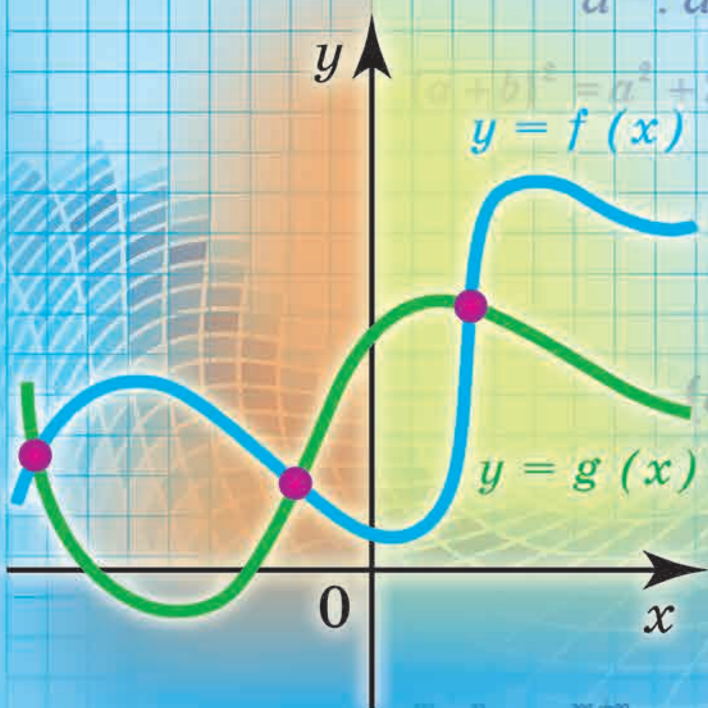
A. H. Merzljak
V. B. Polonszkij
M. SZ. Jakir

7

ALGEBRA



A. H. Merzljak,
V. B. Polonszkij,
M. Sz. Jakir

ALGEBRA

Tankönyv az általános oktatási
rendszerű tanintézetek
7. osztálya számára

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

Львів
Видавництво „Світ”
2015

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721
М 52

Перекладено за виданням:
Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2015

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.07.2015 № 777)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.
М 52 Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів з навч. угорською мовою / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. І. Й. Берегі, А. А. Буркуш. – Львів : Світ, 2015. – 256 с. : іл.
ISBN 978-966-603-971-5

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721

ISBN 978-966-603-971-5 (угор.)
ISBN 978-966-474-254-9 (укр.)

A szerzőktől

A TANULÓKHOZ

KEDVES HETEDIKESEK!

Egy új tantárgyat kezdtek el tanulni – mégpedig az algebrát.

Az algebra egy nagyon régi és érett tudomány. Meg kell ismerkednetek az algebra alapjaival. Nagyon fontos tudni ezt a tantárgyat, mert nincs a jelenlegi tudományágak között olyan, amelyikben ne alkalmaznánk az algebra vívmányait: a fizikában és kémiában, a csillagászatban és biológiában, a földrajzban és közgazdaságtanban. A nyelvészek és a történészek is gyakran használják az algebra eszközeit a munkájuk során.

Az algebra nemcsak nagyon hasznos, de érdekes tantárgy is, ami fejleszti a logikai gondolkodásunkat. Szerintünk erről ti is hamarosan meggyőződtök, ha a kezetekbe veszitek ezt a tankönyvet. Ismerkedjetek meg a könyv felépítésével.

A tankönyv 4 paragrafusra van felosztva, amelyek pontokra vannak bontva. A pontok az elméleti rész ismertetésével kezdődnek. A legfontosabb tudnivalók **félkövér** és *dőlt* betűkkel vannak feltüntetve.

Az elméleti anyag ismertetése feladatok megoldásával fejeződik be. A könyvben a feladatok megoldásának csak az egyik lehetséges módját mutatjuk be.

Mindegyik pont végén találtok majd példákat. Azonban ezeknek a példáknak a megoldásához, csak azután fogjatok hozzá, ha már megtanultátok az elméleti tudnivalókat. A feladatok könnyű, közepesen nehéz és nehéz feladatokat tartalmaznak. Az utóbbiakat csillaggal (*) jelöltük.

Minden pont végén található egy rovat *Gyakoroljuk a nem hagyományos módszereket* címmel. Itt olyan feladatok vannak, amelyek megoldásához nem algebrai ismeretekre, hanem csak józan észre, találékonyságra, csavaros észjárásra lesz szükségetek. E feladatokkal problémamegoldó képességetek fejlesztését tűzzük ki célul. A feladatok nemcsak a matematikában és a tanulásban lesznek hasznotokra. Segítségükkel megtanultok váratlan és nem hagyományos döntéseket hozni.

A *Ha elkészültél a házi feladattal* című rovatban a matematika történelméről olvashattok.

Sok sikert kívánunk!

A TANÁROKNAK

TISZTELT KOLLÉGÁK!

Az általános oktatási rendszerű tanintézetek 5–9. osztályosok számára készült matematika tantervben a következőket olvashatjuk: „A tananyag tartalma a megfelelő tantárgyak témái és az elsajátításukhoz szükséges óraszám meghatározása alapján strukturált. A tartalom és a tanulmányi idő ezen felosztása tájékoztató jellegű. A tanároknak és a tankönyvek szerzőinek jogukban áll módosítani azt az elfogadott módszertani koncepciónak megfelelően...”

Erre való tekintettel célszerűnek látjuk a tantárgy tanulását az *Egyváltozós lineáris egyenletek* című témával kezdeni. Ez lényegében lehetőséget ad nekünk arra, hogy az *Egész kifejezések* témában változatosabbá tegyük a módszertani anyagokat.

Bízunk benne, hogy ez a tankönyv megbízható segítőtársuk lesz az Önök nehéz és nemes munkájában. Nagy örömünkre szolgál majd, ha tetszeni fog Önöknek.

Alkotói ihletet és türelmet kívánunk Önöknek.

Egyezményes jelek

n° az elemi és közepes tanulmányi eredményi szinteknek megfelelő feladatok;

$n^{\bullet}$ a megfelelő tanulmányi eredményi szintnek megfelelő feladatok;

$n^{\bullet\bullet}$ a magas tanulmányi eredményi szintnek megfelelő feladatok;

n^{*} matematikai szakköröknek és fakultatívoknak megfelelő feladatok;

▲ a tétel bizonyításának befejezése;

● a feladat megoldásának befejezése;

 a számítógép segítségével megoldható feladatok jelölése;

 *Ha elkészültél a házi feladattal* c. rovat.

Zöld színnel a házi feladatra ajánlott feladatokat jelöltük, kékkel pedig azokat, amelyeket a tanár belátása szerint (az osztály tanulói egyéni sajátosságainak figyelembevételével) szóbelileg is meg lehet oldani.

1. Bevezetés az algebrába

Jóllehet az algebra új tantárgy a számotokra, azonban a matematikaórákon már megismerkedtetek ennek a bölcs tudománynak az alapjaival. Különböző képletek leírásakor, egyenletek felállításakor a számokat betűkkel kellett helyettesítenetek, így **betűkifejezéseket** alkottatok.

Például az a^2, $(x + y)^2$, $2(a + b)$ $\frac{x-y+z}{2}$, abc, $\frac{m}{n}$ matematikai felírásokat betűkifejezéseknek nevezzük.

Tudnotok kell, hogy nem minden betűt, számot, különböző műveleti jeleket és zárójeleket tartalmazó kifejezést nevezünk betűkifejezésnek. Például a $2x$ +) – (kifejezésnek nincs semmi értelme.

Azt a kifejezést, amely egyetlen betűből áll – betűkifejezésnek tekinthetjük.

Megvizsgáljuk a $2\,(a + b)$ kifejezést. Már tudjátok, hogy ennek a kifejezésnek a segítségével ki tudjuk számítani az a és b oldalú téglalap kerületét. Például, ha az a és b betűt a $2\,(a + b)$ kifejezésben 3-mal és 4-gyel helyettesítjük, akkor a $2\,(3 + 4)$ **számkifejezést** kapjuk. Ebben az esetben a téglalap kerülete 14 egység lesz. A 14-et a $2\,(3 + 4)$ **számkifejezés értékének** nevezzük.

Az a és b betűk helyére bármilyen számot behelyettesíthetünk. Természetesen a változó különböző értéke mellett a változókat tartalmazó kifejezésnek az értéke is különböző lesz.

Mivel a betűket bármilyen számmal helyettesíthetjük, ezért a kifejezésekben a betűket **változóknak** nevezzük, magát a betűkifejezést pedig **változókat tartalmazó kifejezésnek** (ha a kifejezés csak egy változót tartalmaz, akkor változót tartalmazó kifejezésnek nevezzük).

Megvizsgáljuk a $2x + 3$ kifejezést. Ha az x változót $\frac{1}{2}$-re cseréljük, akkor a $2 \cdot \frac{1}{2} + 3$ számkifejezést kapjuk. Azt mondjuk, hogy az $\frac{1}{2}$ az x **változó értéke**, a 4 pedig a $2x + 3$ kifejezés értéke, ha $x = \frac{1}{2}$.

A számkifejezések és a változókat tartalmazó kifejezések együtt alkotják az **algebrai kifejezéseket**.

Algebrai kifejezések

Számkifejezések

Változókat tartalmazó kifejezések (betűkifejezések)

Megvizsgáljuk az algebrai kifejezések két csoportját:

I. csoport	**II. csoport**
$x - y^3$	$\frac{1}{x}$
$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{(a+b)^2}$
$\frac{1}{3}b^2 + 5a$	$\frac{m}{n+3}$
$\frac{mn}{7}$	$5 - \frac{x}{y^2}$.

Mindkét csoport kifejezései a következő műveleteket tartalmazzák: összeadást, kivonást, szorzást, hatványozást és osztást. Az első csoportban nem találtok olyan kifejezést, amelyikben előfordulna változóval történő osztás. Ezért az első csoport kifejezéseit **egész kifejezéseknek** nevezzük. A második csoport kifejezései nem egész kifejezések.

A 7. osztályban az egész kifejezésekről fogunk tanulni.

PÉLDA Az a, b és m változók értékei olyanok, hogy $a - b = 4$, $m = -5$. Mennyivel egyenlő a $7bm - 7am$ kifejezés értéke?

Megoldás: A szorzás széttagolási és felcserélhetőségi tulajdonságának felhasználásával a következőt kapjuk:

$$7bm - 7am = 7m(b - a) = 7 \cdot (-5) \cdot (-4) = 7 \cdot 20 = 140.$$

Felelet: 140.

1. Hogyan nevezhetjük még másképpen a betűkifejezéseket?
2. Mit nevezünk algebrai kifejezéseknek?
3. Mely algebrai kifejezéseket nevezzük egész kifejezéseknek?

GYAKORLATOK

1.° Határozzátok meg a számkifejezések értékét:

1) 0,72 + 3,018; 3) $1{,}8 \cdot 0{,}3$; 5) 72 : 0,09;
2) 4 – 2,8; 4) 5,4 : 6; 6) 9 : 4.

2.° Mennyi a kifejezés értéke?

1) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$; 3) $\frac{7}{16}\cdot\frac{8}{35}$; 5) $\frac{46}{75}:\frac{23}{45}$; 7) $10:\frac{5}{11}$;
2) $\frac{3}{7}-\frac{2}{9}$; 4) $\frac{4}{9}\cdot 18$; 6) $\frac{2}{3}:4$; 8) $2\frac{3}{8}+4\frac{1}{6}$;

9) $6-1\frac{3}{5}$; 10) $4\frac{2}{7}-1\frac{4}{9}$; 11) $8\frac{3}{4}\cdot 1\frac{3}{14}$; 12) $1\frac{3}{5}:5\frac{1}{3}$?

3.° Számítsátok ki a kifejezések értékét:

1) 3,8 + (–2,5); 6) 0 – 7,8; 11) –48 · 0;
2) –4,8 + 4,8; 7) 0 – (–2,4); 12) –3,3 : (–11);
3) –1 + 0,39; 8) –4,5 – 2,5; 13) 3,2 : (–4);
4) 9,4 – (–7,8); 9) 8 · (–0,4); 14) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;
5) 4,2 – 5,7; 10) –1,2 · (–0,5); 15) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$.

4.° Mennyi a kifejezések értéke:

1) $18\frac{5}{12}-\frac{7}{12}\cdot 1\frac{19}{21}-\frac{17}{72}\cdot\frac{2}{3}$; 4) $\left(-\frac{7}{18}+\frac{11}{12}\right):\left(-\frac{19}{48}\right)$;
2) $\left(6\frac{3}{4}-5\frac{1}{8}:1\frac{9}{32}\right)\cdot\frac{5}{11}$; 5) $\left(-3\frac{1}{12}-2\frac{1}{15}\right):\left(-5\frac{3}{20}\right)$?
3) $(-1,42-(-3,22)):(-0,4)+(-6)\cdot(-0,7)$;

5.° Számítsátok ki a számkifejezések értékét:

1) $14\frac{7}{15}-3\frac{3}{23}\cdot\frac{23}{27}-1\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}$; 3) $(-3,25-2,75):(-0,6)+0,8\cdot(-7)$;
2) $\left(5\frac{8}{9}:1\frac{17}{36}+1\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{5}{21}$; 4) $\left(-1\frac{3}{8}-2\frac{5}{12}\right):5\frac{5}{12}$.

6.° Írjátok le számkifejezés alakjában, és határozzátok meg az értékét:

1) –12 és 8 összegének és 0,5-nek a szorzata;
2) –12 és 8 szorzatának és 0,5-nek az összege;
3) –1,6 és –1,2 összegének és különbségének a hányadosa;
4) –10 és 6 összegének a négyzete;
5) –10 és 6 négyzeteinek az összege.

7.° Írjátok le számkifejezés alakjában, és határozzátok meg az értékét:

1) $\frac{4}{9}$ és $-\frac{5}{6}$ összegének és $-\frac{14}{27}$-nek a hányadosa;
2) –1,5 és 4 szorzatának és 2-nek a különbsége;
3) –1,9 és 0,9 összegének és különbségének a szorzata;
4) 6 és 8 különbségének a köbe.

8.° Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $2x - 3$, ha $x = 4$; 0; –3;
2) $\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b$, ha $a = -6$, $b = 16$;
3) $3m - 5n + 3k$, ha $m = -7$, $n = 1{,}4$, $k = -0{,}1$.

9.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $0{,}4y + 1$, ha $y = -0{,}5$; 8; –10;
2) $\frac{2}{7}c-0{,}2d$, ha $c = -28$, $d = 15$.

10.° Melyik egész kifejezés az alábbiak közül:

1) $7a + 0{,}3$; 3) $\frac{a+b}{c}$; 5) $\frac{3m}{5} + \frac{5}{3m}$;

2) $5x\left(y - \frac{1}{3}\right)$; 4) $\frac{a+b}{4}$; 6) $9x - 5y + \frac{1}{z}$?

11.° Az összeg, különbség, szorzat, hányados kifejezések felhasználásával olvassátok el az alábbi algebrai kifejezéseket, és válasszátok ki közülük az egész kifejezéseket:

1) $a - (b + c)$; 4) $2m - 10$; 7) $ac + bc$;

2) $a + bc$; 5) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$; 8) $\frac{a}{b+4}$;

3) $x - \frac{y}{z}$; 6) $(a + b)\,c$; 9) $(a - b)\,(c + d)$.

12.° Írjátok le kifejezések alakjában:
1) az a szám ellentettjét;
2) az a szám reciprok értékét;
3) az x és y számok összegét;
4) az x és y számok összegének ellentettjét;
5) az x és y számok összegének reciprok értékét;
6) az a számnak és az a szám négyzetének az összegét;
7) az a szám és a b szám ellentettjének a hányadosát;
8) az a és b számok összegének és a c szám ellentettjének a szorzatát;
9) az m és n számok szorzatának és p és q számok hányadosának a különbségét.

13.° A ceruza x, a füzet pedig y hrivnyába kerül. Írd fel változókat tartalmazó kifejezések alakjában az alábbiakat:
1) mennyibe kerül 5 ceruza és 7 füzet;
2) mennyivel kell többet fizetni a darab füzetért, mint b darab ceruzáért.

14.° A munkás fizetéskor egy 100 hrivnyás, a darab 50 hrivnyás és b darab 20 hrivnyás bankjegyet kapott. Írd fel kifejezés alakjában, hogy mennyi volt a munkás fizetése.

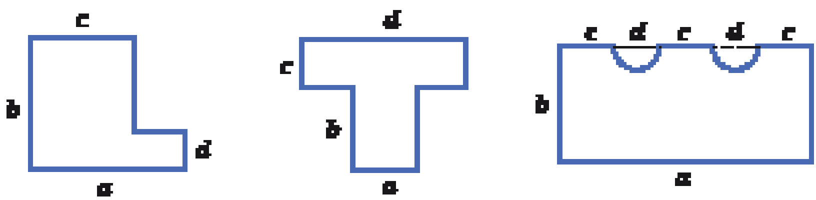
15.° Két, egymástól 300 km-re lévő városból, egyszerre indul el egymással szemben két gépkocsi. Az egyik sebessége m km/ó, a másiké pedig n km/ó. Hány óra múlva találkozik egymással a két gépkocsi? Írjátok fel változót tartalmazó algebrai kifejezésként.

16.° Két, egymástól s km-re lévő városból, egyidejűleg és egy irányban egy gyalogos és egy kerékpáros indult el. A gyalogos a km/ó, a kerékpáros b km/ó sebességgel haladt. Írjátok fel változót tartalmazó kifejezés formájában, hány óra múlva éri utol a kerékpáros a gyalogost. Számítsátok ki a kapott kifejezés értékét, ha $a = 4$, $b = 12$ és $s = 12$.

17.• Adjuk meg algebrai kifejezéseket használva:
1) az a és b számok különbségének és összegének háromszoros szorzatát;
2) három egymást követő természetes szám összegét, ha a legkisebb egyenlő n-nel;
3) három egymást követő páros szám szorzatát, ha a legnagyobb egyenlő $2k$-val;
4) azt a számot, amely a ezresből, b százasból és c egyesből áll;
5) fejezzétek ki az x méter y centimétert centiméterben;
6) fejezzétek ki az m óra n perc p másodpercet másodpercben.

18.• Adjuk meg algebrai kifejezéseket használva:
1) négy egymást követő természetes szám szorzatát, amelyek közül a legnagyobb x;
2) két egymást követő páratlan természetes szám szorzatának és közülük a kisebbikneka különbségét, ha a nagyobbik szám $2k + 1$;
3) fezezzétek ki a tonna b mázsát kilogrammban.

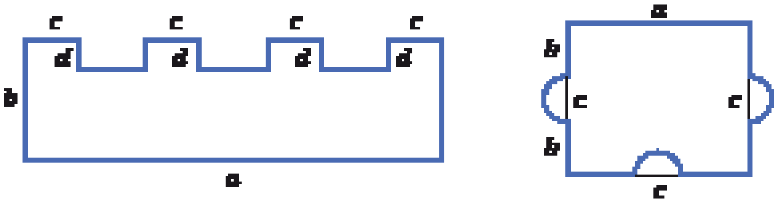
19.•• Állítsatok össze kifejezést a kék vonallal határolt alakzatok kerületének és területének kiszámítására (1. ábra).



a *b* *c*

1. ábra

20.•• Állítsatok össze kifejezésta kék vonallal határolt alakzatok kerületének és területének kiszámítására (2. ábra).



a *b*

2. ábra

21.$^{\bullet\bullet}$ Az a és b változók értékei olyanok, hogy $a + b = -8$, $c = 4$. Mennyivel egyenlő az alábbi kifejezések értéke:
1) $a + b - c$; 2) $0{,}5\,(a + b) + c$; 3) $3ac + 3bc$?

22.$^{\bullet\bullet}$ Az m és n változó értékei olyanok, hogy $m - n = 5$, $k = -2$. Mennyivel egyenlő az alábbi kifejezések értéke:
1) $(n - m)\,k$; 2) $2m - 2n + 3k$?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

23. (*Ukrán folklórból származó feladat.*) A molnár a megőrölt gabona $\frac{1}{10}$-ét kapja fizetségül. Hány pud gabonát vitt a malomba a gazda, ha 99 pudot vitt haza?

24. Az étkezdébe káposztát, sárgarépát és burgonyát szállítottak. Káposztából 64 kg-ot, a sárgarépából a káposzta tömegének $\frac{5}{8}$-át, a burgonyából pedig a sárgarépa 180%-át. Hány kilogramm zöldséget szállítottak az étkezdébe összesen?

25. Ismert, hogy az a és b természetes számok, az $\frac{a}{b}$ pedig valódi tört. Állíthatjuk-e, hogy:
1) $a - b > 0$; 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 3) $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

26. Bizonyítsátok be, hogy:
1) a $3x + 1 = 21 - x$ egyenlet gyöke 5;
2) a -2 nem gyöke az $x\,(x + 4) = 4$ egyenletnek.

27. Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $0{,}3x = 9$; 2) $-2x = 3$; 3) $15x = 0$.

28. Bontsátok fel a zárójeleket:
1) $2\,(x - 3y + 4z)$; 2) $-0{,}4\,(-5 + 1{,}5y)$.

29. Vonjátok össze az egynemű tagokat:
1) $4a + 9a - 18a + a$; 2) $1{,}2a - a + b - 2{,}1b$.

30. Bontsátok fel a zárójeleket, és vonjátok össze az egynemű tagokat:
1) $(x + 3{,}2) - (x + 4{,}5)$; 2) $1{,}4\,(a - 2) - (6 - 2a)$.

31. Határozzátok meg az egyenlet gyökét:
1) $2x - 7 = x + 4$; 2) $-0{,}7\,(5 - x) = -4{,}9$.

Ismételjétek meg a 27. és 28. pontot a 241. és 242. oldalon!

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

32. Adva van 12 természetes szám. Bizonyítsátok be, hogy mindig ki tudunk közülük választani kettőt úgy, hogy a különbségük osztható legyen 11-gyel.

Rövid könyv a helyrerakásról és az összevonásról

Az új témához készülve megismételtétek az egyenletek alaptulajdonságait (27. és 28. pont, 241. és 242. old.). Az egyik tulajdonsághoz köthető az *algebra* szó eredete.

A IX. században az ismert tudós, Muhammad ibn Músza al-Hvárizmi (Hvárizm városában született Perzsiában, Músza fiaként) írt egy értekezést az egyenletek megoldásának módszereiről. Ebben az időben a negatív számokat hamis, abszurd számoknak tartották. Ezért, amikor megoldásul hamis számot kaptak, akkor valós számokká alakították át őket úgy, hogy átvitték őket az egyenlet másik oldalára. Az ilyen átalakításokat al-Hvárizmi *helyrerakásnak* nevezte (arabul **al-dzsabr**). Az **egyenlet két oldalán lévő azonos tagok összevonását** *rövidítésnek* (arabul al-mukabala).

A tanulmány címe *Rövid könyv a helyrerakásról és az összevonásról* (arabul – *Hiszáb al-dzsabr walmukába*).

Később az al-dzsabr szóból alakult ki az *algebra* kifejezés.

A XII. században al-Hvárizmi műveit lefordították latinra. A középkori Európában al-Hvárizmi nevét *Algorizmi*-nek írták át. A tanulmányában előforduló szabály többsége Dixit Algorizmi (*Algorizm mondta*) szavakkal kezdődik. Fokozatosan megszokták, hogy ezekkel a szavakkal kezdődnek a szabályok, és az *Algorizmi* kifejezést már nem a szerző nevével kapcsolták össze. Így alakult ki az *algoritmus* kifejezés, amelyen azt az eljárást értjük, amikor véges számú lépések végrehajtása a feladat megoldásához vezet.

Ezekkel az eljárásokkal részletesebben az informatikaórákon ismerkedtek meg.

Muhammad ibn Músza al-Hvárizmi (IX. század)
Közép-ázsiai matematikus, csillagász, geográfus. Ő volt az első, aki munkáiban az algebrát a matematika önálló ágának tekintette

1. §. EGYVÁLTOZÓS LINEÁRIS EGYENLETEK

- Ebben a paragrafusban megismétlitek az egyenletek tulajdonságait, egyre nagyobb jártasságra tesztek szert az egyenletek megoldásában, megtanultok feladatokat megoldani egyenletek felállításával.
- Meggyőződtök arról, hogy az eddig ismert egyenletek csoportosíthatók, típusokba sorolhatók.

2. Egyváltozós lineáris egyenletek

Megvizsgálunk 3 egyenletet:

$$2x = -3,$$
$$0x = 0,$$
$$0x = 2.$$

A –1,5 az első egyenlet egyetlen gyöke.

Mivel bármely számot nullával szorozva nullát kapunk, ezért a második egyenlet gyöke bármely szám lehet.

A harmadik egyenletnek nincs gyöke.

Annak ellenére, hogy a három egyenletnek a megoldásai teljesen eltérőek, a felírásuk módja hasonló: mindegyiket fel tudjuk írni $ax = b$ alakban, ahol x a változó, az a és b pedig számok.

Az $ax = b$ alakú egyenleteket, ahol x változó, a és b tetszőleges számok, egyváltozós lineáris egyenleteknek nevezzük.

Lássunk néhány példát egyváltozós lineáris egyenletre:

$$\frac{1}{2}x = 7; \quad -0{,}4x = 2{,}8; \quad -x = 0.$$

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy az $x^2 = 0$, $(x - 2)(x - 3) = 0$, $|x| = 5$ egyenletek nem lineáris egyenletek.

A **félkövér betűkkel** jelölt szövegrész az egyváltozós lineáris egyenlet magyarázatát adja. A matematikában azokat a mondatokat, amelyekben egy kifejezés (fogalom, objektum) lényegét fogalmazzák meg, **meghatározásnak** nevezzük.

Tehát megfogalmaztuk vagy megadtuk az egyváltozós lineáris egyenlet meghatározását.

Megoldjuk az $ax = b$ egyenletet az a és b különböző értékeire.

