC на p равных частей длины h, а отрезок CC_1 – на q равных частей длины h. Проведем через точки деления прямые, параллельные прямой BC (рис. 123). По теореме Фалеса они разобьют отрезок AB_1 на $(p + q)$ равных отрезков длины h_1, причем AB будет состоять из p таких отрезков, а BB_1 – из q таких отрезков. Имеем: $AB = ph_1$, $BB_1 = qh_1$.

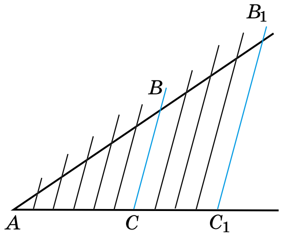


Рис. 123

3) Найдем отношение $\frac{AB}{BB_1}$ и $\frac{AC}{CC_1}$. Будем иметь:

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{ph_1}{qh_1} = \frac{p}{q} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{CC_1} = \frac{ph}{qh} = \frac{p}{q}.$$

Следовательно, $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$. ▲

Учитывая, что в пропорции средние члены можно поменять местами, из доказанного равенства приходим к следующему.

Следствие 1. $\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}$.

Следствие 2. $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$.

Доказательство. Поскольку $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$, то $\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$. Прибавим к обеим частям этого равенства по единице: $1 + \frac{BB_1}{AB} = 1 + \frac{CC_1}{AC}$, то есть $\frac{AB + BB_1}{AB} = \frac{AC + CC_1}{AC}$. Учитывая, что $AB + BB_1 = AB_1$, $AC + CC_1 = AC_1$, будем иметь: $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$. Откуда $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$. ▲

Рассмотрим, как построить один из четырех отрезков, образующих пропорцию, если известны три из них.

Задача. Дано отрезки a, b, c. Постройте отрезок $x = \frac{bc}{a}$.

Решение. Поскольку $x = \frac{bc}{a}$, то $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$ и $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

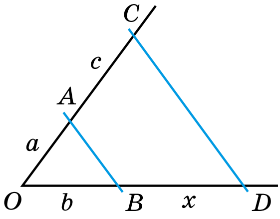


Рис. 124

Для построения отрезка x можно использовать как обобщенную теорему Фалеса, так и одно из ее следствий. Используем, например, следствие 1.

1) Строим неразвернутый угол с вершиной O (рис. 124). Откладываем на одной его стороне отрезок $OB = b$, а на другой – отрезки $OA = a$ и $AC = c$.

2) Проведем прямую AB. Через точку C параллельно AB проведем прямую, точку пересечения которой со стороной OB угла обозначим через D, то есть $CD \parallel AB$.

3) По следствию 1 из обобщенной теоремы Фалеса имеем: $\frac{a}{b} = \frac{c}{BD}$, откуда $BD = \frac{bc}{a}$. Следовательно, $BD = x$.

Построенный отрезок x называют *четвертым пропорциональным отрезков* a, b и c, так как для этих отрезков верно равенство: $a : b = c : x$.

А еще раньше...

Отношения и пропорции в геометрии использовались с давних времен. Об этом свидетельствуют древнеегипетские храмы, детали гробницы Менеса в Накаде и знаменитых пирамид в Гизе (III тысячелетие до н. э.), персидские дворцы, древнеиндийские достопримечательности и другие памятники древности.

Гробница Менеса

Пирамиды в Гизе

В седьмой книге «Начал» Евклид изложил *арифметическую* теорию учения об отношениях, которую применил только к соразмерным величинам и целым числам. Эта теория создана на основе практики действий с дробями и применялась для исследования свойств целых чисел.

В пятой книге Евклид изложил *общую* теорию отношений и пропорций, которую примерно за 100 лет до него разработал древнегреческий математик, механик и астроном Евдокс (408 г. – 355 г. до н. э.). Эта теория легла в основу учения о подобии фигур, изложенного Евклидом в шестой книге «Начал», где также была решена и задача о делении отрезка в данном отношении.

Пропорциональность отрезков прямых, пересеченных несколькими параллельными прямыми, была известна еще вавилонским ученым, хотя многие историки-математики заслугу данного открытия приписывают Фалесу Милетскому.

1. Что называют отношением отрезков?
2. Сформулируйте обобщенную теорему Фалеса.
3. При каком условии отрезок x является четвертым пропорциональным отрезков a, b и c?

1 Начальный уровень

434. (Устно.) На рисунке 125 $AB \parallel CD$. Какие из равенств верны:

1) $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$; 2) $\frac{AC}{OA} = \frac{OB}{OD}$;

3) $\frac{AC}{OA} = \frac{OB}{BD}$; 4) $\frac{OB}{BD} = \frac{OA}{AC}$?

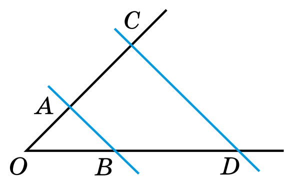


Рис. 125

435. На рисунке 125 $AB \parallel CD$, $OA = 2$, $AC = 3$, $BD = 6$. Найдите OB.

436. На рисунке 125 $AB \parallel CD$, $OB = 6$, $BD = 9$, $OA = 4$. Найдите AC.

2 Средний уровень

437. Параллельные прямые AB, CD и EF пересекают стороны угла O (рис. 126). $AC = 6$ см, $CE = 2$ см, $BD = 5$ см. Найдите BF.

438. Параллельные прямые AB, CD и EF пересекают стороны угла O (рис. 126), $BD = 4$ см, $DF = 2$ см, $CE = 3$ см. Найдите AE.

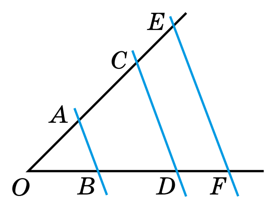


Рис. 126

439. Параллельные прямые AB, CD и EF пересекают стороны угла с вершиной O (рис. 126). $OA = 3$ см, $AC = 4$ см, $BD = 5$ см, $DF = 2$ см. Найдите CE и OB.

440. Параллельные прямые AB, CD и EF пересекают стороны угла с вершиной O (рис. 126). $OB = 5$, $BD = 7$, $AC = 4$, $CE = 3$. Найдите OA и DF.

3 Достаточный уровень

441. Дано отрезки a, b, c. Постройте отрезок $x = \dfrac{ab}{c}$.

442. Дано отрезки l, n, m. Постройте отрезок $x = \dfrac{mn}{l}$.

443. На рисунке 125 $AB \parallel CD$, $OA = 4$, $AC = 6$. Найдите отрезки OB и BD, если $OD = 15$.

444. На рисунке 125 $AB \parallel CD$, $OB = 5$, $BD = 7$. Найдите отрезки OA и AC, если $AC - OA = 1$.

4 Высокий уровень

445. На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MB = 1 : 3$. В каком отношении отрезок CM делит медиану AP треугольника ABC?

446. AD – медиана треугольника ABC, точка M лежит на стороне AC, отрезок BM делит AD в отношении $5 : 3$, начиная от точки A. Найдите $AM : MC$.

Упражнения для повторения

3 **447.** Диагональ четырехугольника равна 5 см, а периметры треугольников, на которые она разбивает четырехугольник, равны 12 см и 14 см. Найдите периметр четырехугольника.

4 **448.** Тупой угол прямоугольной трапеции равен 120°, а меньшая диагональ трапеции равна большей боковой стороне. Найдите отношение средней линии трапеции к большей боковой стороне.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

449. $\triangle ABC = \triangle MKL$. Заполните пропуски:

1) $\angle A = \ldots$;	2) $\angle B = \ldots$;	3) $\angle C = \ldots$;
4) $MK = \ldots$;	5) $ML = \ldots$;	6) $KL = \ldots$.

450. Стороны одного треугольника вдвое больше соответствующих сторон другого треугольника. Во сколько раз периметр первого треугольника больше периметра второго?

451. Дано $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Известно, что $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$. Можно ли утверждать, что
1) $\angle C = \angle C_1$; 2) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$?

Интересные задачки для неленивых

452. Дан квадрат $ABCD$. Сколько существует в плоскости этого квадрата точек K таких, что каждый из треугольников ABK, BCK, CDK и ADK – равнобедренный?

§ 13. ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

В повседневной жизни нам встречаются предметы одинаковой формы, но разных размеров, например футбольный мяч и металлический шарик, картина и ее фотоснимок, самолет и его модель, географические карты разного масштаба. В геометрии фигуры одинаковой формы принято называть ***подобными***. Так, подобными являются все квадраты, все окружности, все отрезки.

Два *треугольника* называют *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого.

Это значит, что если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (рис. 127), то

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

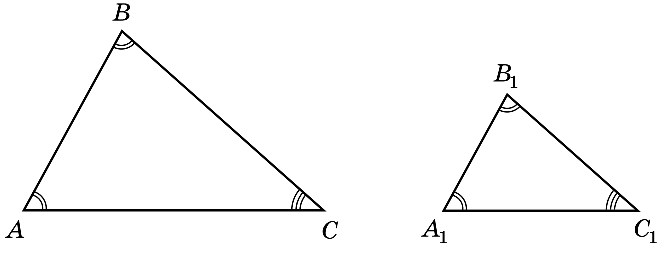


Рис. 127

Пусть значение каждого из полученных отношений соответствующих сторон равно k. Число k называют ***коэффициентом подобия*** треугольника ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$, или коэффициентом подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Подобие треугольников принято обозначать символом $\backsim$. В нашем случае $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. Заметим, что из соотношения $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ следует соотношение $AB : BC : AC = A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1$.

Задача 1. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно отношению соответствующих сторон этих треугольников.

Доказательство.

Пусть $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$.

Тогда $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $AC = kA_1C_1$.

Имеем: $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} =$

$= \frac{k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Задача 2. Стороны треугольника ABC относятся как $4 : 7 : 9$, а большая сторона подобного ему треугольника $A_1B_1C_1$ равна 27 см. Найдите две другие стороны второго треугольника.

Решение. Так как по условию $AB : BC : AC = 4 : 7 : 9$ и $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, то $A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1 = 4 : 7 : 9$.

Обозначим $A_1B_1 = 4x$, $B_1C_1 = 7x$, $A_1C_1 = 9x$. По условию $9x = 27$, тогда $x = 3$ (см). Имеем: $A_1B_1 = 4 \cdot 3 = 12$ (см), $B_1C_1 = 7 \cdot 3 = 21$ (см).

Ответ. 12 см, 21 см.

Заметим, что подобные треугольники легко создавать с помощью современных компьютерных программ, в частности графических редакторов. Для этого достаточно построенный треугольник растянуть или сжать, «потянув» за один из угловых маркеров.

А еще раньше...

Одинаковые по форме, но разные по величине фигуры использовались еще в вавилонской и египетской архитектурах. В сохранившейся погребальной камере отца фараона Рамзеса II есть стена, покрытая сеткой квадратиков, с помощью которой на стену перенесены в увеличенном виде рисунки меньших размеров.

Учение о подобии фигур на основе теории отношений и пропорций было создано в Древней Греции в V–IV вв. до н. э. трудами Гиппократа Хиосского, Архита Тарентского, Евдокса Книдского и других. Обобщил эти сведения Евклид в шестой книге «Начал». Начинается теория подобия следующим определением:

«Подобные прямолинейные фигуры – суть те, которые имеют соответственно равные углы и пропорциональные стороны».

1. Приведите примеры предметов одинаковой формы из окружающей среды.
2. Какие треугольники называют подобными?
3. Что такое коэффициент подобия?

1 Начальный уровень

453. (Устно.) $\triangle ABC \sim \triangle MNK$. Заполните пропуски:

1) $\angle A = \angle\ldots$; 2) $\angle B = \angle\ldots$; 3) $\angle C = \angle\ldots$.

454. $\triangle ABC \sim \triangle KLM$, $\dfrac{AB}{KL} = 2$. Заполните пропуски:

1) $\dfrac{AC}{KM} = \ldots$; 2) $\dfrac{BC}{LM} = \ldots$.

455. $\triangle MLF \sim \triangle PNK$. Составьте все возможные пропорции для сторон треугольников.

2 Средний уровень

456. Дано: $\triangle MNL \sim \triangle ABC$, $\angle M = 40°$, $\angle B = 80°$.
Найти: неизвестные углы обоих треугольников.

457. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\angle A = 30°$, $\angle F = 90°$.
Найти: неизвестные углы обоих треугольников.

458. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 8$ см, $A_1B_1 = 2$ см.
Найти: 1) $\dfrac{A_1C_1}{AC}$; 2) $\dfrac{B_1C_1}{BC}$.

459. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 10$, $BC = 8$, $CA = 6$, $A_1B_1 = 5$. Найти: B_1C_1, C_1A_1.

460. Дано: $\triangle KLM \sim \triangle K_1L_1M_1$, $KL = 12$, $KM = 9$, $LM = 21$, $K_1L_1 = 4$. Найти: K_1M_1, L_1M_1.

3 Достаточный уровень

461. Стороны треугольника относятся как 7 : 8 : 9. Найдите неизвестные стороны подобного ему треугольника, у которого:
1) меньшая сторона равна 21 см;
2) большая сторона на 5 см больше средней;
3) периметр равен 48 см.

462. Стороны треугольника относятся как 5 : 6 : 9. Найдите неизвестные стороны подобного ему треугольника, у которого:
1) большая сторона равна 18 см;
2) меньшая сторона на 3 см меньше средней;
3) периметр равен 100 см.

463. Докажите, что два равносторонних треугольника подобны.

4 Высокий уровень

464. Отношение периметров подобных треугольников равно 2 : 3, а сумма их наибольших сторон равна 20 см. Найдите стороны каждого из треугольников, если стороны одного из них относятся как 2 : 3 : 4.

465. Отношение периметров подобных треугольников равно 4 : 3, а сумма их наименьших сторон равна 21 см. Найдите стороны каждого из треугольников, если стороны одного из них относятся как 3 : 4 : 5.

Упражнения для повторения

3 **466.** В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите все пары равных треугольников, которые при этом образовались.

4 **467.** Докажите, что точка пересечения биссектрис прилежащих к боковой стороне углов трапеции принадлежит средней линии трапеции.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

468. На рисунке 128 прямая KL параллельна стороне BC разностороннего треугольника ABC. Найдите на этом рисунке все равные между собой углы.

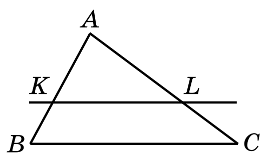


Рис. 128

Интересные задачки для неленивых

469. Точки K и L принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC. Может ли точка пересечения отрезков BL и KC делить каждый из них пополам?

§ 14. ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Подобие треугольников, как и равенство треугольников, можно установить с помощью признаков.

Прежде чем их рассмотреть, сформулируем и докажем *лемму*, то есть вспомогательное утверждение, являющееся верным и используемое для доказательства одной или нескольких теорем.

Лемма. **Прямая, параллельная стороне треугольника, отрезает от него подобный ему треугольник.**

Доказательство. Пусть прямая B_1C_1 пересекает стороны AB и AC треугольника ABC соответственно в точках B_1 и C_1 (рис. 129). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$.

1) $\angle A$ – общий для обоих треугольников, $\angle B = \angle B_1$ (как соответственные углы при параллельных прямых BC и B_1C_1 и секущей AB), $\angle C = \angle C_1$ (аналогично, но для секущей AC). Следовательно, три угла треугольника ABC равны трем углам треугольника AB_1C_1.

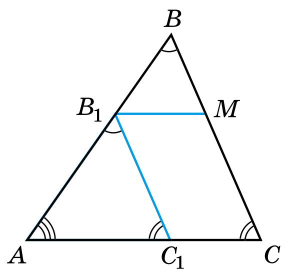


Рис. 129

2) По следствию 2 из обобщенной теоремы Фалеса имеем: $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$.

3) Докажем, что $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{AB_1}$. Через точку B_1 проведем прямую, параллельную AC и пересекающую BC в точке M. Так как B_1MCC_1 – параллелограмм, то $B_1C_1 = MC$. По обобщенной теореме Фалеса: $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BB_1}{AB_1}$. Прибавим число 1 к обеим частям этого равенства. Получим:

$$\frac{BM}{MC} + 1 = \frac{BB_1}{AB_1} + 1; \quad \frac{BM + MC}{MC} = \frac{BB_1 + AB_1}{AB_1}; \quad \frac{BC}{MC} = \frac{AB}{AB_1}.$$

Но $MC = B_1C_1$. Следовательно, $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{AB_1}$.

4) Окончательно имеем: $\angle A = \angle A$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1}$, а значит, $\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$. ▲

Т е о р е м а 1 (признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними). **Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (рис. 130). Докажем, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

1) Отложим на стороне AB треугольника ABC отрезок $AB_2 = A_1B_1$ и проведем через B_2 прямую, параллельную BC (рис. 131). Тогда $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$ (по лемме).

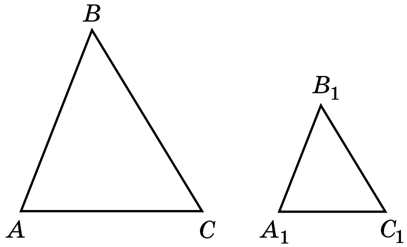


Рис. 130

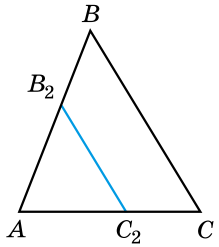


Рис. 131

2) По следствию 2 из обобщенной теоремы Фалеса $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$. Но $AB_2 = A_1B_1$ (по построению). Поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2}$. По условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, следовательно, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{AC_2}$, откуда $A_1C_1 = AC_2$.

3) Так как $\angle A = \angle A_1$, $AB_2 = A_1B_1$ и $AC_2 = A_1C_1$, то $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними).

4) Но $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$, следовательно, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. ▲

С л е д с т в и е 1. **Два прямоугольных треугольника подобны, если катеты одного пропорциональны катетам другого.**

С л е д с т в и е 2. **Если угол при вершине одного равнобедренного треугольника равен углу при вершине другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники подобны.**

Теорема 2 (признак подобия треугольников по двум углам). **Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны.**

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 130).

1) Выполним построения, аналогичные тем, что в доказательстве теоремы 1 (рис. 131). Имеем: $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$.

2) $\angle AB_2C_2 = \angle B$, но $\angle B = \angle B_1$. Поэтому $\angle AB_2C_2 = \angle B_1$.

3) Тогда $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (по стороне и двум прилежащим углам).

4) Следовательно, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. ▲

Следствие 1. **Равносторонние треугольники подобны.**

Следствие 2. **Если угол при основании одного равнобедренного треугольника равен углу при основании другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники подобны.**

Следствие 3. **Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники подобны.**

Теорема 3 (признак подобия треугольников по трем сторонам). **Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то эти треугольники подобны.**

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (рис. 130).

1) Выполним построения, аналогичные тем, что в доказательстве теоремы 1 (рис. 131). Имеем: $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$.

2) Тогда $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$, но $AB_2 = A_1B_1$, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$. Учитывая, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, имеем: $AC_2 = A_1C_1$, $B_2C_2 = B_1C_1$.

3) Тогда $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (по трем сторонам).

4) Следовательно, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. ▲

Задача 1. Стороны одного треугольника равны 9 см, 15 см и 18 см, а стороны другого относятся как 3 : 5 : 6. Подобны ли эти треугольники?

Р е ш е н и е. Обозначим стороны второго треугольника через $3x$, $5x$ и $6x$. Но $\frac{9}{3x} = \frac{15}{5x} = \frac{18}{6x} = \frac{3}{x}$, значит, треугольники подобны (по трем сторонам).

О т в е т. Да.

Задача 2. Стороны параллелограмма равны 15 см и 10 см, а высота, проведенная к большей стороне, – 8 см. Найдите высоту, проведенную к меньшей стороне.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCD$ – параллелограмм (рис. 132). $AD = 15$ см, $AB = 10$ см, $BM = 8$ см – высота параллелограмма. Проведем DN – вторую высоту параллелограмма.

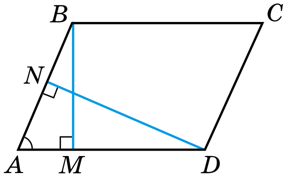


Рис. 132

$\triangle ABM \sim \triangle ADN$ (как прямоугольные с общим острым углом). Тогда $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{DN}$, то есть $\frac{10}{15} = \frac{8}{DN}$, откуда $10 \cdot DN = 8 \cdot 15$, $DN = 12$ (см).

О т в е т. 12 см.

Сформулируйте и докажите признаки подобия треугольников и их следствия.

1 Начальный уровень

470. (Устно.) При каких условиях два треугольника подобны:

1) у треугольников есть общий угол;
2) два угла одного треугольника равны двум углам другого;
3) две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого?

471. При каких условиях $\triangle ABC \sim \triangle DEF$:

1) $\angle A = \angle D$;
2) $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$, $\angle D = 30°$, $\angle E = 40°$;
3) $AB = 2DE$, $BC = 2EF$;
4) $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$, $\angle D = 40°$, $\angle E = 90°$?

472. При каких условиях $\triangle ABC \sim \triangle MNK$:

1) $AB = MN = 20$ см, $BC = NK = 10$ см;
2) $\angle A = \angle M$; $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK}$;
3) $\angle A = 100°$, $\angle B = 30°$, $\angle M = 70°$, $\angle N = 20°$;
4) $\angle C = \angle K$, $CB = 5$, $CA = 2$, $KN = 10$, $KM = 4$?

473. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, если:

1) $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$, $A_1B_1 = 4$, $B_1C_1 = 6$, $A_1C_1 = 8$;
2) $\angle A = 20°$, $\angle A_1 = 20°$, $AB = 3$, $AC = 5$, $A_1B_1 = 9$, $A_1C_1 = 15$;
3) $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$, $\angle B_1 = 40°$, $\angle C_1 = 110°$.

474. Докажите, что $\triangle MNK \sim \triangle M_1N_1K_1$, если:

1) $\angle M = \angle M_1$, $MN = 5$, $MK = 6$, $M_1N_1 = 10$, $M_1K_1 = 12$;
2) $\angle M = 90°$, $\angle N = 50°$, $\angle K_1 = 40°$, $\angle N_1 = 50°$;
3) $MN = 3$, $NK = 4$, $MK = 5$, $M_1N_1 = 6$, $N_1K_1 = 8$, $M_1K_1 = 10$.

2 Средний уровень

475. Прямые AB и CD пересекаются в точке O, $AC \parallel BD$. Докажите, что $\triangle AOC \sim \triangle BOD$.

476. Прямые MN и KL пересекаются в точке O, $\angle MLO = \angle NKO$. Докажите, что $\triangle MOL \sim \triangle NOK$.

477. На сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно отмечены точки P и L так, что $AP = \frac{1}{3}AB$, $AL = \frac{1}{3}AC$. Докажите, что $\triangle APL \sim \triangle ABC$.

478. На сторонах KL и KN треугольника KLN соответственно отмечены точки A и B так, что $KA = \frac{2}{3}KL$, $KB = \frac{2}{3}KN$. Докажите, что $\triangle KAB \sim \triangle KLN$.

479. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:

1) $AB : BC : CA = 3 : 4 : 6$, $A_1B_1 = 6$, $B_1C_1 = 8$, $C_1A_1 = 11$;
2) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle A_1 : \angle B_1 : \angle C_1 = 1 : 2 : 3$?

480. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:

1) $AB : BC : CA = 4 : 3 : 7$, $A_1B_1 = 8$, $B_1C_1 = 6$, $C_1A_1 = 14$;
2) $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$, $\angle A_1 = 20°$, $\angle B_1 = 50$?

481. На рисунках 133–135 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

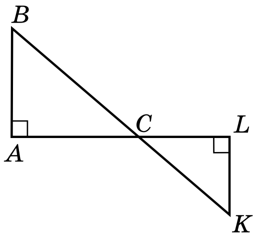


Рис. 133

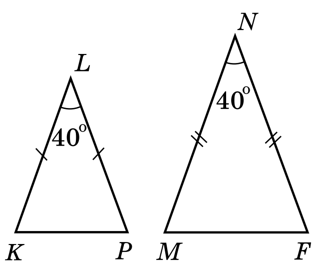


Рис. 134

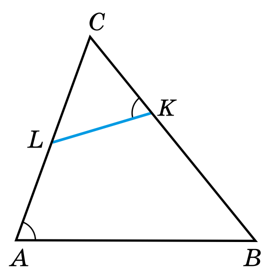


Рис. 135

482. На рисунках 136–138 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

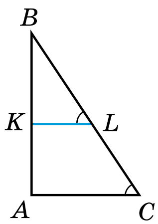


Рис. 136

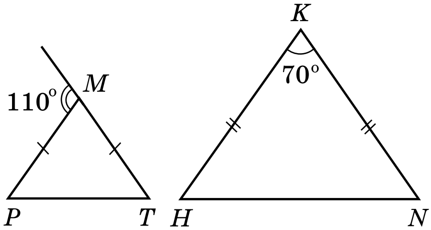


Рис. 137

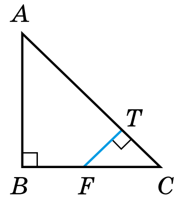


Рис. 138

483. O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Докажите, что $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

484. O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$, у которой $AB \parallel CD$. $AB = 10$ см, $CD = 5$ см, $OD = 4$ см. Найдите OB.

485. O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$), которая делит диагональ BD на отрезки $DO = 3$ см и $OB = 9$ см. Найдите AB, если $DC = 2$ см.

486. В треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) на катете AC и гипотенузе AB отметили точки M и N так, что $AM = \frac{3}{4}AC$, $AN = \frac{3}{4}AB$. Докажите, что $\triangle AMN$ – прямоугольный.

487. На катете BC и гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точки P и F так, что $BP = \frac{1}{3}BC$, $BF = \frac{1}{3}BA$. Докажите, что $PF = \frac{1}{3}CA$.

488. Угол при основании одного равнобедренного треугольника равен углу при основании другого равнобедренного треугольника. Периметр первого треугольника – 36 см. Найдите его стороны, если у второго треугольника боковая сторона относится к основанию как 5 : 2.

489. Даны два равнобедренных треугольника. Угол при вершине одного из них равен углу при вершине другого. Периметр первого треугольника – 30 см. Найдите его стороны, если у второго треугольника основание относится к боковой стороне как 1 : 2.

3 Достаточный уровень

490. На рисунках 139–141 $ABCD$ – параллелограмм. Найдите на этих рисунках все пары подобных треугольников и докажите их подобие.

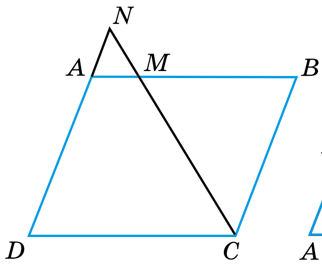


Рис. 139

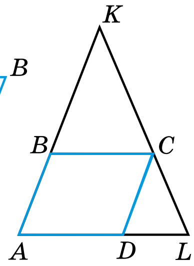


Рис. 140

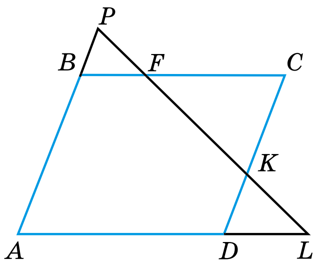


Рис. 141

491. На рисунке 142 $ABCD$ – трапеция, $\angle ABC = \angle ACD$. Найдите подобные треугольники на этом рисунке и докажите, что $CA^2 = BC \cdot AD$.

492. Углы одного треугольника относятся как 2 : 3 : 4, а один из углов другого треугольника на 20° больше второго и на 20° меньше третьего. Подобны ли эти треугольники?

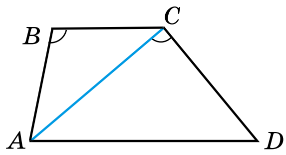


Рис. 142

493. Углы одного треугольника относятся как 1 : 3 : 2, а другой треугольник является прямоугольным и один из его острых углов равен половине второго. Подобны ли эти треугольники?

494. В параллелограмме $ABCD$ точки E, F, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно. $\frac{EB}{BF} = \frac{DM}{DN}$. Докажите, что $\angle BFE = \angle DNM$.

495. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$. Докажите, что $\angle BCO = \angle ADO$.

496. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O, $BO = 4$ см, $DO = 7$ см. Найдите основания трапеции, если ее средняя линия равна 22 см.

497. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O, $AD = 11$ см, $BC = 5$ см. Найдите отрезки BO и OD, если их разность равна 3 см.

498. В треугольнике ABC $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $AC = 18$ см. На стороне AC отложен отрезок $CK = 6$ см, на стороне BC – отрезок $CP = 4$ см.

1) Подобны ли треугольники ABC и KPC?
2) Параллельны ли прямые AB и KP?
3) Найдите длину отрезка PK.

499. Прямая MN параллельна стороне AB треугольника ABC, $M \in AC$, $N \in BC$. $AB = 10$ см, $MN = 4$ см, $MA = 2$ см. Найдите длину стороны AC.

500. Прямая KL параллельна стороне BC треугольника ABC, $K \in AB$, $L \in AC$. $KB = 6$ см, $BC = 12$ см, $KL = 9$ см. Найдите длину стороны AB.

501. На рисунке 143 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

502. На рисунке 144 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

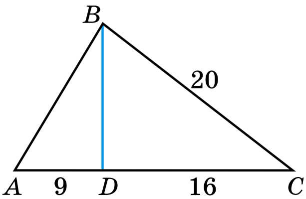


Рис. 143

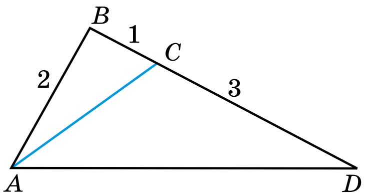


Рис. 144

4 Высокий уровень

503. Дано два равнобедренных треугольника. Угол при вершине одного из них равен углу при вершине другого. Периметр первого треугольника равен 90 см. Найдите его стороны, если стороны второго треугольника относятся как 4 : 7. Сколько случаев следует рассмотреть?

504. Дано два равнобедренных треугольника. Угол при основании одного из них равен углу при основании другого. Стороны одного треугольника относятся как 5 : 8, а периметр второго равен 126 см. Найдите стороны второго треугольника. Сколько случаев следует рассмотреть?

505. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, CD и C_1D_1 – биссектрисы данных треугольников. Докажите, что $\triangle ADC \sim \triangle A_1D_1C_1$.

506. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, AM и A_1M_1 – медианы данных треугольников. Докажите, что $\triangle AMC \sim \triangle A_1M_1C_1$.

507. На стороне BC треугольника ABC отметили точку F так, что $\angle BAF = \angle C$, $BF = 4$ см, $AB = 6$ см. Найдите BC.

508. На стороне AC треугольника ABC отметили точку K так, что $\angle ABK = \angle C$. Найдите KC, если $AB = 2$ см, $AK = 1$ см.

509. В прямоугольный треугольник ABC с катетами a см и b см и прямым углом A вписан квадрат $AKLM$, $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in AC$. Найдите сторону квадрата.

510. Периметр параллелограмма равен 24 см, а его высоты относятся как 5 : 3. Найдите стороны параллелограмма.

511. Периметр параллелограмма равен 30 см, а его высоты – 4 см и 8 см. Найдите стороны параллелограмма.

512. В треугольник ABC вписан ромб $AKFP$ так, что угол A у них общий, $P \in AB$, $F \in BC$, $K \in AC$. Найдите сторону ромба, если $CK = 4$ см, $PB = 9$ см.

513. В равнобедренный треугольник, основание которого равно 6 см, а боковая сторона – 10 см, вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания окружности к боковым сторонам.

Упражнения для повторения

514. Найдите углы треугольника, если три его средние линии равны.

515. В равнобокой трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точки E, F, K – середины AD, BC и AB соответственно. Докажите, что $KE = KF$.

516. Каждая из боковых сторон равнобедренного треугольника равна a см. Из точки, взятой на основании треугольника, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Вычислите периметр образовавшегося параллелограмма.

517. Докажите, что биссектрисы углов прямоугольника, не являющегося квадратом, пересекаясь, образуют квадрат.

Интересные задачки для нелинивых

518. Могут ли биссектриса и медиана, выходящие из вершины прямого угла треугольника, образовывать равнобедренный треугольник? Если да, то найдите меньший из острых углов прямоугольного треугольника.

§ 15. СРЕДНИЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Лемма. **Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных друг другу прямоугольных треугольника, каждый из которых подобный данному треугольнику.**

Доказательство. Пусть ABC – прямоугольный треугольник ($\angle C = 90°$), CD – высота треугольника (рис. 145). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ и $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

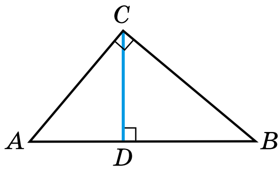


Рис. 145

1) У прямоугольных треугольников ABC и ACD угол A – общий. Поэтому $\triangle ABC \backsim \triangle ACD$ (по острому углу).

2) Аналогично $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ ($\angle B$ – общий, $\angle BCA = \angle BDC = 90°$). Откуда $\angle A = \angle BCD$.

3) У треугольников ACD ($\angle D = 90°$) и CBD ($\angle D = 90°$) $\angle A = \angle BCD$. Поэтому $\triangle ACD \backsim \triangle CBD$ (по острому углу). ▲

Отрезок AD называют *проекцией* катета AC на гипотенузу AB, а отрезок BD – *проекцией* катета BC на гипотенузу AB.

Отрезок k называют *средним пропорциональным* (или *средним геометрическим*) отрезков m и n, если $k^2 = m \cdot n$.

Т е о р е м а (о средних пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике). **1) Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, является средним пропорциональным проекций катетов на гипотенузу. 2) Катет прямоугольного треугольника является средним пропорциональным гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим рисунок 145.

1) $\triangle ACD \backsim \triangle CBD$ (по лемме). Поэтому $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$, или $CD^2 = AD \cdot BD$.

2) $\triangle ABC \backsim \triangle ACD$ (по лемме). Поэтому $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$, или $AC^2 = AB \cdot AD$.

$\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ (по лемме). Поэтому $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BD}{BC}$, или $BC^2 = AB \cdot BD$. ▲

Задача 1. CD – высота прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Докажите, что $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BC^2}{AC^2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим рисунок 145. Так как $AC^2 = AB \cdot AD$, то $AB = \dfrac{AC^2}{AD}$, а так как $BC^2 = AB \cdot AD$, то $AB = \dfrac{BC^2}{BD}$. Поэтому $\dfrac{AC^2}{AD} = \dfrac{BC^2}{BD}$, откуда $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BC^2}{AC^2}$.

Задача 2. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите периметр треугольника.

Решение. Рассмотрим рисунок 145, где $AD = 9$ см, $DB = 16$ см.

1) $AB = AD + DB = 9 + 16 = 25$ (см).

2) $AC^2 = AB \cdot AD$, то есть $AC^2 = 25 \cdot 9 = 225$. Так как $15^2 = 225$, то $AC = 15$ (см).

3) $BC^2 = AB \cdot BD$, $BC^2 = 25 \cdot 16 = 400$. Так как $20^2 = 400$, то $BC = 20$ (см).

4) $P_{ABC} = 25 + 15 + 20 = 60$ (см).

Ответ. 60 см.

При решении задач этого параграфа советуем использовать таблицу квадратов натуральных чисел.

1. Сформулируйте и докажите лемму из этого параграфа.
2. Какой отрезок называют средним пропорциональным двух отрезков?
3. Сформулируйте и докажите теорему о средних пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.

1 Начальный уровень

519. (Устно.) На рисунке 146 NK – высота прямоугольного треугольника PNM ($\angle N = 90°$). Назовите:

1) проекцию катета NM на гипотенузу;

2) проекцию катета NP на гипотенузу.

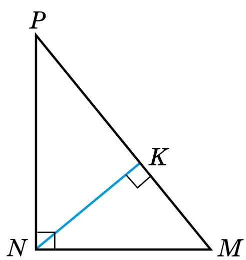


Рис. 146

520. (Устно.) NK – высота прямоугольного треугольника PNM (рис. 146). Какие из равенств верны:

1) $NK = PK \cdot KM$; 2) $NM^2 = KM \cdot PM$;

3) $PN = PK \cdot KM$; 4) $PK \cdot KM = NK^2$?

521. NK – высота прямоугольного треугольника PNM с прямым углом N (рис. 146). Заполните пропуски:

1) $NK^2 = \ldots$; 2) $NM^2 = \ldots$;

3) $PK \cdot PM = \ldots$; 4) $PK \cdot KM = \ldots$.

522. Найдите среднее пропорциональное отрезков, длины которых:

1) 2 см и 8 см; 2) 27 дм и 3 дм.

523. Найдите среднее пропорциональное отрезков, длины которых:

1) 16 дм и 1 дм; 2) 4 см и 9 см.

2 Средний уровень

524. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведенную к гипотенузе, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 см и 25 см.

525. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если она делит гипотенузу на отрезки 2 см и 8 см.

526. Найдите катет прямоугольного треугольника, если его проекция на гипотенузу равна 4 см, а гипотенуза – 16 см.

527. Найдите катет прямоугольного треугольника, если гипотенуза треугольника равна 25 см, а проекция катета на гипотенузу – 9 см.

528. Катет прямоугольного треугольника равен 18 см, а его проекция на гипотенузу – 9 см. Найдите гипотенузу треугольника.

529. Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а гипотенуза – 9 см. Найдите проекцию этого катета на гипотенузу.

530. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки 8 см и 4,5 см. Найдите катеты треугольника.

531. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 50 см, а проекция одного из катетов на гипотенузу – 18 см. Найдите катеты треугольника.

3 Достаточный уровень

532. Перпендикуляр, проведенный из середины основания равнобедренного треугольника к его боковой стороне, делит ее на отрезки 1 см и 8 см, считая от вершины угла при основании. Найдите периметр треугольника.

533. Перпендикуляр, проведенный из середины основания равнобедренного треугольника к его боковой стороне, делит ее на отрезки 6 см и 2 см, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите периметр треугольника.

534. Высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки в отношении 9 : 16. Найдите катеты треугольника, если его высота равна 24 см.

535. Высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки, один из которых равен 16 см, а другой относится к высоте как 3 : 4. Найдите высоту треугольника.

536. Окружность, вписанная в ромб, точкой касания делит его сторону на отрезки 1 см и 4 см. Найдите радиус окружности.

4 Высокий уровень

537. Найдите высоту равнобокой трапеции, основания которой равны 10 см и 8 см, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

538. Найдите высоту равнобокой трапеции, основания которой равны 13 см и 5 см, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

539. Окружность, вписанная в трапецию, точкой касания делит ее боковую сторону на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найдите высоту трапеции.

540. Окружность, вписанная в трапецию, точкой касания делит одну боковую сторону на отрезки длиной 2 см и 8 см, а другую – на отрезки, один из которых равен 4 см. Найдите периметр трапеции.

Упражнения для повторения

2 **541.** Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника образует со стороной треугольника угол 18°. Найдите углы треугольника.

3 **542.** О треугольниках ABC и KLM известно, что $\angle A + \angle B = \angle K + \angle L$, $\angle B + \angle C = \angle L + \angle M$. Подобны ли эти треугольники?

4 **543.** В равнобокой трапеции диагональ делит острый угол пополам. Докажите, что тупой угол трапеции равен тупому углу между диагоналями.

Интересные задачки для нелнивых

544. (*Олимпиада Нью-Йорка, 1976 г.*) Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC отмечены точки B_1 и C_1 так, что $\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90°$. Докажите, что $AB_1 = AC_1$.

§ 16. СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема (свойство биссектрисы треугольника). **Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.**

Доказательство. Пусть AL – биссектриса треугольника ABC (рис. 147). Докажем, что $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$.

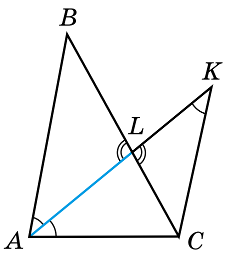


Рис. 147

1) Проведем через точку C прямую, параллельную AB, и продлим биссектрису AL до пересечения с этой прямой в точке K. Тогда $\angle LKC = \angle BAL$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CK и секущей AK).

2) $\triangle AKC$ – равнобедренный (так как $\angle BAL = \angle LAC$ и $\angle BAL = \angle LKC$, то $\angle KAC = \angle AKC$), а значит, $AC = KC$.

3) $\angle BLA = \angle CLK$ (как вертикальные), поэтому $\triangle ABL \sim \triangle KCL$ (по двум углам). Следовательно, $\frac{AB}{KC} = \frac{BL}{CL}$.

Но $KC = AC$, таким образом $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$. ▲

Из пропорции $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$ можно получить и такую: $\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{LC}$.

Задача 1. В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $AC = 4$ см, $BC = 9$ см, AL – биссектриса треугольника. Найдите BL и LC.

Решение. Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 147). Пусть $BL = x$ см, тогда $LC = BC - BL = (9 - x)$ см. Так как $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$, имеем уравнение: $\frac{8}{4} = \frac{x}{9 - x}$, откуда $x = 6$ (см).

Следовательно, $BL = 6$ см, $LC = 9 - 6 = 3$ (см).

Ответ. 6 см, 3 см.

Задача 2. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 24 см, а боковая сторона относится к основанию как 3 : 2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AB = BC$, BK – медиана (рис. 148).

Тогда BK является также высотой и биссектрисой. Поскольку точка I – центр вписанной окружности – является точкой пересечения биссектрис треугольника, то $I \in BK$, IK – радиус окружности.

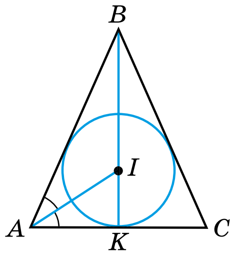


Рис. 148

Учитывая, что $AB : AC = 3 : 2$, обозначим $AB = 3x$, $AC = 2x$. Так как K – середина AC, то $AK = \frac{AC}{2} = \frac{2x}{2} = x$.

AI – биссектриса треугольника ABK, поэтому $\frac{AB}{AK} = \frac{BI}{IK}$.

Пусть $IK = r$. Тогда $BI = 24 - r$. Имеем: $\frac{3x}{x} = \frac{24 - r}{r}$, откуда $r = 6$ см.

О т в е т. 6 см.

Сформулируйте и докажите теорему о свойстве биссектрисы треугольника.

1 Начальный уровень

545. BP – биссектриса треугольника ABC (рис. 149). Какие из равенств являются пропорциями:

1) $\frac{AB}{BC} = \frac{CP}{AP}$; 2) $\frac{BC}{AB} = \frac{CP}{AP}$;

3) $\frac{AP}{CP} = \frac{BA}{BC}$; 4) $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PC}$?

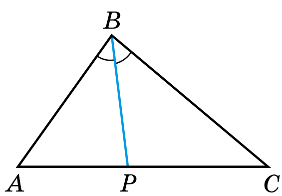


Рис. 149

546. BP – биссектриса треугольника ABC (рис. 149). $AP : PC = 1 : 2$, $AB = 4$ см. Найдите BC.

547. BP – биссектриса треугольника ABC (рис. 149). $AB : BC = 1 : 2$, $AP = 7$ см. Найдите PC.

2 Средний уровень

548. BD – биссектриса треугольника ABC, $AD = 3$ см, $DC = 9$ см. Найдите отношение сторон $\frac{AB}{BC}$.

549. MA – биссектриса треугольника MNL, $ML = 4$ см, $MN = 16$ см. Найдите отношение отрезков $\frac{LA}{AN}$.

550. MD – биссектриса треугольника KMP, $KM = 8$ см, $MP = 6$ см. Меньший из отрезков, на которые биссектриса MD делит сторону KP, равен 3 см. Найдите KP.

551. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $BC = 12$ см. Больший из отрезков, на которые биссектриса BK делит сторону AC, равен 6 см. Найдите AC.

3 Достаточный уровень

552. AL – биссектриса треугольника ABC, $AB = 15$ см, $AC = 12$ см, $BC = 18$ см. Найдите BL и LC.

553. Биссектриса треугольника делит сторону на отрезки, разность которых равна 1 см. Найдите периметр треугольника, если две его другие стороны равны 8 см и 6 см.

554. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а биссектриса делит боковую сторону на отрезки, из которых тот, что ближе к основанию, равен 12 см. Найдите периметр треугольника.

555. В равнобедренном треугольнике основание меньше боковой стороны на 9 см, а биссектриса делит боковую сторону на отрезки, отношение которых равно 2 : 5. Найдите периметр треугольника.

4 Высокий уровень

556. В треугольнике, стороны которого равны 15 см, 21 см и 24 см, проведена полуокружность, центр которой лежит на большей стороне треугольника и которая касается двух других сторон. Какова длина отрезков, на которые центр полуокружности делит бóльшую сторону?

557. В треугольник ABC вписан ромб $CKLM$ так, что угол C у них общий, $K \in AC$, $L \in AB$, $M \in BC$. Найдите длины отрезков AL и LB, если $AC = 18$ см, $BC = 12$ см, $AB = 20$ см.

Упражнения для повторения

3 **558.** Может ли диагональ AC трапеции $ABCD$ делить пополам как угол A, так и угол C?

4 **559.** В треугольнике ABC проведена высота CH, причем $CH^2 = AH \cdot BH$ и точка H принадлежит стороне AB. Докажите, что в треугольнике ABC угол C – прямой.

Интересные задачки для неленивых

560. 1) Решите задачу и узнаете фамилию выдающегося украинца – ученого в отрасли ракетостроения и космонавтики, конструктора первых искусственных спутников Земли и космических кораблей.

Найдите углы A и B параллелограмма $ABCD$, если ...	$\angle A$	$\angle B$
$\angle A$ на $20°$ больше $\angle B$	Л	Р
$\angle A$ втрое меньше $\angle B$	К	В
$\angle A : \angle B = 7 : 5$	Ё	О

45°	75°	80°	75°	100°	105°	135°

2) Поинтересуйтесь (используя разные источники информации) биографией и достижениями нашего выдающегося земляка.

§ 17. ПРИМЕНЕНИЕ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Рассмотрим некоторые интересные свойства геометрических фигур, которые легко получить из подобия треугольников, и применим подобие к решению практических задач.

1. *Пропорциональность отрезков хорд.*

Теорема 1 (о пропорциональности отрезков хорд). **Если хорды AB и CD пересекаются в точке S, то**

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Доказательство. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке S (рис. 150). Рассмотрим $\triangle SAD$ и $\triangle SCB$, у которых $\angle ASD = \angle CSB$ (как вертикальные), $\angle DAB = \angle DCB$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу).

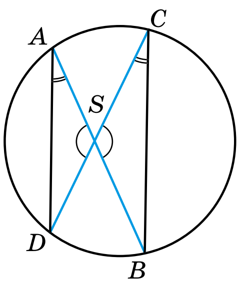


Рис. 150

Тогда $\triangle SAD \sim \triangle SCB$ (по двум углам), а значит, $\dfrac{AS}{CS} = \dfrac{DS}{BS}$, откуда

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS. \blacktriangle$$

Следствие. **Если O – центр окружности, R – ее радиус, AB – хорда, $S \in AB$, то $AS \cdot BS = R^2 - a^2$, где $a = SO$.**

Доказательство. Проведем через точку S диаметр MN (рис. 151). Тогда $AS \cdot BS = MS \cdot NS$, $AS \cdot BS = (R + a)(R - a)$, $AS \cdot BS = R^2 - a^2$. Окончательно имеем:

$$AS \cdot BS = MS \cdot NS = R^2 - a^2. \blacktriangle$$

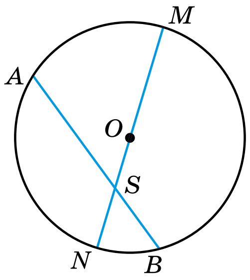


Рис. 151

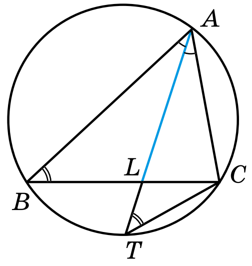


Рис. 152

Задача 1. AL – биссектриса треугольника ABC. Докажите *формулу биссектрисы*: $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$.

Доказательство. Опишем около треугольника ABC окружность и продлим AL до пересечения с окружностью в точке T (рис. 152).

1) $\angle ABC = \angle ATC$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AC), $\angle BAL = \angle CAL$ (по условию). Поэтому $\triangle ABL \sim \triangle ATC$ (по двум углам).

2) Имеем: $\dfrac{AB}{AT} = \dfrac{AL}{AC}$, откуда $AL \cdot AT = AB \cdot AC$;

$AL \cdot (AL + LT) = AB \cdot AC$; $AL^2 + AL \cdot LT = AB \cdot AC$.

Но по теореме о пропорциональности отрезков хорд:

$$AL \cdot LT = BL \cdot CL.$$

3) Следовательно,

$$AL^2 + BL \cdot CL = AB \cdot AC, \text{ то есть } AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL. \blacktriangle$$

2. *Пропорциональность отрезков секущей и касательной.*

Теорема 2 (о пропорциональности отрезков секущей и касательной). **Если из точки S, лежащей вне круга, провести секущую, пересекающую окружность в точках A и B, и касательную SC, где C – точка касания, то $SC^2 = SA \cdot SB$.**

Доказательство. Рассмотрим рис. 153. $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (как вписанный угол), $\angle SCA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (задача 243, с. 49), то есть $\angle SCA = \angle ABC$. Поэтому $\triangle CSA \sim \triangle BSC$ (по двум углам), значит, $\dfrac{SC}{SB} = \dfrac{SA}{SC}$. Откуда $SC^2 = SA \cdot SB$. $\blacktriangle$

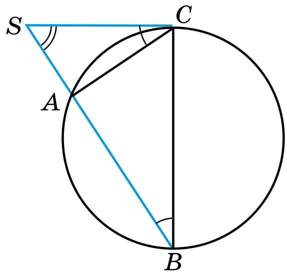


Рис. 153

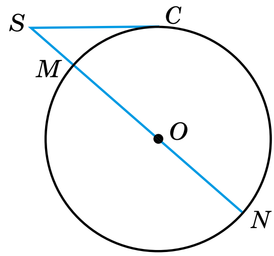


Рис. 154

Следствие 1. **Если из точки S провести две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках A и B, а другая — в точках M и N, то $SA \cdot SB = SM \cdot SN$.**

Так как по теореме каждое из произведений $SA \cdot SB$ и $SM \cdot SN$ равно SC^2, то следствие очевидно.

Следствие 2. **Если O — центр окружности, R — ее радиус, SC — касательная, C — точка касания, то $SC^2 = a^2 - R^2$, где $a = SO$.**

Доказательство. Проведем из точки S через центр окружности O секущую (рис. 154), M и N — точки ее пересечения с окружностью. Тогда по теореме:

$$SC^2 = SM \cdot SN, \text{ но } SM = a - R,\ SN = a + R,$$

поэтому $SC^2 = SA \cdot SB = a^2 - R^2$. ▲

3. *Измерительные работы на местности.*

Предположим, что нам необходимо измерить высоту некоторого предмета, например высоту ели M_1N_1 (рис. 155). Для этого установим на некотором расстоянии от ели жердь MN с планкой, которая вращается вокруг точки N. Направим планку на верхнюю точку N_1 ели, как показано на рисунке 155. На земле отметим точку A, в которой планка упирается в поверхность земли.

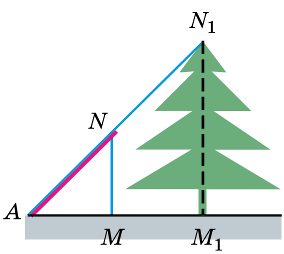


Рис. 155

Рассмотрим $\triangle ANM$ ($\angle M = 90°$) и $\triangle AN_1M_1$ ($\angle M_1 = 90°$). $\angle A$ у них общий, поэтому $\triangle ANM \sim \triangle AN_1M_1$ (по острому углу).

Тогда $\dfrac{MN}{AM} = \dfrac{M_1N_1}{AM_1}$, откуда $M_1N_1 = \dfrac{MN \cdot AM_1}{AM}$.

Если, например, $MN = 2$ м, $AM = 3{,}2$ м, $AM_1 = 7{,}2$ м, то $M_1N_1 = \dfrac{2 \cdot 7{,}2}{3{,}2} = 4{,}5$ (м).

4. *Задачи на построение.*

Задача 2. Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.

Решение. На рисунке 156 изображены два данных угла и данный отрезок. Построим треугольник, у которого два угла соответственно равны двум данным углам, а медиана, проведенная из вершины третьего угла, равна данному отрезку.

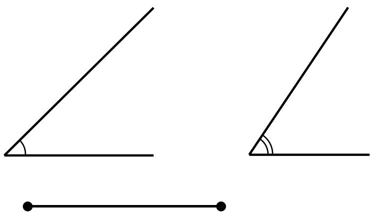


Рис. 156

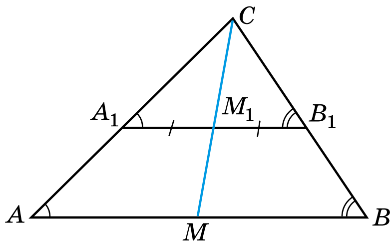


Рис. 157

1) Строим некоторый треугольник, подобный искомому. Для этого построим произвольный треугольник A_1B_1C, у которого углы A_1 и B_1 равны данным (рис. 157).

2) Проводим медиану CM_1 треугольника A_1CB_1 и откладываем на прямой CM_1 отрезок CM, равный данному.

3) Через точку M проводим прямую, параллельную A_1B_1. Она пересекает стороны угла C в некоторых точках A и B (рис. 157).

4) Так как $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Значит, два угла треугольника ABC равны данным.

Докажем, что M – середина AB.

$\triangle A_1CM_1 \sim \triangle ACM$ (по двум углам). Поэтому $\dfrac{CM_1}{CM} = \dfrac{A_1M_1}{AM}$.

$\triangle B_1CM \sim \triangle BCM$ (по двум углам). Поэтому $\dfrac{CM_1}{CM} = \dfrac{B_1M_1}{BM}$.

Получаем, что $\dfrac{A_1M_1}{AM} = \dfrac{B_1M_1}{BM}$, то есть $\dfrac{A_1M_1}{B_1M_1} = \dfrac{AM}{BM}$. Но $A_1M_1 = B_1M_1$ (по построению), поэтому $\dfrac{AM}{BM} = 1$ и $AM = BM$.

Следовательно, CM – медиана треугольника ABC и треугольник ABC – искомый. ▲

1. Сформулируйте теорему о пропорциональности отрезков хорд и следствие из нее.
2. Сформулируйте теорему о пропорциональности отрезков секущей и касательной и следствия из нее.

1 Начальный уровень

561. (Устно.) T – точка пересечения хорд AB и CD (рис. 158). Какие из равенств верны:

1) $AT \cdot TC = BT \cdot TD$; 2) $AT \cdot TB = CT \cdot TD$;
3) $AT \cdot DT = CT \cdot BT$; 4) $CT \cdot DT = AT \cdot BT$?

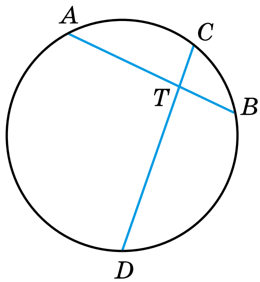


Рис. 158

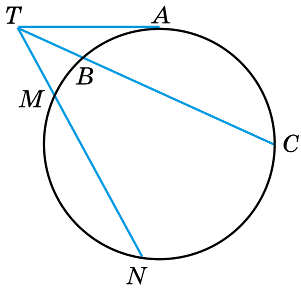


Рис. 159

562. (Устно.) TA – отрезок касательной к окружности. Две секущие пересекают окружность в точках B и C, M и N соответственно (рис. 159). Какие из равенств верны:

1) $TA^2 = TB \cdot BC$; 2) $TA^2 = TM \cdot TN$;
3) $TB \cdot TC = TM \cdot MN$; 4) $TM \cdot TN = TB \cdot TC$?

2 Средний уровень

563. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке P, $AP = 9$, $PB = 2$, $DP = 4$. Найдите CP.

564. Хорды MN и KL окружности пересекаются в точке A, $KA = 6$, $AL = 3$, $MA = 4$. Найдите AN.

565. SA – отрезок касательной к окружности, A – точка касания. Секущая, проходящая через точку S, пересекает окружность в точках B и C, $SA = 6$ см, $SB = 4$ см. Найдите SC и BC.

566. MP – отрезок касательной к окружности, P – точка касания. Секущая, проходящая через точку M, пересекает окружность в точках B и C. $MP = 4$ см, $MC = 8$ см. Найдите MB и BC.

567. Хорды AB и CD пересекаются в точке T. Найдите длину хорды CD, если $AB = 16$ см, $AT = 2$ см, $CT = 1$ см.

568. Хорда CD, длина которой 13 см, пересекает хорду MN в точке A. $CA = 4$ см, $MA = 2$ см. Найдите длину хорды MN.

569. Секущая, проходящая через точку S, пересекает окружность в точках A и B, а другая секущая, проходящая через точки S и центр окружности O, – в точках C и D (рис. 160). $SA = 4$ см, $SB = 16$ см, $SC = 2$ см. Найдите радиус окружности.

570. Секущая, проходящая через точку S, пересекает окружность в точках A и B, а вторая секущая, проходящая через точки S и центр окружности O, – в точках C и D (рис. 160). $SA = 4$ см, $SB = 9$ см, $SC = 3$ см. Найдите диаметр окружности.

571. Для нахождения высоты фонарного столба B_1C_1 использовали жердь BC длиной 1,5 м (рис. 161). $AB = 1$ м, $AB_1 = 6$ м. Найдите высоту фонарного столба B_1C_1.

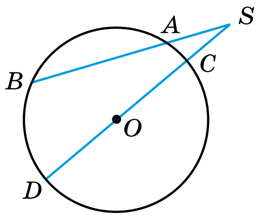


Рис. 160

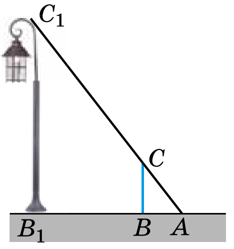


Рис. 161

572. Дворник, измеряя высоту фонарного столба B_1C_1, использовал жердь BC с планкой AC (рис. 161). Найдите длину использованной жерди BC, если высота фонарного столба составила 8 м и $AB_1 = 10$ м, $AB = 2,5$ м.

573. Чтобы найти на местности расстояние от точки A к недоступной точке C, выбрали точку B, а потом на бумаге построили треугольник $A_1B_1C_1$ так, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 162). Найдите AC, если $AB = 30$ м, $A_1B_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 7$ см.

3 Достаточный уровень

574. Хорды окружности AB и CD пересекаются в точке E. $AE : BE = 1 : 3$, $CD = 20$ см, $DE = 5$ см. Найдите AB.

575. Через точку M, находящуюся внутри круга, проведены две хорды AB и CD. Найдите AB, если $AM = MB$, $CM = 16$ см, $DM : MC = 1 : 4$.

576. На рисунке 163 AB – касательная к окружности с центром O, $AB = 3$ см, $AO = 5$ см. Найдите диаметр окружности.

577. На рисунке 163 AB – касательная к окружности с центром O, $AB = 8$ см, $AO = 10$ см. Найдите радиус окружности.

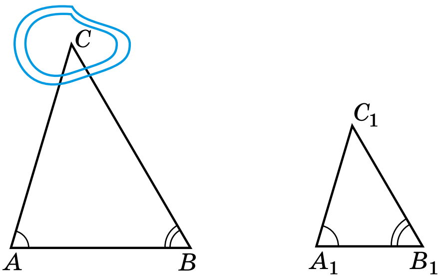


Рис. 162

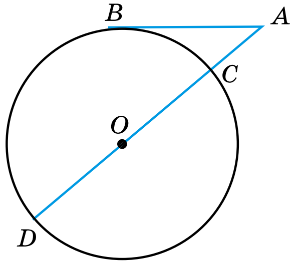


Рис. 163

578. Диаметр AB окружности перпендикулярен хорде CD. AB и CD пересекаются в точке M. $AM = 2$ см, $CM = 4$ см. Найдите радиус окружности.

579. Диаметр MN и хорда AB окружности – взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P. $PB = 12$ см, $NP = 18$ см. Найдите диаметр окружности.

4 Высокий уровень

580. Перпендикуляр, проведенный из точки окружности к ее радиусу, равен 24 см и делит радиус в отношении 5 : 8, считая от центра. Найдите радиус окружности.

581. Найдите биссектрису AL треугольника ABC, если $AC = 15$ см, $AB = 12$ см, $BC = 18$ см.

582. Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведенной из вершины третьего угла.

583. Постройте треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

584. Постройте треугольник ABC по данному углу C, отношению сторон $AC : CB = 3 : 2$ и медиане CM.

Упражнения для повторения

2 **585.** PL – биссектриса треугольника PMN, $PN = 6$ см, $PM = 10$ см. Больший из двух отрезков, на которые биссектриса PL разделила сторону MN, равен 5 см. Найдите меньший из этих отрезков.

3 **586.** Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 6. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 52 см.

587. Основания равнобокой трапеции равны a см и b см ($a > b$). Найдите квадрат высоты трапеции, если ее боковая сторона перпендикулярна диагонали.

Интересные задачки для неленивых

588. На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC отложен отрезок $CM = BC$. Может ли угол ABM быть: 1) острым; 2) прямым?

Домашняя самостоятельная работа № 3

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. Дано: $AB \parallel CD$ (рис. 164), $OA = 3$ см, $OB = 4$ см, $BD = 12$ см. Найдите AC.

А. 8 см; **Б.** 9 см;
В. 10 см; **Г.** 16 см.

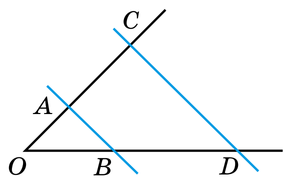


Рис. 164

2. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$; $AB : DE = 2 : 3$. Найдите отношение $EF : BC$.

А. 5 : 2; **Б.** 3 : 5;
В. 2 : 3; **Г.** 3 : 2.

3. Укажите условия, при которых $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

А. $\angle A = \angle A_1 = 30°$;
Б. $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = 40°$; $\angle B_1 = 50°$;
В. $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = 47°$; $\angle C_1 = 47°$;
Г. $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = 150°$; $\angle C_1 = 150°$.

4. На рисунке 165 ABC – разносторонний треугольник, $\angle D = \angle B$. Укажите верное утверждение.

А. $\triangle ABC \sim \triangle ADL$;
Б. $\triangle ABC \sim \triangle ALD$;
В. $\triangle ABC \sim \triangle DAL$;
Г. $\triangle ABC \sim \triangle DLA$.

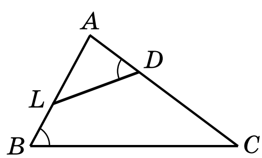


Рис. 165

5. CL – биссектриса треугольника ABC. $AC = 6$ см; $BC = 9$ см. Больший из отрезков, на которые биссектриса CL делит сторону AB, равен 3 см. Найдите AB.

А. 7,5 см; **Б.** 6 см; **В.** 5 см; **Г.** 6,5 см.

6. Катет прямоугольного треугольника равен 12 см, а его проекция на гипотенузу – 8 см. Найдите гипотенузу треугольника.

А. 15 см; **Б.** 18 см; **В.** 16 см; **Г.** 24 см.

3 **7.** Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Найдите наименьшую сторону подобного ему треугольника, если сумма его средней по величине и наибольшей сторон равна 72 см.

А. 18 см; **Б.** 27 см; **В.** $30\frac{6}{7}$ см; **Г.** 24 см.

8. $ABCD$ – трапеция, AB и CD – ее основания, O – точка пересечения диагоналей. $AB - CD = 4$ см; $AO = 8$ см; $OC = 6$ см. Найдите AB.

А. 12 см; **Б.** 16 см; **В.** 14 см; **Г.** 18 см.

9. Прямая KL параллельна стороне BC треугольника ABC, $K \in AB$, $L \in AC$ (рис. 166). $BC = 9$ см; $KL = 6$ см; $KB = 4$ см. Найдите длину стороны AB.

А. 12 см; **Б.** 8 см;

В. 16 см; **Г.** 10 см.

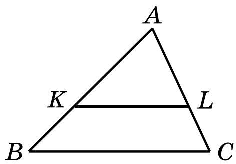


Рис. 166

4 **10.** Периметр параллелограмма равен 30 см, а его высоты – 4 см и 6 см. Найдите большую сторону параллелограмма.

А. 6 см; **Б.** 8 см; **В.** 9 см; **Г.** 12 см.

11. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне. Высота трапеции равна 6 см и делит большее основание на два отрезка, меньший из которых равен 3 см. Найдите меньшее основание трапеции.

А. 6 см; **Б.** 8 см; **В.** 9 см; **Г.** 12 см.

12. В треугольнике, стороны которого равны 8 см, 12 см и 15 см, проведена полуокружность так, что центр ее лежит на большей стороне треугольника, и она касается двух других сторон треугольника. На какие отрезки центр полуокружности делит большую сторону треугольника?

А. 6 см и 9 см; **Б.** 8 см и 7 см;

В. 7,5 см и 7,5 см; **Г.** 5 см и 10 см.

Задания для проверки знаний к § 12–17

1 **1.** $\triangle ABC \sim \triangle LMN$, $\frac{AB}{LM} = 3$. Найдите отношение $\frac{AC}{LN}$.

2. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, если $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см, $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 8$ см, $A_1C_1 = 10$ см.