1) Ha $a \neq 0$, akkor az $ax = b$ egyenlet mindkét oldalát elosztva a-val azt kapjuk, hogy $x = \frac{b}{a}$. Így tehát levonhatjuk a következtetést: *ha $a \neq 0$, akkor az $ax = b$ egyenletnek egy gyöke van, mégpedig a $\frac{b}{a}$.*

2) Ha $a = 0$, akkor a lineáris egyenletet $0x = b$ alakban írhatjuk fel. Ekkor két eset lehetséges: $b = 0$ vagy $b \neq 0$.

Az első esetben a $0x = 0$ egyenletet kapjuk. Így tehát levonhatjuk a következtetést: *ha $a = 0$ és $b = 0$, akkor az $ax = b$ egyenletnek számtalan gyöke van, vagyis bármely szám megoldása az egyenletnek.*

A második esetben, amikor $b \neq 0$, az $ax = b$ egyenlőség hamis lesz x bármely értékénél. Tehát levonhatjuk a következtetést: *ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor az $ax = b$ egyenletnek nincs gyöke.*

A kapott következtetéseket az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

Az a és b értékei	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
Az $ax = b$ egyenlet gyökei	$x = \frac{b}{a}$	x – bármely szám	Az egyenletnek nincs gyöke

1. PÉLDA Oldjátok meg azegyenletet:

1) $(3x + 2{,}1)(8 - 2x) = 0$; 2) $|\ 5x - 6\ | = 4$.

Megoldás: 1) Tudjuk, hogy szorzásnál akkor kapunk nullát, ha a tényezők közül legalább az egyik egyenlő nullával. Fordítva is igaz, ha a tényezők valamelyike egyenlő nullával, akkor a szorzat is egyenlő nullával. Tehát az egyenlet megoldásához elegendő megoldanunk az alábbi egyenletek mindegyikét:

$$3x + 2{,}1 = 0, \quad 8 - 2x = 0.$$

Innen $x = -0{,}7$ vagy $x = 4$.

Felelet: $-0{,}7$; 4.

2) Itt azt vesszük figyelembe, hogy csak két olyan szám létezik, amelyeknek modulusa 4-gyel egyenlő, ezek a 4 és a -4. A következőket kapjuk:

$$5x - 6 = 4 \text{ vagy } 5x - 6 = -4.$$

Innen $x = 2$ vagy $x = 0{,}4$.

Felelet: 2; 0,4. ●

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a felhozott egyenletek közül egyik se lineáris, de a megoldásuk során lineáris egyenletekké alakítottuk át őket, és a továbbiakban a lineáris egyenletek megoldásának a szabályai szerint jártunk el.

2. PÉLDA Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $(a - 1)\,x = 2$; 2) $(a + 9)\,x = a + 9$.

Megoldás: 1) Ha $a = 1$, akkor az egyenletet a $0x = 2$ alakban írhatjuk fel. Ebben az esetben az egyenletnek nincs gyöke. Ha $a \neq 1$, akkor $x = \frac{2}{a-1}$.

Felelet: ha $a = 1$, akkor az egyenletnek nincs megoldása,
ha $a \neq 1$, akkor $x = \frac{2}{a-1}$.

2) Ha $a = -9$, akkor az egyenletet $0x = 0$ alakban írhatjuk fel. Ebben az esetben az egyenletnek számtalan megoldása van. Ha $a \neq -9$, akkor $x = 1$.

Felelet: ha $a = -9$, akkor x bármely szám lehet;
ha $a \neq -9$, akkor $x = 1$.

?

1. Mit nevezünk egyváltozós lineáris egyenletnek?
2. Hány megoldása van az $ax = b$ egyenletnek, ha:
1) $a \neq 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$; 3) $a = b = 0$?

GYAKORLATOK

33.° Az alábbi egyenletek közül melyik lineáris:

1) $3x = 6$; 3) $x^2 = 4$; 5) $\frac{4}{x} = 2$; 7) $x = 0$;
2) $x = 4$; 4) $|\,x\,| = 2$; 6) $\frac{1}{4}x = 2$; 8) $0x = 8$?

34.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $18 - 16x = -30x - 10$;
2) $-7x + 2 = 3x - 1$;
3) $10 - 2x = 12 + x$;
4) $6x - 19 = -2x - 15$;
5) $0{,}2x + 3{,}4 = 0{,}6x - 2{,}6$;
6) $\frac{5}{6}x + 12 = \frac{1}{4}x - 2$.

35.° Határozzátok meg az egyenletek gyökeit:

1) $10x + 7 = 8x - 9$;
2) $20 - 3x = 2x - 45$;
3) $2{,}7 + 1{,}9x = 2x + 1{,}5$;
4) $\frac{13}{18}x + 10 = \frac{7}{12}x + 8$.

36.° Bizonyítsátok be, hogy:

1) a $4\,(x - 5) = 4x - 20$ egyenlet megoldása bármely szám;
2) a $2y - 8 = 4 + 2y$ egyenletnek nincs megoldása.

37.° Oldjátok meg az egyenletet:

1) $-3\,(x - 4) = 5x - 12$;
2) $(16x - 5) - (3 - 5x) = 6$;
3) $26 - 4x = 3x - 7\,(x - 3)$;
4) $-2\,(3 - 4x) + 5\,(2 - 1{,}6x) = 4$.

38.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $4(13 - 3x) - 17 = -5x$;
2) $(18 - 3x) - (4 + 2x) = 10$;
3) $14 - x = 0{,}5(4 - 2x) + 12$;
4) $4x - 3(20 - x) = 10x - 3(11 + x)$.

39.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $0{,}8 - (1{,}5x - 2) = -0{,}8 + 4{,}5x$;
2) $0{,}6x - 5(0{,}3x + 0{,}2) = 0{,}5(x - 1) - 0{,}8$;
3) $\frac{1}{7}\left(\frac{7}{8}y + 7\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{9}y + 1\frac{7}{9}\right) = \frac{1}{12}$;
4) $\frac{5}{27}(5{,}4 - 8{,}1y) = 0{,}03 + \frac{4}{17}(6{,}8 - 3{,}4y)$.

40.• Határozzátok meg az egyenletek gyökeit:

1) $0{,}9x - 0{,}6(x - 3) = 2(0{,}2x - 1{,}3)$;
2) $-0{,}4(3x - 1) + 8(0{,}8x - 0{,}3) = 5 - (3{,}8x + 4)$;
3) $\frac{4}{7}(0{,}56 - 4{,}2y) + 0{,}4 = \frac{5}{13}(0{,}52 - 6{,}5y)$.

41.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $8(7x - 3) = -48(3x + 2)$;
2) $4{,}5(8x + 20) = 6(6x + 15)$.

42.• Mivel egyenlő az egyenlet gyöke:

1) $-36(6x + 1) = 9(4 - 2x)$;
2) $3{,}2(3x - 2) = -4{,}8(6 - 2x)$?

43.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $(4x - 1{,}6)(8 + x) = 0$;
2) $x(5 - 0{,}2x) = 0$;
3) $(3x - 2)\left(4 + \frac{1}{3}x\right) = 0$;
4) $(2x + 1{,}2)(x + 1)(0{,}7x + 0{,}21) = 0$.

44.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $(1{,}8 - 0{,}3y)(2y + 9) = 0$;
2) $(5y + 4)(1{,}1y - 3{,}3) = 0$.

45.• Határozzátok meg az egyenlet gyökét:

1) $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7}$;
2) $\frac{4y + 33}{3} = \frac{17 + y}{2}$.

46.• Határozzátok meg az egyenlet gyökét:

1) $\frac{3m + 5}{4} = \frac{5m + 1}{3}$;
2) $\frac{5x + 3}{5} = \frac{x - 5}{8}$.

47.• Mivel egyenlő az egyenlet gyöke:

1) $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{4} = 23$;
2) $\frac{x}{6} - \frac{x}{8} = \frac{7}{36}$;
3) $\frac{3x}{10} - \frac{4}{15} = \frac{x}{6}$?

48.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\frac{7x}{6} - \frac{5x}{18} = \frac{4}{27}$;
2) $\frac{2x}{7} + \frac{x}{4} = \frac{15}{14}$;
3) $-\frac{x}{8} + 1 = \frac{x}{12}$.

49.• A változó mely értékénél lesz:

1) a $4x - 0{,}2(8x - 7)$ kifejezés értéke $-22{,}6$;
2) a $0{,}2(3 - 2y)$ és $0{,}3(7 - 6y) + 2{,}7$ kifejezéseknek különböző az értékük;

3) a $0{,}6y$ kifejezés értéke 1,5-del nagyobb a $0{,}3\,(y-4)$ kifejezés értékénél;
4) az $5x-1$ kifejezés értéke 5-ször kisebb a $6{,}5+2x$ kifejezés értékénél?

50.• A változó mely értéke mellett lesz:
1) a $6-(2x-9)$ és $(18+2x)-3\,(x-3)$ kifejezéseknek azonos az értéke;
2) a $-4\,(2y-0{,}9)$ kifejezés értéke 2,4-del kisebb az $5{,}6-10y$ kifejezés értékénél?

51.• Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $|x|+6=13$; 4) $|x-5|=4$; 7) $|3x+4|=2$;
2) $|x|-7=-12$; 5) $|9+x|=0$; 8) $|2x+1|+13=14$;
3) $7\,|x|-3=0$; 6) $|x-4|=-2$; 9) $||x|-3|=-5$.

52.• Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $|x|-8=-5$; 3) $|x+12|=3$; 5) $|10x-7|-32=-16$;
2) $|x|+5=2$; 4) $|8-0{,}2x|=12$; 6) $||x|-2|=2$.

53.• Az a mely értékénél lesz:
1) az $5ax=-45$ egyenletgyöke 3;
2) az $(a-4)\,x=-5a+4x-7$ egyenlet gyöke -6?

54.• Az a mely értékénél lesz:
1) a $3ax=12-x$ egyenlet gyöke -9;
2) az $(5a+2)\,x=8-2a$ egyenlet gyöke 2?

55.• Adjatok a b-nek olyan értéket, hogy az alábbi egyenletek megoldásai egész számok legyenek:
1) $0{,}1x=b$; 2) $bx=21$; 3) $\frac{1}{6}x=b$; 4) $bx=\frac{1}{6}$.

56.• Állítsatok fel olyan egyenletet, amelynek:
1) az egyetlen gyöke -4-gyel egyenlő;
2) számtalan gyöke van;
3) nincs megoldása.

57.•• Határozzátok meg az m összes olyan egész értékét, amelyeknél az alábbi egyenleteknek egész szám lesz a megoldása:
1) $mx=3$; 2) $(m+4)\,x=49$.

58.•• Határozzátok meg az n összes olyan egész értékét, amelyeknél az alábbi egyenleteknek természetes szám lesz a megoldása:
1) $nx=-5$; 2) $(n-6)\,x=25$.

59.•• A b mely értékénél lesz az alábbi egyenleteknek azonos a megoldása:
1) $7-3x=6x-56$ és $x-3b=-35$;
2) $2y-9b=7$ és $3{,}6+5y=7\,(1{,}2-y)$?

60.•• A c mely értékei mellett lesznek azonosak az alábbi egyenletek gyökei:
1) $(4x+1)-(7x+2)=x$ és $12x-9=c+5$;
2) $\frac{1}{7}cx=x+c$ és $6-3\,(2x-4)=-8x+4$?

61.•• Az a mely értékei mellett nincs megoldása az egyenletnek:
1) $ax = 6$; 2) $(3 - a)\,x = 4$; 3) $(a - 2)\,x = a + 2$?

62.•• Az a mely értékénél lesz az alábbi egyenleteknek számtalan gyöke:
1) $ax = a$; 2) $(a - 2)\,x = 2 - a$; 3) $a\,(a + 5)\,x = a + 5$?

63.•• Az a mely értékénél lesz az alábbi egyenleteknek egyetlen gyöke:
1) $(a - 5)\,x = 6$; 2) $(a + 7)\,x = a + 7$?

64.•• Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $(b + 1)\,x = 9$; 2) $(b^2 + 1)\,x = -4$.

65.•• Oldjátok meg az $(m + 8)\,x = m + 8$ egyenletet.

66.•• A $6x + 8 = 4x + *$ egyenlőségben melyik számmal helyettesíthetjük a csillagot, hogy olyan egyenletet kapjunk, amelyiknek:
1) nincs gyöke; 2) számtalan gyöke van; 3) egyetlen gyöke van?

67.•• A $2\,(1{,}5x - 0{,}5) = 7x + *$ egyenlőségben melyik számmal helyettesíthetjük a csillagot, hogy olyan egyenletet kapjunk, amelyiknek:
1) nincs gyöke; 2) számtalan gyöke van; 3) egyetlen gyöke van?

68.* Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $|x| + 3x = 12$; 2) $|x| - 4x = 9$; 3) $2\,(x - 5) - 6\,|x| = -18$.

69.* Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $2x - |x| = -1$; 2) $7\,|x| - 3\,(x + 2) = -10$.

70.* Az a mely egész értékeinél lesz az alábbi egyenleteknek olyan egész szám a gyöke, amelyik osztható 2-vel:
1) $x - 2 = a$; 2) $x + 7a = 9$; 3) $2x - a = 4$; 4) $x + 2a = 3$?

71.* Az b mely egész értékeinél lesz az alábbi egyenleteknek olyan egész szám a gyöke, amelyik osztható 3-mal:
1) $x + 3 = b$; 2) $x - 2 = b$; 3) $x - 3b = 8$?

72.* A b mely értékeinél lesz az alábbi egyenletek gyöke kisebb b-nél:
1) $3x = b$; 2) $x = 2b$?

73.* A d mely értékeinél lesz az alábbi egyenletek gyöke nagyobb d-nél:
1) $4x = d$; 2) $\frac{1}{5}x = d$?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

74. Az egyik munkás 45 óra alatt tudja elvégezni az adott feladatot, a másiknak ugyanerre $1\frac{1}{2}$-szer kevesebb időre van szüksége, mint az elsőnek. Hány óra alatt végzik el a munkát, és a munka hányad részét végzi el mindegyik munkás, ha együtt dolgoznak?

75. Az első napon Lackó a könyv $\frac{8}{15}$ részét, a második napon az $\frac{5}{12}$-ét, a harmadik napon pedig a megmaradt 12 oldalt olvasta el. Hány oldalas a könyv?

76. Ismert, hogy az n-természetes szám. Páros vagy páratlan szám lesz-e az alábbi kifejezések értéke:

1) $4n$; 2) $2n - 1$; 3) $n\ (n + 1)$?

77. Az a bármely értékénél igazak-e az alábbi állítások:

1) $2a > a$; 2) $2\ |\ a\ |\ >\ |\ a\ |$?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

78. Hány olyan hatjegyű szám létezik, amelyek felírásában legalább egy páros számjegy szerepel?

3. Feladatok megoldása egyenletek segítségével

Sokszor előfordult már, hogy egy feladatot egyenlet felállításával oldottatok meg. Ezeknek a feladatoknak a sokszínűsége azt mutatja, hogy mennyire univerzális a feladatok megoldásának ez a módja. Mi ennek a titka?

A titok nyitja az, hogy bármennyire is különböznek egymástól ezek a feladatok, mindegyikben a feltételeket fel tudjuk írni a matematika nyelvén.

A feladat feltétele gyakran valós helyzetet ír le. Az ilyen feltételek alapján felállított egyenlet a feladat feltételének **matematikai modellje.**

Ahhoz, hogy megkapjuk a feladat megoldását, meg kell oldanunk az egyenletet. Ehhez az algebrában különböző módszereket és technikákat dolgoztak ki. Ezek közül már ismertek néhányat, de nagyon sok módszert kell még megtanulnotok.

Ha megtaláljuk az egyenlet gyökét, ez még nem jelenti azt, hogy megoldottuk a feladatot. Le kell ellenőriznünk, hogy a kapott eredmény megfelel-e a feladat feltételében szereplő valós helyzetnek.

Megvizsgáljuk a következő feladatokat:

1) 4 óra alatt 6 kg bogyót szedtek le, mégpedig minden órában azonos mennyiséget. Hány kilogramm bogyót szedtek le egy óra alatt?
2) Néhány kisfiú 6 kg bogyót szedett. Mindegyikük 4 kg-ot. Hány fiú vett részt a munkában?

Mindkét feladat alapján felállítható a $4x = 6$ egyenlet, amelynek 1,5 a megoldása. Az első feladat megoldásának ez a szám meg is felel, mivel ebben a feladatban az volt a kérdés, hogy hány kg bogyót szedtek le óránként. Ebben a feladatban elfogadható az a felelet, hogy 1,5 kg bogyót szedtek óránként. De ha a másik feladat feleletében az szerepel, hogy 1,5 kisfiú vett részt a munkában, ez már nem lesz helyes. Tehát a második feladatnak nincs megoldása.

Az egyenletek segítségével megoldható feladatok megoldásakor tartsuk be a következő sorrendet:

1) a feladat feltétele alapján állítsunk fel egyenletet (a feladat matematikai modelljét);
2) oldjuk meg a kapott egyenletet;
3) tisztázzuk, hogy a kapott megoldás megfelel-e a feladat feltételének, és írjunk feleletet.

A műveleteknek ezt a három lépésből álló sorrendjét nevezzük a szöveges feladatok megoldási **algoritmusának.**

1. PÉLDA A munkásnak a megrendelést 8 nap alatt kellett volna teljesíteni. Mivel mindennap 12 alkatrésszel többet készített el a tervezettnél, ezért 6 nap alatt elkészítette a megrendelést, és ráadásul 22 alkatrésszel többet is gyártott. Hány alkatrészt készített el a munkás naponta?

Megoldás: Tegyük fel, hogy x alkatrészt készített a munkás naponta. Akkor a terv szerint naponta $(x - 12)$ alkatrészt kellett volna elkészítenie, összesen pedig $8\,(x - 12)$. Valójában a munkás $6x$ darabot készített el. A feladat feltétele alapján a $6x$ 22-vel több a $8\,(x - 12)$ kifejezés értékénél, ezért felírhatjuk a következő egyenletet:

$$6x - 22 = 8\,(x - 12).$$

Innen $6x - 22 = 8x - 96$;

$$6x - 8x = -96 + 22;$$
$$-2x = -74;$$
$$x = 37.$$

Felelet: 37 alkatrész. ●

2. PÉLDA A kerékpáros 5 óra alatt 65 km-t tett meg. Az út egy részén 10 km/ó, a többin pedig 15 km/ó sebességgel haladt. Hány órán át volt a sebessége 10 km/ó, illetve 15 km/ó?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a kerékpáros x órát haladt 10 km/ó sebességgel. Akkor 15 km/ó sebességgel $(5 - x)$ órát volt úton. Az út első része $10x$ km, a másik része pedig $15\,(5 - x)$ km. Mivel az egész út 65 km-t tett ki, ezért a következő egyenletet állíthatjuk fel:

$$10x + 15\,(5 - x) = 65.$$

Innen $10x + 75 - 15x = 65$;

$$-5x = -10;$$
$$x = 2.$$

Tehát 10 km/ó sebességgel 2 órán keresztül haladt, 15 km/ó sebességgel pedig $5 - x = 3$ órát.

Felelet: 2 óra, 3 óra. ●

GYAKORLATOK

79.° Peti 24 füzetet vásárolt, mégpedig vonalasból 6-tal többet, mint kockásból. Hány vonalas, illetve kockás füzetet vásárolt Peti?

80.° Két fáról 64,5 kg meggyet szedtek le, mégpedig az egyik fáról 12,6 kg-mal kevesebbet, mint a másikról. Hány kg meggyet szedtek le mindegyik fáról külön-külön?

81.° A téglalap kerülete 7,8 cm, az egyik oldala 1,3 cm-rel nagyobb a másiknál. Határozzátok meg a téglalap oldalait.

82.° A téglalap egyik oldala 11-szer kisebb a másiknál. Határozzátok meg a téglalap oldalait, ha a kerülete 144 cm.

83.° A Kárpátokban, a Csornohora hegyvonulatban található Ukrajna három legmagasabb hegycsúcsa: a Hoverla, a Brebeneszkul és a Petrosz. A három hegycsúcs összesen 6113 m magas. A Hoverla a Brebeneszkulnál 29 m-rel, a Petrosznál pedig 41 m-rel magasabb. Számítsátok ki mindegyik hegycsúcs magasságát.

84.° Ukrajna három legmélyebb barlangja – a Szoldatszka, a Kaszkadna és a Nahimovszka a Krímen található. Mélységük összesen 1874 m. A Kaszkadna mélysége 1,2-szer kisebb a Szoldatszka barlang mélységénél és 26 m-rel mélyebb, mint a Nahimovszka. Határozzátok meg mindegyik barlang mélységét.

85.° A 160 lakásos házban háromféle lakás található: egyszobás, kétszobás és háromszobás. Egyszobás lakásból 2-szer kevesebb van, mint kétszobásból, és 24-gyel kevesebb, mint háromszobásból. Hány lakás található a házban mindegyik típusból?

86.° Három munkás összesen 96 alkatrészt készített el. Az első munkás 3-szor annyi alkatrészt készített el, mint a második, a harmadik pedig 16-tal többet, mint a második. Hány alkatrészt készített el mindegyik munkás külön-külön?

87.° A gyár három műhelyében összesen 101 munkás dolgozik. Az első műhelyben dolgozó munkások száma $\frac{4}{9}$-e a harmadik műhelyben dolgozó munkások számának, a második műhelyben dolgozók száma pedig 80%-át teszi ki a harmadikban dolgozóknak. Hány munkás dolgozik az első műhelyben?

88.° A kerékpárosok egy háromnapos túrára indultak. A második és a harmadik napon megfelelően az első napi út 120%-át és a $\frac{4}{5}$ részét tették meg. Hány km-t tettek meg az első napon, ha az egész út hossza 270 km volt?

89. 6 nagy és 8 kis ládában 232 kg alma van. Hány kg alma volt mindegyik ládában, ha a kis ládákba 6 kg-mal kevesebb alma fér, mint a nagyokba?

90.° Egy mozi két termében összesen 534 ülőhely van. Az egyik teremben 12, azonos ülőhelyet tartalmazó sor, a másikban 15 sor szék van. Az első terem mindegyik sorában 4 székkel több van, mint a második terem mindegyik sorában. Hány ülőhely van a két teremben külön-külön?

91.° A két város közötti távolságot a motorkerékpáros 0,8 óra, a kerékpáros pedig 4 óra alatt tette meg. A kerékpáros sebessége 48 km/óval kisebb a motoros sebességénél. Számítsátok ki a motoros és a kerékpáros sebességét.

92.° 2 kg csokiért az egyik féléből annyit fizettek, mint a másikból 3,5 kg-ért. Mennyibe kerül mindegyik csokiból egy-egy kg, ha az első csoki 12 hrivnyával drágább, mint a másik csoki kilónkénti ára?

93.° Egy kg uborka 0,8 hrivnyával olcsóbb egy kg paradicsomnál. Mennyibe kerül 1 kg paradicsom, ha 3,2 kg paradicsomért annyit fizettek, mint 3,6 kg uborkáért?

94.° Az egyik tartályban 3-szor több víz van, mint a másikban. Miután az egyik tartályba 16 liter, a másikba pedig 80 liter vizet töltöttek, a két tartályban azonos mennyiségű víz lett. Mennyi víz volt a tartályokban eredetileg?

95.° Az egyik polcon 4-szer több könyv volt, mint a másikon. Miután az egyik polcról levettek 5 könyvet, a másikra pedig tettek 16-ot, a két polcon azonos lett a könyvek száma. Hány könyv volt a polcokon eredetileg?

96.° Az apa 26 éves, a fia pedig 2 éves. Hány év múlva lesz az apa 5-ször idősebb a fiánál?

97.° Az anya 40 éves, a lánya pedig 18 éves. Hány évvel ezelőtt volt a lány 3-szor fiatalabb az anyjánál?

98.• Az iskolai könyvtár részére 40 helyesírási és értelmező szótárt vásároltak, amelyekért 690 hrivnyát fizettek. Hány szótárt vettek mindegyik fajtából, ha a helyesírási szótár 15, az értelmező pedig 24 hrivnyába kerül?

99.• Az ügyfél 3000 hrivnyát tett be a bankba két különböző számlára. Az egyik számla évi 7%, a másik pedig évi 8% kamatot fizet. Egy év alatt 222 hrivnyát kamatozott a pénze. Mennyi pénzt tett be mindegyik számlára?

100.• A pénztárban 2 és 5 hrivnyásból 19 bankjegy volt, ami összesen 62 hrivnyát tett ki. Hány darab 2 hrivnyás, illetve 5 hrivnyás volt a pénztárban?

101.• Két raktárban azonos mennyiségű szén volt. Miután az egyikből elszállítottak 680 tonnát, a másikból pedig 200 tonnát, az első raktárban 5-ször kevesebb szén maradt, mint a másikban. Mennyi szén volt a két raktárban eredetileg?

102.• Petinek és Lackónak ugyanannyi pénze volt. Miután Peti 30 hrivnyát, Lackó pedig 45 hrivnyát költött könyvekre, Petinek 2-szer annyi pénze maradt, mint Lackónak. Mennyi pénzük volt a fiúknak eredetileg?

103.• Az egyik zsákban 5-ször több liszt volt, mint a másikban. Miután az egyik zsákból 12 kg lisztet átöntöttek a másikba, a másik zsákban lévő liszt mennyisége az $\frac{5}{7}$ részét tette ki az első zsákban lévő liszt tömegének. Hány kg liszt volt a zsákokban eredetileg?

104.• Az egyik konténerben 3-szor több szén volt, mint a másikban. Miután az első konténerből 300 kg szenet átöntöttek a másikba, az első konténerben maradt szén tömege a másik konténerben lévő szénnek a 60%-át tette ki. Mennyi szén volt a konténerekben eredetileg?