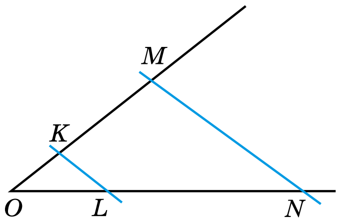


Рис. 167

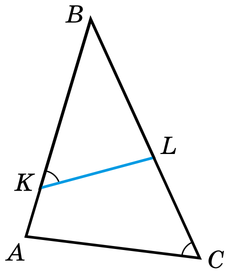


Рис. 168

3. Дано: $KL \parallel MN$ (рис. 167), $OL = 3$ см, $LN = 6$ см, $OK = 2$ см. Найдите KM.

4. Найдите катет прямоугольного треугольника, если его проекция на гипотенузу равна 4 см, а гипотенуза – 25 см.

5. AL – биссектриса треугольника ABC, $AB = 8$ см, $AC = 10$ см. Меньший из отрезков, на которые биссектриса AL делит сторону BC, равен 4 см. Найдите BC.

6. На рисунке 168 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

7. Стороны треугольника относятся как 5 : 6 : 7. Найдите неизвестные стороны подобного ему треугольника, у которого сумма большей и меньшей сторон равна 24 см.

8. O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AO = 6$ см, $OC = 4$ см. Найдите основания трапеции, если их сумма равна 20 см.

9. Найдите высоту равнобокой трапеции, основания которой равны 10 см и 6 см, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

Дополнительные задания

10. В двух равнобедренных треугольниках углы при вершине равны. Периметр одного из треугольников равен 56 см. Найдите его стороны, если две стороны второго треугольника относятся как 2 : 3.

11. На стороне AC треугольника ABC отметили точку K так, что $\angle ABK = \angle C$, $AB = 8$ см, $AK = 4$ см. Найдите KC.

Упражнения для повторения главы 2

К § 12

589. На рисунке 169 $MN \parallel KL$.

1) $OM : ON = 2 : 3$. Найдите $MK : NL$.

2) $OL : ON = 7 : 5$. Найдите $OK : OM$.

590. Параллельные прямые MN и KL пересекают стороны угла с вершиной O (рис. 169). $OM = 4$, $NL = 9$, $ON = MK$. Найдите длину отрезка ON.

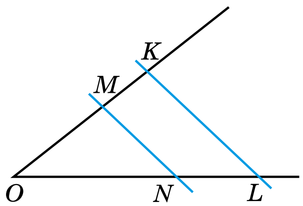


Рис. 169

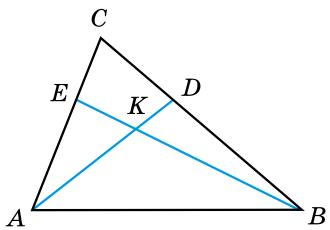


Рис. 170

591. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок $x = \frac{a^2}{b}$.

592. На рисунке 170 $AE : EC = 2 : 1$, $BD : DC = 3 : 2$. Найдите $BK : KE$.

К § 13

593. $\triangle ABC \sim \triangle KLM$. Заполните пустые ячейки:

1) $\frac{AB}{AC} = \frac{\square}{\square}$; 2) $\frac{BC}{AC} = \frac{\square}{\square}$.

594. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Найдите неизвестные стороны обоих треугольников.

595. Стороны треугольника относятся как $2 : 5 : 6$. Найдите периметр подобного ему треугольника, у которого:

1) средняя по длине сторона равна 20 см;

2) сумма большей и меньшей сторон равна 40 см.

596. В треугольнике проведена средняя линия. Подобен ли образовавшийся треугольник данному треугольнику?

К § 14

597. При каких условиях два треугольника подобны:

1) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого;

2) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого;

3) три угла одного треугольника равны трем углам другого?

598. На катете AC и гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и L так, что $\angle APL = 90°$. Докажите, что $\triangle APL \sim \triangle ACB$.

599. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, $OB = 3OA$, $OC = 3OD$. Докажите, что $\triangle AOD \sim \triangle BOC$.

600. Диагонали трапеции делятся точкой пересечения в отношении 2 : 3. Меньшее основание трапеции равно 8 см. Найдите большее основание трапеции.

601. У треугольников KLM и $K_1L_1M_1$ $\angle K = \angle K_1$, а стороны треугольника KLM, образующие угол K, в 2,5 раза больше сторон, образующих угол K_1. Найдите LM, если $L_1M_1 = 4$ см.

602. $ABCD$ – трапеция, $AD \parallel BC$, $\angle BAC = \angle ADC$.

1) Найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

2) Докажите, что $AC^2 = AD \cdot BC$.

603. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили точки M и N такие, что $AC \cdot CM = BC \cdot CN$. Найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

604. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка K так, что $\angle BKC = \angle ABC$, причем $\angle BKC$ – тупой. Найдите BC, если $AK = 16$ см, $CK = 9$ см.

605. В треугольнике ABC через точку N, принадлежащую стороне BC, проведены прямые, пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках M и K и параллельные AC и AB. Докажите, что $MN \cdot NK = BM \cdot CK$.

606. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, точки I и I_1 – точки пересечения биссектрис данных треугольников. Докажите, что $\triangle AIB \sim \triangle A_1I_1B_1$.

607. В треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$, у которого $KN = 16$ см, $LK = 10$ см, причем $K \in AC$, $N \in AC$, $M \in BC$, $L \in AB$. Найдите высоту треугольника, проведенную из вершины B, если $AC = 24$ см.

608. BD и AE – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что $DC \cdot AC = EC \cdot BC$.

К § 15

609. Начертите прямоугольный треугольник KLM ($\angle K = 90°$) и проведите в нем высоту KP. Какие отрезки являются проекциями катетов KL и KM на гипотенузу?

610. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки 1 см и 8 см. Найдите меньший катет треугольника.

611. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна 24 см, а проекция одного из катетов на гипотенузу – 18 см. Найдите проекцию второго катета на гипотенузу и катеты треугольника.

612. BM – биссектриса равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Из точки M к стороне BC проведен перпендикуляр MK. Найдите BM и периметр треугольника, если $KC = 9$ см, $MK = 12$ см.

613. Перпендикуляр, проведенный из вершины угла прямоугольника к диагонали, делит ее на отрезки, длины которых относятся как 9 : 16. Найдите периметр прямоугольника, если длина перпендикуляра 12 см.

614. Окружность, вписанная в ромб, точкой касания делит сторону ромба на отрезки 3,6 см и 6,4 см. Найдите диагонали ромба.

615. В равнобокой трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне. Высота трапеции равна 6 см, а средняя линия – 9 см. Найдите основания трапеции.

К § 16

616. BM – биссектриса треугольника ABC. Найдите отношение $\frac{AM}{MC}$, если $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$.

617. BD – биссектриса треугольника ABC. Найдите сторону AB, если $AD : DC = 3 : 5$, $BC = 20$ см.

618. Одна из сторон параллелограмма на 9 см больше другой. Биссектриса угла параллелограмма делит диагональ параллелограмма на отрезки 4 см и 10 см. Найдите периметр параллелограмма.

619. Периметр прямоугольника равен 60 см. Биссектриса угла прямоугольника делит его диагональ на отрезки, отношение которых равно 7 : 8. Найдите стороны прямоугольника.

620. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC. Сравните углы ACD и BCD, если $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $AD = 3$ см, $DB = 7$ см.

621. В равнобедренном треугольнике радиус вписанной окружности в 5 раз меньше высоты, проведенной к основанию треугольника. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 90 см.

К § 17

622. S – точка пересечения хорд AB и CD. $AS = 4$, $SB = 1$. Чему равно произведение $CS \cdot DS$?

623. Секущие a и b выходят из точки M, лежащей вне окружности. Секущая a пересекает окружность в точках A и B, а секущая b – в точках C и D. Известно, что $MA \cdot MB = 28$, $MC = 4$. Найдите MD и CD.

624. Из точки A к окружности проведены касательная AM и секущая AP (рис. 171). Найдите длины отрезков AK и PK, если $AM = 8$ см, $AP = 16$ см.

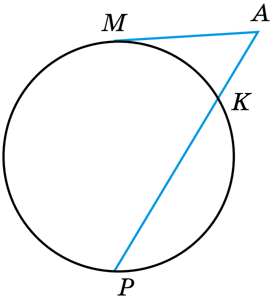


Рис. 171

625. Из точки A к окружности проведены касательная AM и секущая AP (рис. 171). $AM = 10$ см, $AP : AK = 4 : 1$. Найдите AK, AP и KP.

626. Продолжение медианы AM равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) пересекает окружность, описанную около треугольника, в точке P. $AM = 6$ см, $BC = 8$ см. Найдите AP.

627. Из вершины B треугольника ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $BL = 5$ см, $AL = 4$ см, $LC = 5$ см. Найдите AB и BC.

628. Постройте треугольник ABC по данному углу A, отношению сторон $AC : AB = 4 : 3$ и биссектрисе AL.

Гранд геометрии XX-го века

В начале 80-х годов XX-го века Американское математическое общество издавало серию книг под общим названием «Выдающиеся математики XX-го века». Том с монографией харьковского ученого Алексея Васильевича Погорелова «Проблема Монжа–Ампера» вышел под номером 4. В краткой аннотации на суперобложке тома автор был назван «грандом геометрии XX-го века». Именно так оценили вклад нашего соотечественника в развитие геометрии – одной из древнейших наук на Земле.

Алексей Погорелов родился 3 марта 1919 года в маленьком городе Короча Курской губернии (Россия). В 1929 году семья Погореловых переезжает в Харьков. Родители маленького Алеши работали на строительстве Харьковского тракторного завода, а затем и на самом заводе. Семья долгое время жила в крошечной, отгороженной от соседей клетушке барака. Кроватей на всех членов семьи не хватало, и отцу приходилось специально работать в ночную смену, чтобы Алеша и его сестра могли нормально выспаться. Несмотря на такие условия жизни, в школе Алексей хорошо успевал по всем предметам, но больше всего интересовался математикой. Впоследствии на одном из его юбилеев друзья детства вспоминали, что он еще тогда заработал в среде одноклассников прозвище Паскаль.

С 1935 года в Киеве стали ежегодно проводить математическую олимпиаду[1], а в 1937 году одним из ее победителей стал харьковский десятиклассник Алексей Погорелов. Талантливого юношу заметили и пригласили учиться на физико-математический факультет ХГУ (в настоящее время – Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина). О незаурядности студента Погорелова свидетельствует, например, то, что в 1943–1944 гг., во время Второй мировой войны, его направили в Военно-воздушную академию им. Жуковского – один из элитных военно-учебных и научных центров СССР. После стажировки в действующей армии и окончания академии в 1945 году Погорелова направляют на конструкторскую работу в знаменитый Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ) в Москве. Одновременно он учится заочно в аспирантуре Математического института МГУ. Именно в эти годы окончательно сформировался редкий сплав классического

[1] О становлении и развитии украинского математического олимпиадного движения можно прочитать в учебнике «Алгебра. 7 клас» (автор – А.С. Истер, издательство «Генеза»).

математика, изучающего абстрактные проблемы геометрии, и инженера-конструктора, имеющего дело с конкретной техникой. В 1947 году Погорелов начинает преподавательскую деятельность в Харьковском университете. В 1950 году ему было присвоено звание профессора. В течение следующих двадцати лет его деятельность отмечалась многими государственными и международными премиями, он был избран членом-корреспондентом, а затем и действительным членом Академии наук УССР, а в 1976 году он становится академиком АН СССР.

В 1960 году в Харькове организуется Физико-технический институт низких температур (ФТИНТ) и Погорелов возглавил отдел геометрии в его математическом отделении. Здесь он проработал 40 лет и создал в механике и геометрии новое направление – геометрическую теорию устойчивости тонких упругих оболочек, заниматься которой начал еще выдающийся российский математик, академик А.Д. Александров, которого сам Погорелов, кстати, считал своим учителем. Проведенные в ФТИНТе сложные технические исследования полностью подтвердили теорию Погорелова. Инженерный талант этого классического математика ярко проявился в успешном сотрудничестве с машиностроителями при создании уникальных криотурбогенераторов со сверхпроводящей обмоткой и внедрении при этом двух авторских свидетельств. А сколько оригинальных технических идей Погорелова так и не получили официального признания, поскольку это требовало немалых хлопот и усилий, не связанных с творчеством! Среди них – безынерционная спиннинговая катушка, необычный плуг, двигатель внутреннего сгорания принципиально новой схемы.

Но главным делом его жизни, бесспорно, была чистая математика, геометрия. Целую библиотеку – около 40 монографий, переведенных на многие языки мира, оставил после себя Алексей Васильевич. Есть среди них те, которые будут понятны лишь узкому кругу специалистов, а есть и учебники геометрии, написанные для десятков тысяч студентов-математиков. Но самым известным и значимым для классической математики стал его учебник геометрии для средней общеобразовательной школы, изданный впервые в 1972 году, по которому в течение почти 30-ти лет учились десятки миллионов школьников СССР, и еще несколько лет – украинские школьники после обретения Украиной независимости.

Умер Алексей Васильевич Погорелов в декабре 2002 года.

Нашему выдающемуся соотечественнику удалось решить задачи, которые были сформулированы известнейшими математиками XIX-го и начала XX-го века: Коши, Дарбу, Гильбертом, Вейлем, Минковским, Кон-Фессетом и Бернштейном.

Глава 3 РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В этой главе вы:

- **вспомните** основные свойства прямоугольных треугольников;
- **познакомитесь** с теоремой Пифагора; понятиями синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника; свойствами наклонных и их проекций;
- **научитесь** находить соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике, решать прямоугольные треугольники.

§ 18. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Рассмотрим одну из важнейших теорем геометрии, которая показывает зависимость между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника.

Теорема 1 (теорема Пифагора). **В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.**

На сегодняшний день известны более ста доказательств этой теоремы. Рассмотрим одно из них.

Доказательство. Пусть ABC – данный прямоугольный треугольник, у которого $\angle C = 90°$ (рис. 172). Докажем, что

$$\boldsymbol{AB^2 = AC^2 + BC^2}.$$

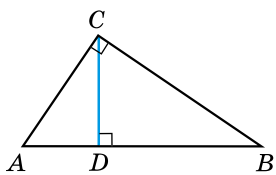


Рис. 172

1) Проведем высоту CD.

2) По теореме о средних пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике имеем:

$$AC^2 = AB \cdot AD \text{ и } BC^2 = AB \cdot BD.$$

3) Сложим эти два равенства почленно. Учитывая, что $AD + BD = AB$, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB \cdot (AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2.$$

4) Следовательно, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. ▲

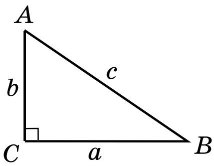


Рис. 173

Если в треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) обозначить $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рис. 173), то теорему Пифагора можно записать формулой:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}.$$

Таким образом, зная две стороны прямоугольного треугольника, с помощью теоремы Пифагора можно найти третью.

В этом нам поможет следующая схема:

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ → $\boxed{a^2 = c^2 - b^2}$ — $\boxed{a = \sqrt{c^2 - b^2}}$

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ → $\boxed{b^2 = c^2 - a^2}$ — $\boxed{b = \sqrt{c^2 - a^2}}$

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ — $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$

Задача 1. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 см и 24 см. Найдите гипотенузу.

Р е ш е н и е. Пусть $a = 7$ см, $b = 24$ см, тогда $c = \sqrt{a^2 + b^2} =$ $= \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$ (см).

О т в е т. 25 см.

Задача 2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 17 см, а один из катетов – 15 см. Найдите второй катет.

Р е ш е н и е. Пусть $a = 15$ см, $c = 17$ см, тогда $b = \sqrt{c^2 - a^2} =$ $= \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17-15)(17+15)} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$ (см).

О т в е т. 8 см.

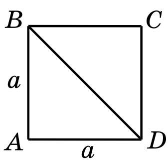


Рис. 174

Задача 3. Найдите диагональ квадрата, сторона которого равна a.

Р е ш е н и е. Рассмотрим квадрат $ABCD$, у которого $AB = AD = a$ (рис. 174). Тогда

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

О т в е т. $a\sqrt{2}$.

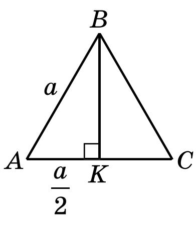


Рис. 175

Задача 4. Найдите медиану равностороннего треугольника со стороной a.

Р е ш е н и е. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC со стороной a, BK – его медиана (рис. 175).

Так как BK – медиана равностороннего треугольника, то она является и его высотой.

Из $\triangle ABK$: $\angle K = 90°$, $AB = a$, $AK = \dfrac{a}{2}$. Тогда

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

О т в е т. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Задача 5. Основания равнобокой трапеции равны 12 см и 22 см, а боковая сторона – 13 см. Найдите высоту трапеции.

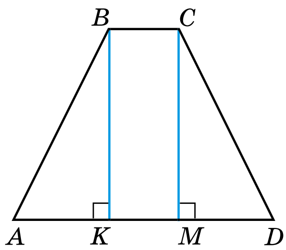


Рис. 176

Р е ш е н и е. Пусть $ABCD$ – данная трапеция, $AD \parallel BC$, $AD = 22$ см, $BC = 12$ см, $AB = CD = 13$ см (рис. 176).

1) Проведем высоты BK и CM.

2) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (по катету и гипотенузе), поэтому

$$AK = MD = \frac{AD - KM}{2} = \frac{AD - BC}{2} = \frac{22 - 12}{2} = 5 \text{ (см)}.$$

3) Из $\triangle ABK$ по теореме Пифагора имеем:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

О т в е т. 12 см.

Задача 6. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 8 см, а второй на 2 см меньше гипотенузы. Найдите неизвестный катет треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть $a = 8$ см и $b = x$ см – катеты треугольника, тогда $c = (x + 2)$ см – его гипотенуза.

Так как по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, получим уравнение: $(x + 2)^2 = 8^2 + x^2$, откуда $x = 15$ (см).

Следовательно, неизвестный катет равен 15 см.

О т в е т. 15 см.

Верно и утверждение, обратное теореме Пифагора.

Т е о р е м а 2 (обратная теореме Пифагора). **Если для треугольника ABC справедливо равенство $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то угол C этого треугольника – прямой.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Докажем, что $\angle C = 90°$ (рис. 177).

Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$, у которого $\angle C_1 = 90°$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. Тогда по теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, а следовательно, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$.

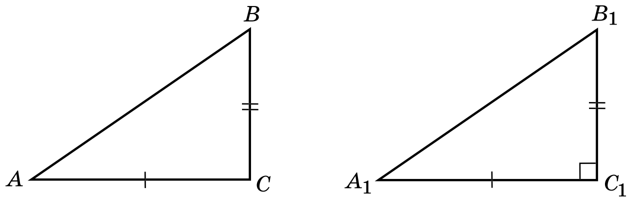


Рис. 177

Но $AC^2 + BC^2 = AB^2$ по условию, поэтому $A_1B_1^2 = AB^2$, то есть $A_1B_1 = AB$.

Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по трем сторонам), откуда $\angle C = \angle C_1 = 90°$. ▲

Так как $5^2 = 3^2 + 4^2$, то треугольник со сторонами 3, 4 и 5 является прямоугольным. Такой треугольник часто называют *египетским*, потому что о том, что он прямоугольный, было известно еще древним египтянам.

Тройку целых чисел, удовлетворяющую теореме Пифагора, называют *пифагоровой тройкой чисел*, а треугольник, стороны которого равны этим числам, – *пифагоровым треугольником*. Например, пифагоровой является не только тройка чисел 3, 4, 5, но и 7, 24, 25 или 9, 40, 41 и т. п.

Заметим, что из теоремы Пифагора и теоремы, ей обратной, следует, что

треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда квадрат наибольшей стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон.

Задача 7. Является ли прямоугольным треугольник со сторонами: 1) 6; 8; 10; 2) 5; 7; 9?

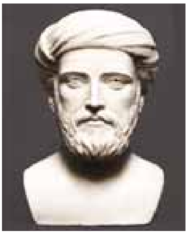
Решение. 1) Так как $10^2 = 6^2 + 8^2$ (100 = 100), то треугольник является прямоугольным.

2) Так как $9^2 \neq 5^2 + 7^2$ ($81 \neq 74$), то треугольник не является прямоугольным.

Ответ. 1) Да; 2) нет.

А еще раньше...

Теорема, названная в честь древнегреческого философа и математика *Пифагора*, была известна задолго до него. В текстах давних вавилонян о ней вспоминалось еще за 1200 лет до Пифагора. Скорее всего, доказывать эту теорему вавилоняне не умели, а зависимость между кате-



Пифагор (ок. 580–500 до н. э.)

тами и гипотенузой прямоугольного треугольника установили опытным путем. Также эта теорема была известна в Древнем Египте и Китае.

Считается, что Пифагор – первый, кто предложил строгое доказательство теоремы. Он сформулировал теорему так: «Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах». Именно в такой формулировке она и была доказана Пифагором.

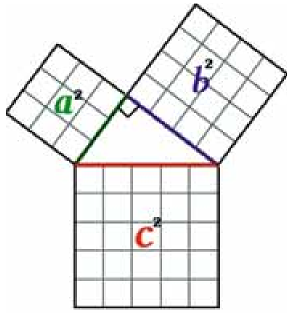
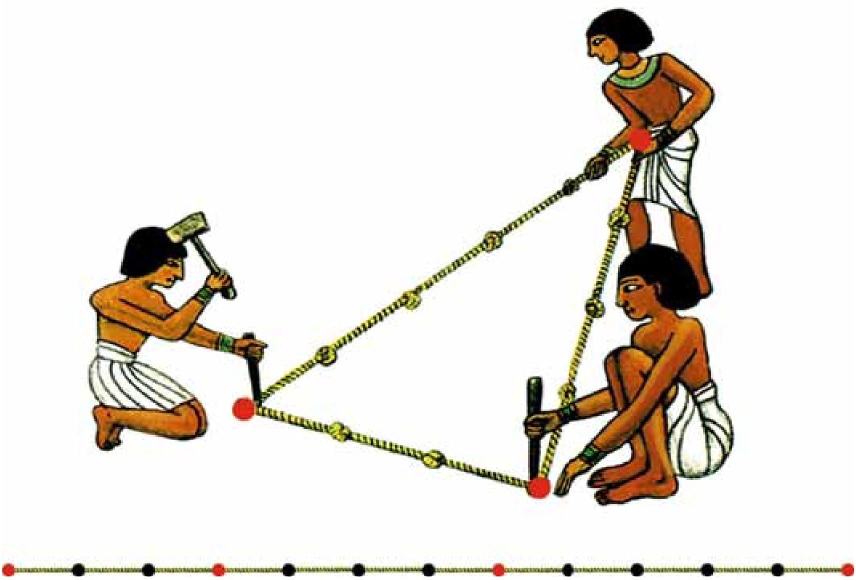


Рисунок к этому доказательству еще называют «пифагоровыми штанами».

Зная, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 является прямоугольным, землемеры Древнего Египта использовали его для построения прямого угла. Бечевку делили узлами на 12 равных частей и соединяли ее концы. Потом веревку растягивали и с помощью колышков фиксировали на земле в виде треугольника со сторонами 3; 4; 5. В результате угол, противолежащий стороне, длина которой 5, был прямым.



1. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
2. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.
3. Какой треугольник называют египетским?
4. Какие тройки чисел и треугольники называют пифагоровыми?

1 Начальный уровень

629. (Устно.) $\triangle MKL$ – прямоугольный, $\angle M = 90°$ (рис. 178). Какие из равенств верны:

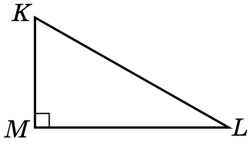


Рис. 178

1) $KM^2 = ML^2 - KL^2$;
2) $KL^2 = ML^2 + KM^2$;
3) $ML^2 = KL^2 + KM^2$;
4) $KM^2 = KL^2 - ML^2$;
5) $KL^2 = ML^2 - KM^2$;
6) $ML^2 = KL^2 - KM^2$?

630. $\triangle EFP$ – прямоугольный, $\angle P = 90°$. Заполните пропуски:
1) $EF^2 = \ldots^2 + \ldots^2$; 2) $EP^2 = \ldots^2 - \ldots^2$.

631. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны:
1) 6 см и 8 см; 2) 12 см и 35 см.

632. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны:
1) 5 см и 12 см; 2) 8 см и 15 см.

633. Найдите неизвестный катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и второй катет соответственно равны:
1) 17 см и 8 см; 2) 26 см и 10 см.

634. Найдите неизвестный катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и второй катет соответственно равны:
1) 25 см и 7 см; 2) 41 см и 40 см.

2 Средний уровень

635. Две большие стороны прямоугольного треугольника равны 7 см и 5 см. Найдите его наименьшую сторону.

636. Две меньшие стороны прямоугольного треугольника равны 2 см и 3 см. Найдите его наибольшую сторону.

637. Стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см. Найдите его диагональ.

638. Диагональ прямоугольника равна 13 см, а одна из его сторон – 12 см. Найдите другую сторону прямоугольника.

639. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 15 см, а высота, проведенная к основанию, – 12 см. Найдите основание треугольника.

640. Основание равнобедренного треугольника равно 16 см, а высота, проведенная к основанию, – 15 см. Найдите боковую сторону треугольника.

641. Диагонали ромба равны 24 см и 70 см. Найдите его сторону.

642. Сторона ромба равна 13 см, а одна из его диагоналей – 10 см. Найдите вторую диагональ ромба.

643. Диагональ квадрата равна $3\sqrt{2}$ см. Найдите его сторону.

644. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 см и 8 см. Найдите длину медианы, проведенной к большему катету.

645. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 9 см. Найдите длину медианы, проведенной к меньшему катету.

646. Из точки A к окружности с центром O проведена касательная, B – точка касания. Найдите длину отрезка AO, если $OB = 2$ см, $AB = 7$ см.

647. Из точки M к окружности с центром O проведена касательная, P – точка касания. Найдите длину отрезка PM, если $OP = 3$ см, $OM = 6$ см.

648. Является ли прямоугольным треугольник со сторонами:
1) 15; 20; 25; 2) 4; 5; 6?

649. Является ли прямоугольным треугольник со сторонами:
1) 5; 6; 9; 2) 16; 30; 34?

650. В окружности, радиус которой равен 13 см, проведена хорда длиной 10 см. Найдите расстояние от центра окружности до данной хорды.

651. В окружности проведена хорда длиной 16 см. Найдите радиус окружности, если расстояние от ее центра до хорды равно 6 см.

3 Достаточный уровень

652. Две стороны прямоугольного треугольника равны 5 см и 6 см. Найдите третью сторону (рассмотрите все случаи).

653. Две стороны прямоугольного треугольника равны 5 см и 2 см. Найдите третью сторону (рассмотрите все случаи).

654. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 7 : 24, а гипотенуза равна 50 см. Найдите периметр треугольника.

655. Катет относится к гипотенузе как 8 : 17. Найдите периметр треугольника, если второй катет равен 30 см.

656. Найдите длину неизвестного отрезка x на рисунках 179–182.

657. Найдите длину неизвестного отрезка x на рисунках 183 и 184.

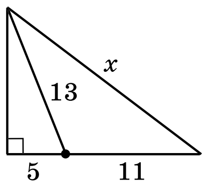


Рис. 179

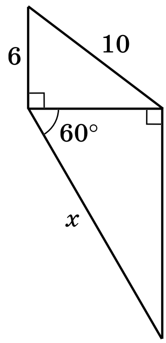


Рис. 180

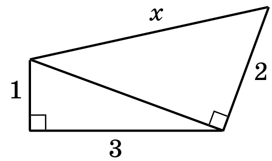


Рис. 181

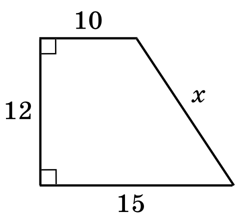


Рис. 182

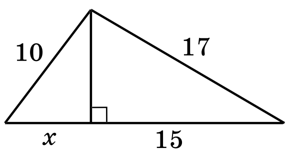


Рис. 183

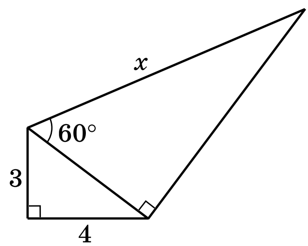


Рис. 184

658. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6 см, а другой на 2 см меньше гипотенузы. Найдите периметр треугольника.

659. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 5 см, а гипотенуза на 1 см больше другого катета. Найдите периметр треугольника.

660. В треугольнике ABC $\angle A$ – тупой, $BC = 39$ см, $AB = 17$ см. BK – высота треугольника, $BK = 15$ см. Найдите AC.

661. BK – высота треугольника ABC, у которого $\angle C$ – тупой. $AB = 20$ см, $BC = 13$ см, $CK = 5$ см. Найдите AC.

662. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к боковой стороне, равна 5 см и делит ее на два отрезка так, что прилежащий к вершине равнобедренного треугольника отрезок равен 12 см. Найдите основание треугольника.

663. Высота BK равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) делит сторону AC на отрезки $AK = 24$ см и $KC = 1$ см. Найдите основание треугольника.

4 Высокий уровень

664. Найдите стороны параллелограмма, диагонали которого равны 8 см и 10 см и одна из них перпендикулярна стороне.

665. Радиус окружности, описанной около тупоугольного равнобедренного треугольника, равен 37 см, а его основание – 70 см. Найдите боковую сторону треугольника.

666. Высота равнобедренного остроугольного треугольника, проведенная к основанию, равна 18 см, а радиус окружности, описанной около него, – 13 см. Найдите боковую сторону треугольника.

667. Постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt{13}$ см.

668. Постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt{10}$ см.

669. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на отрезки длиной 10 см и 26 см. Найдите периметр треугольника.

670. Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на отрезки, которые равны 15 см и 20 см. Найдите периметр треугольника.

671. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит катет на отрезки 2 см и 10 см. Найдите периметр треугольника.

672. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 6 см и 8 см. Найдите среднюю линию трапеции.

673. Равнобокая трапеция с основаниями a и b описана около окружности. Докажите, что ее высота равна $\sqrt{ab}$.

674. Отношение боковой стороны к основанию равнобедренного треугольника равно 5 : 8, а разность отрезков, на которые биссектриса угла при основании делит высоту, проведенную к основанию, равна 3 см. Найдите периметр треугольника.

675. Боковая сторона равнобедренного треугольника на 5 см меньше основания. Отрезки, на которые биссектриса угла при основании делит высоту, проведенную к основанию, относятся как 5 : 3. Найдите периметр треугольника.

Упражнения для повторения

676. Один из углов прямоугольного треугольника равен 30°. Найдите медиану этого треугольника, проведенную к гипотенузе, если сумма гипотенузы и меньшего катета равна 18 см.

677. Окружность радиуса 3 см вписана в ромб. Один из отрезков, на которые точка касания делит сторону ромба, равен 9 см. Найдите периметр ромба.

678. Трапеция вписана в окружность так, что диаметр окружности является ее большим основанием, а отношение оснований равно 2 : 1. Найдите углы трапеции.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

679. Проведите прямую m. Отметьте точку A на расстоянии 2 см и точку B на расстоянии 3 см от прямой m.

680. Проведите прямую a и отметьте не принадлежащую ей точку B. 1) Проведите перпендикуляр BK к прямой a.
2) Проведите отрезок BM, где M – некоторая точка прямой a.
3) Сравните длины отрезков BK и BM.

681. Проведите параллельные прямые, расстояние между которыми равно 2 см.

Интересные задачки для неленивых

682. Можно ли отметить на плоскости 6 точек так, чтобы любые три из них были вершинами равнобедренного треугольника?

§ 19. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ, ИХ СВОЙСТВА

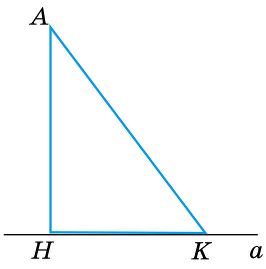


Рис. 185

Пусть AH – ***перпендикуляр***, проведенный из точки A к прямой a (рис. 185). Точку H называют ***основанием перпендикуляра*** AH. Пусть K – произвольная точка прямой a, отличающаяся от H. Отрезок AK называют ***наклонной***, проведенной из точки A к прямой a, а точку K – ***основанием наклонной***. Отрезок HK называют ***проекцией наклонной AK на прямую a***.

Рассмотрим *свойства перпендикуляра и наклонной*.

1. Перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из этой точки к этой прямой.

Действительно, в прямоугольном треугольнике AHK AH – катет, AK – гипотенуза (рис. 185). Поэтому $AH < AK$.

2. Если две наклонные, проведенные к прямой из одной точки, равны, то равны и их проекции.

Пусть из точки A к прямой a проведены наклонные AK и AM ($AK = AM$) и перпендикуляр AH (рис. 186). Тогда $\triangle AHK = \triangle AHM$ (по катету и гипотенузе), поэтому $HK = HM$.

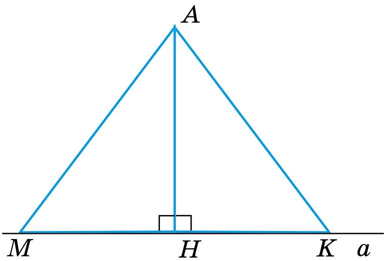


Рис. 186

Верно и обратное утверждение.

3. Если проекции двух наклонных, проведенных из точки к прямой, равны, то равны и сами наклонные.

$\triangle AHK = \triangle AHM$ (по двум катетам), поэтому $AK = AM$ (рис. 186).

4. Из двух наклонных, проведенных из точки к прямой, большей является та, у которой больше проекция.

Пусть AK и AL – наклонные, $HK > HL$ (рис. 187).
Тогда $AK^2 = AH^2 + HK^2$ (из $\triangle AHK$),
$AL^2 = AH^2 + HL^2$ (из $\triangle AHL$).
Но $HK > HL$, поэтому $AK^2 > AL^2$, следовательно, $AK > AL$.

Свойство справедливо и в случае, когда точки K и L лежат на прямой по одну сторону от точки H.

Верно и обратное утверждение.

5. Из двух наклонных, проведенных из точки к прямой, большая наклонная имеет большую проекцию.

Пусть AK и AL – наклонные, $AK > AL$ (рис. 187).

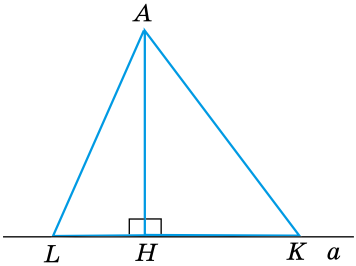


Рис. 187

Тогда $HK^2 = AK^2 - AH^2$ (из $\triangle AHK$),

$HL^2 = AL^2 - AH^2$ (из $\triangle AHL$).

Но $AK > AL$, поэтому $HK^2 > HL^2$, следовательно, $HK > HL$.

Задача 1. Из точки к прямой проведены две наклонные. Длина одной из них равна 10 см, а ее проекции – 6 см. Найдите длину второй наклонной, если она образует с прямой угол 30°.

Решение. Пусть на рисунке 187 $AL = 10$ см, $HL = 6$ см, $\angle AKH = 30°$.

1) Из $\triangle AHL$: $AH = \sqrt{AL^2 - LH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

2) Из $\triangle AHK$ по свойству катета, противолежащего углу 30°, будем иметь: $AH = \dfrac{AK}{2}$.

Поэтому $AK = 2 \cdot AH = 2 \cdot 8 = 16$ (см).

Ответ. 16 см.

Задача 2. Из точки к прямой проведены две наклонные, проекции которых равны 30 см и 9 см. Найдите длины наклонных, если их разность равна 9 см.

Решение. Пусть на рисунке 187 $KH = 30$ см, $HL = 9$ см. По свойству 4: $AK > AL$. Обозначим $AL = x$ см. Тогда $AK = (x + 9)$ см.

Из $\triangle AHL$: $AH^2 = AL^2 - LH^2$, поэтому $AH^2 = x^2 - 9^2$.

Из $\triangle AHK$: $AH^2 = AK^2 - HK^2$, поэтому $AH^2 = (x + 9)^2 - 30^2$.

Левые части полученных равенств равны, следовательно, равны и правые их части.

Имеем уравнение: $(x + 9)^2 - 30^2 = x^2 - 9^2$, откуда $x = 41$.

Следовательно, $AL = 41$ см, $AK = 41 + 9 = 50$ (см).

Ответ. 41 см, 50 см.

1. Что называют наклонной, проведенной из точки к прямой?
2. Что называют основанием наклонной?
3. Что называют проекцией наклонной?
4. Сформулируйте свойства наклонных и их проекций.

1 Начальный уровень

683. (Устно.) Назовите на рисунке 188:
1) перпендикуляр, проведенный из точки B к прямой b;
2) основание перпендикуляра;
3) наклонную, проведенную из точки B к прямой b;
4) основание наклонной;
5) проекцию наклонной.

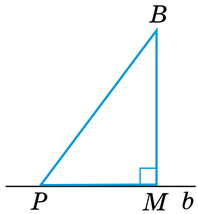


Рис. 188

684. Начертите прямую m и отметьте не принадлежащую ей точку P. Проведите перпендикуляр PK и наклонную PM к прямой m.

685. (Устно.) BM – перпендикуляр к прямой b, BP – наклонная (рис. 188). Сравните BM и BP.

686. Длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой, равна 5 см, а длина наклонной, проведенной из этой же точки, – 13 см. Найдите проекцию наклонной на данную прямую.

687. Перпендикуляр, проведенный из данной точки к прямой, равен 6 см. Из этой же точки к прямой проведена наклонная, проекция которой на прямую равна 8 см. Найдите длину наклонной.

2 Средний уровень

688. Из точки к прямой проведены две равные наклонные. Проекция одной из них равна 6 см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

689. Из точки к прямой проведены две равные наклонные. Расстояние между их основаниями равно 10 см. Найдите проекции наклонных на данную прямую.

690. Точка лежит на расстоянии 10 см от прямой. Из этой точки к прямой проведена наклонная, образующая с прямой угол 30°. Найдите длину наклонной и длину ее проекции на прямую.

691. Точка лежит на расстоянии 2 см от прямой. Из этой точки к прямой проведена наклонная, образующая с прямой угол 45°. Найдите проекцию наклонной на эту прямую и саму наклонную.

692. Из точки к прямой проведены две наклонные. Одна из них равна 13 см, а ее проекция – 5 см. Найдите проекцию второй наклонной, если она образует с прямой угол 45°.

693. Из точки к прямой проведены две наклонные. Одна из них равна 12 см и образует с прямой угол 30°. Найдите длину второй наклонной, если ее проекция на прямую – 8 см.

694. Из точки к прямой проведены две наклонные длиной 13 см и 20 см. Проекция первой на прямую равна 5 см. Найдите проекцию второй наклонной.

3 Достаточный уровень

695. Из точки, находящейся на расстоянии 24 см от прямой, проведены две наклонные длиной 25 см и 26 см. Найдите расстояние между основаниями наклонных. Сколько случаев следует рассмотреть?

696. Из точки, находящейся на расстоянии 8 см от прямой, проведены две наклонные длиной 10 см и 17 см. Найдите расстояние между основаниями наклонных. Сколько случаев следует рассмотреть?

697. Из точки к прямой проведены две наклонные длиной 5 см и 8 см. Какой угол образует вторая наклонная с прямой, если проекция первой наклонной на прямую равна 3 см?

698. Из точки к прямой проведены две наклонные. Длина одной из них равна 41 см, а ее проекции – 9 см. Какой угол образует вторая наклонная с прямой, если ее проекция на эту прямую равна 40 см?

699. Точки M и N лежат по одну сторону от прямой a. Из этих точек к прямой a проведены перпендикуляры длиной 2 см и 7 см. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, если $MN = 13$ см.

700. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой m. Из этих точек к прямой m проведены перпендикуляры длиной 1 см и 7 см. Найдите AB, если расстояние между основаниями перпендикуляров равно 8 см.

701. Из точки к прямой проведены две наклонные длиной 10 см и 14 см, разность проекций которых равна 8 см. Найдите проекции наклонных и расстояние от точки до прямой.

702. Из точки к прямой проведены две наклонные, разность которых равна 2 см. Найдите эти наклонные и расстояние от точки до прямой, если проекции наклонных равны 1 см и 5 см.

4 Высокий уровень

703. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Найдите проекции двух меньших сторон на большую сторону.

704. Стороны остроугольного треугольника равны 25 см, 29 см и 36 см. Найдите проекции двух больших сторон на меньшую сторону.

705. Из точки A к прямой m проведены наклонные AB и AC и перпендикуляр AK, причем точка K лежит между точками B и C. $AB = 15$ см, $AK = 12$ см, $KC = 16$ см. Найдите $\angle BAC$.

Упражнения для повторения

3 **706.** Основания равнобокой трапеции равны 5 см и 11 см, а ее высота – 6 см. Найдите диагональ трапеции.

707. Радиусы двух окружностей, имеющих внешнее касание, равны 1 см и 4 см. Прямая a – общая касательная этих окружностей. Найдите расстояние между точками касания прямой a с окружностями.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

708. В треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена средняя линия KL (рис. 189). $KL = 3$ см, $LB = 4$ см.

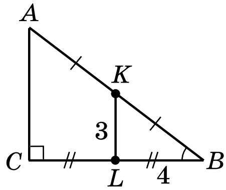


Рис. 189

1) У $\triangle KBL$ и $\triangle ABC$ найдите отношение катета, противолежащего углу B, к катету, прилежащему к углу B, и сравните полученные значения.

2) В $\triangle KBL$ и $\triangle ABC$ найдите отношение катета, противолежащего углу B, к гипотенузе и сравните полученные значения.

3) В $\triangle KBL$ и $\triangle ABC$ найдите отношение катета, прилежащего к углу B, к гипотенузе и сравните полученные значения.

709. Определите меру углов треугольника со сторонами длиной:

1) 1 см; $\sqrt{3}$ см; 2 см; 2) 1 см; 1 см; $\sqrt{2}$ см.

Интересные задачки для неленивых

710. (*Задача Стэнфордского университета.*) Точка P расположена внутри прямоугольника так, что расстояние от нее до вершины прямоугольника равно 5 ярдов, до противоположной вершины – 14 ярдов, а до третьей вершины – 10 ярдов. Каково расстояние от точки P до четвертой вершины?

§ 20. СИНУС, КОСИНУС И ТАНГЕНС ОСТРОГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

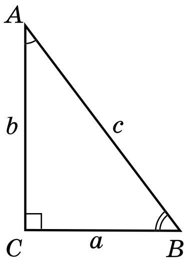


Рис. 190

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 190). Для острого угла A катет BC является *противолежащим катетом*, а катет AC – *прилежащим катетом*. Для острого угла B катет AC является противолежащим, а катет BC – прилежащим.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника **называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.**

Синус угла A обозначают так: $\sin A$. Следовательно,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \ \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника **называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.**

Косинус угла A обозначают так: $\cos A$. Следовательно,

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \ \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Так как катеты AC и BC меньше гипотенузы AB, то *синус и косинус острого угла прямоугольного треугольника меньше единицы*.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника **называют отношение противолежащего катета к прилежащему.**

Тангенс угла A обозначают так: $\operatorname{tg} A$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \ \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

Докажем, что **если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.**

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$ (рис. 191). Тогда $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (по острому углу). Поэтому $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

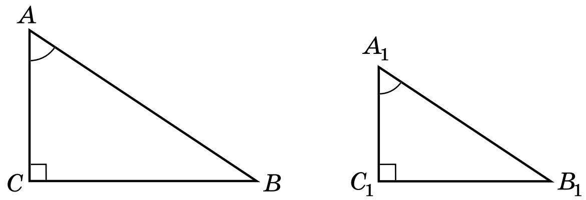


Рис. 191

Из этого следует, что $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{A_1B_1}$, и поэтому $\sin A = \sin A_1$.
Аналогично $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{A_1B_1}$, поэтому $\cos A = \cos A_1$, $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{B_1C_1}{A_1C_1}$, поэтому $\mathrm{tg} A = \mathrm{tg} A_1$.

Таким образом, приходим к выводу: *синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника зависят только от градусной меры угла*.

Из определений синуса, косинуса и тангенса угла получаем следующие *соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике*.

1. Катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего ему угла или на косинус прилежащего: $a = c\sin A = c\cos B$ и $b = c\sin B = c\cos A$.

2. Гипотенуза равна катету, деленному на синус противолежащего ему угла или на косинус прилежащего: $c = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{a}{\cos B} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{b}{\cos A}$.

3. Катет, противолежащий углу A, равен произведению второго катета на тангенс этого угла: $a = b\,\mathrm{tg} A$.

4. Катет, прилежащий к углу A, равен частному от деления другого катета на тангенс этого угла: $b = \dfrac{a}{\mathrm{tg} A}$.

Значения $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$ можно находить с помощью специальных таблиц, калькулятора или компьютера. Для вычислений используем клавиши калькулятора $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ и $\boxed{\operatorname{tg}}$ (на некоторых калькуляторах $\boxed{\tan}$). Последовательность вычислений у разных калькуляторов может быть разной. Поэтому советуем внимательно познакомиться с инструкцией к калькулятору.

Задача 1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $\cos A = \frac{3}{4}$. Найдите AB.

Решение. $AB = \frac{AC}{\cos A}$ (рис. 190). $AB = 12 : \frac{3}{4} = 16$ (см).

Ответ. 16 см.

Задача 2. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 10$ см, $\angle A = 17°$. Найдите BC (с точностью до десятых сантиметра).

Решение. $BC = AB \sin A$ (рис. 190). С помощью таблиц или калькулятора находим $\sin 17° \approx 0{,}2924$. Следовательно, $BC \approx 10 \cdot 0{,}2924 \approx 2{,}9$ (см).

Ответ. $\approx 2{,}9$ см.

С помощью таблиц, калькулятора или компьютера можно по данному значению $\sin A$, $\cos A$ или $\operatorname{tg} A$ находить угол A. Для вычислений используем клавиши калькулятора $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ и $\boxed{\operatorname{tg}^{-1}}$.

Задача 3. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 4$ см, $BC = 5$ см. Найдите острые углы треугольника.

Решение. $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ (рис. 190). С помощью калькулятора находим значение угла A в градусах: 51,34019. Представим его в градусах и минутах (в некоторых калькуляторах это возможно сделать с помощью специальной клавиши): $\angle A \approx 51°20'$. Тогда $\angle B = 90° - \angle A \approx 90° - 51°20' \approx 38°40'$.

Ответ. $\approx 51°20'$; $\approx 38°40'$.

Найдем *синус, косинус и тангенс углов* 30° *и* 60°.

Рассмотрим $\triangle ABC$, у которого $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $BC = a$ (рис. 192). Тогда по свойству катета, противолежащего углу 30°, $AB = 2a$.

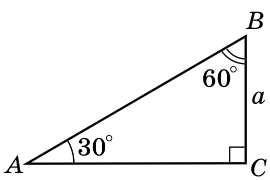


Рис. 192

По теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

Тогда

$\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, то есть $\sin 30^\circ = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$;

$\cos A = \dfrac{AC}{AB}$, то есть $\cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC}$, то есть $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

$\sin B = \dfrac{AC}{AB}$, то есть $\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin B = \dfrac{BC}{AB}$, то есть $\cos 60^\circ = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$;

$\operatorname{tg} B = \dfrac{AC}{BC}$, то есть $\operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

Найдем синус, косинус и тангенс угла 45°.

Рассмотрим $\triangle ABC$, у которого $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $BC = a$ (рис. 193). Тогда $AC = BC = a$. По теореме Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Тогда

$\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, то есть $\sin 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos A = \dfrac{AC}{AB}$, то есть $\cos 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC}$, то есть $\operatorname{tg} 45^\circ = \dfrac{a}{a} = 1$.

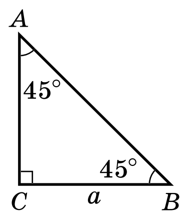


Рис. 193

Систематизируем полученные данные в таблицу:

A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\operatorname{tg} A$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Задача 4. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, если основание равно 12 см, а угол при вершине треугольника равен 120°.

Р е ш е н и е. Пусть ABC – данный треугольник, $AB = BC$, $AC = 12$ см, $\angle ABC = 120°$ (рис. 194).

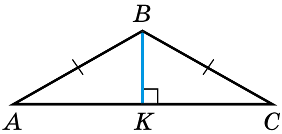


Рис. 194

Проведем к основанию AC высоту BK, являющуюся также медианой и биссектрисой. Тогда

$$KC = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (см)},$$

$$\angle KBC = \angle ABC : 2 = 120° : 2 = 60°.$$

Из $\triangle BKC$ ($\angle K = 90°$): $\operatorname{tg} KBC = \dfrac{KC}{BK}$,

отсюда $BK = \dfrac{KC}{\operatorname{tg} KBC} = \dfrac{6}{\operatorname{tg} 60°} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (см).

О т в е т. $2\sqrt{3}$ см.

1. Что называют синусом, косинусом и тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
2. Каковы соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника?

1 Начальный уровень

711. Дано $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$ (рис. 195). Найдите:

1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} A$; 4) $\cos A$; 5) $\sin B$; 6) $\operatorname{tg} B$.

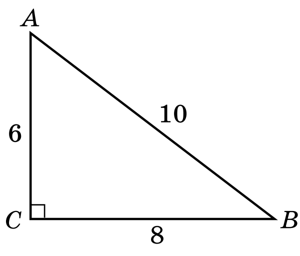


Рис. 195

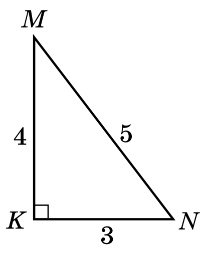


Рис. 196

712. Дано $\triangle MNK$, $\angle K = 90°$ (рис. 196). Найдите:

1) $\cos M$; 2) $\sin N$; 3) $\operatorname{tg} M$; 4) $\sin M$; 5) $\cos N$; 6) $\operatorname{tg} N$.

713. Найдите с помощью таблиц, калькулятора или компьютера:

1) $\cos 18°$; 2) $\sin 40°$; 3) $\operatorname{tg} 13°$;

4) $\cos 12°10'$; 5) $\sin 67°30'$; 6) $\operatorname{tg} 81°48'$.

714. Найдите с помощью таблиц, калькулятора или компьютера:

1) $\sin 58°$; 2) $\cos 32°$; 3) $\operatorname{tg} 78°$;
4) $\sin 14°42'$; 5) $\cos 49°30'$; 6) $\operatorname{tg} 15°12'$.

715. Вычислите:

1) $\sin 30° + \operatorname{tg} 45°$; 2) $\cos 30° \cdot \sin 60°$.

716. Вычислите:

1) $\operatorname{tg} 45° - \cos 60°$; 2) $\sin 45° : \cos 45°$.

2 Средний уровень

717. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AC = 5$ см, $BC = 12$ см. Найти: $\sin A$, $\cos A$.

718. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AC = 7$ см, $BC = 24$ см. Найти: $\sin B$, $\cos B$.

719. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Найдите:

1) AC, если $BC = a$, $\angle B = \beta$;
2) AB, если $AC = b$, $\angle A = \alpha$.

720. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Найдите:

1) BC, если $AC = b$, $\angle A = \alpha$;
2) AB, если $BC = a$, $\angle B = \beta$.

721. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Найдите:

1) AB, если $AC = 5$ см, $\cos A = \frac{1}{4}$;
2) AB, если $BC = 3$ см, $\sin A = 0{,}6$;
3) AC, если $AB = 8$ см, $\sin B = \frac{3}{4}$;
4) BC, если $AB = 20$ см, $\cos B = \frac{4}{5}$;
5) AC, если $BC = 10$ см, $\operatorname{tg} B = 0{,}5$.

722. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Найдите:

1) AB, если $BC = 8$ см, $\cos B = \frac{1}{2}$;
2) AB, если $AC = 10$ см, $\sin B = 0{,}25$;
3) BC, если $AB = 6$ см, $\sin A = \frac{1}{3}$;
4) AC, если $AB = 20$ см, $\cos A = 0{,}4$;
5) BC, если $AC = 12$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$.

723. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Найдите:

1) AB, если $AC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle A = 30°$;

2) AC, если $AB = 5\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$.

724. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Найдите:

1) AB, если $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle B = 30°$;

2) BC, если $AB = 10\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$.

725. Найдите (с помощью таблиц, калькулятора или компьютера) острый угол α, если:

1) $\sin\alpha = 0{,}4226$; 2) $\cos\alpha = 0{,}8192$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}2679$;

4) $\sin\alpha = 0{,}8231$; 5) $\cos\alpha = 0{,}9373$; 6) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}6924$.

726. Найдите (с помощью таблиц, калькулятора или компьютера) острый угол β, если:

1) $\cos\beta = 0{,}1908$; 2) $\sin\beta = 0{,}8387$; 3) $\mathrm{tg}\,\beta = 0{,}7265$;

4) $\cos\beta = 0{,}5493$; 5) $\sin\beta = 0{,}3518$; 6) $\mathrm{tg}\,\beta = 1{,}1792$.

727. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. С помощью таблиц, калькулятора или компьютера найдите с точностью до сотых сантиметра:

1) AB, если $BC = 5$ см, $\angle A = 42°$;

2) BC, если $AB = 10$ см, $\angle B = 37°$;

3) BC, если $AC = 4$ см, $\angle A = 82°$.

728. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. С помощью таблиц, калькулятора или компьютера найдите с точностью до сотых сантиметра:

1) AC, если $AB = 8$ см, $\angle A = 15°$;

2) AB, если $BC = 9$ см, $\angle A = 43°$;

3) BC, если $AC = 5$ см, $\angle B = 29°$.

3 Достаточный уровень

729. Постройте угол: 1) тангенс которого равен $\frac{3}{5}$;

2) синус которого равен $\frac{1}{7}$;

3) косинус которого равен $\frac{2}{3}$.

730. Постройте угол: 1) тангенс которого равен $\frac{2}{7}$;

2) синус которого равен $\frac{4}{5}$;

3) косинус которого равен $\frac{1}{3}$.

731. Диагональ прямоугольника образует с его стороной, длина которой a, угол β. Найдите периметр прямоугольника.

732. Одна сторона прямоугольника равна b. Его диагональ образует с другой его стороной угол α. Найдите площадь прямоугольника.

733. Угол ромба равен $42°$, а диагональ, противолежащая этому углу, – 6 см. Найдите вторую диагональ ромба (с точностью до сотых сантиметра).

734. Сторона ромба равна 8 см, а один из его углов – $78°$. Найдите (с точностью до сотых сантиметра) диагональ ромба, выходящую из этого угла.

735. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а один из острых углов – α. Найдите высоту треугольника, проведенную к гипотенузе.

736. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна h. Найдите гипотенузу треугольника, если один из его острых углов равен β.

737. Гипотенуза прямоугольного треугольника относится к его катету как 8 : 5. Найдите (с точностью до градуса) острые углы этого треугольника.

738. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно 9 : 5. Найдите (с точностью до градуса) острые углы этого треугольника.

739. Дано: $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Найдите:

а) AB и BC, если $AC = 6$ см, $\cos B = 0{,}8$;

б) AC и BC, если $AB = 13$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$.

740. Дано: $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Найдите:

а) AB и BC, если $AC = 4$ см, $\sin A = 0{,}6$;

б) AC и BC, если $AB = 34$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{8}{15}$.

741. Основания равнобокой трапеции равны $2a$ и $2b$ ($a > b$), а острый угол – α. Найдите боковую сторону трапеции.

742. На рисунке 197 $\angle ACB = \angle K = 90°$, $AC = b$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCK = \gamma$. Найдите BC, CK, KB.

743. На рисунке 197 $\angle ACB = \angle K = 90°$, $BK = a$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCK = \alpha$. Найдите BC, AC, AB.

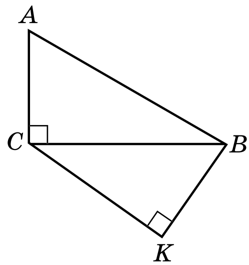


Рис. 197

4 Высокий уровень

744. Стороны прямоугольника равны 19 см и 50 см. Найдите острый угол между диагоналями (с точностью до минуты).

745. Диагонали ромба равны 10 см и 12 см. Найдите углы ромба (с точностью до минуты).

746. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна m, а угол при основании – α. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

747. Угол при основании равнобедренного треугольника равен β, а радиус вписанной окружности – r. Найдите боковую сторону треугольника.

748. Острый угол параллелограмма равен 45°. Диагональ делит тупой угол в отношении 1 : 2. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 20 см.

749. Острый угол параллелограмма равен 60°. Диагональ делит тупой угол в отношении 1 : 3. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 24 см.

750. В треугольнике одна из сторон равна 10 см, а прилежащие к ней углы – 135° и 30°. Найдите высоту треугольника, проведенную к данной стороне.

751. В треугольнике одна из сторон равна 8 см, а прилежащие к ней углы – 60° и 45°. Найдите высоту треугольника, проведенную к этой стороне.

Упражнения для повторения

2 **752.** Наклонная, проведенная из точки к прямой, в два раза больше, чем перпендикуляр, проведенный из этой же точки к этой же прямой. Найдите угол между наклонной и перпендикуляром.

3 **753.** Катет прямоугольного треугольника равен 12 см, а его проекция на гипотенузу – 7,2 см. Найдите периметр треугольника.

4 **754.** Постройте ромб по высоте и меньшей диагонали.

Интересные задачки для неленивых

755. (*Задача Архимеда*.) Если в окружности хорды AB и CD пересекаются в точке E под прямым углом, то сумма квадратов отрезков AE, BE, CE и DE равна квадрату диаметра. Докажите это.

§ 21. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Решить треугольник – значит найти все неизвестные его стороны и углы по известным сторонам и углам.

Для того чтобы можно было решить прямоугольный треугольник, известными должны быть или две стороны треугольника или одна из сторон и один из острых углов треугольника.

Используя в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) обозначение $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ (рис. 198) и соотношение между его сторонами и углами:

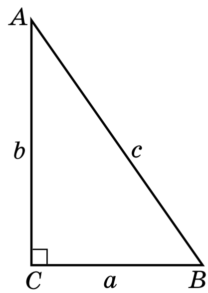


Рис. 198

$\angle A + \angle B = 90°$;

$a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора);

$$a = c\sin A = c\cos B = b\,\mathrm{tg}\,A = \frac{b}{\mathrm{tg}\,B};$$

$$b = c\sin B = c\cos A = a\,\mathrm{tg}\,B = \frac{a}{\mathrm{tg}\,A};$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B},$$

можно решить любой прямоугольный треугольник.

Рассмотрим четыре вида задач на решение прямоугольных треугольников.

Образцы записи их решения в общем виде и примеры задач представлены в виде таблиц.

1. *Решение прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.*

Задача 1. Дано гипотенузу c и острый угол A прямоугольного треугольника. Найдите второй острый угол треугольника и его катеты.

Решение в общем виде	Пример
Д а н о: c, $\angle A$. Н а й т и: $\angle B$, a, b. Р е ш е н и е. 1. $\angle B = 90° - \angle A$. 2. $a = c \sin A$. 3. $b = c \cos A$.	Д а н о: $c = 7$, $\angle A = 29°$. Н а й т и: $\angle B$, a, b. Р е ш е н и е. 1. $\angle B = 90° - 29° = 61°$. 2. $a = 7 \sin 29° \approx 3{,}39$. 3. $b = 7 \cos 29° \approx 6{,}12$. О т в е т: $61°$, $\approx 3{,}39$, $\approx 6{,}12$.

2. ***Решение прямоугольных треугольников по катету и острому углу.***

Задача 2. Дано катет a и острый угол A прямоугольного треугольника. Найдите второй острый угол треугольника, второй катет и гипотенузу.

Решение в общем виде	Пример
Дано: a, $\angle A$. Найти: $\angle B$, b, c. Решение. 1. $\angle B = 90° - \angle A$. 2. $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg} A}$ (или $b = a \operatorname{tg} B$). 3. $c = \dfrac{a}{\sin A}$ $\left(\text{или } c = \sqrt{a^2 + b^2}\right)$.	Дано: $a = 5$, $\angle A = 63°$. Найти: $\angle B$, b, c. Решение. 1. $\angle B = 90° - 63° = 27°$. 2. $b = \dfrac{5}{\operatorname{tg} 63°} \approx 2{,}55$. 3. $c = \dfrac{5}{\sin 63°} \approx 5{,}61$. Ответ: $27°$, $\approx 2{,}55$, $\approx 6{,}61$.

3. ***Решение прямоугольных треугольников по двум катетам.***

Задача 3. Дано катеты a и b прямоугольного треугольника. Найдите гипотенузу и острые углы треугольника.

Решение в общем виде	Пример
Дано: a, b. Найти: c, $\angle A$, $\angle B$. Решение. 1. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. 2. $\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$. Далее $\angle A$ находим с помощью калькулятора или таблиц. 3. $\angle B \approx 90° - \angle A$.	Дано: $a = 4$, $b = 7$. Найти: c, $\angle A$, $\angle B$. Решение. 1. $c = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$. 2. $\operatorname{tg} A = \dfrac{4}{7}$; $\angle A \approx 29°45'$. 3. $\angle B \approx 90° - 29°45' = 60°15'$. Ответ: $\approx 8{,}06$, $\approx 29°45'$, $\approx 60°15'$.

4. ***Решение прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе.***

Задача 4. Дано катет a и гипотенуза c прямоугольного треугольника. Найдите второй катет и острые углы треугольника.

Решение в общем виде	Пример
Д а н о: a, c. Н а й т и: b, $\angle A$, $\angle B$. Р е ш е н и е. 1. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. 2. $\sin A = \frac{a}{c}$. Дальше $\angle A$ находим с помощью калькулятора или таблиц. 3. $\angle B \approx 90° - \angle A$.	Д а н о: $a = 5$, $c = 12$. Н а й т и: b, $\angle A$, $\angle B$. Р е ш е н и е. 1. $b = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119} \approx 10{,}91$. 2. $\sin A = \frac{5}{12}$; $\angle A \approx 24°37'$. 3. $\angle B \approx 90° - 24°37' = 65°23'$. О т в е т: $\approx 10{,}91$, $\approx 24°37'$, $\approx 65°23'$.

Решение прямоугольных треугольников используют при решении прикладных задач.

Задача 5. Найдите высоту дерева MN, основание N которого является недоступным (рис. 199).

Р е ш е н и е. Обозначим на прямой, проходящей через точку N – основание дерева, точки A и B и измеряем отрезок AB и $\angle MAN = \alpha$ и $\angle MBN = \beta$.

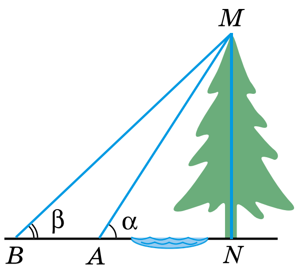


Рис. 199

1) В $\triangle MAN$: $AN = \frac{MN}{\operatorname{tg}\alpha}$.

2) В $\triangle MBN$: $BN = \frac{MN}{\operatorname{tg}\beta}$.

3) Так как $AB = BN - AN$, имеем:

$$AB = \frac{MN}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{MN}{\operatorname{tg}\alpha} = MN\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = MN \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

откуда $MN = \frac{AB \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

О т в е т. $\frac{AB \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

1. Что значит решить треугольник?
2. Какие соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике используют для решения треугольников?
3. Как решить прямоугольный треугольник: 1) по гипотенузе и острому углу; 2) по катету и острому углу; 3) по двум катетам; 4) по катету и гипотенузе?

2 Средний уровень

756. По гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC и острому углу найдите другие его стороны и второй острый угол (стороны треугольника в задачах 3) и 4) найдите с точностью до сотых).

1) $AB = 10$ см; $\angle A = 30°$;
2) $AB = 8$ дм; $\angle B = 45°$;
3) $AB = 15$ см; $\angle A = 18°$;
4) $AB = 12$ дм; $\angle B = 73°$.

757. По гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC и острому углу найдите другие его стороны и второй острый угол (стороны треугольника в задачах 3) и 4) найдите с точностью до сотых).

1) $AB = 6$ дм; $\angle A = 45°$;
2) $AB = 14$ см; $\angle B = 60°$;
3) $AB = 8$ дм; $\angle A = 82°$;
4) $AB = 3$ см; $\angle B = 25°$.

758. По катету треугольника ABC ($\angle C = 90°$) и его острому углу найдите другие стороны и второй острый угол треугольника (стороны треугольника в задачах 2) и 3) найдите с точностью до сотых).

1) $AC = 8$ см; $\angle B = 30°$;
2) $AC = 13$ см; $\angle A = 24°$;
3) $BC = 6$ дм; $\angle A = 42°$;
4) $BC = 5$ см; $\angle B = 45°$.

759. По катету треугольника ABC ($\angle C = 90°$) и его острому углу найдите другие стороны и второй острый угол треугольника (стороны треугольника в задачах 2) и 3) найдите с точностью до сотых).

1) $AC = 15$ см; $\angle A = 60°$;
2) $AC = 6$ дм; $\angle B = 12°$;
3) $BC = 8$ см; $\angle B = 71°$;
4) $BC = 10$ дм; $\angle A = 45°$.

760. Диагональ прямоугольника равна 6 см и образует угол 25° с его стороной. Найдите угол, который образует диагональ прямоугольника с другой его стороной, и стороны прямоугольника (с точностью до сотых сантиметра).

761. Из точки, находящейся на расстоянии 6 см от прямой, проведена наклонная, образующая с прямой угол 52°. Найдите угол, который образует наклонная с перпендикуляром, проведенным из той же точки, длину перпендикуляра и проекцию наклонной (с точностью до сотых сантиметра).

762. Найдите высоту дерева AC (рис. 200), если $BC = 40$ м, $\angle B = 27°$.