105.• Az egyik munkásnak 90, a másiknak 60 alkatrészt kellett elkészíteni. Az első munkás naponta 4 alkatrészt készített el, a másik pedig 5-öt. Hány nap múlva kell az első munkásnak 2-szer annyi alkatrészt elkészítenie, mint a másiknak, ha figyelembe vesszük, hogy egyszerre kezdtek el dolgozni?

106.• Az egyik tartályban 200, a másikban pedig 640 liter víz volt. Miután a második tartályból kétszer annyi vizet használtak el, mint az elsőből, a másodikban 3,5 szer több víz maradt, mint az elsőben. Hány liter vizet használtak el mindegyik tartályból?

107.• Két, egymástól 385 km-re lévő városból egy személygépkocsi és egy teherautó indult el egymással szemben. A gépkocsi sebessége 80 km/ó, a teherautóé pedig 50 km/ó volt. Hány óra múlva találkoznak, ha a teherautó 4 órával később indult el, mint a személygépkocsi?

108.• Az egyik településről a másikba egy gyalogos indult el 4 km/ó sebességgel. 1,5 óra múlva a másik faluból vele szemben elindult egy kerékpáros 16 km/ó sebességgel. Hány perc múlva találkozik a kerékpáros a gyalogossal, ha a két település közötti távolság 14 km?

109.• A két város közötti távolság a folyón 55 km-rel rövidebb, mint az országúton. Az egyik városból a másikba eljuthatunk hajóval 6 óra alatt, vagy autóbusszal az országúton 3 óra 30 perc alatt. Határozzátok meg a hajó és az autóbusz sebességét, ha a hajó sebessége 30 km/ó-val kisebb az autóbuszénál.

110.• A motoros hajó 4 órán keresztül ment a vízfolyás irányában és 3 órán át a vízfolyással szemben. A hajó a vízfolyás irányában 48 km-rel hosszabb utat tett meg, mint a vízfolyással szemben. Határozzátok meg a hajó sebességét állóvízben, ha a vízfolyás sebessége 2,5 km/ó.

111.• A turista a folyón 5 órán át utazott egy tutajon a vízfolyás irányában, aztán 1,5 órát egy motorcsónakon a vízfolyással szemben. A csónak sebessége állóvízben 24 km/ó. Határozzátok meg a vízfolyás sebességét, ha a turista a vízfolyással szemben 23 km-rel többet haladt, mint a vízfolyás irányában.

112.• Két dobozban összesen 55 kg keksz volt. Miután az első dobozban lévő keksz mennyiségének az $\frac{1}{3}$ részét átrakták a másikba, az első dobozban 5 kg-mal több keksz lett, mint a másikban. Menynyi keksz volt a két doboz mindegyikében eredetileg?

113.• Két kosárban 24 kg körte volt. Miután az egyik kosárban lévő körte $\frac{3}{7}$ részét átrakták a másikba, a másik kosárban 2-szer annyi körte lett, mint amennyi az elsőben maradt. Hány kg körte volt a kosarakban eredetileg?

114.• Három polcon könyvek vannak. Az első polcon az összes könyv $\frac{4}{15}$-e áll, a másikon a 60%-uk, a harmadikon pedig 8 könyvvel kevesebb volt, mint az elsőn. Hány könyv van mindegyik polcon?

115.• Egy bizonyos mennyiségű tejet négy kannába öntötték szét. Az első kannába került az összes tej 30%-a, a másodikba az elsőbe öntött tej $\frac{5}{6}$ része, a harmadikba 26 l-rel kevesebbet, mint az elsőbe, a negyedikbe pedig 10 l-rel több, mint a másodikba. Hány liter tej lett mindegyik kannában?

116.• A turistákat sátrakban szállásolták el. Hogyha mindegyik sátorba 6 turistát szállásolnak el, akkor 5-nek nem jut hely, ha pedig mindegyik sátorba 7 turistát helyeznek el, akkor 6 hely szabadon marad. Hány turista vett részt a kiránduláson?

117.• A hetedikesek részére karácsonyi ajándékot készítettek. Hogyha mindegyik csomagba 4 narancsot tesznek, akkor 3-ba nem jut narancs, ha mindegyik csomagba 3 narancsot tesznek, akkor viszont 25 db megmarad. Hány narancsot kell szétosztani?

118.• A munkás úgy tervezte, hogyha naponta elkészít 20 alkatrészt, akkor időben elkészül a feladattal. Mivel a tervezettnél mindennap 8 alkatrésszel többet készített el, ezért már 2 nappal a határidő előtt 8 alkatrésszel több volt a tervezettnél. Hány nap alatt kellett volna elkészítenie a munkásnak az alkatrészeket?

119.• A vizsgára készülve a tanuló úgy tervezte, hogy naponta megold 10 feladatot. Mivel mindennap 4 feladattal többet oldott meg, ezért 3 nappal a vizsga előtt már csak 2 olyan feladata volt, amit még nem oldott meg. Összesen hány feladatot tervezett megoldani a tanuló?

120.• Egy kétjegyű számban a tízesek helyén álló számjegy 3-szor nagyobb az egyesek helyén álló számjegynél. Ha felcseréljük a számjegyeket, akkor a kapott szám 54-gyel kisebb lesz, mint az eredeti. Határozzátok meg az eredeti kétjegyű számot.

121.• Egy kétjegyű számban a tízesek helyén álló számjegy 2-vel kisebb az egyesek helyén álló számjegynél. Ha felcseréljük a számjegyeket, akkor az így kapott szám $1\frac{3}{4}$-szer nagyobb lesz az eredetinél. Határozzátok meg az eredeti kétjegyű számot.

122.•• Két, egymástól 270 km-re lévő városból egyszerre két gépkocsi indult el egymással szemben. Az indulásuk után 2 órával már csak 30 km volt közöttük a távolság. Határozzátok meg a gépkocsik sebességét, ha az egyik sebessége 10 km/ó-val nagyobb, mint a másiké.

123.•• Van két réz-cink ötvözetünk. Az egyik ötvözetben 9%, a másikban 30% a cink részaránya. Hány kilogramm ötvözetet kell vennünk mind a két fajtából, hogy olyan 300 kg ötvözetet kapjunk, amelyben a cink részaránya 23%?

124.•• Van két vizes sóoldatunk. Az egyik oldatban 25%-os, a másikban 40%-os a sótartalom. Hány kilogramm oldatot kell összekevernünk mindegyik fajtából, hogy 50 kg 34%-os sóoldatot kapjunk?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

125. Számítsátok ki a kifejezések értékét:

1) $-9{,}6 : 12 - 29 : (-5{,}8) + 4 : (-25)$;

2) $-3{,}4 \cdot (4 - 4{,}6) + 12{,}4 \cdot (-0{,}8 - 2{,}2)$;

3) $\left(0{,}4 - \frac{3}{20}\right) \cdot 6\frac{2}{3} - 1{,}75 : \left(-7\frac{7}{8}\right)$;

4) $\left(6{,}3 : \left(-\frac{9}{20}\right) - 2{,}6 : \left(-\frac{1}{20}\right)\right) \cdot \left(-\frac{4}{19}\right) - 0{,}6 : (-0{,}36)$.

126. Számítsátok ki a kifejezések értékét:

1) $14 - 6x$, ha $x = 4$; -2; 0; $-0{,}3$; $\frac{3}{8}$;

2) $a^2 + 3$, ha $a = 7$; -2; 0; $0{,}4$; $-1\frac{1}{3}$;

3) $(2m - 1)\, n$, ha $m = 0{,}2$, $n = -0{,}6$.

127. A megadott x értékeknek megfelelően számítsátok ki a $-3x + 2$ kifejezés értékét, majd töltsétek ki az alábbi táblázatot:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-3x + 2$									

128. Milyen számjegyet kell írnunk a 37 bal és jobb oldalára, hogy az így kapott szám osztható legyen 6-tal?

129. Van-e gyöke az egyenletnek:

1) $x^2 = 0$; 2) $x^2 = -1$; 3) $|x| = x$; 4) $|x| = -x$?

Igenlő válasz esetén nevezzétek meg a gyököt.

130. Lehet-e egész szám a kifejezés értéke:

1) $\frac{1}{x}$; 2) $\frac{x}{x+1}$?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

131. Határozzátok meg az n minden természetes értékét, amelyeknél az $n - 2$, $n + 24$, $n + 26$ kifejezések értéke prímszám lesz.

1. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Számítsátok ki az $5 - 4b$ kifejezés értékét, ha $b = -2$.

A) 3; B) –3; C) 13; D) –13.

2. Számítsátok ki az $\frac{1}{5}m + \frac{1}{3}n$ kifejezés értékét, ha $m = 35$, $n = -18$.

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

3. Az alábbiak közül melyik kifejezés fejezi ki az a és b szorzatának és a c számnak a különbségét?

A) $a - bc$; B) $ab - c$; C) $a(b - c)$; D) $(a - b)c$.

4. Az alábbi algebrai kifejezések közül válasszátok ki az egész kifejezést.

A) $\frac{b}{b-7}$; B) $\frac{b+5}{b-7}$; C) $\frac{b+5}{7}$; D) $\frac{b+5}{b}$.

5. Határozzátok meg a $7x + 2 = 3x - 6$ egyenlet gyökét.

A) 2; B) 1; C) –2; D) –1.

6. Az alábbi egyenletek közül melyik lineáris?

A) $2x + 3 = 0$; C) $|x| - 4 = 0$;

B) $\frac{1}{x} = 0$; D) $(x - 1)(x - 2) = 0$.

7. Oldjátok meg az $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 6$ egyenletet.

A) 12; B) 36; C) –6; D) –1.

8. Oldjátok meg a $2(x - 3) - (x + 4) = x - 10$ egyenletet.

A) 0; C) x – bármely szám lehet;

B) nincs gyöke; D) 10.

9. Az a mely értékénél nem lesz gyöke az $(a + 4)x = a - 3$ egyenletnek?

A) 3; B) –4; C) 0; D) nem létezik ilyen szám.

10. Tudjuk, hogy az a szám 45%-a 7-tel nagyobb az a $\frac{1}{3}$-nál. Határozzátok meg az a számot.

A) 36; B) 45; C) 60; D) 90.

11. Három munkás 70 alkatrészt készített. Az első munkás 2-szer kevesebb alkatrészt gyártott, mint a második, a harmadik pedig 10-zel többet, mint az első.
Legyen x az első munkás által elkészített alkatrészek száma. Az alábbi kifejezések közül melyik felel meg a feladat feltételének?
A) $x + 2x + 2x + 10 = 70$; C) $x + 2x + 2x - 10 = 70$;
B) $x + 2x + x + 10 = 70$; D) $x + 2x + x - 10 = 70$.

12. Az első földrészlegen 4-szer annyi málnabokor van, mint a másodikon. Miután az első részlegről 12 bokrot átültettek a másodikra, a második részlegen 2-szer kevesebb lett a málnabokrok száma, mint az elsőn.
Tegyük fel, hogy a második részlegen x bokor volt eredetileg. Az alábbi kifejezések közül melyik lesz a feladatban előforduló esemény matematikai modellje?
A) $2\,(4x - 12) = x + 12$; C) $4x + 12 = 2\,(x - 12)$;
B) $2\,(4x + 12) = x - 12$; D) $4x - 12 = 2\,(x + 12)$.

AZ 1. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Változót tartalmazó kifejezés

Az olyan kifejezést, amely számokat, betűket, matematikai műveleteket, zárójeleket tartalmaz, betűkifejezésnek vagy változót tartalmazó kifejezésnek nevezzük.

Algebrai kifejezések

1) Számkifejezések.
2) Változót tartalmazó kifejezések (betűkifejezések).

Egész kifejezés

Az olyan kifejezést, amelyikben nem szerepel változóval való osztás, egész kifejezésnek nevezzük.

Egyváltozós lineáris egyenlet

Az $ax = b$ alakú egyenletet, ahol x változó, az a és b tetszőleges számok, egyváltozós lineáris egyenletnek nevezzük.

A szöveges feladatok megoldásának algoritmusa

1) A feladat feltétele alapján felállítani az egyenletet (a feladat matematikai modelljét).
2) Megoldani a kapott egyenletet.
3) Leellenőrizni, hogy a kapott eredmény megfelel-e az adott feladat feltételének, és felírni a feleletet.

Az egyváltozós lineáris egyenlet megoldása

Az a és b értékei	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
Az $ax = b$ egyenlet gyökei	$x = \frac{b}{a}$	x – bármely szám	Az egyenletnek nincs gyöke

2. §. EGÉSZ KIFEJEZÉSEK

- Ebben a paragrafusban megtanuljátok, hogyan kell egyszerűbb alakra hozni a kifejezéseket, megismerkedtek olyan képletekkel és módszerekkel, amelyek megkönnyítik a kifejezések átalakítását.
- Meggyőződtök arról, hogy a szám négyzetre és köbre való emelése a számtani műveleteknek egy külön esete.
- Megtanuljátok osztályozni az algebrai kifejezéseket.

4. Egyenlő kifejezések. Azonosságok

Megvizsgálunk két pár kifejezést:

1) $x^5 - x$ és $5x^3 - 5x$;

2) $2\,(x - 1) - 1$ és $2x - 3$.

A táblázatok e kifejezések értékeit tartalmazza az x változó *néhány* értéke esetén.

x	–2	–1	0	1	2
$x^5 - x$	–30	0	0	0	30
$5x^3 - 5x$	–30	0	0	0	30

x	–2	–1	0	1	2
$2\,(x - 1) - 1$	–7	–5	–3	–1	1
$2x - 3$	–7	–5	–3	–1	1

Látjuk, hogy ezek az értékek egybeesnek mindegyik kifejezéspár esetén.

Teljesül-e ez a törvényszerűség az x változó *tetszőleges* értékére?

Az első táblázatban szereplő kifejezéseknél láthatjuk, hogy nem teljesül. Például, ha $x = 3$, akkor az $x^5 - x = 3^5 - 3 = 240$, és az $5x^3 - 5x = 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3 = 120$.

Ugyanakkor a második táblázatba foglalt kifejezések értékei mindig egyenlők lesznek az x változó bármely értékénél. Bebizonyítjuk ezt.

$2(x-1)-1=2x-2-1=2x-3$, vagyis miután egyszerűbb alakra hoztuk a $2(x-1)-1$ kifejezést, a $2x-3$ kifejezést kaptuk.

Meghatározás. Azokat a kifejezéseket, amelyeknek az értéke egyenlő egymással a változó bármely értéke mellett, azonosan egyenlő kifejezéseknek nevezzük.

Például a $2(x-1)-1$ és $2x-3$ kifejezések azonosan egyenlőek, az x^5-x és $5x^3-5x$ kifejezések pedig nem azonosan egyenlőek.

Lássunk néhány példát azonosan egyenlő kifejezésekre:

$$7(a+b) \text{ és } 7a+7b;$$
$$3x+y \text{ és } y+3x;$$
$$m^2np \text{ és } nm^2p;$$
$$a-(b+c) \text{ és } a-b-c.$$

Megvizsgáljuk a $7(a+b)=7a+7b$ egyenlőséget. A szorzás széttagolási tulajdonsága alapján elmondhatjuk, hogy ez az egyenlőség mindig igaz lesz az a és b változó bármely értéke mellett.

Meghatározás. Azt az egyenlőséget, amely igaz a változó bármely értéke mellett, azonosságnak nevezzük.

Egy azonosan egyenlő kifejezéspárból nagyon könnyen azonosságot kaphatunk.

Például mind a három egyenlőség

$$3x+y=y+3x,$$
$$m^2np=nm^2p,$$
$$a-(b+c)=a-b-c$$

azonosság.

Megjegyezzük, hogy azonosságokkal már találkoztatok korábban is. Például az összeadás és a szorzás tulajdonságait kifejező egyenlőségek azonosságnak tekinthetők:

$$a+b=b+a;$$
$$(a+b)+c=a+(b+c);$$
$$ab=ba;$$
$$(ab)c=a(bc);$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

Meghatározzuk a $11a-3a+2$ kifejezés értékét, ha $a=\frac{1}{8}$. Természetesen kiszámíthatjuk a kifejezést úgy is, hogy rögtön behelyettesítjük az a helyére az $\frac{1}{8}$-t: $11\cdot\frac{1}{8}-3\cdot\frac{1}{8}+2$. De sokkal egyszerűbb, ha először összevonjuk az egynemű tagokat, így a $11a-3a+2$ kifejezés azonosan egyenlő lesz a $8a+2$ kifejezéssel. Ha most behelyettesítjük az a helyére az $a=\frac{1}{8}$, megkapjuk: $8\cdot\frac{1}{8}+2=3$.

Az adott kifejezés cseréjét a vele azonosan egyenlő kifejezéssel, a kifejezés **azonos átalakításának** nevezzük.

Az egynemű összeadandók összevonása, a zárójelek felbontása a kifejezések azonos átalakításának tekinthetők. Ha egyszerűsítjük a kifejezést, valójában egy vele azonosan egyenlő kifejezésre cseréljük.

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy az adott egyenlőség azonosság (vagy, ahogy mondani szokták bebizonyítani az egyenlőséget), a következő technikákat (módszereket) alkalmazzuk:

- *azonosan átalakítjuk az adott egyenlőség egyik oldalát úgy, hogy megkapjuk a másik oldalt;*
- *azonosan átalakítjuk az egyenlőség mindkét oldalát úgy, hogy az egyenlőség mindkét oldalán ugyanazt a kifejezést kapjuk;*
- *megmutatjuk, hogy az egyenlőség bal és jobb oldalának a különbsége azonosan egyenlő nullával.*

1. PÉLDA Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) = -5a + 36b$;

2) $0{,}6(x - 5) + 0{,}4(x + 1) = 0{,}8(x + 2) + 0{,}2(x - 21)$;

3) $a(b - c) + b(c - a) = c(b - a)$.

Megoldás: 1) Egyszerűbb alakra hozzuk az egyenlőség bal oldalát:

$$2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) =$$
$$= 6a + 8b + 3a - 21b - 14a + 49b = -5a + 36b.$$

Bebizonyítottuk az azonosságot.

2) Egyszerűbb alakra hozzuk az egyenlőség bal és jobb oldalát:

$0{,}6(x - 5) + 0{,}4(x + 1) = 0{,}6x - 3 + 0{,}4x + 0{,}4 = x - 2{,}6$;

$0{,}8(x + 2) + 0{,}2(x - 21) = 0{,}8x + 1{,}6 + 0{,}2x - 4{,}2 = x - 2{,}6$.

Mivel ugyanazt a kifejezést kaptuk, ezzel az azonosságot bebizonyítottuk.

3) Megvizsgáljuk a bal és a jobb oldal különbségét:

$a(b - c) + b(c - a) - c(b - a) = ab - ac + bc - ab - bc + ac = 0$.

Bebizonyítottuk az azonosságot. ●

2. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy az $(a + 2)(a - 3) = a^2 - 6$ egyenlőség nem azonosság.

Megoldás: A bizonyításhoz elegendő felhozni egy *ellenpéldát*: megmutatni a változónak olyan értékeit (ha lehet néhányat), amelyeknél az adott egyenlőség nem teljesül.

Például, ha $a = 1$, akkor:

$$(a + 2)(a - 3) = (1 + 2)(1 - 3) = -6; \quad a^2 - 6 = 1 - 6 = -5.$$

Tehát az adott egyenlőség nem azonosság. ●

?

1. Mit nevezünk azonosan egyenlő kifejezéseknek?
2. Mit nevezünk azonosságnak?
3. Mit nevezünk az kifejezés azonos átalakításának?
4. A kifejezések milyen azonos átalakításait ismeritek?
5. Milyen módszereket alkalmazunk az azonosságok bizonyításánál?

GYAKORLATOK

132.° A számtani műveletek mely tulajdonságainak felhasználásával tudjuk igazolni, hogy az alábbi kifejezések azonosan egyenlőek:
1) $ab + cd$ és $cd + ab$;
2) $(a + 1) + b$ és $a + (1 + b)$;
3) $a \cdot 4b$ és $4ab$;
4) $(x + 2)(x + 3)$ és $(3 + x)(2 + x)$;
5) $7(a - 4)$ és $7a - 28$?

133.° Azonosságok-e az alábbi egyenlőségek:
1) $2x - 12 = 2(x - 6)$;
2) $a - b = -(b - a)$;
3) $3m + 9 = 3(m + 9)$;
4) $(a + b) \cdot 1 = a + b$;
5) $(a + b) \cdot 0 = a + b$;
6) $(a - a)(b + b) = 0$;
7) $3a - a = 3$;
8) $4x + 3x = 7x$;
9) $a - (b + c) = a - b + c$;
10) $m + (n - k) = m + n - k$;
11) $4a - (3a - 5) = a + 5$;
12) $(a - 5)(a + 3) = (5 - a)(3 + a)$?

134.° Azonosan egyenlők-e a kifejezések:
1) $8(a - b + c)$ és $8a - 8b + 8c$;
2) $-2(x - 4)$ és $-2x - 8$;
3) $(5a - 4) - (2a - 7)$ és $3a - 11$?

135.° Hasonlítsátok össze az a^2 és $|a|$ kifejezések értékeit, ha $a = -1; 0; 1$. Kijelenthetjük-e, hogy az $a^2 = |a|$ egyenlőség azonosság?

136.° Az alábbi kefejezések közül melyik lesz azonosan egyenlő a $-3a + 8b - a - 11b$ kifejezéssel:
1) $-4a + 3b$; 2) $-3a + 3b$; 3) $-4a - 3b$; 4) $-3a - 3b$?

137.° A $-10a + 7$, $-10a - 7$, $-14a + 7$, $-14a - 7$ kifejezések között találjátok meg azt, amelyik azonosan egyenlő a $-12a + (7 - 2a)$ kifejezéssel.

138.° Bizonyítsátok be az azonosságokat:
1) $-5x - 6(9 - 2x) = 7x - 54$;
2) $\frac{1}{3}(12 - 0{,}6y) + 0{,}3y = 0{,}1y + 4$;
3) $3(7 - a) - 7(1 - 3a) = 14 + 18a$;
4) $(6x - 8) - 5x - (4 - 9x) = 10x - 12$;
5) $3(2{,}1m - n) - 0{,}9(7m + 2n) = -4{,}8n$;
6) $\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{8}x + 6\right) - \frac{1}{6}\left(24 - 1\frac{1}{2}x\right) = 0$.

139.° Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $-0,2\,(4b-9)+1,4b=0,6b+1,8$;
2) $(5a-3b)-(4+5a-3b)=-4$;
3) $5\,(0,4x-0,3)+(0,8-0,6x)=1,4x-0,7$;
4) $\frac{1}{9}(3y-27)-2\left(\frac{1}{12}y-1,5\right)=\frac{1}{6}y.$

140.• Az alábbi egyenlőségek közül melyek azonosságok:

1) $(2a-3b)^2=(3b-2a)^2$;
2) $(a-b)^3=(b-a)^3$;
3) $|a+5|=a+5$;
4) $|a-b|=|b-a|$;
5) $|a^2+4|=a^2+4$;
6) $|a+b|=|a|+|b|$;
7) $|a-1|=|a|-1$;
8) $a^2-b^2=(a-b)^2$?

141.• Írjátok fel egyenlőségek formájában az alábbi állításokat:

1) két ellentett szám összege egyenlő nullával;
2) az adott szám és az 1 szorzata egyenlő 1-gyel;
3) az adott szám és a –1 szorzata egyenlő az adott szám ellentettjével;
4) az ellentett számok modulusa egyenlő egymással;
5) az ellentett számok különbsége egyenlő nullával.

Melyik azonosság a fenti egyenlőségek közül?

142.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $4\,(2-3m)-(6-m)-2\,(3m+4)=-17m-6$;
2) $a+b-10ab=2a\,(3-b)-3b\,(a-2)-5\,(ab+a+b)$;
3) $6\,(5a-3)+(10-20a)-(6a-4)=5a-(3a-(2a-4))$.

143.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $(3m-7)\cdot 0,6-0,8\,(4m-5)-(-1,7-1,4m)=1,5$;
2) $7a\,(3b+4c)-3a\left(b+\frac{1}{3}c\right)=9a\,(2b+3c).$

144.• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi egyenlőségek nem azonosságok:

1) $(a+3)^2=a^2+9$;
2) $(b-1)(b+1)=(b-1)\,b+1$;
3) $(c+1)^3=c^3+1$;
4) $|m|-|n|=|n|-|m|$.

145.• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi kifejezések nem azonosságok:

1) $4-m^2$ és $(2-m)^2$;
2) $|-m|$ és m;
3) m^3+8 és $(m+2)(m^2+4)$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

146. A személyvonat a két állomás közötti utat 12 óra alatt teszi meg. Ha ezekről az állomásokról egyidejűleg, egymással szemben elindul egy személyvonat és egy tehervonat, akkor az indulástól számítva 8 óra múlva találkoznak. Mennyi idő alatt ér el a tehervonat a másik állomásra?

147. A farmer két, összesen 24 hektáros földrészlegen hajdinát termesztett. Az egyik földrészlegről 8 mázsa hajdinát takarított be hektáronként, a másikról pedig 9 mázsát. Hány mázsa termést takarított be a farmer összesen, ha a második részlegről 46 q-val többet gyűjtött be, mint az elsőről?

148. Tudjuk, hogy $a > 0$ és $a + b < 0$. Hasonlítsátok össze:
1) b és 0; 2) $|a|$ és $|b|$.

149. Az áru árát először 50%-kal felemelték, aztán 50%-kal csökkentették. Több vagy kevesebb lett az áru ára az eredetihez viszonyítva, ha igen, akkor hány százalékkal?

150. A Dnyeper folyó összesen 2201 km hosszú. Ebből az ukrajnai szakasza 981 km. A Gyeszna folyó hossza 1130 km, ebből az ukrajnai szakasza 591 km. Százalékban számítva melyik folyónak hosszabb az ukrajnai szakasza?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

151. A táblára fel vannak írva az 1, 2, 3, ..., 10 számok. Az első lépésben kiválasztunk két számot, mindkettőjükhöz hozzáadhatunk 5-öt vagy mindkettőjükből elvehetünk 1-et. Ezeknek a lépéseknek a segítségével elérhetjük-e, hogy a táblán lévő összes szám egyenlő legyen?