763. По рисунку 201 найдите расстояние от объекта B к недоступному объекту A, если $\angle C = 90°$, $BC = 80$ м, $\angle B = 57°$.

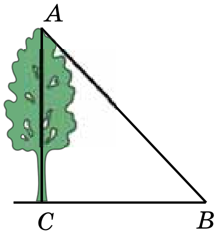


Рис. 200

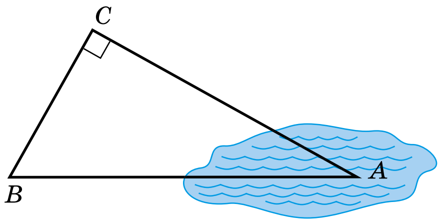


Рис. 201

3 Достаточный уровень

764. По двум катетам треугольника ABC ($\angle C = 90°$) найдите его гипотенузу и острые углы с точностью до минуты:

1) $AC = 4$ см; $BC = 4\sqrt{3}$ см; 2) $AC = 8$ дм; $BC = 15$ дм;
3) $AC = 3$ см; $BC = 9$ см; 4) $AC = 7m$ дм; $BC = 24m$ дм.

765. По двум катетам треугольника ABC ($\angle C = 90°$) найдите его гипотенузу и острые углы с точностью до минуты:

1) $AC = 2\sqrt{3}$ см; $BC = 2$ см; 2) $AC = 8$ см; $BC = 6$ см;
3) $AC = 2$ дм; $BC = 5$ дм; 4) $AC = 9k$ дм; $BC = 40k$ дм.

766. По катету и гипотенузе треугольника ABC ($\angle C = 90°$) найдите его второй катет и острые углы с точностью до минуты:

1) $AB = 6$ см; $AC = 3\sqrt{3}$ см; 2) $AB = 65$ дм; $BC = 16$ дм;
3) $AB = 7$ дм; $AC = 4$ см; 4) $AB = 13a$ см; $BC = 5a$ см.

767. По катету и гипотенузе треугольника ABC ($\angle C = 90°$) найдите его второй катет и острые углы с точностью до минуты:

1) $AB = 8$ см; $AC = 4\sqrt{2}$ см; 2) $AB = 37$ дм; $BC = 12$ дм;
3) $AB = 10$ см; $AC = 7$ см; 4) $AB = 61b$ дм; $BC = 60b$ дм.

768. Тень от антенны мобильной связи, высота которой 5 м, равна 2,6 м (рис. 202). Найдите с точностью до минуты высоту солнца над горизонтом (угол α).

769. Найдите укос дороги (значение тангенса угла α) по рисунку 203. Найдите меру угла α.

770. Сечение железнодорожной насыпи имеет форму равнобокой трапеции (рис. 204). Нижнее основание трапеции равно 10 м, высота насыпи – 2 м, а ее укос – 35°. Найдите ширину верхней части насыпи (верхнее основание трапеции).

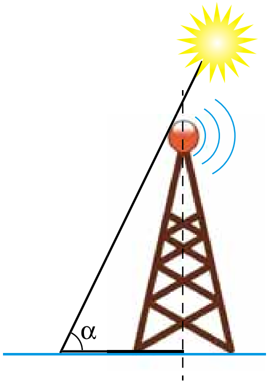


Рис. 202

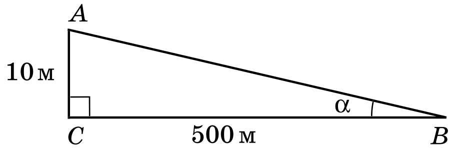


Рис. 203

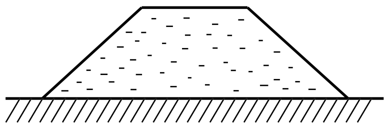


Рис. 204

4 Высокий уровень

771. На горе находится башня, высота которой l м (рис. 205). За некоторым объектом A, находящимся у подножия горы, наблюдают сначала из вершины M башни под углом $60°$ к горизонту, а затем от основания N башни под углом $30°$. Найдите высоту x горы.

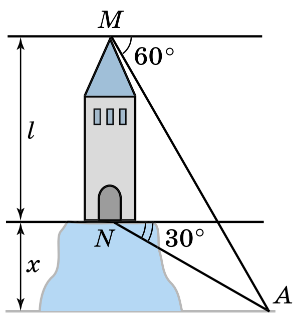


Рис. 205

Упражнения для повторения

2 **772.** Диагонали ромба равны 16 см и 30 см. Найдите периметр ромба.

3 **773.** В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $BC = 12$ см, $\sin B = \frac{3}{5}$. Найдите периметр треугольника.

4 **774.** Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки, равные 30 см и 40 см. Найдите наименьшую сторону треугольника.

Интересные задачки для неленивых

775. Лист бумаги сложили вчетверо так, что получили прямоугольник со сторонами вдвое меньшими, чем стороны листа. Затем полученный прямоугольник прокололи в двух местах, развернули и через каждые две из полученных точек (проколы) провели прямую. Какое наименьшее и какое наибольшее количество прямых при этом можно получить?

Домашняя самостоятельная работа № 4

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1 **1.** Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 7 см и 24 см.

А. $\sqrt{527}$ см; **Б.** 31 см; **В.** 25 см; **Г.** 23 см.

2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 15 см, а один из его катетов – 12 см. Найдите второй катет треугольника.

А. 8 см; **Б.** 9 см; **В.** 10 см; **Г.** $\sqrt{369}$ см.

3. На рисунке 206 изображен прямоугольный треугольник ABC. Найдите $\sin B$.

А. $\frac{12}{13}$; **Б.** $\frac{5}{13}$; **В.** $\frac{12}{5}$; **Г.** $\frac{5}{12}$.

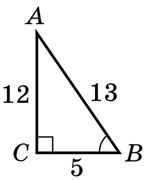


Рис. 206

2 **4.** Диагонали ромба равны 12 см и 16 см. Найдите сторону ромба.

А. 8 см; **Б.** 10 см;
В. 16 см; **Г.** 20 см.

5. Точка находится на расстоянии 8 см от прямой. Из нее к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, образующая с перпендикуляром угол 60°. Найдите длину наклонной.

А. $8\sqrt{3}$ см; **Б.** 12 см; **В.** $8\sqrt{2}$ см; **Г.** 16 см.

6. AB – гипотенуза прямоугольного треугольника ABC, $AC = 8$ см, $\angle A = 50°$. Найдите AB с точностью до десятых.

А. 12,5 см; **Б.** 10,4 см; **В.** 12,4 см; **Г.** 9,5 см.

7. Найдите x по рисунку 207.

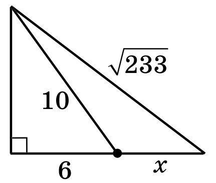


Рис. 207

А. 13; **Б.** 7;
В. 6; **Г.** 8.

8. Из точки к прямой проведены две наклонные, разность которых равна 1 см. Найдите меньшую наклонную, если проекции наклонных равны 4 см и 7 см.

А. 15 см; **Б.** 16 см; **В.** 17 см; **Г.** 18 см.

9. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AB = 20$ см, $\mathrm{tg}A = 0{,}75$. Найдите P_{ABC}.

А. 50 см; **Б.** 38 см; **В.** 52 см; **Г.** 48 см.

10. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на отрезки 10 см и 26 см. Найдите гипотенузу.

А. 36 см; **Б.** 38 см; **В.** 39 см; **Г.** 52 см.

11. Стороны треугольника – 5 см, 29 см и 30 см. Найдите проекцию меньшей стороны треугольника на его большую сторону.

А. 1,4 см; **Б.** 1,6 см; **В.** 1,8 см; **Г.** 2,4 см.

12. Стороны прямоугольника равны 6 см и 10 см. Найдите угол между диагоналями прямоугольника (с точностью до градуса).

А. 31°; **Б.** 61°; **В.** 62°; **Г.** 64°.

Задания для проверки знаний к § 18–21

1. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 10 см и 24 см.

2. По рисунку 208 назовите:

1) перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой m;
2) наклонную, проведенную из точки A к прямой m;
3) проекцию этой наклонной.

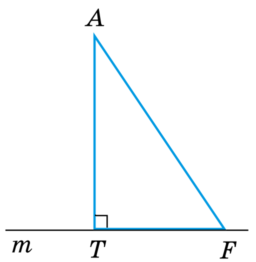


Рис. 208

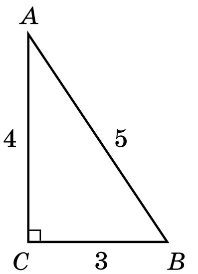


Рис. 209

3. По рисунку 209 найдите:

1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} A$; 4) $\sin B$.

4. Сторона ромба равна 25 см, а одна из его диагоналей – 14 см. Найдите вторую диагональ ромба.

5. Точка находится на расстоянии 6 см от прямой. Из этой точки к прямой проведена наклонная, образующая с прямой угол 30°. Найдите длину наклонной и длину проекции наклонной на прямую.

6. AB – гипотенуза прямоугольного треугольника ABC, $\angle A = 35°$. Решите этот прямоугольный треугольник, если $AB = 16$ см. (Стороны треугольника найдите с точностью до сотых сантиметра).

7. В треугольнике ABC $\angle A$ – тупой, $BC = 20$ см, $AB = 15$ см. BK – высота треугольника, $BK = 12$ см. Найдите AC.

8. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AC = 24$ см, $\sin A = \frac{5}{13}$. Найдите P_{ABC}.

9. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на отрезки 6 см и 10 см. Найдите стороны треугольника.

Дополнительные задания

10. Стороны треугольника равны 4 см, 13 см и 15 см. Найдите проекции двух меньших сторон на большую сторону.

11. Диагонали ромба равны 6 см и 12 см. Найдите углы ромба с точностью до минуты.

Упражнения для повторения главы 3

К § 18

776. Пусть a и b – катеты прямоугольного треугольника, c – его гипотенуза. Найдите:

1) c, если $a = 11$ см; $b = 60$ см;

2) a, если $c = 13$ см; $b = 12$ см;

3) b, если $a = 24$ см; $c = 25$ см.

777. Сторона квадрата – 5 см. Найдите его диагональ.

778. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = AC = 37$ см, $BC = 24$ см. Найдите длину высоты AK.

779. Является ли прямоугольным треугольник, стороны которого пропорциональны числам: 1) 3, 4, 5; 2) 6, 7, 10?

780. Площадь прямоугольника равна 12 см^2, а одна из его сторон – 3 см. Найдите диагональ прямоугольника.

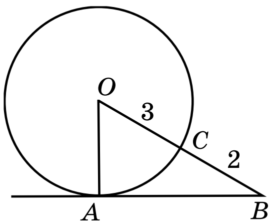


Рис. 210

781. На рисунке 210 AB – касательная к окружности с центром в точке O, $OC = 3$ см, $CB = 2$ см. Найдите AB.

782. Основания прямоугольной трапеции равны 8 см и 17 см, а большая боковая сторона – 15 см. Найдите периметр трапеции.

783. Большее основание равнобокой трапеции равно 26 см, высота – 12 см, а диагональ – 20 см. Найдите меньшее основание трапеции и ее боковую сторону.

784. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 15 см, а катеты относятся как 3 : 4. Найдите периметр треугольника.

785. Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию как 5 : 6. Высота треугольника, проведенная к основанию, равна 8 см. Найдите периметр треугольника.

786. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к боковой стороне, делит ее на отрезки 50 см и 80 см, считая от вершины угла между боковыми сторонами. Найдите высоту треугольника, проведенную к основанию.

787. В треугольнике ABC $AB = \sqrt{2}$ см, $BC = 2$ см. На стороне AC отмечена точка K так, что $AK = KB = 1$ см. Найдите градусную меру угла ABC.

788. Боковые стороны трапеции равны 9 см и 12 см, а основания – 30 см и 15 см. Найдите угол, который образуют между собой продолжение боковых сторон.

789. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 25 см. Найдите периметр треугольника, если его наименьшая высота равна 24 см.

К § 19

790. Из точки к прямой проведена наклонная, длина которой 5 см. Найдите расстояние от точки до прямой, если проекция наклонной равна 4 см.

2 **791.** Из точки к прямой проведены две наклонные, образующие с прямой равные углы. Расстояние между основаниями наклонных равно 8 см. Найдите проекции наклонных на данную прямую.

792. Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, образующая с прямой угол 60°. Найдите перпендикуляр и проекцию наклонной, если длина наклонной 12 см.

3 **793.** Из точки, лежащей на расстоянии 4 см от прямой, проведены к ней две наклонные. Длина одной из них 5 см, а другая образует с прямой угол 45°. Найдите расстояние между основаниями наклонных. Сколько случаев следует рассмотреть?

794. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых относятся как 13 : 15, а длины их проекций равны 10 см и 18 см. Найдите длины наклонных и расстояние от точки до прямой.

4 **795.** Найдите меньшую из высот треугольника, стороны которого равны 4 см, 13 см и 15 см.

К § 20

1 **796.** На рисунке 211 треугольник ABC – прямоугольный. Верны ли равенства:

1) $\sin A = \frac{5}{12}$; 2) $\cos A = \frac{12}{13}$;

3) $\operatorname{tg} A = \frac{12}{5}$; 4) $\sin B = \frac{12}{13}$;

5) $\cos B = \frac{13}{5}$; 6) $\operatorname{tg} B = \frac{12}{5}$?

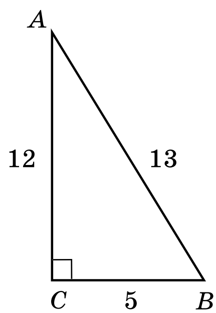


Рис. 211

2 **797.** Найдите синус, косинус и тангенс угла M треугольника MNP ($\angle P = 90°$), если $MP = 24$ см, $MN = 25$ см.

798. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 см и 15 см. Найдите:
1) синус острого угла, противолежащего меньшему катету;
2) косинус острого угла, прилежащего к большему катету;
3) тангенсы обоих острых углов.

3 **799.** Радиус окружности, описанной около прямоугольника, равен R. Диагональ прямоугольника образует со стороной угол α. Найдите периметр прямоугольника.

800. Угол ромба равен 80°, а диагональ, противолежащая этому углу, – 10 см. Найдите (с точностью до сотых сантиметра) периметр ромба.

801. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, CK – высота, $CA = b$, $\angle A = \alpha$. Найдите CK и KB.

802. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен 0,96, а основание – 28 см. Найдите боковую сторону.

803. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен r, а один из его острых углов – β. Найдите катет, прилежащий к этому острому углу.

804. Основания трапеции равны 14 см и 10 см, углы при большем основании равны 60° и 30°. Найдите высоту и диагонали трапеции.

805. Из точки к прямой проведены две наклонные, образующие с прямой углы 30° и 60°. Найдите расстояние от точки до прямой, если расстояние между основаниями наклонных равно a см. Сколько случаев надо рассмотреть?

806. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$. Докажите, что $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. (Запись $\sin^2 A$ является тождественной записи $(\sin A)^2$).

К § 21

807. По двум элементам прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) найдите другие его стороны и углы:

1) $AB = 7$ см; $\angle A = 19°$;
2) $AB = 20$ дм; $\angle B = 48°$;
3) $BC = 5$ см; $\angle B = 57°$;
4) $AC = 18$ дм; $\angle B = 32°$.

808. По двум сторонам прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) найдите его третью сторону и острые углы:

1) $AC = 9$ см; $BC = 12$ см;
2) $AC = 7$ дм; $BC = 5$ дм;
3) $AB = 34$ см; $BC = 30$ см;
4) $AB = 8$ дм; $AC = 7$ дм.

809. Для определения ширины l реки выбрали положение двух домов A и B на одном берегу и дома C на другом (рис. 212), $AB = a$ м, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Найдите ширину реки.

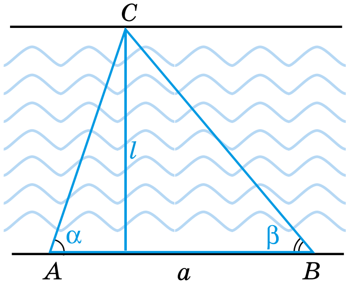


Рис. 212

Глава 4 МНОГОУГОЛЬНИКИ. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В этой главе вы:

- **вспомните** понятие многоугольника и его площади; формулы для вычисления площадей прямоугольника и квадрата;
- **узнаете**, как вычислить сумму углов многоугольника, площадь параллелограмма, ромба, треугольника, трапеции;
- **научитесь** применять изученные понятия, свойства и формулы к решению задач.

§ 22. МНОГОУГОЛЬНИК И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ. СУММА УГЛОВ ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА. МНОГОУГОЛЬНИК, ВПИСАННЫЙ В ОКРУЖНОСТЬ, И МНОГОУГОЛЬНИК, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ОКРУЖНОСТИ

Рассмотрим фигуру $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, изображенную на рисунке 213. Она состоит из отрезков A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6 и A_6A_1. При этом отрезки размещены так, что *соседние отрезки* (A_1A_2 и A_2A_3, A_2A_3 и A_3A_4, ..., A_6A_1 и A_1A_2) не лежат на одной прямой, а *несоседние отрезки* не имеют общих точек. Такую фигуру называют ***многоугольником***. Точки A_1, A_2, ..., A_6 называют ***вершинами многоугольника***, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ... A_6A_1 – ***сторонами многоугольника***.

Очевидно, что количество вершин многоугольника равно количеству его сторон.

Сумму длин всех сторон многоугольника называют его ***периметром***.

Наименьшее количество вершин (сторон) у многоугольника – три. В этом случае имеем треугольник. Еще одним отдельным видом многоугольника является четырехугольник.

Многоугольник, у которого n вершин, называют *n-угольником*. На рисунке 213 изображен шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

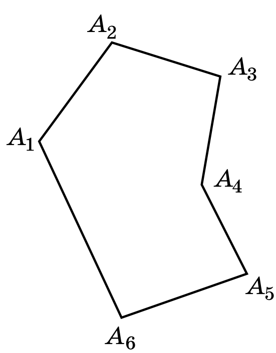


Рис. 213

Две стороны многоугольника называют *соседними*, если они имеют общую вершину. Стороны многоугольника, не имеющие общей вершины, называют *несоседними*. Например, стороны A_1A_2 и A_1A_6 – соседние, а A_1A_2 и A_4A_5 – несоседние (рис. 213).

Две вершины многоугольника называют *соседними*, если они принадлежат одной стороне, а вершины многоугольника, не принадлежащие одной стороне, называют *несоседними*. Например, вершины A_1 и A_2 – соседние, A_3 и A_6 – несоседние (рис. 213).

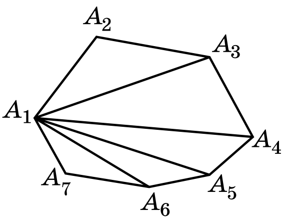


Рис. 214

Отрезок, соединяющий две несоседние вершины многоугольника, называют *диагональю* многоугольника. На рисунке 214 изображены диагонали многоугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, выходящие из вершины A_1: A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6.

Задача 1. Сколько диагоналей имеет n-угольник?

Решение. Из каждой вершины n-угольника выходит $(n - 3)$ диагонали. Всего вершин n, а каждая диагональ повторяется дважды, например A_1A_3 и A_3A_1. Поэтому всего диагоналей у n-угольника будет $\frac{n(n-3)}{2}$.

Ответ. $\frac{n(n-3)}{2}$.

Углы, стороны которых содержат соседние стороны многоугольника, называют *углами многоугольника*. Пятиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5$ имеет углы $B_5B_1B_2$, $B_1B_2B_3$, $B_2B_3B_4$, $B_3B_4B_5$, $B_4B_5B_1$.

Если каждый из углов многоугольника меньше развернутого, то такой многоугольник называют ***выпуклым***. Если хотя бы один угол многоугольника больше развернутого, то такой многоугольник называют ***невыпуклым***.

Многоугольник $B_1B_2B_3B_4B_5$ – выпуклый (рис. 215), а многоугольник $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ – невыпуклый (рис. 216), так как угол при вершине C_3 больше чем 180°.

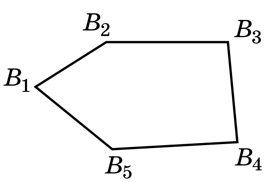


Рис. 215

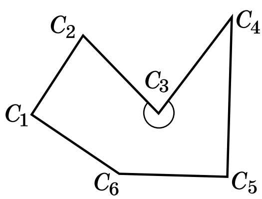


Рис. 216

Теорема (о сумме углов выпуклого n-угольника). **Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$.**

Доказательство. Выберем во внутренней области многоугольника произвольную точку O и соединим ее со всеми вершинами n-угольника (рис. 217). Получим n треугольников, сумма всех углов которых равна $180° \cdot n$. Сумма углов с вершиной в точке O равна 360°. Сумма углов данного n-угольника равна сумме углов всех треугольников, кроме углов с вершиной в точке O, то есть:

$$180°n - 360° = 180°(n - 2). \blacktriangle$$

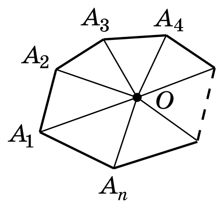


Рис. 217

Углы выпуклого многоугольника называют еще его ***внутренними углами***. Угол, смежный с внутренним углом многоугольника, называют ***внешним углом многоугольника***. На рисунке 218 угол A_3A_4K – внешний угол многоугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ при вершине A_4.

Очевидно, что каждый многоугольник имеет по два внешних угла при каждой вершине.

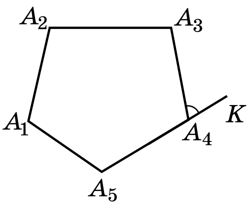


Рис. 218

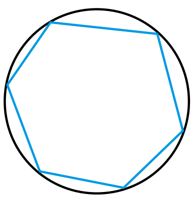


Рис. 219

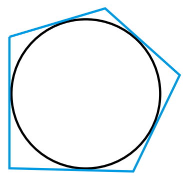


Рис. 220

Задача 2. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

Решение. Сумма внутреннего и внешнего углов при каждой вершине многоугольника равна 180°. Поэтому сумма всех внутренних и внешних углов n-угольника равна $180° \cdot n$. Так как сумма внутренних углов равна $180°(n - 2)$, то сумма внешних углов равна:

$$180°n - 180°(n - 2) = 180°n - 180°n + 360° = 360°. \blacktriangle$$

***Многоугольник* называют *вписанным в окружность*, если все его вершины лежат на окружности. *Окружность* при этом называют *описанной* около многоугольника** (рис. 219).

Около многоугольника не всегда можно описать окружность. Если же это возможно, то центром такой окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам многоугольника (как и в случае треугольника).

***Многоугольник* называют *описанным около окружности*, если все его стороны касаются окружности. *Окружность* при этом называют *вписанной* в многоугольник** (рис. 220).

Не в каждый многоугольник можно вписать окружность. Если же это возможно, то центром такой окружности является точка пересечения биссектрис внутренних углов многоугольника (как и в случае треугольника).

1. Какую фигуру называют многоугольником?
2. Что называют вершинами, углами, сторонами многоугольника?
3. Что называют периметром многоугольника?
4. Какие стороны многоугольника называют соседними, какие – несоседними; какие вершины – соседними, какие – несоседними?
5. Что называют диагональю многоугольника?
6. Какой многоугольник называют выпуклым, а какой – невыпуклым?
7. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов выпуклого n-угольника.
8. Что называют внешним углом выпуклого многоугольника?
9. Какой многоугольник называют вписанным в окружность, а какой – описанным около окружности?

1 Начальный уровень

810. 1) Назовите все вершины, стороны, углы пятиугольника $ABCDE$ (рис. 221).

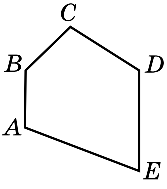


Рис. 221

2) Назовите любую пару соседних сторон, несоседних сторон.
3) Назовите любую пару соседних вершин, несоседних вершин.
4) Является ли пятиугольник выпуклым?

811. Начертите выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Запишите все его вершины, стороны и углы.

812. Начертите выпуклый семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ и проведите в нем все диагонали, выходящие из вершины A_5.

813. Начертите любой невыпуклый многоугольник, у которого два угла больше чем 180°.

814. Начертите любой невыпуклый пятиугольник.

815. Найдите на рисунках 222–225 вписанные и описанные многоугольники.

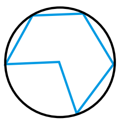


Рис. 222

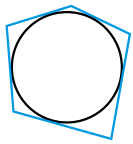


Рис. 223

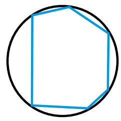


Рис. 224

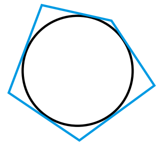


Рис. 225

816. Начертите окружность и впишите в нее пятиугольник.

817. Начертите окружность и впишите в нее любой многоугольник.

818. Начертите окружность и опишите около нее любой многоугольник.

819. Начертите окружность и опишите около нее шестиугольник.

2 Средний уровень

820. Вычислите сумму углов выпуклого n-угольника, если:

1) $n = 12$; 2) $n = 18$.

821. Вычислите сумму углов выпуклого n-угольника, если:

1) $n = 7$; 2) $n = 22$.

822. В выпуклом девятиугольнике все углы равны между собой. Найдите эти углы.

823. В выпуклом шестиугольнике все углы равны. Найдите эти углы.

824. (Устно.) Можно ли построить выпуклый пятиугольник, все углы которого равны? Ответ объясните.

825. (Устно.) Четыре угла одного выпуклого пятиугольника соответственно равны четырем углам другого выпуклого пятиугольника. Равны ли между собой их пятые углы?

826. Может ли наименьший угол выпуклого пятиугольника быть равным 110°?

827. Может ли наибольший угол выпуклого шестиугольника быть равным 115°?

3 Достаточный уровень

828. Определите углы выпуклого шестиугольника, если их градусные меры относятся как 3 : 4 : 5 : 5 : 6 : 7.

829. Найдите углы выпуклого пятиугольника, если каждый из них, начиная со второго, больше предыдущего на 10°.

830. Существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна: 1) 1080°; 2) 2100°? Если да, то найдите, сколько у него сторон и сколько диагоналей.

831. Существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна: 1) 2500°; 2) 1260°? Если да, то найдите, сколько у него вершин и сколько диагоналей.

832. Каждый из внешних углов многоугольника равен 30°. Найдите количество его сторон.

833. Все внешние углы многоугольника – прямые. Определите вид этого многоугольника.

4 Высокий уровень

834. Существует ли многоугольник, у которого количество диагоналей равно количеству сторон?

835. Сумма внутренних углов многоугольника в 5 раз больше суммы его внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Сколько вершин у многоугольника?

836. Найдите количество сторон выпуклого многоугольника, если сумма его внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, на 1980° меньше суммы внутренних углов.

837. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ вершина B соединена равными между собой диагоналями с двумя другими вершинами. Известно, что $\angle BEA = \angle BDC$, $\angle ABE = \angle CBD$. Сравните периметры четырехугольников $ABDE$ и $BEDC$.

Упражнения для повторения

3 **838.** AK и BM – высоты остроугольного треугольника ABC. Используя подобие треугольников, докажите, что $AK \cdot BC = AC \cdot BM$.

4 **839.** В трапецию вписана окружность. Найдите среднюю линию этой трапеции, если ее периметр равен P см.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

840. Найдите площадь прямоугольника со сторонами:
1) 5 см и 9 см; 2) 2,1 дм и 0,8 дм;
3) 7 см и 1 дм; 4) 4,1 дм и 0,32 м.

841. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна:
1) 7 см; 2) 29 мм; 3) 4,5 мм; 4) $\frac{5}{8}$ м.

Интересные задачки для неленивых

842. (*Национальная олимпиада Бразилии, 1983 г.*). Докажите, что все точки окружности можно разбить на два множества так, что среди вершин любого вписанного в окружность прямоугольного треугольника найдутся точки из обоих множеств.

§ 23. ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКА. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Любой многоугольник ограничивает некоторую часть плоскости. Эту часть плоскости называют *внутренней областью многоугольника*. На рисунке 226 внутренняя область многоугольника закрашена. Будем рассматривать многоугольник вместе с его внутренней областью.

Каждому многоугольнику можно поставить в соответствие значение его *площади*, считая, что площадь многоугольника – это та часть плоскости, которую занимает многоугольник. Понятие площади нам известно из повседневной жизни (площадь комнаты, площадь огорода, площадь страницы). С понятием площади вы также знакомились на уроках математики в 5–6-х классах.

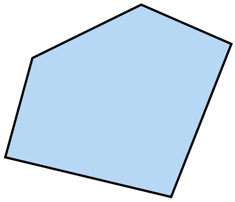


Рис. 226

Сформулируем *основные свойства площади*:

1) площадь каждого многоугольника является положительным числом;
2) равные многоугольники имеют равные площади;
3) если многоугольник разбит на несколько многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников;
4) единицей измерения площади является площадь квадрата со стороной, равной единице измерения длины (такой квадрат еще называют *единичным квадратом*).

Например, если за единицу измерения длины взять 1 см, то соответствующей единицей измерения площади будет площадь квадрата со стороной 1 см. Такой квадрат имеет площадь 1 см^2 (читается: *один квадратный сантиметр*). Другими единицами измерения площади являются 1 мм^2; 1 дм^2; 1 м^2; 1 км^2. Для площадей участков земли используют единицы измерения *ар* и *гектар*: 1 а = 100 м^2; 1 га = 100 а = 10 000 м^2.

Площадь фигуры принято обозначать буквой S.

Задача 1. Найдите площадь многоугольника, изображенного на рисунке 227, если сторона клетки равна 1 см.

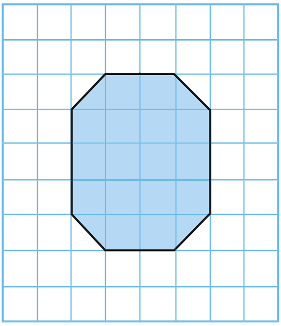


Рис. 227

Решение. Внутренняя область многоугольника состоит из шестнадцати клеток со стороной 1 см, площадь каждой из которых – 1 см^2, и четырех треугольников, площадь каждого из которых равна половине площади клетки. Следовательно, площадь фигуры

$$S = 16 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 18 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ. 18 см^2.

Площади некоторых фигур можно находить по формулам. Например, из курса математики предыдущих классов нам известны формулы для вычисления площадей прямоугольника, квадрата, круга.

Теорема (о площади прямоугольника). **Площадь S прямоугольника со сторонами a и b вычисляется по формуле**

$$S = a \cdot b.$$

Доказательство этой теоремы достаточно громоздко, ознакомиться с ним можно в Приложении 2 (с. 194).

Если стороны прямоугольника a = 1 дм и b = 6 см, тогда $S = 10 \cdot 6 = 60$ (см^2), а если $a = \sqrt{8}$ м и $b = \sqrt{2}$ м, то $S = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ (м^2).

Следствие. **Площадь S квадрата со стороной a вычисляется по формуле $S = a^2$.**

Задача 2. Квадрат и прямоугольник имеют равные площади. Сторона квадрата равна 6 см, а одна из сторон прямоугольника в 4 раза больше другой. Найдите периметр прямоугольника.

Решение. Пусть $S_к$ – площадь квадрата, $S_п$ – площадь прямоугольника, P – периметр прямоугольника.

1) $S_к = S_п = 6^2 = 36$ (см^2).

2) Пусть одна из сторон прямоугольника равна x см, тогда вторая равна $4x$ см. По формуле площади прямоугольника имеем уравнение:

$x \cdot 4x = 36$, то есть $4x^2 = 36$, откуда $x^2 = 9$.

Учитывая, что $x > 0$, имеем: $x = 3$. Следовательно, стороны прямоугольника равны 3 см и $4 \cdot 3 = 12$ (см).

3) $P = 2(3 + 12) = 30$ (см).

Ответ. 30 см.

А еще раньше...

Геометрические знания, связанные с измерением площади, берут свое начало в глубине тысячелетий.

Еще за 2–3 тысячи лет до н. э. вавилоняне умели определять площадь прямоугольника и трапеции в квадратных единицах. Эталоном при измерении площадей им служил квадрат со стороной, равной единице длины.

Древние египтяне 4000 лет назад для измерения площади прямоугольника, треугольника и трапеции уже пользовались теми же формулами, что и мы сейчас.

В своих «Началах» Евклид не употреблял слово «площадь», так как он уже под самим словом «фигура» понимал часть плоскости, ограниченную той или иной замкнутой линией, т. е. площадь. Евклид не выражал результат измерения площади числом, а сравнивал площади разных фигур между собой, употребляя слово «равновеликие». Как, например, в Задаче 16 из первой книги «Начал»: «Параллелограммы, находящиеся на равных основаниях и между теми же параллельными, равны между собой, т. е. равновелики. Докажите!».

Как и другие ученые древности, Евклид занимался вопросами превращения одних фигур в другие, им равновеликие. Так, в «Началах» решалась задача о построении квадрата, равновеликого любому данному многоугольнику.

1. Объясните, что такое площадь многоугольника.
2. Сформулируйте основные свойства площади.
3. Сформулируйте теорему о площади прямоугольника и следствия из нее.

1 Начальный уровень

843. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна:

1) 2 см; 2) 4 дм; 3) 12 см; 4) 3 м.

844. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна:

1) 5 см; 2) 7 дм; 3) 9 см; 4) 6 м.

845. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны: 1) 5 см и 9 см; 2) 12 дм и 4 дм.

846. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны: 1) 7 см и 6 см; 2) 10 дм и 5 дм.

847. Площадь прямоугольника равна 12 см^2, а одна из его сторон – 4 см. Найдите другую сторону прямоугольника.

848. Одна из сторон прямоугольника равна 5 см, а его площадь – 20 см^2. Найдите другую сторону прямоугольника.

2 Средний уровень

849. (Устно.) Найдите площади многоугольников, изображенных на рисунках 228 и 229, если сторона клетки равна 1 см.

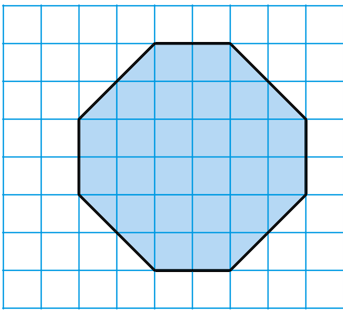


Рис. 228

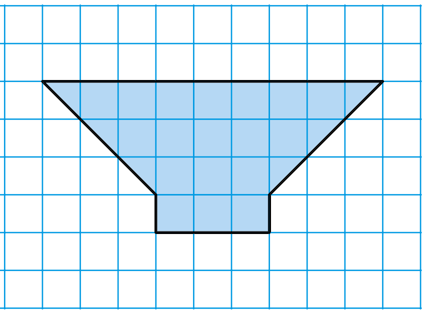


Рис. 229

850. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна:

1) 4 см^2; 2) 25 дм^2.

851. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна:

1) 9 дм^2; 2) 100 см^2.

852. Размеры футбольного поля 110 × 70 (в метрах). Больше или меньше гектара его площадь?

853. Квадрат и прямоугольник имеют равные площади. Сторона квадрата – 4 см, а одна из сторон прямоугольника – 2 см. Найдите другую сторону прямоугольника.

854. Прямоугольник и квадрат имеют равные площади. Одна из сторон прямоугольника – 4 см, а сторона квадрата – 8 см. Найдите другую сторону прямоугольника.

855. Найдите площадь прямоугольника, одна из сторон которого равна 12 см, а диагональ – 13 см.

856. Диагональ прямоугольника равна 17 см, а одна из его сторон – 8 см. Найдите площадь прямоугольника.

3 Достаточный уровень

857. Найдите площадь квадрата, диагональ которого равна: 1) 8 см; 2) d см.

858. Найдите площадь квадрата, диагональ которого равна $4\sqrt{2}$ см.

859. Периметр прямоугольника 26 см, а одна из его сторон на 5 см больше другой. Найдите сторону квадрата, который имеет такую же площадь, как и прямоугольник.

860. Прямоугольник и квадрат имеют равные площади. Периметр прямоугольника равен 50 см, а одна из его сторон на 15 см больше другой. Найдите сторону квадрата.

861. Как изменится площадь прямоугольника, если:

1) одну из его сторон увеличить вдвое;

2) одну из его сторон уменьшить втрое;

3) каждую из сторон увеличить в 4 раза;

4) одну сторону увеличить вдвое, а другую – в 5 раз;

5) одну из сторон увеличить в 12 раз, а другую – уменьшить вдвое?

862. Как изменится площадь квадрата, если каждую из его сторон:

1) увеличить в 5 раз; 2) уменьшить втрое?

863. (Устно.) Могут ли два не равных между собой квадрата иметь равные площади?

864. 1) Могут ли два не равных между собой прямоугольника иметь равные площади?

2) Два прямоугольника имеют равные площади. Можно ли утверждать, что они равны?

3) Два прямоугольника имеют равные площади. Можно ли утверждать, что они равны, в случае, когда одна из сторон первого прямоугольника равна стороне второго?

865. Стороны квадратов 15 см и 17 см. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна разности площадей данных квадратов.

866. Стороны квадратов 8 дм и 6 дм. Чему равна сторона квадрата, площадь которого равна сумме площадей данных квадратов?

867. Прямоугольник, стороны которого 8 м и 6,5 м, разрезали на квадраты со стороной 0,5 м. Сколько образовалось квадратов?

868. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности, радиус которой r.

869. Найдите стороны прямоугольника, если они относятся как 3 : 4, а площадь прямоугольника равна 108 см^2.

870. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 24 см^2, а одна из сторон в 1,5 раза больше другой.

871. Биссектриса AM угла прямоугольника $ABCD$ делит сторону BC на отрезки BM = 3 см и MC = 5 см. Найдите площадь прямоугольника.

872. Биссектриса BK угла прямоугольника $ABCD$ делит сторону AD на отрезки AK = 7 см и KD = 5 см. Найдите площадь прямоугольника.

873. Одна из сторон прямоугольника на 3 см больше другой, а диагональ прямоугольника равна 15 см. Найдите площадь прямоугольника.

874. Одна из сторон прямоугольника равна 7 см, а его диагональ на 1 см больше другой стороны. Найдите площадь прямоугольника.

4 Высокий уровень

875. На рисунке 230 $ABCD$ – прямоугольник, M – середина отрезка AK. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AKD}$.

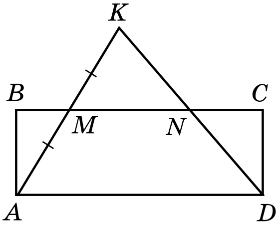


Рис. 230

876. Отношение площадей двух квадратов равно 5. Найдите отношение их периметров.

877. Отношение периметров двух квадратов равно 3. Найдите отношение их площадей.

Упражнения для повторения

878. Сумма углов одного выпуклого многоугольника равна сумме углов другого выпуклого многоугольника. Можно ли утверждать, что многоугольники имеют равное количество сторон?

879. Докажите, что около параллелограмма, не имеющего прямых углов, нельзя описать окружность.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

880. Начертите любой параллелограмм, у которого одна из сторон равна 5 см, а высота, к ней проведенная, – 3 см.

Интересные задачки для неленивых

881. Центры трех равных окружностей являются вершинами равностороннего треугольника. Эти окружности не имеют общих точек. Сколько существует окружностей, имеющих внешнее либо внутреннее касание с тремя данными окружностями?

§ 24. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теорема (о площади параллелограмма). **Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.**

Доказательство. Пусть $ABCD$ – произвольный параллелограмм, BM – его высота (рис. 231). Докажем, что площадь параллелограмма $ABCD$ можно вычислить по формуле $S_{ABCD} = AD \cdot BM$.

1) Проведем высоту CN к прямой, содержащей сторону AD параллелограмма.

2) $\angle BAM = \angle CDN$ (как соответственные углы при параллельных прямых AB и CD и секущей AN). Поэтому $\triangle BAM = \triangle CDN$ (по гипотенузе и острому углу).

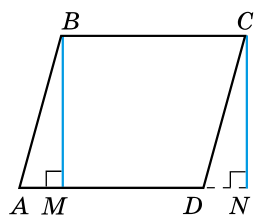


Рис. 231

3) Параллелограмм $ABCD$ состоит из трапеции $MBCD$ и треугольника ABM, а прямоугольник $MBCN$ – из трапеции $MBCD$ и треугольника DCN. Так как треугольники ABM и DCN равны, то равны и их площади, а потому равными будут площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $MBCN$.

4) $S_{MBCN} = MN \cdot BM$. Но $AM = DN$, и поэтому $MN = AD$. Следовательно, $S_{ABCD} = AD \cdot BM$. ▲

Заметим, что если основание высоты BM – точка M – совпадает с точкой D или лежит на продолжении стороны AD, то доказательство теоремы будет аналогичным.

В общем виде формулу площади S параллелограмма можно записать так:

$$S = ah_a,$$

где a – сторона параллелограмма, h_a – высота, к ней проведенная.

Задача 1. Докажите, что высоты ромба, проведенные из одной вершины, равны.

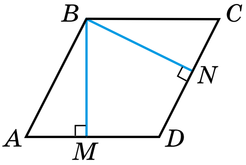


Рис. 232

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный ромб, BM и BN – его высоты (рис. 232).

Ромб является параллелограммом, поэтому $S_{ABCD} = AD \cdot BM = DC \cdot BN$.

Но $AD = DC$, а значит $BM = BN$. ▲

Задача 2. Периметр параллелограмма равен 36 см, а его высоты – 4 см и 5 см. Найдите площадь параллелограмма.

Решение. 1) Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм, BM и BN – его высоты (рис. 232), $BM = 4$ см, $BN = 5$ см.

2) $P_{ABCD} = 2(AD + DC)$. По условию $2(AD + DC) = 36$, поэтому $AD + DC = 18$ (см).

3) Пусть $AD = x$ см, тогда $DC = (18 - x)$ см.

4) Так как по формуле площади параллелограмма $S_{ABCD} = AD \cdot BM$ или $S_{ABCD} = DC \cdot BN$, имеем уравнение: $x \cdot 4 = (18 - x) \cdot 5$. То есть $4x = 90 - 5x$, откуда $x = 10$ (см).

5) Тогда $S = 10 \cdot 4 = 40$ (см^2).

Ответ. 40 см^2. ▲

Сформулируйте и докажите теорему о площади параллелограмма.

1 Начальный уровень

882. Сторона параллелограмма равна a, h – высота, проведенная к этой стороне. Найдите площадь параллелограмма, если:
1) $a = 5$ см, $h = 7$ см; 2) $a = 8$ дм, $h = 4$ дм.

883. Сторона параллелограмма равна a, h – высота, проведенная к этой стороне. Найдите площадь параллелограмма, если:
1) $a = 6$ см, $h = 3$ см; 2) $a = 5$ дм, $h = 9$ дм.

884. Площадь параллелограмма равна 24 см^2, а одна из его сторон – 6 см. Найдите высоту параллелограмма, проведенную к этой стороне.

885. Площадь параллелограмма – 18 дм^2, а одна из его высот равна 3 дм. Найдите длину стороны, к которой проведена эта высота.

2 Средний уровень

886. Диагональ параллелограмма длиной 5 см перпендикулярна стороне параллелограмма, которая равна 6 см. Найдите площадь параллелограмма.

887. Сторона параллелограмма длиной 8 см перпендикулярна диагонали параллелограмма, которая равна 5 см. Найдите площадь параллелограмма.

888. Найдите площади фигур, изображенных на рисунках 233 и 234, если сторона клетки равна 0,5 см.

889. Найдите площади фигур, изображенных на рисунках 235 и 236, если сторона клетки равна 0,5 см.

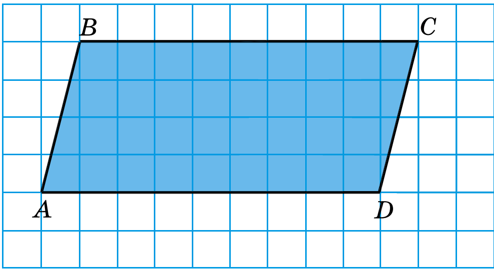


Рис. 233

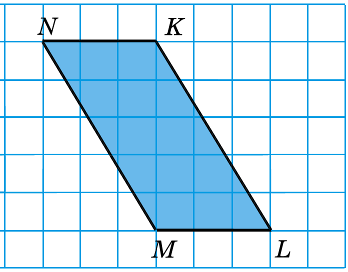


Рис. 234

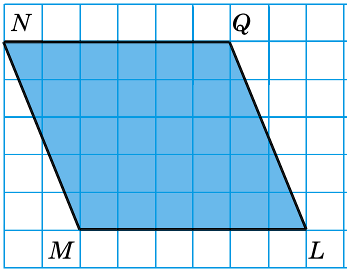


Рис. 235

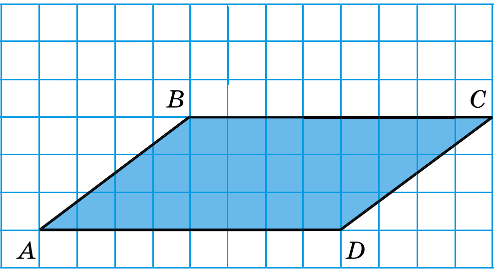


Рис. 236

890. Одна из сторон параллелограмма равна 6 см, а высота, проведенная к другой стороне, – 4 см. Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна 36 см^2.

891. Площадь параллелограмма равна 48 см^2. Одна из его сторон – 8 см, а одна из высот – 4 см. Найдите периметр параллелограмма.

3 Достаточный уровень

892. Стороны параллелограмма равны 4 см и 5 см. Высота, проведенная к меньшей из них, равна 3 см. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

893. Одна из сторон параллелограмма равна 8 см, а высота, к ней проведенная, – 6 см. Найдите другую сторону параллелограмма, если высота, к ней проведенная, равна 4,8 см.

894. Стороны параллелограмма равны 10 см и 12 см, а его острый угол – 30°. Найдите площадь параллелограмма.

895. Сторона ромба равна 4 см, а один из его углов – 150°. Найдите площадь ромба.

896. Высота параллелограмма втрое больше стороны, к которой она проведена. Найдите эту высоту, если площадь параллелограмма равна 12 см^2.

897. Сторона параллелограмма в 5 раз больше высоты, к ней проведенной. Найдите эту сторону, если площадь параллелограмма равна 45 см^2.

898. Периметр ромба равен P см. Найдите его площадь, если одна из диагоналей ромба образует со стороной угол 75°.

4 Высокий уровень

899. Две стороны параллелограмма равны 8 см и 12 см, а сумма двух его высот, проведенных из одной вершины, равна 15 см. Найдите площадь параллелограмма.

900. Две высоты параллелограмма равны 2 см и 3 см, а сумма двух его смежных сторон – 10 см. Найдите площадь параллелограмма.

901. Высоты параллелограмма равны 8 см и 6 см, а угол между ними – 30°. Найдите площадь параллелограмма.

902. Две стороны параллелограмма равны 8 см и 5 см. Может ли его площадь равняться:

1) 41 см^2; 2) 40 см^2; 3) 39 см^2?

903. Стороны параллелограмма равны 9 см и 12 см, а одна из его высот – 6 см. Найдите вторую высоту параллелограмма. Сколько решений имеет задача?

Упражнения для повторения

904. Сумма углов одного многоугольника на 540° больше суммы углов другого многоугольника. На сколько больше вершин у первого многоугольника, чем у второго?

905. Середины сторон ромба последовательно соединены отрезками. Вычислите площадь получившегося четырехугольника, если диагонали ромба равны 6 см и 10 см.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

906. Начертите два не равных между собой треугольника, у каждого из которых одна из сторон равна 4 см, а высота, к ней проведенная, – 2,5 см.

Интересные задачки для неленивых

907. (*Задача ал-Кораджи.*) Найдите площадь прямоугольника, основание которого вдвое больше высоты, а площадь численно равна периметру[1].

§ 25. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема (о площади треугольника). **Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, к ней проведенную.**

Доказательство. Пусть ABC – произвольный треугольник, BH – его высота (рис. 237). Докажем, что

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH.$$

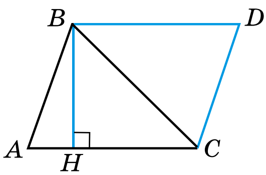


Рис. 237

1) Проведем через вершину B прямую, параллельную AC, а через вершину C – прямую, параллельную AB. Получим параллелограмм $ABDC$.

2) $\triangle ABC = \triangle DCB$ (по трем сторонам). Поэтому

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC}, \text{ откуда } S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

[1] Основанием и высотой ал-Кораджи называл две стороны прямоугольника.

3) Так как $S_{ABCD} = AC \cdot BH$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$. ▲

В общем виде формулу площади S треугольника можно записать так:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} a h_a},$$

где a – сторона треугольника, h_a – высота, проведенная к ней.

Следствие 1. **Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.**

Следствие 2. **Если сторона одного треугольника равна стороне другого треугольника, то площади таких треугольников относятся как их высоты, проведенные к этим сторонам.**

Следствие 3. **Если высота одного треугольника равна высоте другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как стороны, к которым проведены эти высоты.**

Задача 1. Докажите, что если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, образующих этот угол.

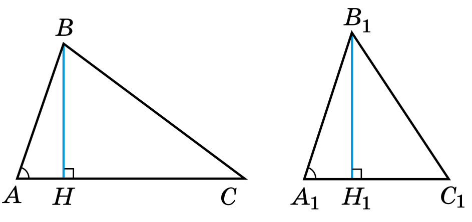


Рис. 238

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$. Проведем высоты BH и B_1H_1 (рис. 238).

1) Имеем:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BH}{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1H_1} = \frac{AC \cdot BH}{A_1C_1 \cdot B_1H_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BH}{B_1H_1}.$$

2) $\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1$ (по острому углу), поэтому $\frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

3) Имеем: $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}$. ▲

Задача 2. Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна a.

Р е ш е н и е. Пусть $\triangle ABC$ – равносторонний со стороной a. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$. В равностороннем треугольнике $h_a = m_a$, где m_a – медиана. Но $m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (§ 18, задача 4), поэтому $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

О т в е т. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Задача 3. Стороны треугольника равны 8 см, 15 см и 17 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к его наибольшей стороне.

Р е ш е н и е. Так как $17^2 = 8^2 + 15^2$ (т. е. $289 = 289$), то по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник является прямоугольным. Прямой угол является противолежащим к стороне, равной 17 см.

Пусть на рис. 239 изображен прямоугольный треугольник, у которого $c = 17$ см – гипотенуза, $a = 15$ см и $b = 8$ см – катеты, h_c – высота. Найдем h_c.

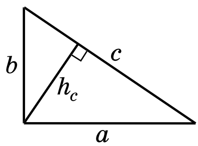


Рис. 239

Площадь этого треугольника можно найти по формулам: $S = \frac{1}{2} a \cdot b$ или $S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$.

Тогда $\frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$, то есть $ab = ch_c$, откуда $h_c = \frac{ab}{c}$.

Таким образом, имеем: $h_c = \frac{8 \cdot 15}{17} = 7\frac{1}{17}$ (см).

О т в е т. $7\frac{1}{17}$ см.

1. Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника.
2. Сформулируйте следствия из теоремы о площади треугольника.

1 Начальный уровень

908. Сторона треугольника равна a, h – высота, проведенная к этой стороне. Найдите площадь треугольника, если:
1) $a = 10$ см, $h = 5$ см; 2) $a = 3$ дм, $h = 5$ дм.

909. Пусть a – сторона треугольника, h – высота, проведенная к этой стороне. Найдите площадь треугольника, если:
1) $a = 6$ дм, $h = 4$ дм; 2) $a = 7$ см, $h = 1$ см.

910. Найдите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны:
1) 4 см и 3 см; 2) 9 дм и 5 дм.

911. Найдите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны:
1) 6 см и 5 см; 2) 7 дм и 3 дм.

2 Средний уровень

912. Площадь треугольника равна 36 дм^2, а одна из его высот – 8 дм. Найдите длину стороны, к которой проведена эта высота.

913. Площадь треугольника равна 20 см^2, а одна из его сторон – 8 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к этой стороне.

914. Найдите площади фигур, изображенных на рисунках 240 и 241, если сторона клетки равна 0,5 см.

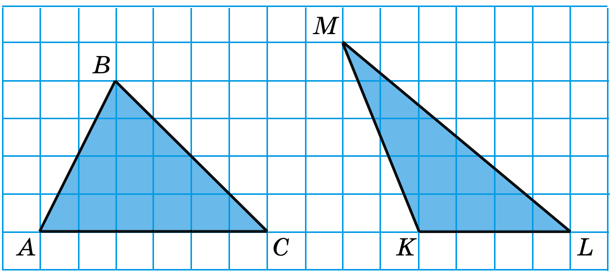


Рис. 240 Рис. 241

915. Найдите площади фигур, изображенных на рисунках 242 и 243, если сторона клетки равна 0,5 см.

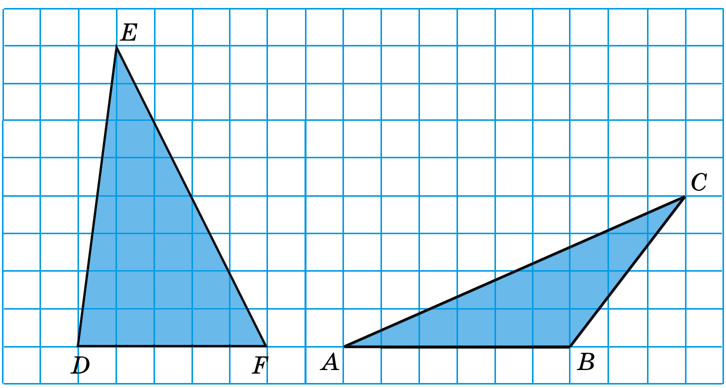


Рис. 242 Рис. 243

916. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 см, а высота, проведенная к основанию, – 3 см. Найдите площадь треугольника.

917. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 7 см, а гипотенуза – 25 см. Найдите площадь треугольника.

3 Достаточный уровень

918. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 8 см. Найдите площадь треугольника.

919. Высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 6 см. Найдите площадь треугольника.

920. 1) Диагонали ромба – 8 см и 10 см. Найдите его площадь.
2) Используя формулу площади прямоугольного треугольника, выведите формулу площади ромба через его диагонали d_1 и d_2.

921. Найдите площадь ромба с диагоналями 12 см и 6 см.

922. В прямоугольнике $ABCD$ вершина B удалена от прямой AC на 3 см. Найдите площади треугольника ABC и прямоугольника $ABCD$, если $BD = 10$ см.

923. Сторона треугольника вдвое больше высоты, проведенной к ней. Найдите эту сторону, если площадь треугольника равна 16 см^2.

924. Высота треугольника в 4 раза больше стороны, к которой она проведена. Найдите эту высоту, если площадь треугольника равна 18 см^2.

925. На стороне AC треугольника ABC, площадь которого равна 12 см^2, отмечена точка D так, что $AD : DC = 1 : 2$. Найдите площади треугольников ABD и DBC.

926. На стороне AB треугольника ABC, площадь которого равна 20 см^2, отмечена точка K так, что $AK : KB = 1 : 3$. Найдите площади треугольников ACK и CKB.

927. $ABCD$ – трапеция, $AD \parallel BC$. Докажите, что $S_{ACD} = S_{ABD}$.

928. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к боковой стороне, делит ее на отрезки 4 см и 1 см, считая от вершины угла между боковыми сторонами. Найдите площадь треугольника.

929. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к боковой стороне, делит ее на отрезки 4 см и 6 см, считая от вершины при основании. Найдите площадь треугольника.

930. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

931. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 см и 24 см. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

4 Высокий уровень

932. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 9 см и 6 см. Найдите площадь треугольника.

933. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит катет на отрезки 3 см и 5 см. Найдите площадь треугольника.

934. Две стороны треугольника равны 4 см и 6 см. Может ли площадь треугольника равняться:

1) 11 см^2; 2) 12 см^2; 3) 13 см^2?

935. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O – середине отрезка AB. Найдите отношение площадей треугольников AOC и BOD, если $CO = 3$ см, $DO = 6$ см.

936. MN – средняя линия треугольника ABC, $M \in AB$, $N \in AC$. Найдите отношение площадей треугольников AMN и ABC.

Упражнения для повторения

2 **937.** Около окружности радиуса 3 см описан квадрат. Найдите периметр и площадь квадрата.

3 **938.** Биссектриса угла прямоугольника делит его диагональ в отношении 1 : 2. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 48 см.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

939. Начертите трапецию, основания которой равны 5 см и 3 см, а высота – 4 см.

Интересные задачки для неленивых

940. Стена высотой 3,5 м отбрасывает тень длиной 5 м. Александр Семенович, рост которого 1 м 75 см, стоит на расстоянии 10 м до границы тени. Какое наименьшее количество шагов он должен сделать, чтобы полностью попасть в тень, если длина его шага 0,5 м?

§ 26. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

Теорема (о площади трапеции). **Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.**

Доказательство. Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC, BK – ее высота (рис. 244). Докажем, что площадь S трапеции можно найти по формуле:

$$S = \frac{AD+BC}{2} \cdot BK.$$

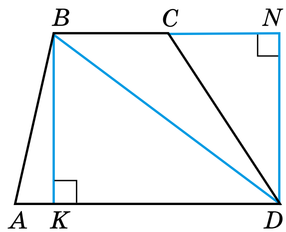


Рис. 244

1) Диагональ BD разбивает трапецию на два треугольника ABD и BDC. Поэтому $S = S_{ABD} + S_{BDC}$.

2) BK – высота треугольника ABD, поэтому $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BK$.

3) Проведем в трапеции высоту DN, она является и высотой треугольника BDC, поэтому $S_{BDC} = \frac{1}{2} BC \cdot DN$.

4) $DN = BK$ (как высоты трапеции). Следовательно,

$$S = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{1}{2} AD \cdot BK + \frac{1}{2} BC \cdot DN = \frac{AD \cdot BK}{2} + \frac{BC \cdot BK}{2} =$$

$$= (AD + BC) \cdot \frac{BK}{2} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK. \blacktriangle$$

В общем виде формулу площади S трапеции можно записать так:

$$\boldsymbol{S = \frac{a + b}{2} h},$$

где a и b – основания трапеции, h – ее высота.

Следствие. **Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.**

Задача 1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $AD = 8$ см, $BC = 5$ см, $AB = 12$ см, $\angle A = 30°$. Найдите площадь трапеции.

Решение. 1) Проведем в трапеции $ABCD$ высоту BK (рис. 245). В $\triangle ABK$ ($\angle K = 90°$) $BK = \frac{AB}{2}$ (по свойству катета, противолежащего углу 30°). Следовательно, $BK = \frac{12}{2} = 6$ (см).

2) $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BK = \dfrac{8+5}{2} \cdot 6 = 39$ (см^2).

Ответ. 39 см^2.

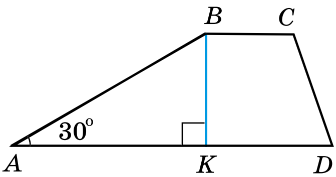


Рис. 245

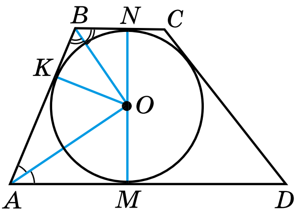


Рис. 246

Задача 2. Периметр трапеции 60 см, а одна из боковых сторон точкой касания вписанной окружности делится на отрезки 9 см и 4 см. Найдите площадь трапеции.

Решение. 1) Так как трапеция является описанной около окружности (рис. 246), то

$$AD + BC = AB + CD = \frac{P}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ (см)}.$$

2) Центр вписанной окружности – точка O – является точкой пересечения биссектрис углов трапеции, следовательно, и углов BAD и ABC. Поэтому $\angle AOB = 90°$ (задача 214, с. 43).

3) Точка K – точка касания окружности со стороной AB, поэтому $OK \perp AB$. Следовательно, OK – радиус окружности и высота прямоугольного треугольника BOA, проведенная к гипотенузе. По теореме о средних пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике имеем: $OK^2 = AK \cdot KB = 9 \cdot 4 = 36$, откуда $OK = 6$ (см).

4) MN – диаметр окружности, а также высота трапеции, поэтому $MN = 2 \cdot OK = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

5) Следовательно, $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot MN = \dfrac{30}{2} \cdot 12 = 180$ (см^2).

Ответ. 180 см^2.

1. Сформулируйте и докажите теорему о площади трапеции.
2. Сформулируйте следствие из этой теоремы.

1 Начальный уровень

941. Пусть a и b – основания трапеции, h – ее высота. Найдите площадь трапеции, если:

1) $a = 5$ см, $b = 7$ см, $h = 4$ см;

2) $a = 9$ дм, $b = 1$ дм, $h = 5$ дм.

942. Пусть a и b – основания трапеции, h – ее высота. Найдите площадь трапеции, если:
1) $a = 9$ см, $b = 3$ см, $h = 2$ см;
2) $a = 3$ дм, $b = 7$ дм, $h = 6$ дм.

943. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 4 см, а высота – 5 см.

944. Высота трапеции равна 3 см, а средняя линия – 6 см. Найдите площадь трапеции.

2 Средний уровень

945. Основания трапеции равны 7 см и 13 см, а ее площадь – 40 см^2. Найдите высоту трапеции.

946. Площадь трапеции равна 36 см^2, а ее основания – 8 см и 10 см. Найдите высоту трапеции.

947. Высота трапеции равна 6 см, а ее площадь – 24 см^2. Найдите сумму оснований трапеции.

948. Высота трапеции равна 8 см, а площадь – 40 см^2. Найдите среднюю линию трапеции.

949. Площадь трапеции равна 63 см^2, одно из ее оснований – 5 см, а высота – 7 см. Найдите другое основание трапеции.

950. Одно из оснований трапеции равно 17 см, а ее высота – 3 см. Найдите другое основание трапеции, если ее площадь равна 33 см^2.

951. $ABCD$ ($AD \parallel BC$) – равнобокая трапеция с тупым углом B, BK – ее высота, $AK = 3$ см, $BC = 5$ см, $BK = 4$ см. Найдите площадь трапеции.

952. $ABCD$ ($AB \parallel CD$) – прямоугольная трапеция с тупым углом D, DK – высота трапеции, $AK = 4$ см, $CD = 7$ см, $DK = 5$ см. Найдите площадь трапеции.

3 Достаточный уровень

953. Площадь прямоугольной трапеции равна 30 см^2, ее периметр – 28 см, а меньшая боковая сторона – 3 см. Найдите большую боковую сторону.

954. Периметр равнобокой трапеции равен 32 см, ее боковая сторона – 5 см, а площадь – 44 см^2. Найдите высоту трапеции.

955. В трапеции $ABCD$ меньшее основание AB равно 6 см, а высота трапеции – 8 см. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника ADC равна 40 см^2.

956. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 10 см и 8 см. Площадь треугольника ABD равна 25 см^2. Найдите площадь трапеции.

957. Площадь трапеции равна 36 см^2, а ее высота – 6 см. Найдите основания трапеции, если они относятся как 1 : 3.

958. Основания трапеции относятся как 1 : 4. Найдите их, если высота трапеции равна 4 см, а площадь – 50 см^2.

959. Найдите площадь трапеции, основания которой равны a см и b см, а боковая сторона длиной c см образует с меньшим основанием угол 150°.

960. В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 6 см и образует с меньшей диагональю угол 45°. Найдите площадь трапеции, если ее тупой угол равен 135°.

961. В прямоугольной трапеции меньшая боковая сторона равна 4 см и образует с меньшей диагональю угол 45°. Острый угол трапеции также равен 45°. Найдите площадь трапеции.

962. Большая диагональ прямоугольной трапеции равна 13 см, а большее основание – 12 см. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 4 см.

963. Большая диагональ прямоугольной трапеции равна 17 см, а высота – 8 см. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 5 см.

964. Основания равнобокой трапеции равны 38 см и 52 см, а боковая сторона – 25 см. Найдите площадь трапеции.

965. Большее основание равнобокой трапеции равно 18 см, боковая сторона – 13 см, а высота – 12 см. Найдите площадь трапеции.

966. Меньшее основание равнобокой трапеции равно 6 см, боковая сторона – 5 см, а высота – 3 см. Найдите площадь трапеции.

4 Высокий уровень

967. Меньшее основание равнобокой трапеции равно 10 см. Точка пересечения диагоналей удалена от оснований на 2 см и 3 см. Найдите площадь трапеции.

968. Большее основание равнобокой трапеции равно 18 см. Точка пересечения диагоналей удалена от оснований на 5 см и 6 см. Найдите площадь трапеции.

969. Диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, а высота равна h см. Найдите площадь трапеции.

970. Найдите площадь равнобокой трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, а основания равны 10 см и 4 см.

971. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит большую боковую сторону на отрезки 1 см и 4 см. Найдите площадь трапеции.

Упражнения для повторения

972. Вычислите сумму углов выпуклого 17-угольника.

973. Сколько плиток квадратной формы со стороной 20 см понадобится, чтобы выложить ими пол в комнате прямоугольной формы, размеры которой 4,6 м и 3,4 м?

974. Один из углов ромба на $120°$ больше другого, а сторона ромба равна 6 см. Найдите площадь ромба.

Интересные задачки для неленивых

975. Из трех квадратов, длина стороны каждого из которых является целым числом сантиметров, составлен прямоугольник, площадь которого 150 см^2. Найдите периметр прямоугольника.

Домашняя самостоятельная работа № 5

Для каждого задания предлагается четыре варианта ответа (А–Г), из которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. На каком из рисунков 247–250 изображен описанный пятиугольник?

А. рис. 247; **Б.** рис. 248; **В.** рис. 249; **Г.** рис. 250.