5. A természetes kitevőjű hatvány

Már tudjátok, hogy a matematikában megtalálták a módját az azonos tényezőket tartalmazó szorzat rövidebb felírásának.

Például $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

A $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ kifejezést **hatványnak** nevezzük, az $\frac{1}{2}$ a hatvány alapja, a 3 a **hatvány kitevője**.

Meghatározás. Az *a* szám természetes *n* kitevőjű hatványának nevezzük azt az *n* tényezőből álló szorzatot, amelynek minden tagja *a*-val egyenlő.

Az a alapú és n kitevőjű hatványt a^n alakban írjuk fel és így olvassuk: a az n-edik hatványon. Ha a hatványkitevő 2 és 3, akkor az a^2 kifejezést így olvassuk: a a négyzeten, az a^3-t pedig: a a köbön.

Felhívjuk a figyelmetek a természetes kitevőjű hatvány meghatározásában az $n > 1$ feltételre. Kézenfekvő, nem vizsgálhatunk egy olyan szorzatot, amelyik csak egy tényezőből áll.

És lehet-e 1 a hatványkitevő? Erre a kérdésre a választ a következő meghatározás adja meg.

Meghatározás. Az *a* szám az első hatványon magával az *a* számmmal egyenlő.

A fenti meghatározás szerint minden számra úgy tekinthetünk, mint az adott szám első hatványára.

A két meghatározás alapján felírhatjuk:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}, \text{ ha } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

Könnyen kiszámíthatjuk, hogy $2^5 = 32$. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a **2-t az ötödik hatványra emeltük,** és 32-t kaptunk. De azt is mondhatjuk, hogy elvégeztük a 2 **ötödik hatványra való emelését.**

A $(-3)^2 = 9$ egyenlőség azt jelenti, hogy a – 3-at **négyzetre emeltük,** és eredményül 9-et kaptunk, a $(-3)^3 = -27$ egyenlőség azt jelenti, hogy a – 3-at **köbre emeltük,** és eredményül –27-et kaptunk.

Megjegyezzük, hogy az algebrai kifejezések az összeadáson, kivonáson, szorzáson és osztáson kívül hatványozást is tartalmazhatnak.

Könnyen belátható, hogy amikor $a > 0$, akkor $a^n > 0$; ha $a = 0$, akkor $0^n = 0$.

Tehát, ha egy ***nem negatív számot hatványra emelünk, eredményül szintén nem negatív számot kapunk.***

Ha negatív számot emelünk hatványra, akkor két eset lehetséges.

1) Ha a hatványkitevő páros szám, akkor hatványra emelésnél a tényezőket párosíthatjuk.

Például $(-2)^6 = ((-2)\,(-2)) \cdot ((-2)\,(-2)) \cdot ((-2)\,(-2))$.

2) Ha a hatványkitevő páratlan szám, akkor a párosítás után egy számnak nem marad párja.

Például $(-2)^5 = ((-2)\,(-2)) \cdot ((-2)\,(-2)) \cdot \mathbf{(-2)}$.

Mivel két negatív szám szorzata pozitív szám, ezért igazak a következő állítások:

negatív szám hatványra emelésekor, ha a hatványkitevő páros szám, akkor eredményül pozitív számot kapunk, ha pedig a negatív szám hatványkitevője páratlan, akkor az eredmény negatív szám.

Lehet-e például az 5-öt 0 vagy –2 hatványra emelni? A válasz igen. Hogy hogyan kell ezt elvégezni, erről a 8. osztályban fogtok tanulni.

1. PÉLDA Oldjátok meg az $(x - 10)^8 = -1$ egyenletet.

Megoldás: Mivel bármely negatív szám hatványra emelésekor, ha a hatványkitevő páros, eredményül nemnegatív számot kapunk, ezért az adott egyenletnek nincs megoldása.

Felelet: nincs megoldás.

2. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy a $10^{200} + 2$ kifejezés értéke osztható 3-mal.

Megoldás: A 10^{200} kifejezés értéke egy 1-es számjegyből és 200 darab nullából áll, a $10^{200} + 2$ kifejezés eredménye egy 1-es, egy 2-es számjegyből és 200 darab nullából áll. Tehát, ha összeadjuk a kifejezés értékének a számjegyeit, az összeadás eredményéül 3-at kapunk, ezért maga a szám is osztható 3-mal.

3. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy a $9^n - 1$ kifejezés értéke osztható 10-zel bármely páros n esetén.

Megoldás: Ha n páros szám, akkor a 9^n kifejezést olyan szorzatként írhatjuk fel, amelyik páros számú kilencesből áll: $9^n = (9 \cdot 9)(9 \cdot 9) \ldots (9 \cdot 9)$. Mivel $9 \cdot 9 = 81$, ezért a $(9 \cdot 9)(9 \cdot 9) \ldots (9 \cdot 9)$ kifejezés értékének utolsó számjegye 1. Tehát a $9^n - 1$ kifejezés értékének utolsó számjegye 0. Levonhatjuk a következtetést, hogy a $9^n - 1$ kifejezés értéke osztható 10-zel bármely páros n esetén.

?

1. Mit nevezünk az *a* szám természetes *n* kitevős hatványának $n > 1$ esetén?
2. Hogyan olvassuk el a következő kifejezéseket: a^n, a^2, a^3?
3. Mit nevezünk az *a* szám első hatványának?
4. Mennyivel egyenlő a 0^n kifejezés értéke bármely termésetes n esetén?
5. Pozitív vagy negatív számot kapunk pozitív szám hatványra emelésekor?
6. Pozitív vagy negatív számot kapunk negatív szám hatványra emelésekor, ha a hatványkitevő páros? Ha páratlan?

GYAKORLATOK

152.° Olvassátok el a kifejezéseket, nevezzétek meg a hatvány alapját és a hatványkitevőt:

1) 9^6;	3) $0{,}3^5$;	5) $(-0{,}6)^3$;	7) 73^1;
2) $2{,}4^7$;	4) $(-8)^2$;	6) $(-a)^{11}$;	8) $(3p)^{12}$.

153.° Írjátok fel hatvány alakjában az azonos tényezőket tartalmazó kifejezéseket:

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
2) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$;
3) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;
4) $2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m$;
5) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$;
6) $\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{10 \text{ tényező}}$;
7) $\underbrace{0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot \ldots \cdot 0{,}4}_{k \text{ tényező}}$;
8) $\underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{m \text{ tényező}}$.

154.° A hatvány meghatározásának felhasználásával írjátok fel szorzat alakjában a hatványokat:

1) 11^6;
2) $0{,}1^4$;
3) $\left(-\frac{1}{6}\right)^9$;
4) $(5c)^3$;
5) $(-3{,}6)^7$;
6) $(a + b)^5$.

155.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) 2^5;
2) $0{,}6^2$;
3) $1{,}5^3$;
4) 0^6;
5) 1^{12};
6) $(-1)^{12}$;
7) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$;
8) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$.

156.° Végezzétek el a hatványraemelést:

1) 7^2;
2) $0{,}5^3$;
3) $1{,}2^2$;
4) $(-1)^7$;
5) $(-0{,}8)^3$;
6) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$;
7) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$;
8) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

157.° Töltsétek ki a táblázatot:

a	2	–2	10	–10	0,1	–0,1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
a^2								
a^3								
a^4								

158.° Töltsétek ki a táblázatot:

a	–6	6	–0,4	0,4	3	0,03	$\frac{1}{2}$	–1	0
$10a^2$									
$(10a)^2$									

159.° A Krím félsziget Ukrajna legnagyobb félszigete. Területe $2{,}55 \cdot 10^4$ km^2. Fejezzétek ki ezt a területet természetes számmal négyzetkilométerekben.

160.° A Föld és a Nap közötti távolság $1{,}495 \cdot 10^{11}$ m. Fejezzétek ki ezt a távolságot természetes számmal méterekben.

161.° A szárazföld és a szigetek területe a Földön $1{,}49 \cdot 10^8$ km^2, az óceánok területe pedig $3{,}61 \cdot 10^8$ km^2. Fejezzétek ki ezeknek a területeknek a nagyságát természetes számmal.

162.° Számítsátok ki:

1) $8^2 - 1^{10}$;
2) $0{,}3 \cdot 2^4$;
3) $(4{,}2 - 3{,}8)^4 \cdot 25^2$;
4) $(6^3 : 200 - 0{,}4^2) : 0{,}2^3$.

163.° Számítsátok ki:

1) $4^3 + 3^5$;
2) $0{,}6^3 - 0{,}4^3$;
3) $0{,}12 \cdot 5^4$.

164.° Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $x^2 - x^3$, ha $x = 0{,}1$;
2) $15a^2$, ha $a = 0{,}4$;
3) $(x - y)^5$, ha $x = 0{,}8$, $y = 0{,}6$;
4) a^2b^3, ha $a = 0{,}6$, $b = 0{,}5$;
5) $(x^2 - y^2) : (x - y)$, ha $x = 5$, $y = 3$;
6) $(x^2 - y^2) : x - y$, ha $x = 5$, $y = 3$;
7) $x^2 - y^2 : (x - y)$, ha $x = 5$, $y = 3$;
8) $x^2 - y^2 : x - y$, ha $x = 5$, $y = 3$.

165.° Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $16 - c^3$, ha $c = 2$;
2) $(16x)^6$, ha $x = 0{,}125$;
3) a^3b^2, ha $a = 10$, $b = 0{,}1$;
4) $4a^4 - a$, ha $a = 3$.

166.° A kifejezések kiszámítása nélkül tegyétek ki a megfelelő relációs jelet:

1) $(-5{,}8)^2$ és 0;
2) 0 és $(-3{,}7)^3$;
3) $(-12)^7$ és $(-6)^4$;
4) -8^8 és $(-8)^8$;
5) $(-17)^6$ és 17^6;
6) $(-34)^5$ és $(-39)^5$.

167.° A kifejezések kiszámítása nélkül tegyétek ki a megfelelő relációs jelet:

1) 0 és $(-1{,}9)^{10}$;
2) 0 és $(-76)^{15}$;
3) $(-0{,}1)^{12}$ és $(-12)^{25}$;
4) $\left(-4\frac{7}{9}\right)^9$ és $\left(-5\frac{8}{11}\right)^9$.

168.° Hasonlítsátok össze 0-val a kifejezések értékét: 2^{100}; $(-2)^{100}$; -2^{100}; $-(-2)^{100}$. Van-e közöttük olyan kifejezés, amelynek azonos az értéke?

169.° Hasonlítsátok össze 0-val a kifejezések értékét: 5^{101}; -5^{101}; $(-5)^{101}$; $-(-5)^{101}$. Van-e a közöttük olyan kifejezés, amelynek különböző az értéke?

170.° Igazak-e az alábbi egyenlőségek:

1) $3^2 + 4^2 = 7^2$;
2) $5^2 + 12^2 = 13^2$;
3) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 13^2$;
4) $(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$?

171.° Bizonyítsátok be, hogy: $1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 = 11^2$.

172.• Rendezzétek növekvő sorrendbe a kifejezéseket:
1) $0{,}3$; $0{,}3^2$; $0{,}3^3$; 2) $-0{,}4$; $(-0{,}4)^2$; $(-0{,}4)^3$.

173.• Hasonlítsátok össze 0-val a kifejezések értékét:
1) $(-4)^7 \cdot (-12)^9$; 2) $(-5)^6 \cdot (-17)^{11}$; 3) $(-14)^4 \cdot (-25)^{14}$; 4) $(-7)^9 \cdot 0^6$.

174.• Hasonlítsátok össze 0-val a kifejezések értékét:
1) $(-2)^{14} \cdot (-3)^{15} \cdot (-4)^{16}$; 2) $(-5)17 \cdot (-6)^{18} \cdot (-7)^{19}$.

175.• Írjátok fel:
1) a 16-ot; a 64-et; a 256-ot 4 hatványaként;
2) a 0,09-ot; a 0,027-et; 0,00243-et 0,3 hatványaként.

176.• Írjátok fel a: 1) 10 000; 2) –32; 3) 0,125; 4) –0,00001; 5) $-\frac{8}{343}$ számokat egynél nagyobb hatványkitevővel és a modulus szerint a legkisebb lehetséges alappal.

177.• Írjátok fel számkifejezés alakjában az alábbi kifejezéseket, és számítsátok ki az értéküket:
1) 7 és 5 különbségének a négyzete;
2) 7 és 5 négyzeteinek különbsége;
3) 4 és 3 összegének köbe;
4) 4 és 3 köbének összege.

178.• Írjátok fel számkifejezés alakjában, és számítsátok ki az értékét:
1) 5 köbének és 8 négyzetének összege;
2) 9 és 8 különbségének köbe;
3) 2,5 és 0,25 négyzeteinek összege;
4) 7,8 és 8,2 összegének négyzete.

179.• Hány:
1) méter; 2) centiméter; 3) milliméter van 1 km-ben?
A válaszokat írjátok fel 10-es alapú hatványok alakjában.

180.• A fény sebessége légüres térben 300 000 km/s.
1) Írjátok fel ezt a számot 10-es alapú hatvány alakjában.
2) Fejezzétek ki a fény sebességét méter per szekundumban; a kapott számot írjátok fel 10-es alapú hatvány alakjában.

181.• Hány:
1) négyzetdeciméter; 2) négyzetcentiméter;
3) négyzetmilliméter van 1 négyzetméterben?
A feleletet írjátok fel 10-es alapú hatvány alakjában.

182.• A –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 számok közül melyek az alábbi egyenletek gyökei:
1) $x^4 = 16$; 3) $x^2 + x = 2$;
2) $x^5 = -243$; 4) $x^3 + x^2 = 6x$?

183.• Az x mely értékénél lesz az alábbi kifejezések értéke nulla:
1) $(2x - 3)^2$; 2) $(x + 4)^4$; 3) $(6x - 1)^5$?

184.• Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $x^{10} = -1$; 2) $(x - 5)^4 = -16$.

185.• Az n mely természetes értéke mellett lesz igaz a $8 < 3^n < 85$ egyenlőtlenség?

186.• Az m mely természetes értéke mellett lesz igaz a $0{,}07 < 0{,}4^m < 0{,}5$ egyenlőtlenség?

187.•• Bizonyítsátok be, hogy az $x^2 + (x - 1)^2$ kifejezés csak pozitív értéket vehet fel.

188.•• Bizonyítsátok be, hogy az $(x + 1)^2 + |x|$ kifejezésnek csak pozitív értéke lehet a változó bármely értéke mellett.

189.•• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi egyenleteknek nincs pozitív gyöke:

1) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; 2) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.

190.•• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi egyenleteknek nincs negatív gyöke:

1) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 5 = 0$; 2) $x^8 + x^4 + 1 = x^7 + x^3 + x$.

191.•• Az x és az y mely értékei mellett igazak az alábbi egyenlőségek:

1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $(x - 1)^4 + (y + 2)^6 = 0$?

192.•• Az x és az y mely értékei mellett igaz az $x^8 + (y - 3)^2 = 0$ egyenlőség?

193.•• A változó mely értéke mellett lesz a kifejezésnek legkisebb az értéke:

1) $x^2 + 7$; 2) $(x - 1)^4 + 16$?

194.•• A változó mely értéke mellett lesz a kifejezésnek legnagyobb az értéke:

1) $10 - x^2$; 2) $24 - (x + 3)^6$?

195.•• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi kifejezés:

1) $101^{101} + 103^{103}$ maradék nélkül osztható 2-vel;
2) $16^7 + 15^8 - 11^9$ maradék nélkül osztható 10-zel;
3) $10^{10} - 7$ maradék nélkül osztható 3-mal;
4) $6^n - 1$ maradék nélkül osztható 5-tel bármely természetes n esetén.

196.•• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi kifejezés:

1) $10^{100} + 8$ maradék nélkül osztható 9-cel;
2) $111^n - 6$ maradék nélkül osztható 5-tel bármely természetes n esetén.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

197. Számítsátok ki a $\left(3\frac{1}{3} \cdot 1{,}9 - 7{,}2 \cdot \frac{2}{27} - 9{,}1 : 3{,}5\right) : \frac{2}{5}$ kifejezés értékét.

198. A 400 kg-os ötvözethez, amely 15% rezet tartalmaz hozzáadtak még 25 kg rezet. Mennyi lett ezek után az ötvözet réztartalma százalékban kifejezve?

199. Az egyik zsákban 80 kg, a másokban 60 kg cukor van. Miután az első zsákból 3-szor több cukrot vettek ki, mint a másikból, a második zsákban 2-szer annyi cukor maradt, mint az elsőben. Hány kg cukrot vettek ki a zsákokból?

200. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $9(2x-1)-5(11-x)=3(x+4)$; 2) $5x-26=12x-7(x-4)$.

201. Ismert, hogy az a, b és c számok közül az egyik pozitív, a másik negatív, a harmadik egyenlő nullával, miközben teljesül az $|a| = b^2(b-c)$ egyenlőség. Határozzátok meg, hogy az adott számok közül melyik pozitív, melyik negatív és melyik egyenlő nullával.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

202. Hasonlísátok össze a kifejezések értékeit:

1) $2^2 \cdot 2^3$ és 2^5; 3) $(3^3)^2$ és 3^6; 5) $5^3 \cdot 2^3$ és $(5 \cdot 2)^3$;

2) $4^2 \cdot 4^1$ és 4^3; 4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^3$ és $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$; 6) $(0{,}25 \cdot 4)^2$ és $0{,}25 \cdot 4^2$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

203. Egy város bármelyik metróállomásáról eljuthatunk bármelyik másik állomásra (lehet, hogy csak átszállásokkal). Bizonyítsátok be, hogy létezik egy olyan állomás, amelyiket, ha bezárjuk (nem utazhatunk át rajta), a megmaradt állomások bármelyikéről ugyanúgy el tudunk jutni bármelyik másik állomásra.

6. A természetes kitevőjű hatvány tulajdonságai

Megvizsgálunk egy olyan szorzatot, amelyik két azonos alapú hatványból áll: a^2a^5. Ezt a kifejezést felírhatjuk a alapú hatványként:

$$a^2a^5 = (aa) \cdot (aaaaa) = aaaaaaa = a^7.$$

Tehát: $a^2a^5 = a^{2+5}$.

Hasonlóképpen meggyőződhetünk például arról, hogy $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$, $a \cdot a^9 = a^{1+9} = a^{10}$.

Megfigyelhetjük a következő törvényszerűséget: $a^m a^n = a^{m+n}$, ahol m és n természetes számok.

Azonban tetszőleges számú konkrét példa esetén sem tudjuk garantálni, hogy a vizsgált egyenlőség mindig igaz *bármely* természetes m és n esetén. Az egyenlőség helyességéről csak **bizonyítás** útján győződhetünk meg.

A matematikában az olyan állítást, amelynek helyességéről bizonyítás segítségével tudunk meggyőződni, **tételnek** nevezzük.

6.1. tétel. ***Bármely a és bármely természetes m és n számra igaz a következő egyenlőség:***

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Bizonyítás. $m > 1$ és $n > 1$ esetén:

$$a^m a^n = (\underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ tényező}})(\underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}) = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ tényező}} = a^{m+n}.$$

Mivel nem elfogadott az egy tényezőből álló szorzat vizsgálata, ezért a bizonyítás teljessége érdekében külön-külön megvizsgáljuk a következő eseteket: $m = 1$ és $n > 1$;$m > 1$ és $n = 1$; $m = n = 1$. Tehát, ha $m = 1$ és $n > 1$, akkor

$$a \cdot a^n = a \cdot (\underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}) = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{(n+1) \text{ tényező}} = a^{n+1}.$$

Az $m > 1$ és $n = 1$ vagy $m = n = 1$ eseteket vizsgáljátok meg önállóan. ▲

Az $a^m a^n = a^{m+n}$ azonosság **a hatvány alaptulajdonságát** fejezi ki.

Ez a tulajdonság igaz három vagy több hatvány szorzata esetében is. Pédául:

$$3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^7 = (3^2 \cdot 3^3) \cdot 3^7 = 3^{2+3} \cdot 3^7 = 3^{(2+3)+7} = 3^{2+3+7} = 3^{12}.$$

Tehát ***azonos alapú hatványok szorzásánál az alapot változatlanul hagyjuk, a hatványkitevőket pedig összeadjuk.***

Megizsgáljuk az $a^9 : a^4$ kifejezést, ahol $a \neq 0$. Ez a kifejezés két azonos alapú hatvány hányadosa. Mivel $a^4 \cdot a^5 = a^9$, ezért a hányados meghatározása alapján felírhatjuk: $a^9 : a^4 = a^5$, vagyis $a^9 : a^4 = a^{9-4}$. E példa alapján felírhatjuk a következő tételt.

6.2. tétel. ***Bármely nullától különböző a számra és bármely természetes m és n hatványkitevőre (m > n) igaz a következő egyenlőség:***

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}.$$

Bizonyítás. Megvizsgáljuk az a^n és az a^{m-n} hatványok szorzatát. Felhasználva a hatvány alaptulajdonságát, felírhatjuk:

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)} = a^{n+m-n} = a^m.$$

Ekkor a hatvány meghatározása alapján:

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \ ▲$$

Ebből a tételből a következő szabály következik:

azonos alapú hatványok osztásánál az alapot változatlanul hagyjuk, az osztandó hatványkitevőjéből pedig kivonjuk az osztó hatványkitevőjét.

Megvizsgáljuk az $(a^3)^4$ kifejezést. Ennek a kifejezésnek az alapja a^3, a hatványkitevője pedig 4. Ezért felírhatjuk:

$$(a^3)^4 = a^3a^3a^3a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3\cdot 4} = a^{12}.$$

A fenti péda a következő tétel felírására ad lehetőséget.

6.3. tétel. ***Bármely a szám és természetes m és n számok esetén igaz a következő egyenlőség:***

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Bizonyítás. Könnyen belátható, ha $n = 1$, akkor igaz az egyenlőség. Ha $n > 1$, akkor felírhatjuk:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ tényező}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ összeadandó}}} = a^{mn}. \ \blacktriangle$$

Ebből a tételből a következő szabály következik:

hatvány hatványozásánál a hatványkitevőket összeszorozzuk, az alapot pedig változatlanul hagyjuk.

Például: $(3^7)^2 = 3^{7\cdot 2} = 3^{14}$; $(x^4)^3 = x^{4\cdot 3} = x^{12}$.

Az $(ab)^3$ kifejezés példáján megmutatjuk, hogyan tudjuk átalakítani a szorzat hatványát:

$$(ab)^3 = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (aaa) \cdot (bbb) = a^3b^3.$$

Általános esetben felírhatjuk a következő tételt.

6.4. tétel. ***Bármely a és b szám és természetes n szám esetén igaz a következő egyenlőség:***

$$(ab)^n = a^nb^n.$$

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogyha $n = 1$, akkor a bizonyított egyenlőség igaz. Ha $n > 1$, akkor felírhatjuk:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ tényező}} = \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ tényező}}\underbrace{(bb \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ tényező}} = a^nb^n. \ \blacktriangle$$

Ez a tulajdonság igaz három vagy akár több tényező esetén is. Például: $(abc)^n = ((ab) \cdot c)^n = (ab)^n \cdot c^n = a^nb^nc^n$.

Tehát a ***szorzat hatványozásánál a tényezőket külön-külön hatványra emeljük, majd a kapott eredményeket összeszorozzuk.***

1. PÉLDA 1 Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket: 1) $(a^5)^2 \cdot (a^6)^7$; 2) $(-a^4)^9$; 3) $(-a^4)^8$.

Megoldás: 1) Egymás után alkalmazzuk a hatvány hatványozásának és az azonos alapú hatványok szorzásának szabályait:

$$(a^5)^2 \cdot (a^6)^7 = a^{10} \cdot a^{42} = a^{52}.$$

2) Mivel $-a^4 = -1 \cdot a^4$, ezért felhasználva a szorzat hatványozásának szabályát a következőt kapjuk:

$$(-a^4)^9 = (-1 \cdot a^4)^9 = (-1)^9 \cdot (a^4)^9 = -1 \cdot a^{36} = -a^{36}.$$

3) Végül: $(-a^4)^8 = (-1 \cdot a^4)^8 = (-1)^8 \cdot (a^4)^8 = 1 \cdot a^{32} = a^{32}$.

2. PÉLDA Írjátok fel hatvány alakjában a 216 a^3b^6 kifejezést.

Megoldás: Felírhatjuk: $216a^3b^6 = 6^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3 = (6ab^2)^3$.

3. PÉLDA Határozzátok meg a kifejezés értékét $\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$.

Megoldás: $\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

4. PÉLDA Hasonlítsátok össze a kifejezéseket:

1) $(-11)^{14} \cdot (-11)^3$ és $(-11)^{16}$;
2) $(-12)^{19}$ és $(-12)^{15}$;
3) 5^{30} és 9^{20};
4) 16^3 és 65^2.

Megoldás: 1) Felírhatjuk: $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 = (-11)^{17} < 0$. Ezzel együtt felírhatjuk: $(-11)^{16} > 0$.

Tehát $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 < (-11)^{16}$.

2) Mivel $|(-12)^{19}| > |(-12)^{15}|$, és a számok, amelyeket összehasonlítunk negatívak, ezért $(-12)^{19} < (-12)^{15}$.

3) Mivel $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ és $9^{20} = (9^2)^{10} = 81^{10}$, ezért $5^{30} > 9^{20}$.

4) Felírhatjuk: $16^3 = (4^2)^3 = (4^3)^2 = 64^2$. Tehát $16^3 < 65^2$.

5. PÉLDA Milyen számjegyre végződik a 2^{100} kifejezés értéke?

Megoldás: Felírhatjuk: $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$. Mivel $6 \cdot 6 = 36$, ezért bármelyik 6-ra végződő szám szorzatának az utolsó számjegye 6 lesz.