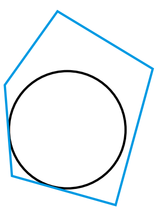


Рис. 247

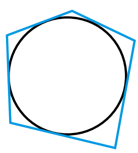


Рис. 248

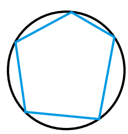


Рис. 249

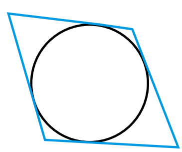


Рис. 250

2. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны 7 см и 4 см.

А. 28 см; **Б.** 22 см; **В.** 28 см^2; **Г.** 11 см^2.

3. Найдите площадь параллелограмма, одна из сторон которого равна 8 см, а высота, проведенная к ней, – 5 см.

А. 40 см^2; **Б.** 26 см^2; **В.** 20 см^2; **Г.** 13 см^2.

4. Вычислите сумму внутренних углов выпуклого 10-угольника.

А. 360°; **Б.** 1800°; **В.** 1620°; **Г.** 1440°.

5. Найдите сторону треугольника, если его площадь равна 24 см^2, а высота, к ней проведенная, – 6 см.

А. 4 см; **Б.** 18 см; **В.** 8 см; **Г.** 12 см.

6. Одно из оснований трапеции равно 5 см, а ее высота – 4 см. Найдите другое основание, если площадь трапеции равна 28 см^2.

А. 11 см; **Б.** 2 см; **В.** 7 см; **Г.** 9 см.

7. Прямоугольник, стороны которого равны 16 дм и 9,5 дм, разрезали на квадраты со стороной 0,5 дм. Сколько получили квадратов?

А. 612; **Б.** 608; **В.** 51; **Г.** 618.

8. Большая диагональ прямоугольной трапеции равна 13 см, а высота – 5 см. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 8 см.

А. 50 см^2; **Б.** 52,5 см^2; **В.** 100 см^2; **Г.** 62,5 см^2.

9. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 8 см и 10 см.

А. 80 см^2; **Б.** 20 см^2; **В.** 40 см^2; **Г.** 36 см^2.

10. В прямоугольном треугольнике гипотенуза точкой касания вписанного круга делится на отрезки 3 см и 10 см. Найдите площадь треугольника.

А. 60 см^2; **Б.** 50 см^2; **В.** 40 см^2; **Г.** 30 см^2.

11. Большее основание равнобокой трапеции равно 12 см. Точка пересечения диагоналей удалена от оснований на 2 см и 3 см. Найдите площадь трапеции.

А. 75 см^2; **Б.** 50 см^2; **В.** 100 см^2; **Г.** 150 см^2.

12. Стороны параллелограмма равны 12 см и 9 см, а сумма двух его высот, проведенных из одной вершины, – 7 см. Найдите площадь параллелограмма.

А. 108 см^2; **Б.** 48 см^2; **В.** 36 см^2; **Г.** 27 см^2.

Задания для проверки знаний к § 22–26

1. Начертите окружность, впишите в нее пятиугольник и опишите около нее семиугольник.

2. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны 6 см и 9 см.

3. Найдите площадь параллелограмма, одна из сторон которого равна 7 см, а высота, проведенная к ней, – 4 см.

4. Вычислите сумму углов выпуклого 15-угольника.

5. Площадь треугольника равна 30 см^2, а одна из его сторон – 12 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к этой стороне.

6. Площадь трапеции равна 35 см^2, одно из ее оснований – 8 см, а высота – 7 см. Найдите другое основание трапеции.

7. Прямоугольник, стороны которого 12 дм и 7,5 дм, разрезали на квадраты со стороной 0,5 дм. Сколько получилось квадратов?

8. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 6 см и 12 см.

9. Меньшее основание трапеции равно 12 см. Точка пересечения диагоналей удалена от оснований на 3 см и 5 см. Найдите площадь трапеции.

Дополнительные задания

10. Отношение площадей двух квадратов равно 7. Найдите отношение их периметров.

11. Высоты параллелограмма равны 5 см и 6 см, а сумма двух его соседних сторон – 22 см. Найдите площадь параллелограмма.

Упражнения для повторения главы 4

К § 22

976. Начертите выпуклый пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ и невыпуклый шестиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$. Проведите все диагонали в пятиугольнике, вычислите их количество.

977. Начертите окружность. Впишите в нее и опишите около нее любые многоугольники с равным количеством сторон.

978. У пятиугольника все внешние углы равны. Чему равны внутренние углы этого пятиугольника?

979. Найдите количество диагоналей у восьмиугольника.

980. Все внутренние углы n-угольника равны по 135°. Найдите n.

981. Как изменится сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, если количество его сторон увеличится на две?

982. Сумма углов выпуклого n-угольника в k раз больше суммы углов выпуклого $(n - 1)$-угольника. Найдите k, где k – натуральное.

К § 23

983. Сравните площадь квадрата со стороной 6 см с площадью прямоугольника со сторонами 4 см и 9 см.

984. 1) Начертите произвольный прямоугольник, площадь которого 12 см^2.

2) Начертите квадрат, площадь которого 9 см^2.

985. На продолжении стороны AD квадрата $ABCD$ за его вершину D отметили точку P. Найдите площадь квадрата, если $CP = 10$ см, $\angle CPD = 30°$.

986. 1) Периметр квадрата равен P см. Найдите его площадь.

2) Площадь квадрата равна S см^2. Найдите его периметр.

3) Площадь квадрата численно равна его периметру. Найдите сторону квадрата.

987. На рисунке 251 изображено геометрическое доказательство формулы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Поясните его.

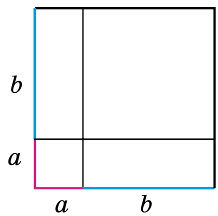


Рис. 251

988. Сколько нужно плиток прямоугольной формы со сторонами 30 см и 20 см, чтобы выложить ими часть стены, имеющей форму прямоугольника со сторонами 2,4 м и 3,6 м?

989. Биссектриса угла прямоугольника делит его сторону на отрезки 4 см и 5 см. Найдите площадь этого прямоугольника. Сколько решений имеет задача?

990. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) вписан квадрат $MNKL$ так, что точки N и K лежат на гипотенузе (причем N лежит между A и K), $M \in AC$, $L \in BC$, $AN = m$, $KB = n$. Найдите площадь квадрата.

К § 24

991. Начертите параллелограмм, одна из сторон которого равна 4 см, а высота, к ней проведенная, – 2 см. Найдите площадь параллелограмма.

992. Найдите площадь ромба $ABCD$, если $AB = 4$ см, а высота, проведенная к стороне BC, равна 3 см.

993. В параллелограмме $ABCD$ $\angle B$ – тупой, CE – высота параллелограмма, $\angle DCE = 60°$, $AD = 5$ см, $AB = 4$ см. Найдите площадь параллелограмма.

994. Существует ли параллелограмм, у которого:
1) стороны равны 6 см и 8 см, а высоты – 3 см и 4 см;
2) стороны равны 9 см и 6 см, а высоты – 4 см и 2 см?

995. Сторона квадрата равна стороне ромба, а тупой угол ромба равен 150°. Какая из данных фигур имеет большую площадь? Во сколько раз?

996. В параллелограмме $ABCD$ острый угол равен 30°, а биссектриса этого угла делит сторону параллелограмма пополам. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 24 см.

997. В ромб $ABCD$ вписана окружность радиуса 8 см. K – точка касания со стороной AB. Найдите площадь ромба, если $AK : KB = 1 : 4$.

К § 25

998. Начертите три разных треугольника (остроугольный, прямоугольный и тупоугольный), у каждого из которых одна сторона равна 3 см, а высота, проведенная к ней, – 4 см. Найдите площадь каждого из треугольников.

999. Две стороны треугольника равны 6 см и 9 см, а высота, проведенная к большей из них, – 4 см. Найдите высоту, проведенную к меньшей из них.

1000. В треугольнике ABC $\angle C = 135°$, $AC = 4$ см, BD – высота треугольника, $CD = 3$ см. Найдите площадь треугольника.

1001. В треугольнике проведены все средние линии. Докажите, что площадь каждого из четырех образовавшихся треугольников равна четверти площади начального треугольника.

1002. CK – медиана равнобедренного треугольника ABC с основанием AB. На этой медиане выбрана некоторая точка M. Докажите, что $S_{AMC} = S_{BMC}$.

К § 26

1003. Начертите трапецию, основания которой 4 см и 2 см, а высота – 3 см. Найдите площадь этой трапеции.

1004. Площадь трапеции равна 32 см^2, а ее средняя линия – 8 см. Найдите высоту трапеции.

1005. Найдите площади трапеций, изображенных на рисунках 252–254, если длина стороны клетки равна 0,5 см.

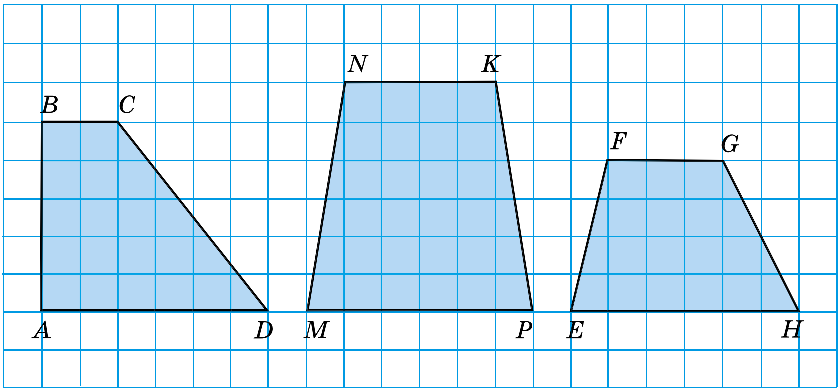


Рис. 252 Рис. 253 Рис. 254

1006. Высоты, проведенные из вершин меньшего основания равнобокой трапеции, делят большее основание на три отрезка, сумма двух из которых равна третьему. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание и высота равны по a см.

1007. Вычислите площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны по b см, а острый угол – 45°.

1008. EF – средняя линия треугольника ABC, $EF \parallel AB$. Во сколько раз площадь треугольника CEF меньше площади трапеции $AEFB$?

1009. В равнобокую трапецию вписана окружность, точка касания которой делит боковую сторону на отрезки длиной 2 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 8 КЛАССА

1. **1.** Найдите периметр параллелограмма, стороны которого равны 4 см и 9 см.

2. Один из углов ромба равен 46°. Найдите остальные углы ромба.

3. Найдите площадь треугольника, одна из сторон которого равна 8 см, а высота, проведенная к этой стороне, – 5 см.

2. **4.** Средняя линия трапеции равна 12 см. Найдите основания трапеции, если одно из них на 4 см больше другого.

5. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; $AB = 4$ см; $AC = 6$ см; $A_1C_1 = 9$ см; $B_1C_1 = 12$ см. Найдите A_1B_1 и BC.

6. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 см и 10 см. Найдите длину медианы, проведенной к меньшему катету.

3. **7.** В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $AB = 10$ см. Решите этот треугольник (углы треугольника найдите с точностью до градуса).

8. Найдите стороны прямоугольника, если они относятся как 2 : 3, а площадь прямоугольника равна 96 см^2.

4. **9.** Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит большую боковую сторону на отрезки 2 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

Глава 1
Четырехугольники

1010. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ вне его построены два равносторонних треугольника ABK и CDL. Докажите, что отрезок KL проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

1011. На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечена произвольная точка K. Через эту точку параллельно BC и AC проведены прямые, которые пересекают стороны треугольника. Докажите, что периметр получившегося при этом параллелограмма не зависит от положения точки K.

1012. Точки A, B и C лежат на окружности с центром O. $ABCO$ – параллелограмм. Найдите его углы.

1013. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и высоте.

1014. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника, периметры которых равны. Определите вид четырехугольника.

1015. Окружность с диаметром AC проходит через середину стороны AB ромба $ABCD$. Найдите тупой угол ромба.

1016. Вне прямоугольника $ABCD$ выбрана точка K так, что $\angle AKC = 90°$. Найдите $\angle DKB$.

1017. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC построены квадраты $ACDE$ и $BCKL$. Прямые ED и KL пересекаются в точке P. Под каким углом пересекаются прямые PC и AB?

1018. Стороны прямоугольника равны a и b ($a > b$). Биссектрисы четырех углов прямоугольника, пересекаясь, образуют четырехугольник. Найдите его диагонали.

1019. Докажите, что биссектриса угла параллелограмма делит пополам угол между высотами, проведенными из вершины этого угла.

1020. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P и на отрезке AP, как на стороне, построен квадрат $APNM$, сторона которого PN пересекает сторону AD квадрата $ABCD$. Сравните длины отрезков BP и DM.

1021. Докажите, что в любой трапеции сумма боковых сторон больше разности большего и меньшего оснований.

1022. Известно, что существует точка, равноудаленная от всех прямых, содержащих стороны трапеции. Найдите периметр трапеции, если ее средняя линия равна 10 см.

1023. Известно, что существует точка, равноудаленная от всех вершин трапеции, один из углов которой равен 40°. Найдите остальные углы трапеции.

1024. Основания трапеции равны a и b ($a > b$), а сумма углов, прилежащих к большему основанию, равна 90°. Найдите расстояние между серединами оснований трапеции.

1025. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке M. Известно, что $\angle ABC = 73°$, $\angle BCD = 103°$, $\angle AMD = 110°$. Найдите $\angle ACD$.

1026. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_1, BH_2 и CH_3. H – точка их пересечения. Среди семи точек A, B, C, H_1, H_2, H_3 и H укажите все такие их четверки, через которые можно провести окружность.

Глава 2
Подобие треугольников

1027. В пятиугольнике $ABCDE$ все углы равны и все стороны равны. Диагонали AD и BE пересекаются в точке O. Докажите, что $\triangle AED \sim \triangle AOE$.

1028. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая продолжения сторон CB и CD соответственно в точках N и M. Докажите, что произведение $BN \cdot DM$ не зависит от того, как проходит эта прямая.

1029. Диагональ трапеции делит ее на два подобных треугольника. Определите длину этой диагонали, если основания трапеции равны a и b.

1030. Через середину наибольшей стороны треугольника проведена прямая, отсекающая от него подобный ему треугольник. Найдите наименьшую сторону отсеченного треугольника, если стороны данного треугольника равны:

1) 42 см, 49 см, 56 см;
2) 42 см, 49 см, 63 см;
3) 42 см, 49 см, 70 см.

Сколько решений имеет задача в каждом из случаев?

1031. В треугольнике ABC угол B – тупой. Отметьте на стороне AC такую точку D, чтобы выполнялось равенство $AB^2 = AD \cdot AC$.

1032. AD и BC – основания трапеции $ABCD$, диагонали которой взаимно перпендикулярны. $AC = 15$ см, CE – высота трапеции, $AE = 9$ см. Найдите среднюю линию трапеции.

Глава 3
Решение прямоугольных треугольников

1033. Диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

1034. Точка M лежит внутри угла, который равен $60°$. Расстояния от точки M до сторон угла равны a и b. Найдите расстояние от точки M до вершины угла.

1035. Две окружности разных радиусов имеют внешнее касание. MN – их общая внешняя касательная, M и N – точки касания. Докажите, что длина отрезка MN является средним геометрическим диаметров окружностей.

1036. 1) В остроугольном треугольнике ABC BH – высота. Докажите, что $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$.

2) В треугольнике ABC $\angle A$ – тупой, BH – высота. Докажите, что $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$.

1037. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу в отношении $2 : 3$. Найдите периметр треугольника, если центр вписанной окружности находится на расстоянии $m\sqrt{2}$ от вершины прямого угла.

1038. Пусть a и b – катеты прямоугольного треугольника, c – его гипотенуза, h – высота, проведенная к гипотенузе. Докажите, что треугольник со сторонами h, $c + h$ и $a + b$ – прямоугольный.

1039. $ABCD$ – прямоугольная трапеция, $\angle A = \angle B = 90°$, $AB = a$, $CD = b$, $BC = c$, $BC < DA$. Найдите расстояние от точки B до прямой, содержащей сторону CD.

1040. Вычислите: 1) $\sin 15°$; 2) $\sin 75°$.

Глава 4
Многоугольники. Площади многоугольников

1041. Существует ли многоугольник, у которого:
1) 20 диагоналей; 2) 21 диагональ?

1042. В выпуклом n-угольнике пять углов имеют градусную меру $140°$ каждый, остальные его углы – острые. Найдите n.

1043. Докажите, что расстояния от любой точки диагонали параллелограмма до непараллельных сторон обратно пропорциональны длинам этих сторон.

1044. Внутри прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) отмечена точка M так, что площади треугольников AMB, BMC и CMA равны. Докажите, что $MA^2 + MB^2 = 5MC^2$.

1045. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника ABM, где M – точка пересечения медиан треугольника ABC?

1046. В треугольнике ABC h_1, h_2, h_3 – высоты, проведенные к сторонам AB, BC и CA соответственно, а d_1, d_2, d_3 – расстояния от произвольной точки P, находящейся внутри этого треугольника, до сторон AB, BC и CA соответственно. Докажите, что $\dfrac{d_1}{h_1} + \dfrac{d_2}{h_2} + \dfrac{d_3}{h_3} = 1$.

1047. Точка пересечения биссектрис треугольника на 3 см удалена от прямой, содержащей одну из сторон треугольника. Найдите площадь треугольника, если его периметр равен 36 см.

1048. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отмечены точки M, K, P так, что $AM : MB = BK : KC = CP : PA = 2 : 1$. Площадь треугольника ABC равна S. Найдите площадь четырехугольника $APKM$.

1049. Биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в точке O, находящейся на расстоянии d от большей стороны трапеции. Найдите площадь трапеции, если ее боковые стороны равны m и n.

1050. AD и BC – основания трапеции $ABCD$, $CD = c$. Точка K – середина боковой стороны AB. Расстояние от точки K до прямой, содержащей сторону CD, равно d. Найдите площадь трапеции.

1051. В трапеции $ABCD$ точка M – середина большего основания AD, $AB = BC = CD = a$. Точка пересечения диагоналей трапеции совпадает с точкой пересечения высот треугольника BMC. Найдите площадь трапеции.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

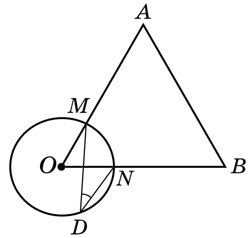
ГОТОВИМСЯ К ВНО

Решите задачи, которые предлагались на внешнем независимом оценивании (ВНО) по математике прошлых лет и охватывают курс геометрии 8-го класса. В скобках указано, в каком году задача предлагалась на ВНО.

К каждому из заданий 1, 2, 4, 6, 9 выберите один правильный вариант ответа из пяти предложенных вариантов (А–Д). К каждому из заданий 3, 5, 7, 8, 10–13 ответ запишите.

Тема «ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ»

1. (*2011 г.*) На рисунке изображена окружность с центром в точке O и равносторонний треугольник AOB, пересекающий окружность в точках M и N. Точка D лежит на окружности. Найдите градусную меру угла MDN.



А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	120°

2. (*2015 г.*) На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка, расстояния от которой до сторон AB и BC равны 2 см и 6 см соответственно. Определите периметр квадрата $ABCD$.

А	Б	В	Г	Д
16 см	24 см	32 см	48 см	64 см

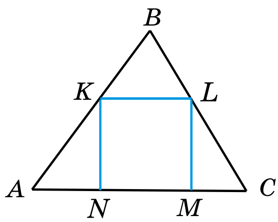
3. (*2012 г.*) Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает его большую сторону BC в точке M. Определите радиус окружности (в см), описанной около прямоугольника, если $BC = 24$ см, $AM = 10\sqrt{2}$ см.

Тема «ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ»

4. (*2011 г.*) В треугольнике ABC: $AB = 31$ см, $BC = 15$ см, $AC = 26$ см. Прямая a, параллельная стороне AB, пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Вычислите периметр треугольника MNC, если $MC = 5$ см.

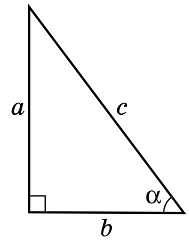
А	Б	В	Г	Д
15 см	24 см	48 см	21 см	26 см

5. (*2013 г.*) В треугольник ABC вписан квадрат $KLMN$ (см. рисунок). Высота этого треугольника, проведенная к стороне AC, равна 6 см. Найдите периметр квадрата (в см), если $AC = 10$ см.



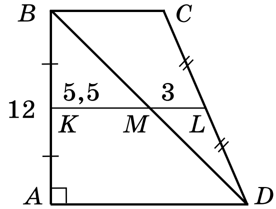
Тема «РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ»

6. (*2015 г.*) На рисунке изображен прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c и острым углом α. Укажите правильное равенство.



А	Б	В	Г	Д
$\cos\alpha = \frac{a}{b}$	$\cos\alpha = \frac{c}{b}$	$\cos\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

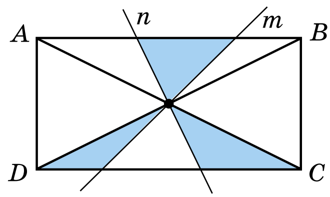
7. (*2009 г.*) В трапеции $ABCD$: $\angle A = 90°$, $AB = 12$ см (см. рисунок). Диагональ BD делит среднюю линию KL трапеции на отрезки KM и ML, причем $KM = 5{,}5$ см и $ML = 3$ см. Вычислите периметр трапеции $ABCD$ (в см).



8. (*2006 г.*) (Задача Л. Пизанского, XII–XIII вв.). Две башни, высота одной из которых 40 футов, а другой – 30 футов, расположены на расстоянии 50 футов одна от другой. К колодцу, находящемуся между ними, одновременно с каждой башни вылетело по птичке. Двигаясь с одинаковой скоростью, они прилетели к колодцу одновременно. Найдите расстояние от колодца до ближайшей башни (*в футах*).

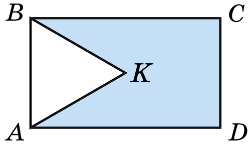
Тема «МНОГОУГОЛЬНИКИ. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ»

9. (*2006 г.*) В прямоугольнике $ABCD$ прямые m и n проходят через точку пересечения диагоналей. Площадь фигуры, состоящей из трех закрашенных треугольников, равна 12 см^2. Вычислите площадь прямоугольника $ABCD$.



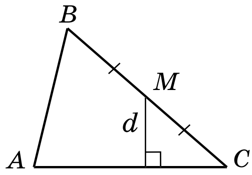
А	Б	В	Г	Д
24 см^2	30 см^2	36 см^2	42 см^2	48 см^2

10. (*2010 г.*) На рисунке изображен прямоугольник $ABCD$ и равносторонний треугольник ABK, периметры которых соответственно равны 20 см и 12 см. Найдите периметр пятиугольника $AKBCD$ (в см).



11. (*2013 г.*) Меньшая сторона прямоугольника равна 16 м и образует с его диагональю угол 60°. Середины всех сторон прямоугольника последовательно соединили. Найдите значение выражения $\frac{S}{\sqrt{3}}$, где S – площадь (в м^2) получившегося четырехугольника.

12. (*2013 г.*) В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, $AC = 24$ см (см. рисунок). Найдите расстояние d (в см) от точки M до стороны AC, если площадь треугольника ABC равна 96 см^2.



13. (*2014 г.*) Диагональ равнобокой трапеции является биссектрисой ее острого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 13 см и 23 см. Вычислите (в см^2) площадь трапеции.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Теорема (о площади прямоугольника). **Площадь S прямоугольника со сторонами a и b вычисляется по формуле $S = a \cdot b$.**

Доказательство. Пусть $ABCD$ – произвольный прямоугольник, у которого $AB = a$, $AD = b$ (рис. 255). Докажем, что $S = ab$.

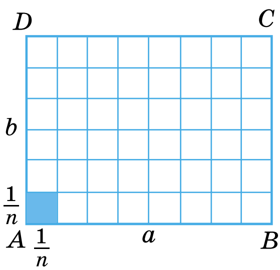


Рис. 255

1) Если длины отрезков AB и AD являются рациональными числами (целыми или дробными), то существует отрезок такой длины h, которую можно отложить целое число раз и на отрезке AB, и на отрезке AD.

Приведем числа a и b к общему знаменателю n. Получим: $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$. Тогда $h = \frac{1}{n}$. Имеем $a = ph$, $b = qh$.

Разобьем отрезок AB на p равных частей длиной h, а AD – на q равных частей длиной h. Через точки деления проведем прямые, параллельные сторонам прямоугольника (рис. 255). Эти прямые разобьют весь прямоугольник на pq равных квадратов со стороной $h = \frac{1}{n}$ (один из таких квадратов закрашен на рисунке 255). Так как единичный квадрат вмещает ровно n^2 квадратов со стороной $\frac{1}{n}$, то площадь одного квадрата с такой стороной равна $\frac{1}{n^2}$. Площадь прямоугольника равна сумме площадей всех квадратов. Имеем:

$$S = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$

2) Рассмотрим случай, когда хоть одна из длин отрезков AB или AD является числом иррациональным (бесконечной десятичной дробью).

Пусть число a_n получили из числа a отбрасыванием всех десятичных знаков после запятой, начиная с $(n + 1)$-го. Так как a отличается от a_n не более чем на $\frac{1}{10^n}$, то

$$a_n \leqslant a \leqslant a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Аналогично рассмотрим число b_n такое, что $b_n \leqslant b \leqslant b_n + \frac{1}{10^n}$. На прямых AB и AD отложим отрезки AB_1, AB_2, AD_1, AD_2, где $AB_1 = a_n$, $AB_2 = a_n + \frac{1}{10^n}$; $AD_1 = b_n$, $AD_2 = b_n + AD_2 = b_n + \frac{1}{10^n}$ и построим прямоугольники $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$ (рис. 256). Тогда

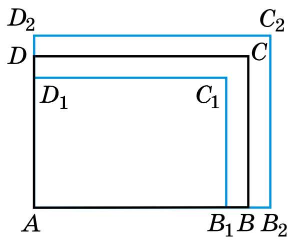


Рис. 256

$$S_{AB_1C_1D_1} \leqslant S_{ABCD} \leqslant S_{AB_2C_2D_2}; a_nb_n \leqslant S_{ABCD} \leqslant \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)\left(b_n + \frac{1}{10^n}\right).$$

Будем неограниченно увеличивать число n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ станет очень малым, а потому число $a_n + \frac{1}{10^n}$ практически не будет отличаться от числа a_n, а число $b_n + \frac{1}{10^n}$ практически не будет отличаться от числа b_n. Поэтому произведение $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)\left(b_n + \frac{1}{10^n}\right)$ практически не будет отличаться от произведения a_nb_n. Следовательно, из последнего двойного неравенства следует, что площадь прямоугольника $ABCD$ практически не отличается от числа a_nb_n.

Поэтому $S = a_nb_n$.

Но из неравенств $a_n \leqslant a \leqslant a_n + \frac{1}{10^n}$ и $b_n \leqslant b \leqslant b_n + \frac{1}{10^n}$ при неограниченном увеличении числа n следует, что число a практично не отличается от числа a_n, а число b – от числа b_n.

Следовательно, число a_nb_n практически не отличается от числа ab.

Окончательно имеем: $S = ab$. ▲

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАССА

Элементарные геометрические фигуры и их свойства

Основными геометрическими фигурами на плоскости являются *точка* и *прямая*.

Отрезком называют часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, которые лежат между двумя ее точками, вместе с этими точками. На рисунке 257: отрезок AB, точки A и B – *концы отрезка*.

Рис. 257

Рис. 258

Точка A делит прямую на две части (рис. 258). Каждую из полученных частей вместе с точкой A называют *лучом*, выходящим из точки A. Поэтому A называют *началом* каждого из лучей.

Два луча, имеющие общее начало и дополняющие друг друга до прямой, называют *дополняющими*.

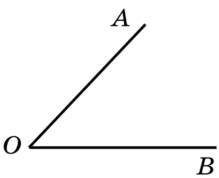


Рис. 259

Угол – это геометрическая фигура, состоящая из двух лучей, которые выходят из одной точки. Лучи называют *сторонами угла*, а их общее начало – *вершиной угла*. На рисунке 259: угол AOB, точка O – его вершина; OA и OB – стороны угла. Записать этот угол можно так: $\angle AOB$; $\angle BOA$; $\angle O$.

Биссектрисой угла называют луч, который выходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит его пополам.

Аксиомы планиметрии

I. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие ей, и точки, ей не принадлежащие.

II. Через две точки можно провести прямую и к тому же только одну.

III. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

IV. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля.

V. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его внутренней точкой. (На рисунке 260 $AB = AC + CB$.)

VI. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°.

VII. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами. $\angle AOB = \angle AOK + \angle KOB$ (рис. 261).

Рис. 260

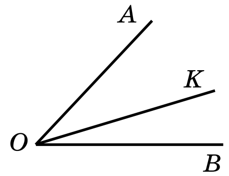


Рис. 261

Смежные и вертикальные углы

Два угла называют *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие являются дополняющими лучами.

На рисунке 262 углы $\angle AOK$ и $\angle KOB$ – смежные.

Свойство смежных углов. Сумма смежных углов равна 180°.

Два угла называют *вертикальными*, если стороны одного из них являются дополняющими лучами сторон другого.

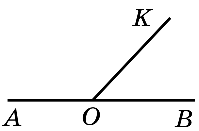


Рис. 262

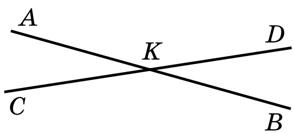


Рис. 263

На рисунке 263 $\angle AKC$ и $\angle DKB$ – вертикальные, углы $\angle AKD$ и $\angle CKB$ также вертикальные.

Свойство вертикальных углов. Вертикальные углы равны.

Перпендикулярные и параллельные прямые

Две прямые называют *взаимно перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

На рисунке 264 прямые a и b – перпендикулярные.

Две прямые на плоскости называют *параллельными*, если они не пересекаются.

На рисунке 265 прямые a и b – параллельны.

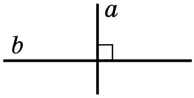


Рис. 264

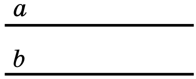


Рис. 265

Основное свойство параллельных прямых (аксиома параллельности прямых). Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей. Признаки и свойство параллельности прямых. Свойства углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей

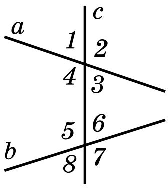


Рис. 266

Прямую c называют *секущей* для прямых a и b, если она пересекает их в двух точках (рис. 266).

Пары углов *4* и *5*; *3* и *6* называют *внутренними односторонними*; пары углов *4* и *6*; *3* и *5* – *внутренними накрест лежащими*; пары углов *1* и *5*; *2* и *6*; *3* и *7*; *4* и *8* – *соответственными углами*.

Признаки параллельности прямых.

1. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
2. Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
3. Если при пересечении двух прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.
4. Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

Свойство параллельных прямых. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу.

Свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей

1. Соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых секущей, равны.
2. Внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых секущей, равны.
3. Сумма внутренних односторонних углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, равна 180°.

Треугольник и его элементы

Треугольником называют фигуру, состоящую из трех точек, которые не лежат на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки (рис. 267).

Точки A, B, C – *вершины треугольника*; отрезки $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ – *стороны треугольника*; $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ – *углы треугольника*.

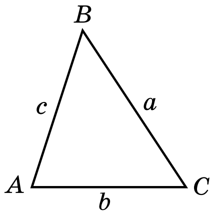


Рис. 267

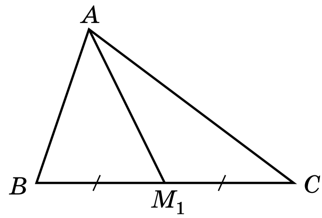


Рис. 268

Периметром треугольника называют сумму длин всех его сторон. $P_{ABC} = AB + BC + CA$.

Медианой треугольника называют отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

На рисунке 268 AM_1 – медиана треугольника ABC.

Биссектрисой треугольника называют отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны.

На рисунке 269 AL_1 – биссектриса треугольника ABC.

Высотой треугольника называют перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника на прямую, содержащую его противолежащую сторону.

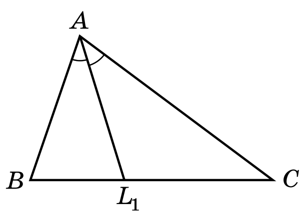


Рис. 269

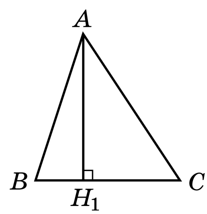


Рис. 270

На рисунке 270 AH_1 – высота $\triangle ABC$.

Сумма углов треугольника равна $180°$.

Неравенство треугольника. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) против большего угла лежит большая сторона.

Признаки равенства треугольников

Первый признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними). Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 271).