Ezért a 6-ra végződő szám bármilyen hatványa 6-ra végződik.

Felelet: 6.

?

1. Írjátok fel azt az azonosságot, amely kifejezi a hatvány alaptulajdonságát!
2. Hogyan lehet azonos alapú hatványokat szorozni?
3. Hogyan lehet azonos alapú hatványokat osztani?
4. Hogyan emeljük hatványra a hatványokat?
5. Hogyan emeljük hatványra a szorzatot?

GYAKORLATOK

204.° Adjátok meg hatvány alakjában a szorzatot:
1) m^5m^4; 5) $y^3y^5y^9$; 9) $x^4xx^{11}x^2$;
2) xx^7; 6) c^8c^9c; 10) $(ab)^5\cdot(ab)^{15}$;
3) a^3a^3; 7) $(b-c)^{10}(b-c)^6$; 11) $(2x+3y)^6\cdot(2x+3y)^{14}$;
4) $6^2\cdot 6^3$; 8) $11^9\cdot 11^4\cdot 11^6$; 12) $(-xy)^2\cdot(-xy)^7\cdot(-xy)^9$.

205.° Adjátok meg hatvány alakjában a kifejezést:
1) a^5a^8; 3) a^9a; 5) $(m+n)^{13}\cdot(m+n)$;
2) a^2a^2; 4) aa^2a^3; 6) $(cd)^2\cdot(cd)^{12}\cdot(cd)$.

206.° A csillag helyére írjatok olyan a alapú hatványt, hogy igaz egyenlőséget kapjunk:
1) $a^6\cdot * = a^{14}$; 2) $*\cdot a^6 = a^7$; 3) $a^{10}\cdot * \cdot a^2 = a^{12}$.

207.° Az a^{12} kifejezést írjátok fel két a alapú hatvány szorzataként, amelyek közül az egyik:
1) a^6; 2) a^4; 3) a^3; 4) a^5; 5) a.

208.° Adjátok meg hatvány alakjában a hányadost:
1) $a^{12} : a^3$; 2) $b^6 : b$; 3) $c^7 : c^6$; 4) $(a+b)^8 : (a+b)^4$.

209.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:
1) $7^7 : 7^5$; 2) $10^{18} : 10^{14}$; 3) $0{,}6^9 : 0{,}6^6$; 4) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^5 : \left(-1\frac{1}{8}\right)^3$.

210.° Végezzétek el az osztást:
1) $m^{10} : m^2$; 2) $x^5 : x^4$; 3) $y^{18} : y^6$.

211.° Adjátok meg a kifejezést m alapú hatvány alakjában:
1) $(m^5)^3$; 2) $(m^3)^4$; 3) $((m^2)^4)^6$; 4) $(m^7)^2\cdot(m^4)^9$.

212.° Adjátok meg a kifejezést n alapú hatvány alakjában:
1) $(n^2)^8$; 2) $(n^9)^5$; 3) $((n^3)^2)^{10}$; 4) $(n^{12})^4\cdot(n^{21})^2$.

213.° Adjátok meg a hatványt hatványok szorzataként:
1) $(ab)^6$; 3) $(3c)^7$; 5) $(-0{,}2cd)^4$;
2) $(mnp)^5$; 4) $(-8xy)^3$; 6) $\left(\frac{3}{7}kt\right)^9$.

214.° Adjátok meg a hatványt hatványok szorzataként:
1) $(ax)^2$; 2) $(xyz)^{12}$; 3) $(7m)^8$; 4) $(-0{,}3bc)^{11}$.

215.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:
1) $-x\cdot x^2$; 3) $-x\cdot(-x)^2$;
2) $(-x)^2\cdot x$; 4) $(-x)\cdot(-x)^2\cdot(-x)$.

216.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:
1) $(-a)^2\cdot a^3$; 2) $-a^2\cdot a^3$; 3) $a^2\cdot(-a)^3$; 4) $-a^2\cdot(-a)^3$.

217.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:
1) $(-a^5)^2$; 2) $(-a^3)^3$; 3) $(-a^4)^7 \cdot (-a^2)^6$.

218.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:
1) $((-a^6)^5)^9$; 2) $((-a^{11})^2)^3$.

219.° Adjátok meg hatvány alakjában a kifejezést:
1) a^3b^3; 3) $9m^2n^2$; 5) $-\frac{27}{343}c^3d^3$;
2) $-m^7$; 4) $64x^3y^3$; 6) $0{,}0001k^4p^4$.

220.° Adjátok meg hatvány alakjában a kifejezést:
1) $x^{12}y^{12}$; 2) $-125m^3n^3$; 3) $32p^5q^5$; 4) $1\,000\,000\,000a^9b^9c^9$.

221.° Adjátok meg hatvány alakjában a kifejezést, és számítsátok ki értékét (ha szükséges használjátok a könyv előzéklapján található hatványtáblázatot):
1) $2^3 \cdot 2^4$; 3) $0{,}2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}2^3$; 5) $2^{12} : 2^8$; 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot 9^9$;
2) $(3^2)^3$; 4) $0{,}5^{10} \cdot 2^{10}$; 6) $(3^4)^5 : 3^{19}$; 8) $2{,}5^6 \cdot 40^6$.

222.° Adjátok meg hatvány alakjában a kifejezést, és számítsátok ki értékét (ha szükséges használjátok a könyv előzéklapján található hatványtáblázatot):
1) $2^2 \cdot 2^3$; 3) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^3$; 5) $7^9 \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^9$;
2) $(2^2)^3$; 4) $0{,}3^8 : 0{,}3^5$; 6) $12{,}5^3 \cdot 8^3$.

223.° Az alábbi példákban keressétek meg a hibákat:
1) $a^4a^3 = a^{12}$; 4) $3^2 \cdot 5^2 = 15^4$; 7) $3 \cdot 4^3 = 12^3$;
2) $a \cdot a = 2a$; 5) $2^2 \cdot 7^3 = 14^6$; 8) $a^7b^7 = (ab)^{14}$;
3) $(a^3)^2 = a^9$; 6) $(2a)^4 = 8a^4$; 9) $a^3b^2 = (ab)^6$.

224.° Helyettesítsétek a csillagokat olyan kifejezéssel, hogy igaz egyenlőséget kapjatok:
1) $(*)^4 = c^{20}$; 2) $(*)^2 = c^{14}$; 3) $(*)^n = c^{8n}$; 4) $(*)^7 = c^{7n}$,
ahol n természetes szám.

225.• Írjátok fel az a^7 hatványt két, a alapú hatvány szorzataként az összes lehetséges módon.

226.• Írjátok fel hatvány alakjában a kifejezéseket:
1) a^na^5; 2) aa^n; 3) a^3a^n; 4) $(a^3)^n$; 5) $(a^n)^2 \cdot (a^k)^n$,
ahol n természetes szám.

227.• Írjátok fel hatvány alakjában a kifejezéseket:
1) $2^4 \cdot 2^4$; 2) $2^4 + 2^4$; 3) $2^n \cdot 2^n$; 4) $2^n + 2^n$,
ahol n természetes szám.

228.• Írjátok fel hatvány alakjában a kifejezéseket:
1) $3^5 + 3^5 + 3^5$; 2) $4^k + 4^k + 4^k + 4^k$, ahol k természetes szám.

229.• Bizonyítsátok be, hogyha a négyzet oldalát n-szeresére növeljük, akkor a területe n^2-szeresére nő.

230.• Hányszorosára nő a kocka térfogata, ha az élét m-szeresére növeljük?

231.• Adjátok meg a kifejezéseket olyan hatványok alakjában, amelynek kitevője 2:
1) a^2b^6; 2) x^8y^{14}; 3) $x^4y^{10}z^{18}$; 4) $4m^{12}n^{16}$; 5) $81c^{10}d^{32}p^{44}$.

232.• Adjátok meg a kifejezéseket olyan hatványok alakjában, amelynek kitevője 3:
1) a^3b^6; 2) x^9y^{15}; 3) $8x^{12}y^{18}z^{24}$; 4) $0{,}001m^{30}n^{45}$.

233.• Adjátok meg a kifejezéseket olyan hatványok alakjában, amelynek 5 az alapja:
1) 125^6; 2) $(25^4)^2$.

234.• Adjátok meg a kifejezéseket olyan hatványok alakjában, amelynek –5 az alapja:
1) 625^5; 2) $((-25)^2)^3$.

235.• Adjátok meg 2-es alapú hatványként a kifejezéseket:
1) $8^9 \cdot 4^5$; 2) $32 \cdot 16^6 \cdot 64^3$.

236.• Számítsátok ki a kifejezések értékét:
1) $(6^4)^4 : (6^5)^3$; 2) $8^3 : 4^4$; 3) $\dfrac{7^{14} \cdot (7^2)^3}{(7^3)^5 \cdot 7^2}$; 4) $\dfrac{25^3 \cdot 125^2}{5^{10}}$; 5) $\dfrac{3^8 \cdot 7^8}{21^7}$; 6) $\dfrac{5^9 \cdot 4^6}{20^6}$.

237.• Számítsátok ki:
1) $100^5 : 1000^2$; 2) $\dfrac{3^{10} \cdot (3^3)^5}{(3^5)^4 \cdot 3}$; 3) $\dfrac{4^3 \cdot 16^2}{2^{10}}$; 4) $\dfrac{45^{10}}{5^8 \cdot 3^{19}}$.

238.• Számítsátok ki a kifejezések értékét:
1) $\left(1\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{10}$; 2) $5^{14} \cdot 0{,}2^{12}$; 3) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8$.

239.• Határozzátok meg a kifejezések értékét:
1) $10^5 \cdot 0{,}1^7$; 2) $1{,}9^{14} \cdot \left(\frac{10}{19}\right)^{15}$.

240.• Hasonlítsátok össze a kifejezéseket:
1) $(-5)^{21} \cdot (-5)$ és $(-5)^{24}$; 2) $(-7)^8 \cdot (-7)^7$ és $(-7)^{17}$; 3) $(-8)^5 \cdot (-8)^4$ és $(-8)^8$; 4) $(-6)^3 \cdot (-6)^9$ és $(-6)^{13}$.

241.• Helyettesítsétek a csillagot olyan hatvánnyal, hogy igaz egyenlőséget kapjunk:
1) $8 \cdot * = 2^8$;
2) $a^n \cdot * = a^{3n+9}$, ahol n természetes szám.

242.• Írjátok fel a 3^{24} kifejezést olyan hatványként, amelynek alapja:
1) 3^3; 2) 3^{12}; 3) 9; 4) 81.

243.• Írjátok fel a 2^{48} kifejezést olyan hatványként, amelynek alapja:
1) 2^4; 2) 2^{16}; 3) 8; 4) 64.

244.• Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $x^7 = 6^{14}$; 2) $x^4 = 5^{12}$.

245.•• Hasonlítsátok össze a kifejezések értékeit:
1) 2^{300} és 3^{200}; 2) 4^{18} és 18^9; 3) 27^{20} és 11^{30}; 4) $3^{10} \cdot 5^8$ és 15^9.

246.•• Hasonlítsátok össze a kifejezések értékeit:
1) 10^{40} és $10\,001^{10}$; 2) 124^4 és 5^{12}; 3) 8^{12} és 59^6; 4) 6^{14} és $2^{16} \cdot 3^{12}$.

247.* Tudjuk, hogy a 625 + 625 + ... + 625 összeg egyenlő 5^{101}. Hány összeadandóból áll az összeg?

248.* Milyen számjegyre végződik a kifejezés értéke (n természetes szám):
1) 4^{100}; 2) 3^{4n}; 3) 4^n; 4) 3^n?

249.* Milyen számjegyre végződik a kifejezés értéke (n természetes szám):
1) 9^{2n}; 2) 7^{4n}; 3) 7^{2n}?

250.* Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke:
1) $17^8 + 19$ osztható 10-zel;
2) $64^{64} - 1$ osztható 5-tel;
3) $3^{4n} + 14$, ahol n természetes szám, osztható 5-tel.

251.* Bizonyítsátok be, hogy a kifejezések értéke:
1) $4^{40} - 1$; 2) $2004^{171} + 171^{2004}$
osztható 5-tel!

252.* Bizonyítsátok be, hogy $48^{25} < 344^{17}$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

253. (*Ukrán folklórból származó feladat.*) Azt kérdezi János gazda István gazdától: „Hány kacsád van?” Erre István gazda azt válaszolta: „Annyi kacsám van, hogyha megülnének és ugyanannyi kiskacsát költenének ki, mint amennyi kacsám jelenleg van, és vennék hozzájuk még 3-szor annyit, mint amennyi nagykacsa és kiskacsa van összesen, akkor pontosan 100 kacsám lenne.” Hány kacsája volt István gazdának?

254. Az egyik szobafestő 6 óra alatt tudja kifesteni a szobát, a másik 4 óra alatt. Először az első munkás dolgozott 2 órát, aztán csatlakozott hozzá a másik munkás. Hány óra alatt festették ki együtt a szobát?

255. A kikötőből a vízfolyás irányában egy csónakkal turisták indultak el kirándulni. Úgy tervezték, hogy 4 óra múlva térnek vissza. A csónak sebessége állóvízben 10 km/ó, a vízfolyás sebessége pedig 2 km/ó. Milyen legnagyobb távolságra távolodhatnak el a kikötőtől a turisták, ha a visszaút előtt terveznek egy 2 órás pihenőt?

256. Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $2{,}5 - 3x = 3\,(x - 2{,}5) - 2$;
2) $17\,(2 - 3x) - 5\,(x + 12) = 8\,(1 - 7x) - 34$.

257. Egy hatjegyű szám első és negyedik, második és ötödik, harmadik és hatodik számjegye egyforma. Bizonyítsátok be, hogy ez a szám 7,11 és 13 többszöröse.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

258. Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $3a \cdot (-1{,}2)$; 3) $-7a \cdot 9b$; 5) $-\frac{3}{14}m \cdot \frac{7}{9}n$;

2) $-0{,}2b \cdot (-0{,}5)$; 4) $2{,}4x \cdot 2y$; 6) $-\frac{1}{4}a \cdot \frac{4}{3}b \cdot (-3c)$.

259. Hozzátok egyszerűbb alakra a $20m \cdot (-0{,}3n)$ kifejezést, és számítsátok ki az értékét, ha $m = \frac{5}{12}$, $n = -4$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

260. A villamosjegyek sorszáma 000 000-tól 999 999-ig terjed. A sorszámot *szerencsésnek* mondják, ha az első három számjegy összege egyenlő az utolsó három számjegy összegével. Bizonyítsátok be, hogy a *szerencsés* jegyek száma páros szám lesz.

7. Egytagú kifejezések

Megvizsgáljuk a

$2b$; $\frac{1}{3}xy^2$; $-ab$; $m^3 \cdot 3k^5$; $(3{,}14)^2\,pq^3 \cdot (-7)\,r^2t^4$ kifejezéseket.

Közülük mindegyik számok, változók és azok hatványainak szorzata. Az ilyen kifejezéseket **egytagú kifejezéseknek** vagy **egytagoknak** nevezzük.

Egytagoknak nevezzük az összes számot, változót és azok hatványait. Például egytagúak a következő kifejezések:

$$-5;\ 0{,}3;\ x;\ t^2;\ 2^3.$$

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a

$$2a + b,\ x - 1,\ a : b,\ y^2 + y - 2$$

kifejezések nem egytagúak, mivel a szorzáson és a hatványozáson kívül egyéb műveleteket is tartalmaznak.

Amikor látjuk a $3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)abc$ kifejezést, természetes számunkra, hogy egyszerűbb alakra hozzuk. Egyszerűsítés után a következő kifejezést kapjuk:

$$3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)abc = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)aab^3bc = -2a^2b^4c.$$

A kapott egytagú kifejezés már *csak egy nullától eltérő számot tartalmaz, amely a kifejezés elején áll*. Az összes többi tényező *különböző* alapú hatvány. Az ilyen **egytagú kifejezést normálalakúnak** nevezzük.

Felírunk még néhány normálalakú egytagot:

$$-\frac{1}{8}xy;\ 2{,}8a^3;\ 7x^2yz^3t^5.$$

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy az $a^2 \cdot 2b^3$ és $-3x^2xy^3$ egytagok nem normálalakúak, mivel ugyan az elsőben csak egy szám van, de az nem az első helyen áll, a másodikban pedig az x alapú hatvány kétszer szerepel.

Az ilyen kifejezések könnyen **átalakíthatók** normálalakú egytaggá:

$$a^2 \cdot 2b^3 = 2a^2b^3 \text{ és } -3x^2xy^3 = -3x^3y^3.$$

A normálalakú egytagok közé sorolhatjuk a nullától különböző számokat, a változókat és azok hatványait. Például a -2; 3^2; x; b^3 kifejezések normálalakú egytagok.

A 0 szintén egytagú, amelyik azonosan egyenlő nullával. Például a $0x^2$, $0ab$ kifejezéseket, amelyek azonosan egyenlők nullával, **nulla együtthatójú egytagú kifejezésnek** nevezzük. Az ilyen egytagokat nem soroljuk a normálalakú egytagok közé.

Meghatározás. A normálalakú egytagú kifejezésben a számtényezőt az egytag együtthatójának (koefficiensének) nevezzük.

Például a $-3a^2bc$ és $0{,}07x$ egytagok együtthatói -3-mal és $0{,}07$-dal egyenlők.

Összegezve: bármely normálalakú egytagnak van együtthatója. Például az x^2y és $-mn$ egytagok együtthatóját nem tesszük ki, de tudjuk, hogy együtthatóik megfelelően 1-gyel és -1-gyel egyenlők. Ez érthető, mivel $x^2y = 1 \cdot x^2y$, $-mn = -1 \cdot mn$.

Megvizsgáljuk a $\frac{2}{3}x^3yz$ és a $-2zx^3y$ egytagokat. Ezekben az egytagokban a változók egyformák, vagyis a változókat tartalmazó rész azonosan egyenlő egymással. Az ilyen egytagokat **egyneműeknek** nevezzük. Az egynemű egytagokhoz tartoznak a számok is. Például a 7 és a -5 egynemű egytagok.

Felhívjuk a figyelmeteket például arra, hogy egytagok $\frac{2}{3}x^3y^2z$ és $-2zx^3y$ változókat tartalmazó része nem egyforma, bár ugyanazokból a betűkből állnak, ezért ezek az egytagok nem egyneműek.

Meghatározás. **Az egytag fokszámának a benne található összes változó hatványkitevőjének összegét nevezzük. Ha az egytag nullától különböző szám, akkor a fokszámát nullának tekintik.**

Szintén úgy tekintjük, hogy a nulla együtthatójú egytagnak nincs foka.

Például a $-3{,}8m^2xy^7$ fokszáma 10, az x^3 és 9 egytagok fokszáma megfelelően 3 és 0.

Megvizsgáljuk az $\frac{1}{5}ab^3$ és 10 abx egytagokat. Az $\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx$ egytag a szorzatuk. Leegyszerűsítjük:

$$\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx = \left(\frac{1}{5}\cdot 10\right)(aa)(b^3b)x = 2a^2b^4x.$$

Tehát két egytag szorzata szintén egytag, amelyeket legtöbbször normálalakban adunk meg.

Ha az egytagot hatványra emeljük, szintén egytagot kapunk. Emeljük a negyedik hatványra például a $-\frac{1}{2}xy^3z^2$ egytagot. Azt kapjuk, hogy:

$$\left(-\frac{1}{2}xy^3z^2\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 \cdot (z^2)^4 = \frac{1}{16}x^4y^{12}z^8.$$

1. PÉLDA Hozzuk egyszerűbb alakra a $0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2$ kifejezést.

Megoldás:

$$0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2 = 0{,}2a^2b^4 \cdot (-5)^2 \cdot (a^3)^2b^2 = 0{,}2a^2b^4 \cdot 25a^6b^2 =$$
$$= 0{,}2 \cdot 25a^2a^6b^4b^2 = 5a^8b^6.$$

2. PÉLDA Az a és a b változó értéke olyan, hogy $4a^3b^4 = 7$. Határozzátok meg a $-\frac{2}{7}a^6b^8$ kifejezés értékét.

Megoldás:

$$-\frac{2}{7}a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot 16a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot(4a^3b^4)^2 = -\frac{1}{56}\cdot 7^2 = -\frac{1}{56}\cdot 49 = -\frac{7}{8}.$$

?

1. Mit nevezünk egytagú kifejezésnek?
2. Magyarázzátok meg, milyen egytagot nevezünk normálalakúnak!
3. Mit nevezünk az egytagú kifejezés együtthatójának?
4. Mit nevezünk egynemű egytagú kifejezésnek?
5. Mit nevezünk az egytag fokszámának?

GYAKORLATOK

261.° Melyik egytag az alábbi kifejezések közül:

1) $5xy$; 4) 8; 7) $\frac{6m^2n^3}{11a^5}$; 10) $3\,(a^2 - b^2)$;

2) $-\frac{1}{3}a^2b^3c$; 5) 0; 8) b^9; 11) $-2\frac{4}{9}aa^2b^3b^5$;

3) $m + n$; 6) $\frac{4}{7}pk^4$; 9) m^4m; 12) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^2 x^5x^3yz^{10}$?

262.° Nevezzétek meg a normálalakú egytagokat:

1) $5mnm^2$; 3) $-7t^3 \cdot 4t^5$; 5) $\frac{6}{13}x^2y^4$;

2) $1{,}4ab^7c^3$; 4) $-abc$; 6) $m^6n^4 \cdot 10$.

263.° Egyneműek-e az egytagok:

1) $5a$ és $7a$; 3) $8x^2y^4$ és $8x^2y^5$; 5) $\frac{1}{2}m^7n^2$ és $\frac{1}{2}m^2n^7$;

2) $3a^2b^3c$ és $6a^2b^3c$; 4) $3y^2$ és $2y^3$; 6) $-0{,}1a^9b^{10}$ és $0{,}1a^9b^{10}$?

264.° Írjatok fel az adott egytaggal olyan egynevű egytagot, amelynek együtthatója 4-szer nagyobb az adott egytagénál:

1) $1{,}4x^3y^7$; 2) $c^4d^{10}p^2$; 3) $1\frac{1}{4}a^5b^5c^4$.

265.° Írjátok fel az adott egytagokat normálalakban. Határozzátok meg az együtthatójukat és a fokszámukat:

1) $9a^4aa^6$; 3) $7a \cdot (-9ac)$; 5) $-5x^2 \cdot 0{,}1x^2y \cdot (-2y)$;

2) $3x \cdot 0{,}4y \cdot 6z$; 4) $-3\frac{1}{3}m^5 \cdot 9mn^4$; 6) $c \cdot (-d) \cdot c^{12}$.

266.° Írjátok fel az egytagot normálalakban, és húzzátok alá az együtthatójukat:

1) $6bb^2$; 3) $-0{,}8u^4 \cdot 4t^3 \cdot (-2t^7)$;

2) $1{,}5c^3d^4 \cdot 8c^2d^5$; 4) $4{,}5a^2bc^7 \cdot 1\frac{1}{9}a^2b^6c$.

267.° Határozzátok meg az egytagok értékét:

1) $5x^2$, ha $x = -4$;

2) $-4{,}8a^4b^3$, ha $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$;

3) $0{,}04c^3d^5$, ha $c = -10$, $d = 2$;

4) $\frac{4}{9}m^3n^2p^3$, ha $m = -3$, $n = 5$, $p = -1$.

268.° Határozzátok meg az egytagok értékét:

1) $3m^3$, ha $m=-3$;
2) $\frac{7}{16}a^2b^4$, ha $a=-\frac{1}{7}$, $b=2$;
3) $0{,}8m^2n^2k$, ha $m=0{,}3$, $n=\frac{1}{2}$, $k=2000$.

269.° Végezzétek el az egytagok szorzását:

1) $0{,}6a^4b^3\cdot 4a^2b$;
2) $-2{,}8x^2y^5\cdot 0{,}5x^4y^6$;
3) $13c^2d\cdot(-3cd)$;
4) $0{,}7x^5y^9\cdot 0{,}3xy$;
5) $-\frac{3}{20}p^2q^3\cdot\frac{40}{81}p^3q^2$;
6) $-6\frac{1}{2}mn^3p^{11}\cdot 3\frac{5}{13}m^5n^5$.

270.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $12a^2\cdot 5a^3b^7$;
2) $-4m^3\cdot 0{,}25m^6$;
3) $3ab\cdot(-17a^2b)$;
4) $56x^5y^{14}\cdot\frac{2}{7}x^2y$;
5) $-\frac{1}{3}p^2\cdot(-27k)\cdot 5pk$;
6) $2\frac{1}{4}b^2c^5d^3\cdot\left(-3\frac{1}{3}b^3c^4d^7\right)$.

271.° Alakítsátok át a kifejezéseket normálalakú egytagokká:

1) $(3a^2b)^2$;
2) $(-0{,}2x^3y^4)^3$;
3) $(-10m^2y^3)^5$;
4) $(16x^8y^7z^3)^2$;
5) $\left(-\frac{1}{5}c^6d\right)^4$;
6) $\left(1\frac{1}{2}a^3b^9\right)^6$.

272.° Végezzétek el az egytagok hatványra emelését:

1) $(-6m^3n^3)^3$;
2) $(-7x^9y^{10})^2$;
3) $(0{,}5a^{12}b^{14})^2$;
4) $(3ab^4c^5)^4$;
5) $\left(-\frac{1}{2}x^3y^9\right)^5$;
6) $\left(2\frac{1}{7}a^6b^3\right)^2$.

273.• Adjátok meg az alábbi kifejezéseket két egytag szorzataként, amelyek közül az egyik: $3a^2b^6$:

1) $3a^6b^3$;
2) $-12a^3b^{10}$;
3) $-2{,}7a^5b^7$;
4) $2\frac{2}{7}a^{20}b^{30}$.