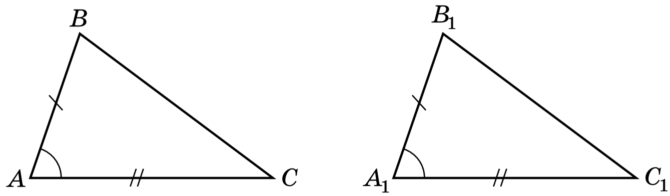


Рис. 271

Второй признак равенства треугольников (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 272).

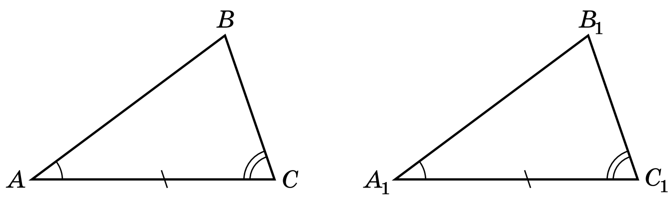


Рис. 272

Третий признак равенства треугольников (по трем сторонам). Если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого, то такие треугольники равны (рис. 273).

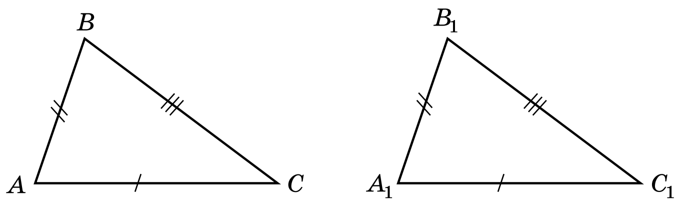


Рис. 273

Виды треугольников

Треугольник называют *равнобедренным*, если две его стороны равны.

На рисунке 274 $\triangle ABC$ – равнобедренный, AC и BC – его *боковые стороны*, AB – *основание*.

Свойство углов равнобедренного треугольника. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

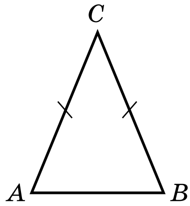


Рис. 274

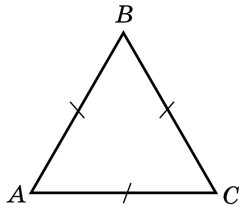


Рис. 275

Признак равнобедренного треугольника. Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Треугольник, все стороны которого равны, называют *равносторонним*.

На рисунке 275 $\triangle ABC$ – равносторонний.

Свойство углов равностороннего треугольника. Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

Признак равностороннего треугольника. Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний.

Треугольник, все стороны которого имеют разную длину, называют *разносторонним*.

Свойство биссектрисы равнобедренного треугольника. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

На рисунке 276 биссектриса AN, проведенная к основанию BC равнобедренного треугольника ABC, является его медианой и высотой.

В зависимости от углов рассматривают следующие виды треугольников:

- *остроугольные* (все углы которого – острые – рис. 277);
- *прямоугольные* (один из углов которых – прямой, а два других – острые – рис. 278);
- *тупоугольные* (один из углов которых – тупой, а два других – острые – рис. 279).

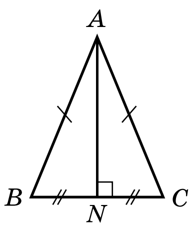


Рис. 276

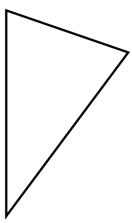


Рис. 277

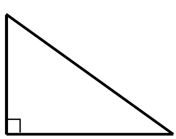


Рис. 278

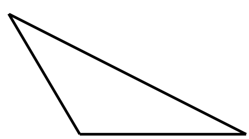


Рис. 279

Внешний угол треугольника

Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.

На рисунке 280 $\angle BAK$ – внешний угол треугольника ABC.

Свойство внешнего угла треугольника. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, то есть $\angle BAK = \angle B + \angle C$.

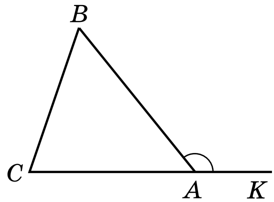


Рис. 280

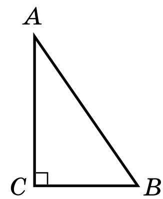


Рис. 281

Прямоугольные треугольники

Если $\angle C = 90°$, то $\triangle ABC$ – прямоугольный (рис. 281). AC и BC – *катеты прямоугольного треугольника*; AB – *гипотенуза прямоугольного треугольника*.

Свойства прямоугольных треугольников.

1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.
2. Гипотенуза больше любого из катетов.
3. Катет, противолежащий углу 30°, равен половине гипотенузы.
4. Если катет равен половине гипотенузы, то противолежащий ему угол равен 30°.
5. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Признаки равенства прямоугольных треугольников.

1. *По двум катетам.* Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.
2. *По катету и прилежащему острому углу.* Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны.
3. *По гипотенузе и острому углу.* Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

4. *По катету и противолежащему углу.* Если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему углу другого, то такие треугольники равны.
5. *По катету и гипотенузе.* Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника равны соответственно катету и гипотенузе другого, то такие треугольники равны.

Окружность и круг

Окружностью называют геометрическую фигуру, состоящую из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (рис. 282).

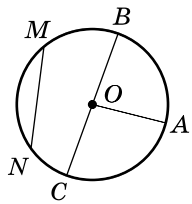


Рис. 282

Эту точку называют *центром окружности*; отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, называют *радиусом окружности*.

На рисунке 282 точка O – центр окружности, OA – радиус окружности.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют *хордой*. Хорду, проходящую через центр окружности, называют *диаметром*.

На рисунке 282 MN – хорда, BC – диаметр.

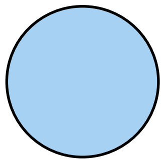


Рис. 283

Часть плоскости, ограниченную окружностью, вместе с самой окружностью называют *кругом* (рис. 283).

Центром, радиусом, диаметром, хордой круга называют соответственно центр, радиус, диаметр, хорду окружности, ограничивающей круг.

Свойства элементов окружности.

1. Диаметр окружности вдвое больше его радиуса.
2. Диаметр является наибольшей из хорд.
3. Диаметр из любой точки окружности виден под прямым углом.
4. Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
5. Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, которая не является диаметром, перпендикулярен этой хорде.

Касательной к окружности называют прямую, которая имеет с окружностью одну общую точку. Эту точку называют *точкой касания*.

На рисунке 284 прямая a – касательная к окружности, точка K – точка касания.

Свойство касательной. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. На рисунке 285 $AB = AC$.

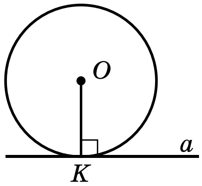


Рис. 284

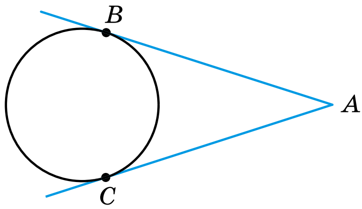


Рис. 285

Окружность, вписанная в треугольник

Окружность называют *вписанной в треугольник*, если она касается всех его сторон. При этом треугольник называют *описанным около окружности* (рис. 286).

В любой треугольник можно вписать окружность. Центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения биссектрис треугольника.

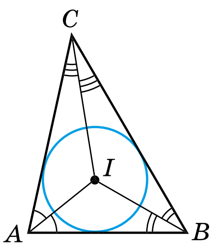


Рис. 286

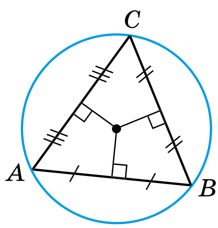


Рис. 287

Окружность, описанная около треугольника

Окружность называют *описанной около треугольника*, если она проходит через все вершины треугольника. При этом треугольник называют *вписанным в окружность* (рис. 287).

Около любого треугольника можно описать окружность. Центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

УПРАЖНЕНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАССА

1. Точка N принадлежит отрезку $AB = 7{,}6$ см. Найдите длины отрезков AN и NB, если:
1) AN втрое больше NB; 2) NB больше AN на 2,6 см.

2. Найдите градусные меры смежных углов, если они относятся как 4 : 5.

3. Найдите градусную меру каждого из углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, если сумма двух из них равна 162°.

4. Являются ли прямые a и b на рис. 288–290 параллельными?

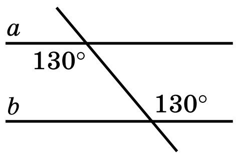


Рис. 288

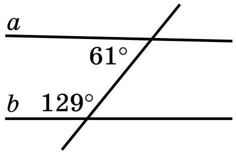


Рис. 289

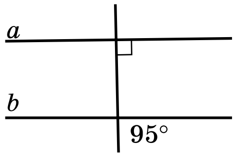


Рис. 290

5. Один из углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, равен 70°. Найдите остальные семь углов.

6. Одна из сторон треугольника – вдвое меньше второй и на 4 см меньше третьей. Найдите стороны этого треугольника, если его периметр равен 24 см.

7. Дано: $AB = CD$, $\angle ABD = \angle BDC$ (рис. 291). Доказать: $\triangle ABD = \triangle CDB$.

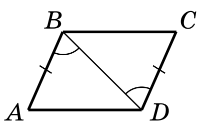


Рис. 291

8. Начертите разносторонний остроугольный треугольник ABC. Проведите в нем медиану AM, высоту AH, биссектрису AL.

9. Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 54°.

10. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Найдите $\angle A$, если $\angle C = 80°$, $\angle LBC = 35°$.

11. Внешние углы при двух вершинах треугольника соответственно равны 120° и 140°. Найдите градусную меру каждого из его внутренних углов.

12. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если один из них в 8 раз меньше второго.

13. На рисунке 292 точка O – центр окружности, $\angle CAO = 15°$. Найдите $\angle COB$.

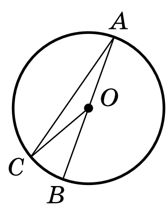


Рис. 292

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 1

16. 10 см, 12,5 см, 20 см, 22,5 см. **17.** 60°, 75°, 105°, 120°. **18.** 105°, 75°, 90°. **19.** 21 см, 9 см, 6 см. **22.** Да, если четырехугольник невыпуклый. **23.** Два решения. **24.** Два решения. **26.** 6 см. **28.** 70°, 70° и 40° или 70°, 55° и 55°. **29.** 10 см. **33.** $n = 4$. **49.** 14 см. **54.** 96°, 84°. **55.** 34 см. **56.** $BP = 4$ см, $PC = 8$ см. **62.** 28 см. **63.** 24 см. **64.** 40°. **65.** 110°. **66.** 7 см, 13 см. **67.** 9 см, 30 см. **68.** 1) 75°; 2) 105°. **69.** 1) 96°; 2) 84°. **72.** 9 см. **74.** Нет. **94.** 1) 55°; 2) 50°. **95.** 1) 30°; 2) 40°. **96.** 160°. **97.** 40°. **100.** 52 см. **101.** 60 см. **102.** 48 дм. **103.** 1) $DB = 4a$, $AB = 2a$; 2) $AK = \frac{m}{4}$, $CD = \frac{m}{2}$. **104.** $BD = 2b$, $OK = \frac{b}{2}$. **105.** 50 см. **106.** 40 см. **108.** 1) 60°; 2) 90°. **109.** У к а з а н и е. Постройте параллелограмм, одна из вершин которого точка B, две другие лежат на сторонах угла, а точка P является точкой пересечения диагоналей. **111.** Нет. **134.** 80° и 100°. **135.** 72° и 108°. **140.** 70° и 110°. **141.** 130° и 50°. **142.** 1) 60°, 120°; 2) $4a$ см. **143.** 1) 60°, 120°; 2) $4b$ см. **146.** 60 см. **148.** 10 см. **149.** 1) Да; 2) нет; 3) нет. **150.** Параллелограмм. **152.** У к а з а н и е. Рассмотрите $\triangle AMK$, где MK – диаметр окружности. **171.** 24 см. **172.** 4 см. **176.** $2b$ см. **177.** 9 см. **180.** $\angle A = 20°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$, $\angle D = 200°$. Невыпуклый. **181.** $AB = 15$ см, $AD = 40$ см. **183.** $65\frac{5}{11}$ мин. **197.** 1) Да; 2) нет. **198.** 1) Да; 2) нет. **199.** Нет. **207.** Равнобокая. **208.** 8 см. **209.** 36 см. **210.** 70° и 110°. **211.** 40° и 140°. **215.** 9 см и 5 см. **217.** 60° и 120°. **218.** 72° и 108°. **220.** 2 : 1. **221.** 2 : 1. **222.** У к а з а н и е. Пусть $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AB = d$. Через вершину C проведите $CM \parallel AB$, $M \in AD$. Тогда $MD = a - b$. $\triangle CMD$ можно построить. **224.** 20 см. **229.** В точке пересечения диагоналей четырехугольника. **236.** 108°. **237.** 116°. **238.** 120°, 60°. **239.** 30°. **240.** 80°. **242.** 40°. **244.** 40°, 70°, 70°, или 40°, 40°, 100°, или 140°, 20°, 20°. **245.** 50°, 65°, 65°, или 50°, 50°, 80°, или 130°, 25°, 25°. **246.** Окружность, диаметром которой является гипотенуза прямоугольного треугольника без ее концов. **248.** b и $a - b$. **250.** Да. **258.** 4 см. **259.** 20 дм. **262.** $5R$. **263.** $180° - \alpha$, $180° - \alpha$, $2\alpha - 180°$. **264.** $\frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\alpha}{4}$, $90° - \frac{\alpha}{4}$, или $180° - \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{4}$. **275.** $A_1A_2 = A_2A_3 = 12$ см, $B_1B_2 = B_2B_3 = 20$ см. **276.** $ON_2 = 42$ см, $OM_2 = 24$ см. **278.** У к а з а н и е. Проведите через точки E, F, D прямые, параллельные CG. **279.** У к а з а н и е. Проведите через точки M и D прямые, параллельные BN. **280.** 1 : 2. У к а з а н и е. Проведите через точку D прямую, параллельную BM. **282.** 10 см и 14 см. **297.** 40 см, 30 см, 50 см. **298.** 16 см, 36 см, 28 см. **299.** 12 см и 18 см или 12 см и 8 см.

300. 26 см. **301.** 20 см. **305.** $4a$ см. **306.** 5 см. **308.** 6 см. **309.** 12 см. **311.** 28 см. **312.** 1) $a - b$; 2) $3a - b$; 3) $a = 3b$. **313.** Нет. **328.** 21 см и 25,5 см. **329.** $BC = 4$ см, $AD = 20$ см. **330.** 7 см. **331.** 10 см. **332.** 3 см. **333.** 13 см. **334.** 3 см, 4 см, 3 см. **335.** 14 см и 30 см. **336.** 9 см. **337.** 44 см. **338.** 32 см. **340.** $4a$ см. **341.** 10 см. **347.** 60°, 70°, 110°, 120°. **354.** Нет. **355.** Указание. Докажите, что $ABNM$ – параллелограмм. **356.** Три. **359.** 4 см, 10 см. **365.** 24 см. **366.** 12 см, 16 см. **367.** $\frac{\alpha}{2}$ см. **368.** 46 см или 38 см. **373.** Все стороны по $\frac{m}{4}$ см. **374.** 100° и 80°. **375.** 1) 30°, 150°; 2) 15°. **381.** Да. **382.** Квадрат. **383.** $2d$ см. **388.** 80°, 100°. **390.** m см. **391.** 36 см. **392.** $BC = 5$ см, $CD = 5$ см. **393.** 19 см. **394.** 72° и 108°. **395.** Указание. Проведите через одну из вершин меньшего основания трапеции прямую, параллельную диагонали, до пересечения с большим основанием. Постройте треугольник, две стороны которого – диагонали трапеции, а третья – сумма оснований. **396.** 36 см. **400.** 2 см. **402.** 90°, 54°, 90°, 126°. **403.** Указание. Искомое геометрическое место точек – две дуги окружностей с центрами O_1 и O_2, из которых MN видно под углом 2α (рис. 293). **407.** 30°. **408.** 60°, 80°, 120°, 100°. **409.** 62°. **410.** $6a$ см. **421.** 10 см и 14 см. **422.** 36 см, 18 см. **424.** Квадрат, $P = 2d$ (см). **428.** 18 см, 16 см, 14 см. **429.** 12 см и 24 см. **430.** 6 см и 30 см. **431.** 5 : 2. **433.** $\left(a - \frac{c}{2}\right)$ см.

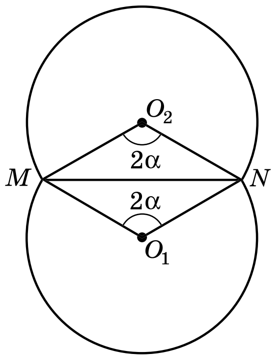


Рис. 293

Глава 2

443. $OB = 6$, $BD = 9$. **444.** $OA = 2{,}5$, $AC = 3{,}5$. **445.** 2 : 3. Указание. Проведите через точку P прямую, параллельную CM. **446.** 5 : 6. Указание. Проведите через точку D прямую, параллельную BM. **447.** 16 см. **448.** 3 : 4. **452.** 9. **461.** 1) 24 см, 27 см; 2) 35 см, 40 см, 45 см; 3) 14 см, 16 см, 18 см. **462.** 1) 10 см, 12 см; 2) 15 см, 18 см, 27 см; 3) 25 см, 30 см, 45 см. **464.** 4 см, 6 см, 8 см и 6 см, 9 см, 12 см. **465.** 12 см, 16 см, 20 см и 9 см, 12 см, 15 см. **469.** Нет. **492.** Да. **493.** Да. **496.** $AD = 28$ см, $BC = 16$ см. **497.** $BO = 2{,}5$ см, $OD = 5{,}5$ см. **498.** 1) Да; 2) да; 3) 3 см. **499.** $3\frac{1}{3}$ см. **500.** 24 см. **501.** $\triangle ABC \sim \triangle BDC$. **502.** $\triangle ABC \sim \triangle DBA$. **503.** 20 см, 35 см, 35 см или 42 см, 24 см, 24 см. **504.** 30 см, 48 см, 48 см или 35 см, 35 см, 56 см. **507.** 9 см. **508.** 3 см. **509.** $\frac{ab}{a+b}$ см. **510.** 7,5 см и 4,5 см. **511.** 5 см и 10 см. **512.** 6 см. **513.** 4,2 см. **516.** $2a$ см. **518.** Да; 15°. **532.** 24 см. **533.** 24 см. **534.** 30 см и 40 см. **535.** 12 см. **536.** 2 см. **537.** 3 см. **538.** 6 см. **539.** 12 см. **540.** 36 см. **542.** Да. **550.** 7 см. **551.** 9 см. **552.** $BL = 10$ см, $LC = 8$ см. **553.** 21 см. **554.** 90 см. **555.** 36 см. **556.** 10 см и 14 см. **557.** $AL = 12$ см, $LB = 8$ см. **558.** Нет. **559.** Указание. Докажите, что $\triangle CHB \sim \triangle AHC$. **569.** 15 см. **570.** 9 см. **571.** 9 м. **572.** 8 м. **573.** 42 м. **574.** 20 см. **575.** 16 см. **576.** 8 см. **577.** 6 см. **578.** 5 см. **579.** 26 см. **580.** 26 см. **582.** 10 см. Указание. Используйте формулу $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$ из задачи 1, § 17. **586.** 12 см, 16 см, 24 см. **587.** $\frac{a^2 - b^2}{4}$. **588.** 1) Нет; 2) нет. **592.** 9 : 4. Указание. Проведите через точку E прямую, параллельную AD. **595.** 1) 52 см; 2) 65 см. **596.** Да. **604.** 15 см. **607.** 30 см. **612.** $BM = 20$ см, $P = 80$ см. **613.** 70 см. **614.** 16 см и 12 см. **615.** 13 см и 5 см. **618.** 42 см. **619.** 14 см и 16 см. **620.** $\angle ACD < \angle BCD$. **621.** 36 см, 36 см, 18 см. **625.** $AK = 5$ см, $AP = 20$ см, $KP = 15$ см. **626.** $8\frac{2}{3}$ см. **627.** $AB = 6$ см, $BC = 7{,}5$ см.

Глава 3

652. $\sqrt{11}$ см или $\sqrt{61}$ см. **653.** $\sqrt{21}$ см или $\sqrt{29}$ см. **654.** 20; 16; $\sqrt{14}$; 13. **655.** 6; 10. **656.** 112 см. **657.** 80 см. **658.** 24 см. **659.** 30 см. **660.** 28 см. **661.** 11 см. **662.** $\sqrt{26}$ см. **663.** $\sqrt{50}$ см. **664.** 3 см и $\sqrt{73}$ см. **665.** $\sqrt{1850}$ см $= 5\sqrt{74}$ см. **666.** $\sqrt{468}$ см $= 6\sqrt{13}$ см. **669.** 90 см. **670.** 84 см. **671.** 30 см. **672.** 5 см. **674.** 162 см. **675.** 80 см. **676.** 6 см. **677.** 40 см. **678.** 60°; 60°; 120°; 120°. **682.** Да. **695.** 17 см или 3 см. **696.** 21 см или 9 см. **697.** 30°. **698.** 45°. **699.** 12 см. **700.** 10 см. **701.** 2 см; 10 см; $\sqrt{96}$ см $= 4\sqrt{6}$ см. **702.** 5 см; 7 см; $\sqrt{24}$ см $= 2\sqrt{6}$ см. **703.** 6,6 см; 8,4 см. **704.** 3,4 см; 21,6 см. **705.** 90°. **706.** 10 см. **707.** 4 см. **709.** 1) 90°; 30°; 60°; 2) 90°; 45°; 45°. **710.** 11 ярдов. **731.** $2a(1 + \operatorname{tg}\beta)$. **732.** $\frac{b^2}{\operatorname{tg}\alpha}$. **733.** 15,63 см. **734.** 12,43 см. **735.** $c\sin\alpha\cos\alpha$. **736.** $\frac{h}{\sin\beta\cos\beta}$. **737.** 39° и 51°. **738.** 61° и 29°. **739.** 1) $AB = 10$ см, $BC = 8$ см. Указание. Так как $\cos\angle B = \frac{4}{5}$, то $\frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$. Обозначьте $BC = 4x$; $AB = 5x$; 2) $AC = 12$ см; $BC = 5$ см. **740.** 1) $AB = 5$ см, $BC = 3$ см; 2) $AC = 16$ см, $BC = 30$ см. **741.** $\frac{a - b}{\cos\alpha}$. **742.** $BC = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$, $CK = \frac{b\cos\gamma}{\operatorname{tg}\beta}$, $BK = \frac{b\sin\gamma}{\operatorname{tg}\beta}$. **743.** $BC = \frac{a}{\sin\alpha}$; $AC = \frac{a\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}$;

$AB = \dfrac{a}{\sin\alpha\cos\beta}$. **744.** 41°36′. **745.** 79°36′ и 100°24′. **746.** $m\cos\alpha\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.
747. $\dfrac{r}{\cos\beta\,\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}}$. **748.** $10(\sqrt{2}-1)$ см. **749.** $4\sqrt{3}$ см. **750.** $5(\sqrt{3}+1)$ см.
751. $4(3-\sqrt{3})$ см. **753.** 48 см. **764.** 1) $AB = 8$ см, $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$; 2) $AC = 17$ дм, $\angle B \approx 28°4'$, $\angle A \approx 61°56'$; 3) $AB = 3\sqrt{10}$ см $\approx 9{,}49$ см, $\angle A \approx 71°34'$, $\angle B \approx 18°26'$; 4) $AB = 25m$ дм, $\angle A \approx 73°44'$, $\angle B \approx 16°16'$. **765.** 1) $AB = 4$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$; 2) $AB = 10$ см, $\angle A \approx 36°52'$, $\angle B \approx 53°8'$; 3) $AB = \sqrt{29}$ дм $\approx 5{,}39$ дм, $\angle A \approx 68°12'$, $\angle B \approx 21°48'$; 4) $AB = 41k$ дм, $\angle A \approx 77°19'$, $\angle B \approx 12°41'$. **766.** 1) $BC = 3$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$; 2) $AC = 63$ дм, $\angle A \approx 14°15'$, $\angle B \approx 75°45'$; 3) $BC = \sqrt{33}$ см $\approx$ $\approx 5{,}74$ см, $\angle A \approx 55°9'$, $\angle B \approx 34°51'$; 4) $AC = 12a$ см, $\angle A \approx 22°37'$, $\angle B \approx 67°23'$. **767.** 1) $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle A = \angle B = 45°$; 2) $AC = 35$ дм, $\angle A \approx 18°55'$, $\angle B \approx 71°5'$; 3) $BC = \sqrt{51}$ см $\approx 7{,}14$ см, $\angle A \approx 45°34'$, $\angle B \approx 44°26'$; 4) $AC = 11b$ дм, $\angle A \approx 79°37'$, $\angle B \approx 10°23'$. **768.** 62°32′. **769.** $\alpha \approx 1°9'$. **770.** ≈ 4,29 м. **771.** $x = \dfrac{l}{2}$ м. **773.** 36 см. **774.** 42 см. **775.** 18 прямых; 28 прямых. **782.** 52 см. **783.** 6 см; $\sqrt{244}$ см $=$ $= 2\sqrt{61}$ см. **784.** 72 см. **785.** 32 см. **786.** 78 см. **787.** 105°. **788.** 90°. **789.** 120 см. **793.** 7 см или 1 см. **794.** 26 см; 30 см; 24 см. **795.** 3,2 см. **799.** $4R(\sin\alpha + \cos\alpha)$. **800.** 31,11 см. **801.** $CK = b\sin\alpha$; $KB = b\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha$. **802.** 50 см. **803.** $r\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}}\right)$. **804.** $\sqrt{3}$ см; $2\sqrt{43}$ см; $2\sqrt{31}$ см. **805.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ см или $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ см. **809.** $\dfrac{a\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}$.

Глава 4

822. 140°. **823.** 120°. **826.** Нет. **827.** Нет. **828.** 72°, 96°, 120°, 120°, 144°, 168°. **829.** 88°, 98°, 108°, 118°, 128°. **830.** 1) Да, 8 сторон, 20 диагоналей; 2) нет. **831.** 1) Нет; 2) да, 9 вершин, 27 диагоналей. **832.** 12. **833.** Четырехугольник. **834.** Да, это пятиугольник. **835.** 12. **836.** 15. **837.** Периметры равны. **838.** $\dfrac{P}{4}$ см. **855.** 60 см^2. **856.** 120 см^2. **857.** 1) 32 см^2; 2) $\dfrac{1}{2}d^2$. **858.** 16 см^2. **859.** 6 см. **860.** 10 см. **861.** 3) Увеличится в 16 раз; 4) увеличится в 10 раз; 5) увеличится в 6 раз. **863.** Нет. **864.** 1) Да; 2) нет; 3) да. **865.** 8 см. **866.** 10 дм. **867.** 208. **868.** $4r^2$. **869.** 9 см и 12 см. **870.** 20 см. **871.** 24 см^2. **872.** 84 см^2. **873.** 108 см^2. **874.** 168 см^2. **876.** $\sqrt{5}$. **877.** 9. **878.** Да. **881.** 8.

892. 2,4 см. **893.** 10 см. **894.** 60 см^2. **895.** 8 см^2. **896.** 6 см. **897.** 15 см. **898.** $\frac{P^2}{32}$ см^2. **899.** 72 см^2. **900.** 12 см^2. **901.** 96 см^2. **902.** 1) Нет; 2), 3) да. **903.** 8 см или 4,5 см. **904.** На 3 вершины. **905.** 15 см^2. **907.** 18. **918.** 16 см^2. **919.** 36 см^2. **920.** 1) 40 см^2; 2) $\frac{d_1d_2}{2}$. **921.** 36 см^2. **922.** 15 см^2; 30 см^2. **923.** 8 см. **924.** 12 см. **925.** 4 см^2 и 8 см^2. **926.** 5 см^2 и 15 см^2. **928.** 7,5 см^2. **929.** 40 см^2. **930.** 4,8 см. **931.** 6,72 см. **932.** 54 см^2. **933.** 60 см^2. **934.** 1) и 2) Да; 3) нет. **935.** 1 : 2. **936.** 1 : 4. **938.** 128 см^2. **940.** 25 шагов. **955.** 64 см^2. **956.** 45 см^2. **957.** 3 см и 9 см. **958.** 5 см и 20 см. **959.** $\frac{(a+b)c}{4}$. **960.** 54 см^2. **961.** 24 см^2. **962.** 40 см^2. **963.** 80 см^2. **964.** 1080 см^2. **965.** 156 см^2. **966.** 30 см^2. **967.** 62,5 см^2. **968.** 181,5 см^2. **969.** h^2 см^2. **970.** 49 см^2. **971.** 18 см^2. **975.** 50 см. Указание. Надо рассмотреть два случая расположения квадратов. **978.** По 108°. **979.** 20. **980.** 8. **981.** Увеличится на 360°. **982.** $k = 2$. **986.** 1) $\frac{P^2}{16}$ см^2; 2) $4\sqrt{S}$ см; 3) 4. **988.** 144. **989.** 36 см^2 или 45 см^2. **990.** mn. **993.** 10 см^2. **994.** 1) Да; 2) нет. **995.** Квадрат, в 2 раза. **996.** 16 см^2. **997.** 320 см^2. **999.** 6 см. **1000.** 6 см^2. **1006.** $\frac{3a^2}{2}$ см^2. **1007.** $\frac{3b^2}{2}$ см^2. **1008.** В 3 раза. **1009.** 80 см^2.

Задачи повышенной сложности

1012. 60°; 120°. **1014.** Ромб. **1015.** 120°. **1016.** 90°. **1018.** Каждая из диагоналей равна $a - b$. **1020.** $BP = DM$. **1022.** 40 см. **1023.** 140°, 40°, 140°. **1024.** $\frac{a-b}{2}$. **1025.** 53°. **1026.** A, H_3, H, H_2; B, H_3, H, H_1; C, H_1, H, H_2; A, H_3, H_1, C; A, H_2, H_1, B; B, H_3, H_2, C. **1028.** Указание. Доказать, что $BN \cdot DM = CB \cdot CD$. **1029.** $\sqrt{ab}$. **1030.** 1) 21 см, или 28 см, или 24 см; 2) 21 см или 27 см; 3) 21 см. Указание. Пусть AB – наибольшая сторона треугольника. Прямая, которая отсекает треугольник, подобный данному, может пересекать или сторону BC, или сторону AC, причем следует отдельно рассмотреть случай, когда эта прямая параллельна одной из сторон треугольника. **1031.** Необходимо построить окружность, которая проходит через точки B и C и касается AB в точке B. Эта окружность пересечет AC в искомой точке D. **1032.** 12,5 см. Указание. Через вершину C проведите прямую, параллельную BD и пересекающую продолжение AD в точке M, тогда $\triangle ACM$ – прямоугольный. **1034.** $2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$. Указание. Пусть MA и MB – перпендикуляры, проведенные к прямым, содержащим стороны угла, а C – точка пересечения AM и OB. Рассмотрите $\triangle BMC$ и $\triangle OAC$. **1037.** $12m$. **1038.** Докажите, что $(c+h)^2=(a+b)^2+h^2$. **1039.** $\frac{ac}{b}$. **1040.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Указание. Рассмотрите равнобедренный прямоугольный треугольник ABD ($\angle D = 90°$) и прямоугольный треугольник BDC ($\angle D = 90°$), у которого $\angle DBC = 30°$. Точки A, D, C лежат на одной прямой. Тогда $\angle ABC = 75°$. **1041.** 1) Да; 2) нет. **1042.** 6. **1045.** В 3 раза. **1047.** 54 см^2. **1048.** $\frac{5}{9}S$. **1049.** $(m+n)d$. **1050.** cd. Указание. Докажите, что $S_{KCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. **1051.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ «ДОМАШНЯЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА»

№ задания / № работы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Б	В	В	А	Г	Б	Г	В	В	Б	Б	Г
2	Б	В	Б	Г	Б	А	В	Г	В	Б	А	Г
3	Б	Г	В	А	В	Б	Г	Б	А	В	В	А
4	В	Б	А	Б	Г	В	Б	Б	Г	В	А	В
5	Б	В	А	Г	В	Г	Б	А	В	Г	Б	В

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ПРИЛОЖЕНИЯ 1 «ГОТОВИМСЯ К ВНО»

Тема	Четырехугольники			Подобие треугольников		Решение прямоугольных треугольников		
№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	Б	В	13	Б	15	Д	42	18
Тема	Многоугольники. Площади многоугольников							
№ задачи	9	10	11	12	13			
Ответ	Д	24	128	4	864			

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ НА ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАССА

1. 1) NB = 1,9 см; AN = 5,7 см; 2) AN = 2,5 см, NB = 5,1 см. **2.** 80°, 100°. **3.** 81°, 99°, 81°, 99°. **4.** На рис. 288 – да, на рис. 289, 290 – нет. **5.** Три угла по 70°, четыре – по 110°. **6.** 5 см, 9 см, 10 см. **9.** 72°. **10.** 30°. **11.** 60°, 40°, 80°. **12.** 10°, 80°. **13.** 30°.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