274.• Milyen egytaggal kell helyettesíteni a csillagot, hogy igaz egyenlőséget kapjunk:

1) $*\cdot 3b^4=12b^6$;
2) $-5a^5b^2\cdot *=-20a^6b^3$;
3) $-7a^3b^9\cdot *=4{,}2a^5b^{12}$;
4) $23a^{12}b^{16}\cdot *=-23a^{20}b^{17}$?

275.• Végezzétek el az egytagok szorzását, ha m és n természetes számok:

1) $2\frac{5}{6}a^{m+2}b^{n+3}\cdot\frac{9}{17}a^{5m-4}b^{2n-1}$;
2) $-7\frac{1}{3}a^{2m-1}b^{3m-1}\cdot 1\frac{1}{11}a^{m+6}b^{3m+1}$.

276.• Adjátok meg a kifejezést normálalakú egytag négyzeteként:
1) $4a^{10}$; 2) $36a^{2}b^{6}$; 3) $0{,}16a^{14}b^{16}$; 4) $289a^{20}b^{30}c^{40}$.

277.• Adjátok meg a kifejezést normálalakú egytag köbeként:
1) $8x^{6}$; 2) $-27x^{3}y^{9}$; 3) $0{,}001x^{18}y^{12}$; 4) $-\frac{125}{216}x^{15}y^{21}z^{24}$.

278.• Adjátok meg a $64a^{6}b^{12}$ egytagot:
1) két olyan egytag szorzataként, amelyek közül az egyik $2a^{6}b^{2}$;
2) normálalakú egytag négyzeteként;
3) normálalakú egytag köbeként.

279.• Írjátok fel a $81m^{4}n^{16}$ egytagot:
1) két olyan egytag szorzataként, amelyek közül az egyik $-\frac{1}{3}mn^{14}$;
2) normálalakú egytag négyzeteként;
3) normálalakú egytag negyedik hatványaként.

280.• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:
1) $2a^{3}\cdot(-5a^{4}b^{5})^{2}$;
2) $(-x^{6}y)^{3}\cdot 11x^{4}y^{5}$;
3) $(-0{,}6a^{3}b^{5}c^{6})^{2}\cdot 3a^{2}c^{2}$;
4) $-1\frac{3}{11}m^{4}n^{6}\cdot\left(-\frac{1}{7}mn^{3}\right)^{2}$;
5) $1\frac{7}{9}x^{7}y^{2}\cdot\left(\frac{3}{4}x^{2}y^{6}\right)^{4}$;
6) $-(-2c^{2}d^{5})^{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}c^{4}d^{5}\right)^{4}$.

281.• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:
1) $20a^{2}\cdot(9a)^{2}$;
2) $(-b^{5})^{4}\cdot 12b^{6}$;
3) $(3m^{6}n^{3})^{4}\cdot\left(-\frac{1}{81}m^{6}n\right)$;
4) $(0{,}2x^{7}y^{2})^{3}\cdot 6x^{2}y^{2}$;
5) $\left(-\frac{1}{2}ab^{4}\right)^{3}\cdot(4a^{6})^{2}$;
6) $\left(-\frac{2}{3}x^{2}y\right)^{5}\cdot\left(-\frac{3}{4}xy^{2}\right)^{2}$.

282.•• Helyettesítsétek a csillagot olyan egytaggal, hogy teljesüljön az egyenlőség:
1) $(*)^{2}\cdot(*)^{3}=9a^{2}b^{3}c^{5}$;
2) $(*)^{3}\cdot(*)^{4}=16a^{7}b^{6}c^{2}$;
3) $(*)^{3}\cdot(*)^{2}=-72m^{2}n^{11}$;
4) $(*)^{2}\cdot(*)^{5}=32x^{20}y^{21}z^{9}$.

283.•• Az x és az y változó értéke olyan, hogy $5x^{2}y^{4}=6$. Határozzátok meg a kifejezések értékét:
1) $1{,}5x^{2}y^{4}$; 2) $25x^{4}y^{8}$; 3) $-25x^{6}y^{12}$.

284.•• Az a és b változók értéke olyan, hogy $3ab^{3}=4$. Határozzátok meg a kifejezések értékét:
1) $-1{,}2ab^{3}$; 2) $27a^{3}b^{9}$; 3) $-\frac{2}{3}a^{2}b^{6}$.

285.•• Az a, b és c változók értéke olyan, hogy $2a^2b = 7$, $a^3c^2 = 2$. Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $6a^5bc^2$; 2) $a^7b^2c^2$; 3) $2\frac{1}{7}a^8bc^4$.

286.•• Az m, n és p változók értéke olyan, hogy $m^3n^2 = 3$, $\frac{1}{3}n^3p^2 = 5$.

Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $m^3n^5p^2$; 2) $2m^3n^8p^4$; 3) $-0{,}4m^{12}n^{11}p^2$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

287. Valamely számot először 10%-kal csökkentették, majd a kapott eredményt 20%-kal növelték. Eredményül egy olyan számot kaptak, amely 48-cal nagyobb az eredetinél. Határozzátok meg a keresett számot.

288. (*Orosz folklórból származó feladat.*) Egy csapat lúddal szembe repült egy ludacska, aki így fogadta őket: „Üdvözöllek benneteket 100 ludak!” „Nem vagyunk százan – felelte neki a ludak vezére –, ha annyian lennénk, mint most, és még feleannyian és még negyedannyian és még te, akkor lennénk pontosan százan. ” Hány lúd volt a csapatban?

289. A csillagot helyettesítsétek olyan számjegyekkel, hogy:
1) a *5* szám osztható legyen 3-mal is és 10-zel is;
2) a 13*2* szám osztható legyen 9-cel is és 5-tel is;
3) az 58* szám osztható legyen 2-vel is és 3-mal is.
Keressétek meg az összes lehetséges megoldást.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

290. Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $6x - 12x + 15x - 9x$; 3) $-0{,}8k + 0{,}9 - 1{,}7k + 0{,}5k + 1{,}4$;

2) $7a - 9b - 12a + 14b$; 4) $-\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{9}a - \frac{3}{4}b$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

291. Hányféleképpen rakhatjuk fel a sakktáblára a fehér és a fekete bástyákat úgy, hogy ne üssék egymást?

8. Többtagok

Már tudjátok, hogy két egytag szorzata szintén egytag. Más a helyzet az egytagok összeadásánál. Például a $2a + b^2$ és $2a - b^2$ kifejezések nem egytagok. Az első közülük a $2a$ és b^2 egytagok, a másik pedig a $2a$ és $-b^2$ egytagok összege.

Meghatározás. **Néhány egytag összegét többtagnak nevezzük.**

Lássunk még néhány példát többtagokra: $7xy + y - 11$; $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$; $3a - a + b$; $11x - 2x$.

Azokat az egytagokat, amelyekből a többtag összetevődik, a **többtag tagjainak** nevezzük. Így például a $7xy + y - 11$ többtag tagjai a $7xy$, y és a -11 egytagok.

Azt a többtagot, amelyik két egytagból áll **kéttagnak**, azt pedig, amelyik három egytagból tevődik össze, **háromtagnak** nevezzük. Az egytag a többtag részesete. Úgy tekintjük, hogy az egytag olyan többtag, amelyik egy tagból áll.

A többtagok, az egytagok és a számok közötti összefüggést a 3. ábra mutatja.

3. ábra

Ha azok között az egytagok között, amelyekből a többtag áll találunk hasonlóakat, akkor ezeket a **többtag egynemű tagjainak** nevezzük. Például: a $\underline{7a^2b} - \underline{\underline{3a}} + \underline{\underline{\underline{4}}} - \underline{a^2b} - \underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{a}} + b$ többtag egynemű tagjait egyenlő számú vonalkával húztuk alá.

Az egynemű tagok összevonásának szabályát alkalmazva egyszerűbb alakra hozzuk a következő többtagot:

$$7a^2b - 3a + 4 - a^2b - 1 + a + b = 6a^2b - 2a + b + 3.$$

Az ilyen egyszerűsítést a **többtag egynemű tagjai összevonásának** nevezzük. Ez az átalakítás lehetőséget ad nekünk arra, hogy a többtagot helyettesítsük egy vele azonosan egyenlő többtaggal, amelyik egyszerűbb és kevesebb tagból áll, mint az eredeti.

Megvizsgáljuk a $2x^3y - xy + 1$ többtagot. Ez a többtag csak normálalakú egytagokból áll, amelyek között nincsenek egynemű tagok.

Meghatározás. Az olyan többtagot, amelyik normálalakú egytagokból áll, amelyek között nincsenek egynemű tagok, normálalakú többtagnak nevezzük.

Például az $xy^2 + x^2y$, $2a^2b$, 5 kifejezések normálalakú többtagok.

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a $3bab^2 + a \cdot 5 + a \cdot 2b^3 - a$ nem normálalakú többtag, de könnyen azzá alakíthatjuk: először a többtagokat alkotó egytagokat írjuk fel normálalakban, majd összevonjuk az egynemű tagokat.

Adódik: $3bab^2 + a \cdot 5 + a \cdot 2b^3 - a = \underline{3ab^3} + \underline{\underline{5a}} + \underline{2ab^3} - \underline{\underline{a}} = 5ab^3 + 4a.$

Megvizsgáljuk a $2x^3y - x^2y^2 + 5x^2y + y - 2$ normálalakú többtagot. A következő egytagokból áll: $2x^3y$; $-x^2y^2$; $5x^2y$; y; -2, amelyek fokszáma megfelelően egyenlő: 4, 4, 3, 1, 0. Ezek közül a legnagyobb fokszámú egytag negyedfokú. Ezért azt mondjuk, hogy a $2x^3y - x^2y^2 + 5x^2y + y - 2$ többtag negyedfokú.

Meghatározás. A normálalakú többtag fokszáma a legmagasabb fokszámú tagjának a fokszáma.

Felhozunk még néhány példát:

- a $3x^2 - xy + 5y^2$ többtag fokszáma 2-vel egyenlő;
- a $3x^4y^2$ többtag fokszáma 6-tal egyenlő;
- a 3 többtag fokszáma nulla.

A 0-t és mindazokat a többtagokat, amelyek azonosan egyenlők 0-val (például: $0a + 0b$, $x - x$ és így tovább), **nulladfokú többtagnak** nevezzük. Az ilyen többtagokat nem soroljuk a normálalakú többtagok közé.

Úgy tekintjük, hogy a nulladfokú többtagnak nincs fokszáma.

?

1. Mit nevezünk többtagnak?
2. Milyen többtagot nevezünk kéttagnak? Háromtagnak?
3. A többtag mely tagjait nevezzük egynemű tagoknak?
4. Milyen többtagot nevezünk normálalakú többtagnak?
5. Mit nevezünk a normálalakú többtag fokszámának?

GYAKORLATOK

292.° Mely egytagok összege az alábbi többtag:

1) $-5a^4 + 3a^2 - a + 8$;
3) $t^3 + 3t^2 - 4t + 5$;
2) $6x^3 - 10x^2y + 7xy^2 + y^3$;
4) $1,8a^3b - 3,7a^2b^2 + 16ab^3 - b^4$?

293.° Határozzátok meg az alábbi többtagok értékét:

1) $2x^2 + x - 3$ ha $x = 0,5$;
2) $x^3 + 5xy$ ha $x = 3$, $y = -2$;
3) $a^2 - 2ab + b^2$ ha $a = -4$, $b = 6$;
4) $y^4 + 7y^3 - 2y^2 - y + 10$ ha $y = -1$.

294.° Határozzátok meg a $2y^3 - 3y^2 + 4y - 6$ többtag értékét, ha:

1) $y = 1$;
2) $y = 0$;
3) $y = -5$.

295.° Alakítsátok át a többtagokat normálalakú többtaggá. Határozzátok meg a kapott többtag fokszámát:

1) $4b^2 + a^2 + 9ab - 18b^2 - 9ab$;
2) $8m^3 - 13mn - 9n^2 - 8m^3 - 2mn$;
3) $2a^2b - 7ab^2 - 3a^2b + 2ab^2$;
4) $0,9c^4 + 1,1c^2 + c^4 - 0,6c^2$;
5) $3x^2 + 6x - 5 - x^2 - 10x + 3$;
6) $b^3 - 3bc + 3b^3 + 8bc - 4b^3$.

296.° Alakítsátok át a többtagokat normálalakú többtaggá. Határozzátok meg a fokszámát:

1) $5x^2 - 10x + 9 - 2x^2 + 14x - 20$;
2) $-m^5 + 2m^4 - 6m^5 + 12m^3 - 18m^3$;
3) $0,2a^3 + 1,4a^2 - 2,2 - 0,9a^3 + 1,8a^2 + 3$;
4) $6x^2y - xy^2 - 8x^2y + 2xy^2 - xy + 7$.

297.• Vonjátok össze a többtag egynemű tagjait, majd határozzátok meg a kapott többtag értékét a változó adott értéke mellett:

1) $-3a^5 + 4a^3 + 7a^5 - 10a^3 + 12a$, ha $a = -2$;
2) $x^3y - 3xy^2 - 4x^3y + 8xy^2$, ha $x = -1$, $y = -3$;
3) $0,8x^2 - 0,3x - x^2 + 1,6 + 1,1x - 0,6$, ha $x = 5$;
4) $\frac{1}{3}a^2c + \frac{3}{4}ac^2 + \frac{1}{6}a^2c + 1,25ac^2$, ha $a = -4$, $c = 3$.

298.• Vonjátok össze a többtag egynemű tagjait, majd határozzátok meg a kapott többtag értékét a változó adott értéke mellett:

1) $2a^2+3ab-b^2-6a^2-7ab+2b^2$, ha $a=2$, $b=-6$;
2) $mn-6mn^2-8mn-6mn^2$, ha $m=0{,}5$, $n=-2$;
3) $10xy^2-12x^2y+9x^2y-9xy^2$, ha $x=\frac{1}{3}$, $y=9$.

299.• A $4a$, $-3ab$, $7a^2$, $-8a^2$, $9ab$, $5a$ egytagok közül válasszatok ki néhányat, és alkossatok belőlük:

1) normálalakú többtagot;
2) olyan többtagot, amelyikben vannak egynemű tagok;
3) az összes adott egytag felhasználásával két normálalakú többtagot.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

300. A 42 hrivnyás csokoládét összekeverték olyan csokoládéval, amelyik kilója 57 hrivnyába kerül. Az így kapott keverék kilogrammja 48 hrivnya. Milyen mennyiség van mindkét fajta csokiból a kapott keverék 1 kilogrammjában?

301. A postán 20-féle boríték és 15-féle bélyeg kapható. Hányféleképpen választhatunk borítékot bélyeggel?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

302. Az alábbi kifejezések közül melyikkel lesz azonosan egyenlő a $-9x+(4x-7)$ kifejezés:

1) $13x-7$; 2) $-5x+7$; 3) $-5x-7$; 4) $13x+7$?

303. Az alábbi kifejezések közül melyikkel lesz azonosan egyenlő a $-8y-(3y-1)$ kifejezés:

1) $-11y+1$; 2) $-5y+1$; 3) $-11y-1$; 4) $-5y-1$?

304. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $(2a+b)-(b-2a)$;
2) $(3a-4)+(3-5a)$;
3) $(m+n)-(2m+n)-(m-4n)$;
4) $(5c-2)-(6c+1)+(c-8)$.

Ismételjétek át a 24. pontot a 241. oldalon!

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

305. Egy csillag körül néhány bolygó kering, amelyek között a távolság nem változik és páronként különböző. Mindegyik bolygón tartózkodik egy űrhajós, aki a legközelebbi bolygót tanulmányozza. Bizonyítsátok be, hogy létezik két olyan bolygó, ahol az űrhajósok egymás bolygóját tanulmányozzák.

9. Többtagok összeadása és kivonása

Össze kell adni a $3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11$ és $-2xy^2+x^2y^2+2xy+$ $+y-2$ többtagokat. Ehhez zárójelbe tesszük mindkét többtagot, és kitesszük a két zárójel közé a plusz jelet. Ezután felbontjuk a zárójeleket, majd összevonjuk az egynemű tagokat (ha vannak ilyenek).

A következőt kapjuk:

$$(3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11)+(-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2)=$$
$$=3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2=$$
$$=xy^2+6x^2y^2-5xy+x+y+9.$$

Az így kapott többtag a két adott többtag összege.

Most az első többtagból kivonjuk a második többtagot. Ehhez mindkét többtagot zárójelbe tesszük, és a két zárójel közé kitesszük a mínusz jelet. Ezután felbontjuk a zárójeleket, majd összevonjuk az egynemű tagokat.

A következőt kapjuk:

$$(3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11)-(-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2)=$$
$$=3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11+2xy^2-x^2y^2-2xy-y+2=$$
$$=5xy^2+4x^2y^2-9xy+x-y+13.$$

Az így kapott többtag a két adott többtag különbsége lesz.

Többtagok összeadásakor és kivonásakor az eredmény mindig többtag lesz.

1. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy két olyan kétjegyű szám különbsége, amelyek közül a második ugyanazokból a számjegyekből áll, mint az első, csak fordított sorrendben osztható 9-cel!

Megoldás: Az adott szám a tízesből és b egyesből áll. Felírhatjuk a következő alakban: $10a + b$.

Az a szám, amelyik ugyanezekből a számjegyekből áll, csak fordított sorrendben, egyenlő: $10b + a$-val.

Megvizsgáljuk a következő különbséget:

$$(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9\ (a - b).$$

Könnyen belátható, hogy a $9(a - b)$ szám osztható 9-cel.

Az $\overline{ab}$ kétjegyű számot a következőképen jelöljük. A szám a tízest és b egyest tartalmaz, vagyis felírhatjuk $\overline{ab}=10a+b$ alakban. Hasonló az $\overline{abc}$ háromjegyű szám jelölése, amelyikben van a százas, b tízes és c egyes, vagyis $\overline{abc}=100a+10b+c$.

2. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy az $(\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc})-(\overline{ba}+\overline{ca}+\overline{cb})$ különbség maradék nélkül osztható 18-cal!

Megoldás: Felírhatjuk: $(\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc})-(\overline{ba}+\overline{ca}+\overline{cb})=$

$$=(10a+b+10a+c+10b+c)-(10b+a+10c+a+10c+b)=$$
$$=(20a+11b+2c)-(20c+11b+2a)=$$
$$=20a+11b+2c-20c-11b-2a=18a-18c=18(a-c).$$

Könnyen belátható, hogy a $18(a-c)$ szám maradék nélkül osztható 18-cal.

3. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy négy egymást követő páros természetes szám összege nem osztható maradék nélkül 8-cal.

Megoldás: Legyen az első szám $2n$, ahol n tetszőleges természetes szám. Akkor a többi három számot megfelelően felírhatjuk: $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$.

A vizsgált összeg a következőképpen néz ki:

$$2n+(2n+2)+(2n+4)+(2n+6)=8n+12.$$

Az első összeadandó $8n$ osztható 8-cal, de a második összeadandó, a 12 viszont nem. Tehát a $8n+12$ összeg sem osztható maradék nélkül 8-cal.

GYAKORLATOK

306.° Határozzátok meg a többtagok összegét:

1) $-5x^2-4$ és $8x^2-6$; 2) $2x+16$ és $-x^2-6x-20$.

307.° Határozzátok meg a többtagok különbségét:

1) x^2+8x és $4-3x$; 3) $4x^2-7x+3$ és $x^2-8x+11$;
2) $2x^2+5x$ és $4x^2-2x$; 4) $9m^2-5m+4$ és $-10m+m^3+5$.

308.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $(5a^4+3a^2b-b^3)-(3a^4-4a^2b-b^2)$;
2) $(12xy-10x^2+9y^2)-(-14x^2+9xy-14y^2)$;
3) $(7ab^2-8ab+4a^2b)+(10ab-7a^2b)$;
4) $(2c^2+3c)+(-c^2+c)-(c^2+4c-1)$.

309.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $(3x^2-2x)+(-x^2+3x)$;
2) $(4c^2-2cd)-(10c^2+8cd)$;
3) $(12m^2-7n-3mn)-(6mn-10n+14m^2)$;
4) $(3n^3-2mn+4m^3)-(2mn+3n^3)$.

310.° Milyen kéttagot kell hozzáadni az adott kéttagokhoz, hogy a kapott összeg azonosan egyenlő legyen 0-val:

1) $a+b$; 2) $a-b$; 3) $-a-b$?

311.° Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $3x^2 - (2x^2 - 8x) - (x^2 - 3) = x$;
2) $12 - (6 - 9x - x^2) = x^2 + 5x - 14$;
3) $4y^3 - (4y^3 - 8y) - (6y + 3) = 7$;
4) $(y^2 - 4y - 17) - (6y^2 - 3y - 8) = 1 - y - 5y^2$.

312.° Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $(5x^2 - 3) - (2x + 5) = 5x^2$;
2) $x^2 - (x + 1) - (x^2 - 7x + 32) = 3$;
3) $(y^3 + 3y - 8) - (5y - y^3 + 7) = 2y^3 - 2y - 15$.

313.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:
1) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 - a^2) = a^2 - c^2$;
2) $(4 - 3a^2) - a^2 + (7 + 2a^2) - (-2a^2 + 11) = 0$;
3) $(x^3 + 4x^2) - (x + 6) + (1 + x - x^3) = 4x^2 - 5$.

314.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:
1) $4a^2 - (6a^2 - 2ab) + (3ab + 2a^2) = 5ab$;
2) $(9x^6 - 4x^3) - (x^3 - 9) - (8x^6 - 5x^3) = x^6 + 9$.

315.• Határozzátok meg a kifejezések értékét:
1) $(5a^3 - 20a^2) - (4a^3 - 18a^2)$, ha $a = -3$;
2) $4b^2 - (7b^2 - 3bc) + (3b^2 - 7bc)$, ha $b = -1{,}5$, $c = 4$.

316.• Számítsátok ki a kifejezések értékét:
1) $(5{,}7a^2 - 2{,}1ab + b^2) - (3{,}9ab - 0{,}3a^2 + 2b^2)$, ha $a = -1$, $b = 5$;
2) $(5m^2n - m^3) + 7m^3 - (6m^3 - 3m^2n)$, ha $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{3}{16}$.

317.• Bizonyítsátok be, hogy az adott kifejezés értéke nem függ a változó értékétől:
1) $1{,}6 - 7a^2 - (0{,}8 - 4a^2) + (3a^2 - 0{,}7)$;
2) $3x^2 - 9x - (8 - 5x^2 - (9x - 8x^2))$.

318.• Bizonyítsátok be, hogy a $(2c^2 - 3c) + 1{,}8 - c^2 - (c^2 - 3c - 2{,}2)$ kifejezés értéke nem függ a változó értékétől.

319.• Milyen többtagot kell hozzáadni a $2a^2 - 5a + 7$ háromtaghoz, hogy a kapott összeg egyenlő legyen:
1) 5; 2) 0; 3) a^2; 4) $-2a$?

320.• Milyen többtagot kell kivonni a $4a^3 - 8$ kéttagból, hogy a kapott különbség egyenlő legyen:
1) -4; 2) 9; 3) $-2a^3$; 4) $3a$?

321.• A csillag helyére írjatok olyan többtagot, hogy azonosságot kapjatok:
1) $* - (3x^2 - 4xy + 2y^2) = 9x^2 + y^2$; 2) $a^3 - 6a^2 + 2a - (*) = a^5 + 2a^2 - 7$.

322.• A csillag helyére írjatok olyan többtagot, hogy azonosságot kapjatok:
1) $(2x^2 - 14x + 9) + (*) = 20 - 10x$;
2) $(19a^4 - 17a^2b + b^3) - (*) = 20a^4 + 5a^2b$.

323.• A csillag helyére írjatok olyan többtagot, hogy az egynemű tagok összevonása után a többtag tagjai között ne legyen olyan, amelyik tartalmazza az a változót:
1) $4a^2 - 3ab + b + 8 + *$; 2) $9a^3 - 9a + 7ab^2 + bc + bm + *$.

324.• A csillag helyére írjatok olyan többtagot, hogy az egynemű tagok összevonása után a $3x^2 + 5x^2y + 7x - 8y + 15 + *$ többtag tagjai között ne szerepeljen:
1) x^2-et tartalmazó tag;
2) x változót tartalmazó tag;
3) y változót tartalmazó tag.

325.• Adjátok meg többtag alakjában azt a számot, amely:
1) 4 százasból, x tízesből és y egyesből áll;
2) a ezresből, b százasból, 5 tízesből és c egyesből áll.

326.• Adjátok meg többtag alakjában az alábbi kifejezéseket:
1) $\overline{cba}$; 2) $\overline{abc} - \overline{ab}$; 3) $\overline{a0c} + \overline{ac}$.

327.• Adjátok meg többtag alakjában az alábbi kifejezéseket:
1) $\overline{cab} + \overline{ca}$; 2) $\overline{abc} + \overline{bca}$; 3) $\overline{ab9} + \overline{7a}$.

328.• Bizonyítsátok be, hogy a $(9 - 18n) - (6n - 7)$ kifejezés 8 többszöröse az n változó bármely természetes értéke mellett.

329.• Bizonyítsátok be, hogy a $(6m + 8) - (3m - 4)$ kifejezés 3 többszöröse az m változó bármely természetes értéke mellett.

330.• Bizonyítsátok be, hogy az n bármely természetes értéke mellett az $(5n + 9) - (5 - 2n)$ kifejezés 7-tel való osztásakor a maradék 4-gyel egyenlő.

331.• Mennyi lesz a maradék a $(16n + 8) - (7n + 3)$ kifejezés 9-cel való osztásakor, ha n tetszőleges természetes szám?

332.• Írjátok fel a $3a^2b + 8a^3 - 6a + 12b - 9$ többtagot két olyan többtag összegeként, amelyek közül az egyik nem tartalmazza a b változót.

333.• Írjátok fel a $4mn^2 + 11m^4 - 7m^5 + 14mn - 9n + 3$ többtagot két olyan többtag különbségeként, amelyeknek pozitívak az együtthatóik.

334.• Írjátok fel a $6x^2 - 3xy + 5x - 8y + 2$ többtagot két olyan többtag különbségeként, amelyek közül az egyik nem tartalmazza az y változót.

335.• Bizonyítsátok be, hogy a $13m + 20n$ és a $7m + 2n$ többtagok különbségének értéke, ahol az m és az n tetszőleges természetes számok, maradék nélkül osztható 6-tal!

336.• Bizonyítsátok be, hogy a $16a - 6b$ és a $27b - 2a$ többtagok összegének értéke, ahol az a és a b tetszőleges természetes számok, maradék nélkül osztható 7-tel!

337.• Írjátok fel az $x^2 - 6x + 14$ többtagot:
1) két kéttag különbségeként;
2) háromtag és kéttag különbségeként.

338.• Írjátok fel a $3x^2+10x-5$ többtagot kéttag és háromtag különbségeként.

339.•• Bizonyítsátok be, hogy a $(2x^4+4x-1)-(x^2+8+9x)+(5x+x^2-3x^4)$ kifejezés csak negatív értékeket vesz fel az x változó bármely értéke mellett. Mennyi lesz a kifejezés legnagyobb értéke, és az x változó mely értékénél?

340.•• Bizonyítsátok be, hogy a $(7y^2-9y+8)-(3y^2-6y+4)+3y$ kifejezés csak pozitív értékeket vesz fel az y változó bármely értéke mellett. Mennyi lesz a kifejezés legkisebb értéke, és az y változó mely értékénél?

341.•• Bizonyítsátok be, hogy:

1) öt egymást követő természetes szám összege maradék nélkül osztható 5-tel;
2) 3 egymást követő páros természetes szám összege maradék nélkül osztható 6-tal;
3) 4 egymást követő páratlan természetes szám összege maradék nélkül osztható 8-cal;
4) 4 egymást követő természetes szám összege nem osztható maradék nélkül 4-gyel;
5) 6 egymást követő természetes szám összegének 6-tal való osztásakor a maradék 3.

342.•• Bizonyítsátok be, hogy:

1) három egymást követő természetes szám összege 3 többszöröse;
2) 7 egymást követő természetes szám összege maradék nélkül osztható 7-tel;
3) 4 egymást követő páros természetes szám összege maradék nélkül osztható 4-gyel;
4) 5 egymást követő páros természetes szám összege maradék nélkül osztható 10-zel.

343.•• Bizonyítsátok be, hogy:

1) az $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ és $\overline{ca}$ számok összege maradék nélkül osztható 11-gyel;
2) az $\overline{abc}$ és $\overline{cba}$ számok különbsége maradék nélkül osztható 99-cel.

344.•• Bizonyítsátok be, hogy:

1) az $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ és $\overline{cab}$ számok összege 111 többszöröse;
2) az $\overline{abc}$ számnak és e szám számjegyei összegének a különbsége maradék nélkül osztható 9-cel.

345.•• Bizonyítsátok be, hogy az x és y változónak nem létezik olyan értéke, amelyeknél az $5x^2-6xy-7y^2$ és a $-3x^2+6xy+8y^2$ többtagok értéke egyidejűleg negatív lenne.

346.•• Tegyetek zárójeleket úgy, hogy az egyenlőségekből azonosságokat kapjunk:

1) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=2$;
2) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=-2$;
3) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=0$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

347. Valamely számot először 20%-kal növelték, aztán 20%-kal csökkentették. Kisebb vagy nagyobb számot kaptunk ezek után az eredetinél, és hány százalékkal?

348. Az egyik csövön keresztül 3 óra alatt telik meg teljesen a medence, a másikon pedig 6 óra alatt. Először két órára megnyitották az első csövet, aztán elzárták, és kinyitották a másikat. Mennyi idő alatt telik meg a medence vizzel?

349. Tudjuk, hogy a parkban található fák $\frac{7}{24}$-e gesztenye-, az $\frac{5}{18}$-a pedig nyírfa. Hány fa van összesen a parkban, ha tudjuk, hogy a számuk több mint 100, de kevesebb mint 200?

350. A faluból az állomásra egy gyalogos indult el 4 km/ó sebességgel. Egy óra múlva a faluból 10 km/ó sebességgel egy kerékpáros indult el, aki fél órával hamarább ért az állomásra, mint a gyalogos. Milyen messze van a falutól az állomás?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

351. A szorzás széttagolási tulajdonságát alkalmazva határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $12\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$; 2) $36\cdot\left(\frac{17}{18}-\frac{5}{12}+\frac{4}{9}\right)$; 3) $\left(\frac{5}{7}+\frac{5}{14}\right)\cdot\frac{28}{25}$.

352. Bontsátok fel a zárójeleket:

1) $4(2a-3b)$; 3) $(-2,6m+3,5n-7,2)\cdot(-10)$;

2) $0,3(9x-5y+7)$; 4) $-m(-n+8k-12)$.

353. Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $3m^2n\cdot 0,4mn^3$; 3) $-5x^4y^2z^3\cdot(-0,8x^6y^3z^2)$;

2) $7\frac{1}{3}b^3c^2\cdot\frac{9}{11}a^4b^5$; 4) $-5\frac{3}{7}abc\cdot 3,5a^{12}b^{10}c$.

Ismételjétek át a 11. pont tartalmát a 237., 238. oldalon!

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

354. Sanyi és Laci egy 30-jegyű szám felírása közben csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket használják. Az első számjegyet Sanyi írja fel, a másodikat Laci stb. Laci olyan számot szeretne kapni, amelyik 9 többszöröse. Meghiúsíthatja-e ezt Sanyi?

2. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Az alábbi egyenlőségek közül melyik nem azonosság?
A) $-3\ (a - b) = -3a + 3b$;
B) $9a - 8a + a = 2a$;
C) $8a - (4a + 1) = 4a - 1$;
D) $-(x + 3y) + (2x - y) = 3x + 2y$.

2. Határozzátok meg a $(-2{,}4 + 0{,}4)^4$ kifejezés értékét.
A) -8; B) 8; C) 16; D) -16.

3. Egyszerűsítsétek le a $(-a^6)^3 \cdot (-a^7)^4$ kifejezést.
A) a^{20}; B) $-a^{20}$; C) a^{46}; D) $-a^{46}$.

4. Végezzétek el a $(0{,}3a^4)^2$ hatványra emelését.
A) $0{,}9a^6$; B) $0{,}9a^8$; C) $0{,}09a^6$; D) $0{,}09a^8$.

5. Az alábbi kifejezések közül melyik egytag?
A) $0{,}4x + y$; C) $0{,}4xy$;
B) $0{,}4x - y$; D) egyik sem.

6. Az alábbi egytagok közül melyikkel egyenlő a $0{,}7a^3b^2 \cdot \frac{1}{7}a^2b^4$ kifejezés?
A) $7a^5b^6$; B) $7a^6b^8$; C) $0{,}1a^5b^6$; D) $0{,}1a^6b^8$.

7. Az alábbi egytagok közül melyiknek a négyzete az $\frac{1}{4}b^{64}c^{100}$ kifejezés?
A) $-\frac{1}{2}b^8c^{10}$; B) $\frac{1}{2}b^{32}c^{50}$; C) $\frac{1}{2}b^8c^{10}$; D) $-\frac{1}{2}b^{32}c^{10}$.

8. Ismert, hogy $m < 0$ és $n < 0$. Hasonlítsátok össze 0-val az m^5n^6 kifejezés értékét.
A) $m^5n^6 = 0$; C) $m^5n^6 < 0$;
B) $m^5n^6 > 0$; D) nem lehet megállapítani.

9. Vonjátok össze a $2x^2 + 6xy - 5x^2 - 9xy + 3y^2$ többtag egynemű tagjait.
A) $-3xy$; C) $3x^2y^2$;
B) $-3x^2 - 3xy + 3y^2$; D) $3x^2 + 3xy + 3y^2$.

10. Határozzátok meg az $x^2 - 3x - 4$ és az $x - 3x^2 - 2$ többtagok különbségét.
A) $4x^2 - 4x - 2$; C) $-2x^2 - 2x - 6$;
B) $-2x^2 - 4x - 2$; D) $4x^2 - 4x - 6$.

11. Az alábbi kifejezések közül melyik vesz fel csak negatív értékeket?
A) $x^6 + 4$; B) $x^6 - 4$; C) $-x^6 + 4$; D) $-x^6 - 4$.

12. Melyik az $(x - 7)^2 + 2$ kifejezés legkisebb értéke?
A) 2; B) 7; C) 5; D) 9.

10. Egytag szorzása többtaggal

Megszorozzuk a $2x$ egytagot a $3x + 2y - 5$ többtaggal. Ehhez felírjuk a $2x\,(3x + 2y - 5)$ szorzatot. Felbontjuk a zárójelet a szorzás széttagolási tulajdonságának felhasználásával. A következőt kapjuk:

$$2x\,(3x+2y-5) = 2x\cdot 3x + 2x\cdot 2y - 2x\cdot 5 = 6x^2 + 4xy - 10x.$$

A kapott többtag a $2x$ egytag és a $3x + 2y - 5$ többtag szorzata. Az egytag és a többtag szorzatát mindig felírhatjuk többtagként.

Egytagot többtaggal úgy szorzunk, hogy az egytagot megszorozzuk az adott többtag mindegyik tagjával, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Az egytag és a többtag szorzásánál teljesül a szorzás felcserélhetőségi tulajdonsága. Ezért a fenti szabályt felhasználhatjuk a többtagnak egytaggal való szorzásánál is.

1. PÉLDA Hozzátok egyszerűbb alakra a $6x\,(x - 1) - 3\,(2x^2 - 3x + 4)$ kifejezést:

Megoldás:

$$6x\,(x-1) - 3\,(2x^2 - 3x + 4) =$$
$$= \underline{6x^2} - \underline{\underline{6x}} - \underline{6x^2} + \underline{\underline{9x}} - 12 = 3x - 12.$$

2. PÉLDA Oldjátok meg a $0{,}5x\,(3 + 4x) = 2x\,(x - 2) - 11$ egyenletet:

Megoldás:

$$1{,}5x + 2x^2 = 2x^2 - 4x - 11;$$
$$1{,}5x + 2x^2 - 2x^2 + 4x = -11;$$
$$5{,}5x = -11;$$
$$x = -2.$$

Felelet: -2.

3. PÉLDA Oldjátok meg az $\frac{5x+4}{12} - \frac{x+3}{8} = 2$ egyenletet.

Megoldás: Az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk 24-gyel, ez a szám az egyenlet törtjeinek legkisebb közös nevezője. A következőt kapjuk:

$$\left(\frac{5x+4}{12} - \frac{x+3}{8}\right)\cdot 24 = 2\cdot 24.$$

Innen $24 \cdot \frac{5x+4}{12} - 24 \cdot \frac{x+3}{8} = 48;$

$$2\,(5x + 4) - 3\,(x + 3) = 48;$$
$$10x + 8 - 3x - 9 = 48;$$
$$7x - 1 = 48;$$
$$x = 7.$$

Felelet: 7. ●

4. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy a $3a\,(a^2 - 4) - 2a^2\,(1{,}5a + 4a^4) + 6\,(2a - 1)$ kifejezés értéke negatív lesz az a változó bármely értéke mellett.

Megoldás: $3a\,(a^2 - 4) - 2a^2\,(1{,}5a + 4a^4) + 6\,(2a - 1) =$
$= 3a^3 - 12a - 3a^3 - 8a^6 + 12a - 6 = -8a^6 - 6.$

A $-8a^6$ kifejezés értéke az a változó bármely értéke mellett nem pozitív. Tehát a $-8a^6 - 6$ kifejezés értéke negatív az a változó bármely értéke mellett. ●

5. PÉLDA Az m természetes szám 6-tal való osztásakor a maradék 5, az n természetes szám 4-gyel való osztásakor a maradék 2. Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés maradék nélkül osztható 4-gyel, és nem osztható 12-vel.

Megoldás: Legyen az m szám 6-tal való osztásakor a nem teljes hányados a, az n szám 4-gyel való osztásakor pedig b. Ezért felírhatjuk: $m = 6a + 5$, $n = 4b + 2$.

Tehát:

$$2m + 3n = 2\,(6a + 5) + 3\,(4b + 2) =$$
$$= 12a + 10 + 12b + 6 = 12a + 12b + 16.$$

Az összes kapott összeadandó osztható 4-gyel, ezért az összeg is osztható 4-gyel.

A két első összeadandó osztható 12-vel, azonban a harmadik nem. Ezért az összeg sem osztható 12-vel. ●

? Hogyan szorzunk egytagot többtaggal?

GYAKORLATOK

355.° Alakítsátok többtaggá a szorzatokat:

1) $3x\,(2x + 5)$;
2) $4x\,(x^2 - 8x - 2)$;
3) $-2a\,(a^2 + a - 3)$;
4) $5b^2\,(3b^2 - 7b + 10)$;

5) $mn(m^2n - n^3)$;
6) $2ab(a^3 - 3a^2b + b^2)$;
7) $(4y^3 - 6y + 7)\cdot(-1{,}2y^3)$;
8) $0{,}4x^2y(3xy^2 - 5xy + 10x^2y^3)$;
9) $(2{,}3a^3b - 1{,}7b^4 - 3{,}5b)\cdot(-10a^2b)$;
10) $-4ph^3(3p^2h - p + 4h - 2)$;
11) $\frac{2}{3}mn^2(6m - 1{,}8n + 9)$;
12) $1\frac{1}{7}cd\left(\frac{7}{8}c^5 - \frac{7}{24}c^2d^7 - \frac{1}{4}d^{10}\right)$.

356.° Végezzétek el a szorzást:
1) $3x(4x^2 - x)$;
2) $-5a^2(a^2 - 6a - 3)$;
3) $(8b^2 - 10b + 2)\cdot 0{,}5b$;
4) $x^3(x^5 - x^2 + 7x - 1)$;
5) $-2c^2d^4(4c^2 - c^3d + 5d^4)$;
6) $(5m^3n - 8mn^2 - 2n^5)\cdot(-4m^2n^2)$.

357.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:
1) $8x - 2x(3x + 4)$;
2) $7a^2 + 3a(9 - 5a)$;
3) $6x(4x - 7) - 12(2x^2 + 1)$;
4) $c(c^2 - 1) + c^2(c - 1)$;
5) $2m(m - 3n) + m(5m + 11n)$;
6) $8x(x^2 + y^2) - 9x(x^2 - y^2)$;
7) $5b^3(2b - 3) - 2{,}5b^3(4b - 6)$;
8) $x(5x^2 + 6x + 8) - 4x(2 + 2x + x^2)$.

358.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:
1) $7x(x - 4) - x(6 - x)$;
2) $5ab(4a + 3b) - 10a^2(2b - 4)$;
3) $xy(2x - 11y) - x(xy + 14y^2)$;
4) $5c^3(4c - 3) - 2c^2(8c^2 - 12)$.

359.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket, és határozzátok meg az értéküket:
1) $3x(2x - 5) - 8x(4x - 3)$, ha $x = -1$;
2) $2x(14x^2 - x + 5) + 4x(2{,}5 + 3x - 7x^2)$, ha $x = 7$;
3) $8ab(a^2 - 2b^2) - 7a(a^2b - 3b^3)$, ha $a = -3$, $b = 2$.

360.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket, és határozzátok meg az értéküket:
1) $6x(6x - 4) + 9x(3 - 4x)$, ha $x = -\frac{1}{9}$;
2) $2m(m - n) - n(3m - n) - n(n + 6)$, ha $m = -4$, $n = 0{,}5$.

361.° Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $5x(3x - 2) - 15x(4 + x) = 140$;
2) $1{,}2x(4 + 5x) = 3x(2x + 1) - 9$;
3) $6x(7x - 8) - 2x(21x - 6) = 3 - 30x$;
4) $12x - 3x(6x - 9) = 9x(4 - 2x) + 3x$;
5) $7x^2 - x(7x - 5) - 2(2{,}5x + 1) - 3 = 0$;
6) $8(x^2 - 4) - 4x(3{,}5x - 7) = 20x - 6x^2$.

362.° Határozzátok meg az egyenletek gyökeit:
1) $0{,}4x(5x - 6) + 7{,}2 = 2x(x + 0{,}6)$;
2) $x(3x + 2) - 9(x^2 - 7x) = 6x(10 - x)$;
3) $12(x^3 - 2) - 7x(x^2 - 1) = 5x^3 + 2x + 6$.

363.• Igazoljátok a következő azonosságot:

1) $ab(b-c)+ac(c-b)-a(b^2-3bc+c^2)=abc$;

2) $4a(a+b)-a(3a-4b)-8ab=a^2$;

3) $a(a+2b)+b(a+b)=b(2a+b)+a(a+b)$;

4) $a(b+c-bc)-b(a+c-ac)=(a-b)c$.

364.• Igazoljátok a következő azonosságot:

1) $a(a+b)-b(a-b)=a^2+b^2$;

2) $b(a-b)+b(b+c)=b(a+b)-b(b-c)$.

365.• Bizonyítsátok be, hogy amikor:

1) $a+b+c=0$, akkor $a(bc-1)+b(ac-1)+c(ab-1)=3abc$;

2) $a^2+b^2=c^2$, akkor $c(ab-c)-b(ac-b)-a(bc-a)+abc=0$.

366.• Bizonyítsátok be, hogy az

$$x(12x+11)-x^2(x^2+8)-x(11+4x-x^3)$$

kifejezés értéke nem függ a változó értékétől.

367.• Bizonyítsátok be, hogy a

$$6x(x-3)-9\left(\frac{2}{3}x^2-2x+7\right)$$

kifejezés értéke nem függ a változó értékétől.

368.• Bizonyítsátok be, hogy a $4(x^2-2x+4)-0{,}5x(6x-16)$ kifejezés értéke pozitív az x bármely értékénél.

369.• Bizonyítsátok be, hogy a $3x^2(3-4x)-6x(1{,}5x-2x^2+x^3)$ kifejezés értéke nem pozitív az x valamennyi értékénél.

370.• Bizonyítsátok be, hogy a $7a^4(a+3)-a^3(21a+7a^2-3a^5)$ kifejezés értéke nem negatív az a valamennyi értékénél.

371.• Helyettesítsétek a csillagot olyan egytaggal, hogy azonosságot kapjatok:

1) $* \cdot (a-b+c)=-abc+b^2c-bc^2$; 3) $-3a^2(*-*)=6a^3+15a^4$.

2) $* \cdot (ab-b^2)=a^3b-a^2b^2$;

372.• Helyettesítsétek a csillagot olyan egytaggal, hogy azonosságot kapjatok:

1) $(x-y)\cdot * = x^2y^2-x^3y$; 3) $(1{,}4x-*)\cdot 3x = *-0{,}6x^3$;

2) $(-9x^2+*)\cdot y = *+y^4$; 4) $*(*-x^2y^5+5y^6)=8x^3y^3+5x^2y^7-*$.

373.• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $15a\cdot\frac{a+4}{3}+12a^2\cdot\frac{5-2a}{6}$;

2) $24c^3\cdot\frac{c^2+2c-3}{8}-18c^2\cdot\frac{c^3-c^2+2}{9}$;

3) $34x\cdot\frac{x-y}{17}-45y\cdot\frac{x-2y}{15}-y(6y-5x)$.

374.• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $6b^2 \cdot \frac{5b^2-4}{3} + 20b \cdot \frac{3b-2b^3}{4}$;

2) $14m \cdot \frac{m+n}{7} - \frac{m-n}{8} \cdot 16n - 2(m^2+n^2)$.

375.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\frac{x-7}{4} - \frac{x}{6} = 2$;

2) $\frac{x+6}{2} - \frac{x-7}{7} = 4$;

3) $\frac{2x+3}{6} + \frac{1-4x}{8} = \frac{1}{3}$;

4) $3x - \frac{2x+3}{2} = \frac{x+6}{3}$;

5) $\frac{6x-7}{5} - \frac{3x+1}{6} = \frac{11-x}{15}$;

6) $\frac{5x-3}{9} - \frac{4x+3}{6} = x-1$;

7) $\frac{8x-5}{3} - \frac{4x+3}{4} + \frac{2-9x}{2} = -3$;

8) $\frac{8x^2-3x}{16} - \frac{6x^2+1}{12} = -1$.

376.• Határozzátok meg az egyenletek gyökeit:

1) $x - \frac{7x+1}{8} = \frac{4x+3}{4}$;

2) $\frac{2x+1}{6} - \frac{3x+1}{7} = 2$;

3) $\frac{2x+3}{3} - \frac{5x+13}{6} + \frac{5-2x}{2} = 6$;

4) $\frac{4x^2+5x}{14} + \frac{10-2x^2}{7} = 5$.

377.• A változó mely értékénél lesz $8y\ (y-7)$ kifejezés értéke 15-tel nagyobb a $2y\ (4y-10{,}5)$ kifejezés értékénél?

378.• A téglalap hossza 3-szor nagyobb a szélességénél. Ha a szélességét 6 cm-rel kisebbítjük, akkor a területe 144 cm^2-rel lesz kisebb. Határozzátok meg, hány cm volt a téglalap szélessége eredetileg.

379.• A téglalap szélessége 8 cm-rel rövidebb a hosszánál. Ha a téglalap hosszát 6 cm-rel növeljük, akkor a területe 72 cm^2-rel lesz nagyobb. Határozzátok meg a téglalap kerületét.

380.• A turista 3 nap alatt 108 km-t tett meg. A második napon 6 km-rel többet tett meg mint az elsőn, a harmadikon pedig az első két napon megtett út $\frac{5}{13}$ részét. Hány km-t tett meg a turista mindegyik napon?

381.• Három brigád egy műszak alatt 80 alkatrészt tervezett elkészíteni. Az első brigád 12 alkatrésszel kevesebbet készített el, mint a második, a harmadik pedig a $\frac{3}{7}$ részét annak, amit az első és a második brigád készített el összesen. Hány alkatrészt készített el mindegyik brigád?

382.•• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $x^{n+1}(x^{n+6}-1) - x^{n+2}(x^{n+5}-x^3)$;

2) $x^{n+2}(x^2-3) - x^n(x^{n+2}-3x^2-1)$,

ahol n természetes szám.

383.•• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $x^n(x^{n+4}+2x)+x(3x^n-x^{2n+3})$;

2) $x(4x^{n+1}+2x^{n+4}-7)-x^{n+2}(4+2x^3-x^n)$,

ahol n természetes szám.

384.•• A természetes a szám 3-mal való osztásakor a maradék 1, a természetes b szám 9-cel való osztásakor a maradék 7. Bizonyítsátok be, hogy a $4a + 2b$ kifejezés értéke osztható 3-mal.

385.•• A természetes m szám 5-tel való osztásakor a maradék 3, a természetes n szám 3-mal való osztásakor a maradék 2. Bizonyítsátok be, hogy a $3m + 5n$ kifejezés értéke nem osztható 15-tel.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

386. Ukrajna három legnagyobb torkolata, a Dnyeper–Bugi-limán, a Dnyeszter-limán és a Szaszik (Kuduk)–limán, a Fekete-tengerbe ömlik. Az összterületük 1364,8 km². A Dnyeszter-limán területe $2\frac{2}{9}$-szer kisebb a Dnyeper–Bugi-limán területénél, a Szaszik-limán területe 25,6%-a a Dnyeper–Bugi-limán területének. Határozzátok meg mindegyik limán területét.

387. Az első napon Lackó elolvasta a könyv $\frac{2}{7}$ részét, a második napon a könyv 64%-át, a harmadikon pedig a maradék 54 oldalt. Hány oldalas a könyv?

388. Mi a valószínűsége annak, ha feldobjuk a dobókockát, akkor a lapja:

1) páratlan számra esik;

2) olyan számra esik, amelyik osztható 3-mal;

3) olyan számra esik, amelyik nem osztható 3-mal?

389. A kerékpáros az út első felét 3 óra alatt tette meg, a második felét pedig 2,5 óra alatt, mivel a sebességét 3 km/ó-val növelte. Mekkora utat tett meg a kerékpáros?

390. Az egyik raktárban 184 tonna, a másikban 240 tonna műtrágya volt. Az első raktárból 15 t trágyát adnak el naponta, a másikból pedig 18 tonnát. Hány nap múlva lesz az első raktárban maradt műtrágya tömege $\frac{2}{3}$ része a második raktárban maradt talajjavító tömegének?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

391. A röplabdaverseny első köre után (vagyis amikor mindegyik csapat mindegyik csapattal játszott egy meccset), a csapatok 20%-a veszített. Hány csapat vett részt a versenyen? (*Megjegyzés*: a röplabdában döntetlen eredmény nincs, mindenképp az egyik csapat nyer, a másik veszít.)

11. Többtag szorzása többtaggal

Megmutatjuk, hogyan kell összeszorozni egy többtagot egy másik többtaggal a következő példán: $(a + b)(x - y - z)$. Ha a második tényezőt c-vel helyettesítjük, akkor a következőt kapjuk:

$$(a+b)(x-y-z) = (a+b)c = ac + bc$$

Most az $ac + bc$ kifejezésben a c helyére behelyettesítjük az $x - y - z$ többtagot. Felírjuk:

$$ac + bc = a(x-y-z) + b(x-y-z) = ax - ay - az + bx - by - bz.$$

A kapott többtag a keresett szorzat.

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a szorzatot a következő séma szerint határozzuk meg:

$$(a + b)(x - y - z) .$$

A séma alapján a következő szabályt írhatjuk fel:

Többtagot többtaggal úgy szorzunk, hogy az első többtag mindegyik tagját megszorozzuk a másik többtag minden egyes tagjával, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Tehát többtagnak többtaggal való szorzásakor mindig többtagot kapunk eredményül.

1. PÉLDA Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést: $(3x - 4)(2x + 3) - (x - 2)(x + 5)$.

Megoldás:

$$(3x - 4)(2x + 3) - (x - 2)(x + 5) =$$
$$= 6x^2 + 9x - 8x - 12 - (x^2 + 5x - 2x - 10) =$$
$$= \underline{6x^2} + \underline{\underline{9x}} - \underline{\underline{8x}} - 12 - \underline{x^2} - \underline{\underline{5x}} + \underline{\underline{2x}} + 10 = 5x^2 - 2x - 2.$$

2. PÉLDA Írjátok fel a kifejezést többtag alakjában:

$$(a + 2)(a - 5)(a + 3).$$

Megoldás: $(a + 2)(a - 5)(a + 3) = (a^2 - 5a + 2a - 10)(a + 3) =$
$$= (a^2 - 3a - 10)(a + 3) = a^3 + \underline{3a^2} - \underline{3a^2} - \underline{\underline{9a}} - \underline{\underline{10a}} - 30 =$$
$$= a^3 - 19a - 30.$$

3. PÉLDA Határozzátok meg azt a négy egymást követő természetes számot, amelyek közül a harmadiknak és a negyediknek a szorzata 38-cal nagyobb az első és a második szám szorzatánál:

Megoldás: Legyen a legkisebb szám x, akkor a három következő szám $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$. Mivel a feltétel szerint az $(x + 2)(x + 3)$ szorzat 38-cal nagyobb az $x(x + 1)$ szorzatnál, ezért felírhatjuk:

$$(x + 2)(x + 3) - x(x + 1) = 38.$$

Innen $x^2 + 2x + 3x + 6 - x^2 - x = 38$;
$$4x = 38 - 6;$$
$$x = 8.$$

Tehát a keresett számok 8, 9, 10 és 11.

4. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy az

$$(n + 39)(n - 4) - (n + 31)(n - 3)$$

kifejezés értéke 7 többszöröse az n bármely természetes értéke mellett.

Megoldás: Elvégezzük az átalakítást:

$$(n + 39)(n - 4) - (n + 31)(n - 3) =$$
$$= n^2 - 4n + 39n - 156 - (n^2 - 3n + 31n - 93) =$$
$$= \underline{\underline{n^2}} - \underline{4n} + \underline{39n} - 156 - \underline{\underline{n^2}} + \underline{3n} - \underline{31n} + 93 = 7n - 63 = 7(n - 9).$$

Az adott kifejezést felírtuk két olyan tényező szorzataként, amelyek közül az egyik 7, a másik pedig csak egész értékeket vesz fel. Tehát bármely természetes n esetén az adott kifejezés értéke osztható 7-tel.

? Hogyan szorzunk többtagot többtaggal?

GYAKORLATOK

392.° Végezzétek el a szorzást:

1) $(a - 2)(b + 5)$;
2) $(m + n)(p - k)$;
3) $(x - 8)(x + 4)$;
4) $(x - 10)(x - 9)$;
5) $(c + 5)(c + 8)$;
6) $(3y + 1)(4y - 6)$;

7) $(-2m - 3)(5 - m)$;
8) $(5x^2 - x)(6x^2 + 4x)$;
9) $(-c - 4)(c^3 + 3)$;
10) $(x - 5)(x^2 + 4x - 3)$;
11) $(2a + 3)(4a^2 - 4a + 3)$;
12) $a(5a - 4)(3a - 2)$.

393.° Alakítsátok többtagokká a kifejezéseket:
1) $(a + b)(c - d)$;
2) $(x - 6)(x - 4)$;
3) $(a - 3)(a + 7)$;
4) $(11 - c)(c + 8)$;
5) $(d + 13)(2d - 1)$;
6) $(3y - 5)(2y - 12)$;
7) $(2x^2 - 3)(x^2 + 4)$;
8) $(x - 6)(x^2 - 2x + 9)$;
9) $(5x - y)(2x^2 + xy - 3y^2)$;
10) $b(6b + 7)(3b - 4)$.

394.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:
1) $(x + 2)(x + 11) - 2x(3 - 4x)$;
2) $(a + 5)(a - 2) + (a - 4)(a + 6)$;
3) $(y - 9)(3y - 1) - (2y + 1)(5y - 7)$;
4) $(4x - 1)(4x - 3) - (2x - 10)(8x + 1)$.

395.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:
1) $(a - 2)(a - 1) - a(a + 1)$;
2) $(b - 5)(b + 10) + (b + 6)(b - 8)$;
3) $(2c + 3)(3c + 2) - (2c + 7)(2c - 7)$;
4) $(3d + 5)(5d - 1) - (6d - 3)(2 - 8d)$.

396.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket, és határozzátok meg az értéküket:
1) $(x + 2)(x - 5) - (x - 3)(x + 4)$, ha $x = -5{,}5$;
2) $(y + 9)(y - 2) + (3 - y)(6 + 5y)$, ha $y = -1\frac{1}{2}$.

397.° Egyszerűsítsétek a kifejezéseket, és határozzátok meg az értéküket:
1) $(a + 3)(a - 10) - (a + 7)(a - 4)$, ha $a = -0{,}01$;
2) $(8c + 12)(3c - 1) + (3c + 2)(-5c - 6)$, ha $c = 1\frac{1}{3}$.

398.• Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $(2x - 3)(4x + 3) - 8x^2 = 33$;
2) $(2x - 6)(8x + 5) + (3 - 4x)(3 + 4x) = 55$;
3) $21x^2 - (3x - 7)(7x - 3) = 37$;
4) $(x + 1)(x + 2) - (x - 3)(x + 4) = 12$;
5) $(-4x + 1)(x - 1) - x = (5 - 2x)(2x + 3) - 17$.

399.• Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $(2x - 1)(15 + 9x) - 6x(3x - 5) = 87$;
2) $(14x - 1)(2 + x) = (2x - 8)(7x + 1)$;
3) $(x + 10)(x - 5) - (x - 6)(x + 3) = 16$;
4) $(3x + 7)(8x + 1) = (6x - 7)(4x - 1) + 93x$.

400.• Végezzétek el a szorzást:
1) $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$;
2) $(2x + 1)(x + 5)(x - 6)$;
3) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$;
4) $(a + 2b - c)(a - 3b + 2c)$;
5) $(a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$;
6) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

401.• Alakítsátok szorzattá a kifejezéseket:

1) $(a + 1)(a - 2)(a - 3)$; 3) $(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 3a - 2)$;

2) $(3a - 2)(a + 3)(a - 7)$; 4) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$.

402.• Helyettesítsétek a hatványt szorzattal, majd a szorzatot alakítsátok többtaggá:

1) $(a + 5)^2$; 2) $(4 - 3b)^2$; 3) $(a + b + c)^2$; 4) $(a - b)^3$.

403.• Bizonyítsátok be, hogy az $(x + 3)(x^2 - 4x + 7) - (x^2 - 5)(x - 1)$ értéke egyenlő 16-tal a változó bármely értéke mellett.

404.• Bizonyítsátok be, hogy az $(x - 3)(x^2 + 7) - (x - 2)(x^2 - x + 5)$ értéke egyenlő 11-gyel a változó bármely értéke mellett.

405.• Adott négy természetes szám. A második szám 1-gyel nagyobb az elsőnél, a harmadik 5-tel nagyobb a másodiknál, a negyedik pedig 2-vel nagyobb a harmadiknál. Határozzátok meg ezt a négy számot, ha az első szám úgy aránylik a harmadikhoz, mint a második a negyedikhez.

406.• Adott három természetes szám. A második szám 4-gyel nagyobb az elsőnél, a harmadik pedig 6-tal nagyobb a másodiknál. Határozzátok meg ezeket a számokat, ha az első szám úgy aránylik a másodikhoz, mint a második a harmadikhoz.

407.• Határozzátok meg azt a négy egymást követő természetes számot, amelyek közül a negyediknek és a másodiknak a szorzata 17-tel nagyobb a harmadik és az első szám szorzatánál.

408.• Határozzátok meg azt a három egymást követő természetes számot, amelyek közül a másodiknak és a harmadiknak a szorzata 50-nel nagyobb a harmadik és az első szám szorzatánál.

409.• A négyzet oldala 3 cm-rel rövidebb a téglalap egyik oldalánál, és 5 cm-rel hosszabb a másiknál. Határozzátok meg a négyzet oldalát, ha a területe 45 cm^2-rel nagyobb az adott téglalap területénél.

410.• A téglalap kerülete 60 cm. Ha az egyik oldalát 5 cm-rel megrövidítjük, a másikat pedig 3 cm-rel meghosszabbítjuk, akkor a területe 21 cm^2-rel kisebb lesz az eredetinél. Határozzátok meg az adott téglalap oldalait.

411.• A téglalap hossza 2 cm-rel nagyobb a szélességénél. Ha a hosszát 2 cm-rel növeljük, a szélességét pedig 4 cm-rel rövidítjük, akkor a területe 40 cm^2-rel kisebb lesz az eredetinél. Határozzátok meg a téglalap oldalainak eredeti hosszát.

412.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$;

2) $y^2(y - 7)(y + 2) = y^4 - 5y^3 - 14y^2$;

3) $a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$;

4) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = a^4 - 1$;
5) $(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1) = a^8 + a^4 + 1$.

413.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:
1) $3a^2 + 10a + 3 = 3(a + 3)\left(a + \frac{1}{3}\right)$;
2) $(a + 1)(a^2 + 5a + 6) = (a^2 + 3a + 2)(a + 3)$;
3) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) = a^5 + 1$.

414.• Igaz-e, hogy az $(n + 9)(n + 11) - (n + 3)(n + 5)$ kifejezés értéke az n bármely értéke mellett 12 többszöröse?

415.• Igaz-e, hogy az $(n + 29)(n + 3) - (n + 7)(n + 1)$ kifejezés értéke az n bármely értéke mellett 8 többszöröse?

416.• Helyettesítsétek a csillagokat olyan egytagokkal, hogy azonosságokat kapjatok:
1) $(a - 2)(* + 6) = a^2 + * - *$; 2) $(2a + 7)(a - *) = * + * - 14$.

417.• Helyettesítsétek a csillagokat olyan egytagokkal, hogy azonosságokat kapjatok:
1) $(x + 3)(* + 5) = 3x^2 + * + *$; 2) $(x - 4)(x + *) = * + * + 24$.

418.•• Kiválasztottak négy egymást követő természetes számot, majd kiszámították ezek közül a számok közül a második és harmadik szám szorzatának, valamint az első és negyedik szám szorzatának a különbségét. Függ-e a különbség értéke a számok kiválasztásától?

419.•• Kiválasztottak három egymást követő természetes számot, majd kiszámították ezek közül a számok közül a második szám négyzetének, valamint az első és a harmadik szám szorzatának a különbségét. Függ-e a különbség értéke a számok kiválasztásától?

420.•• Bizonyítsátok be, hogy az $\overline{ab} \cdot \overline{ba} - ab$ kifejezés értéke maradék nélkül osztható 10-zel függetlenül az a és b értékétől.

421.•• Az x természetes szám 6-tal történő osztásakor a maradék 3, az y természetes szám 6-tal történő osztásakor pedig a maradék 2. Bizonyítsátok be, hogy az x és y számok szorzata maradék nélkül osztható 6-tal.

422.•• Az a természetes szám 8-cal történő osztásakor a maradék 3, a b természetes szám 8-cal történő osztásakor pedig a maradék 7. Bizonyítsátok be, hogy az a és b szorzatának 8-cal történő osztásakor a maradék 5.

423.•• Az m természetes szám 11-gyel történő osztásakor a maradék 9, az n természetes szám 11-gyel történő osztásakor a maradék 5. Bizonyítsátok be, hogy az m és n szorzatának 11-gyel történő osztásakor a maradék 1.

424.•• Bizonyítsátok be, hogy amikor $ab + bc + ac = 0$, akkor
$$(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b) = a^2 + b^2 + c^2.$$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

425. Két munkás együtt 108 alkatrészt készített el. Az egyik munkás 5 órát, a másik 3 órát dolgozott. Hány alkatrészt készített el mindegyik munkás óránként, ha együtt 1 óra alatt 26 alkatrészt készítettek el?

426. Összekevertek 72 gramm 5%-os és 48 gramm 15%-os sóoldatot. Hány százalékos sóoldatot kaptak?

427. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\overline{1x} + \overline{2x} = \overline{x6}$;
2) $\overline{x4} + \overline{x8} = \overline{1x2}$.

428. Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $18^{16n} = 12^{8n} \cdot 9^{12n}$;
2) $75^{8n} = 225^{4n} \cdot 625^{2n}$,

ahol n természetes szám.

429. (*Ősrégi görög feladat.*) Démokritosz[1] hosszú életének negyedét kisfiúként, ötödét ifjúként, harmadát férfiként és 13 évet öregként élte le. Hány évet élt Démokritosz?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

430. A szorzás széttagolási tulajdonságának alkalmazásával számítsátok ki a példákat:

1) $4{,}8 \cdot 2{,}9 + 4{,}8 \cdot 7{,}1$;
2) $3\frac{9}{14} \cdot \frac{7}{9} - 2\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{9}$;
3) $3\frac{9}{14} \cdot 0{,}3 - 0{,}3 \cdot 1\frac{10}{21} + 0{,}3 \cdot 1\frac{1}{6}$.

431. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $x\,(x + 4) = 0$;
2) $(x - 6)\,(x + 9) = 0$;
3) $(3x + 5)\,(10 - 0{,}4x) = 0$.

Ismételjétek át a 11. és 13. pont tartalmát a 237. és 238. oldalon!

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

432. Egy 5 × 5 tábla minden négyzetében ül egy bogár. Egy bizonyos pillanatban mindegyik bogár átmászik a szomszédos négyzetbe (vagy vízszintes vagy függőleges irányban). Mindenképpen üresen marad-e ekkor valamelyik négyzet?

[1] Démokritosz (i. e. IV–III. század) – ókori görög politikus, szónok és történész.

12. Többtagok tényezőkre bontása. A közös tényező kiemelése a zárójel elé

Megszorozzuk a $2x - 1$ többtagot az $x + 1$ többtaggal. Felírjuk:

$$(2x-1)(x+1) = 2x^2 + 2x - x - 1 = 2x^2 + x - 1.$$

Megkaptuk a $(2x-1)(x+1) = 2x^2 + x - 1$ többtagot, amelyet felírhatjuk a következő módon is: $2x^2 + x - 1 = (2x-1)(x+1)$.

Ebben az esetben az mondjuk, hogy a $2x^2 + x - 1$ többtagot a $2x - 1$ és $x + 1$. **tényezőkre bontottuk.**

Általánosságban elmondható, hogy a többtagok felírását néhány tényező szorzataként, a **többtag tényezőkre bontásának nevezzük.**

Sok feladat megoldásának kulcsa a többtagok tényezőkre bontása. Példáula $2x - 1 = 0$ és az $x + 1 = 0$ egyenleteket nagyon könnyű megoldani, de a $2x^2 + x - 1 = 0$ egyenlet megoldása számotokra még ismeretlen. De, ha tényezőkre bontjuk a $2x^2 + x - 1$ többtagot, akkor a $2x^2 + x - 1$ egyenletet a következőképpen írhatjuk fel:

$$(2x-1)(x+1) = 0.$$

Innen $2x - 1 = 0$ vagy $x + 1 = 0$. A keresett gyökök a 0,5 és a –1.

Tehát a többtag tényezőkre való bontása vezetett ahhoz, hogy az összetett egyenlettől eljutottunk két egyszerű egyenlet megoldásához.

Több módszer is létezik, amelyek segítségével tényezőkre tudjuk bontani a többtagokat. Az egyik legegyszerűbb ezek közül **a közös tényező kiemelése a zárójel elé.**

Ez az átalakítás számotokra már ismert. Például a hatodik osztályban az $1,62 \cdot 1,08 - 0,08 \cdot 1,62$ kifejezést a következő módon számítottátok ki:

$$1,62 \cdot 1,08 - 0,08 \cdot 1,62 = 1,62(1,08 - 0,08) = 1,62.$$

Itt a szorzás összeadásra vonatkoztatott széttagolási $c(a + b) = ac + bc$ tulajdonságát alkalmaztuk, de most jobbról balra olvasva: $ac + bc = c(a + b)$.

Ezt a módszert alkalmazzuk a következő példák megoldásánál.

1. PÉLDA Bontsátok tényezőkre:

1) $a^2b^2 + ab^3$; 2) $8a^2b^2 - 12ab^3$; 3) $10a^8 - 5a^5$.

Megoldás: 1) Az a^2b^2 és ab^3 egytagok a következő közös tényezőket tartalmazzák: a, b, ab, b^2 és ab^2. Ezek közül a tényezők közül bármelyiket kiemelhetjük a zárójel elé. De a közös tényezőt úgy választjuk ki, hogy a zárójelben maradó többtag tagjainak már ne legyenek közös betűtényezői. Ez a gondolatmenet azt sugallja, hogy a zárójel elé az ab^2 közös tényezőt kell kiemelnünk:

$$a^2b^2 + ab^3 = ab^2(a + b).$$

Ahhoz hogy leellenőrizzük, helyesen bontottuk-e tényezőkre a többtagot, össze kell szoroznunk a kapott tényezőket.

2) Ha a többtag együtthatói egész számok, akkor a zárójel elé e számok modulusainak a legnagyobb közös osztóját emelik ki (a mi esetünkben ez a 4-es szám):

$$8a^2b^2 - 12ab^3 = 4ab^2(2a - 3b).$$

3) Felírjuk: $10a^8 - 5a^5 = 5a^5(2a^3 - 1)$. ●

2. PÉLDA Írjátok fel a kifejezéseket többtagok szorzataként:

1) $a(m - 3) + b(m - 3)$;
2) $x(c - d) + y(d - c)$;
3) $6x(x - 7) - (x - 7)^2$.

Megoldás: 1) Ebben az esetben az $m - 3$ többtag a közös tényező:

$$a(m - 3) + b(m - 3) = (m - 3)(a + b).$$

2) Felírjuk:

$$x(c-d)+y(d-c)=x(c-d)+y\cdot(-1)\cdot(c-d)=$$
$$=x(c-d)-y(c-d)=(c-d)(x-y).$$

3) Felírjuk:

$$6x(x - 7) - (x - 7)^2 = (x - 7)(6x - (x - 7)) =$$
$$= (x - 7)(6x - x + 7) = (x - 7)(5x + 7).$$ ●

3. PÉLDA Emeljétek ki a közös tényezőt a zárójel elé a $(12x - 18y)^2$ kifejezésben.

Megoldás: Felírjuk: $(12x - 18y)^2 = (6(2x - 3y))^2 = 6^2(2x - 3y)^2 =$
$= 36(2x - 3y)^2$. ●

4. PÉLDA Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $4x^2 - 12x = 0$; 2) $(3x - 7)(x + 4) + (x - 1)(x + 4) = 0$.

Megoldás: 1) Tényezőkre bontjuk az egyenlet bal oldalát, és felhasználjuk azt a szabályt, hogy egy szorzat mikor egyenlő nullával, felírjuk:

$$4x(x - 3) = 0;$$
$$x = 0 \text{ vagy } x - 3 = 0;$$
$$x = 0 \text{ vagy } x = 3.$$

Felelet: 0; 3.

2) $(3x - 7)(x + 4) + (x - 1)(x + 4) = 0$;

$$(x + 4)(3x - 7 + x - 1) = 0;$$
$$x + 4 = 0 \text{ vagy } 4x - 8 = 0;$$
$$x = -4 \text{ vagy } x = 2.$$

Felelet: –4; 2. ●

5. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke: 1) $8^7 - 4^9$ maradék nélkül osztható 14-gyel; 2) $20^3 - 4^4$ osztható 121-gyel.

Megoldás: Felírjuk a) 8^7 és 4^9 kifejezéseket 2-es alapú hatványként, majd kivisszük a közös tényezőt a zárójel elé. A következőt kapjuk:

$$8^7 - 4^9 = (2^3)^7 - (2^2)^9 = 2^{21} - 2^{18} = 2^{18}(2^3 - 1) = 2^{18} \cdot (8 - 1) =$$
$$= 2^{18} \cdot 7 = 2^{17} \cdot 2 \cdot 7 = 2^{17} \cdot 14.$$

Tehát az adott kifejezés két természetes szám szorzatával egyenlő, amelyek közül az egyik 14. Ebből következik, hogy a $8^7 - 4^9$ kifejezés maradék nélkül osztható 14-gyel.

2) Felírjuk: $20^3 - 4^4 = (5 \cdot 4)^3 - 4^4 = 5^3 \cdot 4^3 - 4^4 = 4^3(5^3 - 4) =$

$$= 4^3(125 - 4) = 4^3 \cdot 121.$$

Tehát a kifejezés értéke maradék nélkül osztható 121-gyel. ●

6. PÉLDA Az a mely értékénél lesz az $(x + 2)(x + a) - x(x + 1) = 3a + 1$ egyenletnek számtalan gyöke?

Megoldás:

$$x^2 + ax + 2x + 2a - x^2 - x = 3a + 1;$$
$$ax + x + 2a = 3a + 1;$$
$$ax + x = a + 1;$$
$$(a + 1)x = a + 1.$$

Ha $a = -1$, akkor az utolsó egyenletet felírhatjuk $0x = 0$ alakban, és ennek az egyenletnek számtalan gyöke van. Megjegyezzük, ha $a \neq -1$, akkor az egyenletnek egyetlen gyöke van, mégpedig $x = (a + 1) : (a + 1)$, amelyik egyenlő 1-gyel.

Felelet: ha $a = -1$. ●

?

1. Magyarázzátok meg, hogy mit értünk a többtag tényezőkre bontásán!

2. A szorzás melyik tulajdonságát használjuk fel, amikor kiemeljük a közös tényezőt a zárójel elé?

GYAKORLATOK

433.° Vigyétek ki a közös tényezőt a zárójel elé:

1) $am + an$;	8) $ax + a$;	15) $a^6 - a^3$;
2) $6x - 6y$;	9) $7c - 7$;	16) $b^4 + b^2$;
3) $4b + 16c$;	10) $24x + 30y$;	17) $7p^3 - 5p$;
4) $12x - 15y$;	11) $10mx - 15my$;	18) $15c^2d - 3cd$;
5) $-cx - cy$;	12) $x^2 + xy$;	19) $14x^2y + 21xy^2$;
6) $4bk + 4bt$;	13) $3d^2 - 3cd$;	20) $-2x^9 + 16x^6$;
7) $-8a - 18b$;	14) $4a^2 + 16ab$;	21) $8a^4b^2 - 36a^3b^7$.

434.° Bontsátok tényezőkre a kifejezéseket:

1) $3a+6b$; 5) $5b-25bc$; 9) $9x-27x^4$;
2) $12m-16n$; 6) $14x^2+7x$; 10) $18y^5+12y^4$;
3) $10ck-15cp$; 7) $n^{10}-n^5$; 11) $56a^{10}b^6-32a^4b^2$;
4) $8ax+8a$; 8) m^6+m^7; 12) $36mn^5+63m^2n^6$.

435.° Számítsátok ki a kifejezéseket a közös tényező zárójel elé való kiemelésének alkalmazásával:

1) $173^2+173\cdot 27$; 2) $214\cdot 314-214^2$; 3) $0{,}4^3+0{,}4^2\cdot 0{,}6$.

436.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $516^2-516\cdot 513$; 2) $0{,}7^3+0{,}7\cdot 0{,}51$; 3) $0{,}2^4-0{,}2^3\cdot 1{,}2$.

437.° Számítsátok ki a kifejezések értékét, előzőleg tényezőkre bontva őket:

1) $6{,}32x-x^2$, ha $x = 4{,}32$;
2) a^3+a^2b, ha $a = 1{,}5$, $b = -2{,}5$;
3) $m^3p - m^2n^2$, ha $m = 3$, $p=\frac{1}{3}$, $n = -3$.

438.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $0{,}74x^2+26x$, ha $x = 100$; 2) $x^2y^3-x^3y^2$, ha $x = 4$, $y = 5$.

439.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $y^2-6y=0$; 3) $4m^2-20m=0$; 5) $9x^2-6x=0$;
2) $x^2+x=0$; 4) $13x^2+x=0$; 6) $12x-0{,}3x^2=0$.

440.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $x^2-x=0$; 3) $5x^2-30x=0$;
2) $p^2+15p=0$; 4) $14x^2+18x=0$.

441.° Bontsátok tényezőkre:

1) $2x(a+b)+y(a+b)$; 7) $b(b-20)+(20-b)$;
2) $(a-4)-b(a-4)$; 8) $6a(a-3b)-13b(3b-a)$;
3) $5a(m-n)+7b(m-n)$; 9) $(m-9)^2-3(m-9)$;
4) $6x(4x+1)-11(4x+1)$; 10) $a(a+5)^2+(a+5)$;
5) $a(c-d)+b(d-c)$; 11) $(m^2-3)-n(m^2-3)^2$;
6) $x(x-6)-10(6-x)$; 12) $8c(p-12)+7d(p-12)^2$.

442.° Adjátok meg a kifejezéseket többtagok szorzataként:

1) $c(x-3)-d(x-3)$; 5) $4x(2x-y)-5y(y-2x)$;
2) $m(p-k)-(p-k)$; 6) $(y+1)^2-4y(y+1)$;
3) $m(x-y)-n(y-x)$; 7) $10(a^2-5)+(a^2-5)^2$;
4) $x(2-x)+4(x-2)$; 8) $(a-2)^2-6(a-2)$.

443.• Bontsátok tényezőkre:

1) $2a^5b^2-4a^3b+6a^2b^3$; 2) $mn^3+5m^2n^2-7m^2n$;

3) $xy^2 + x^2y - xy$;
4) $9x^3 + 4x^2 - x$;
5) $-6m^4 - 8m^5 - 2m^6$;
6) $42a^4b - 28a^3b^2 - 70a^5b^3$.

444.• Vigyétek ki a zárójel elé a közös tényezőt:
1) $m^2n + mn + n$;
2) $3x^6 + 6x^5 - 15x^4$;
3) $7a^4b^3 - 14a^3b^4 + 21a^2b^5$;
4) $20b^6c^5 - 45b^5c^6 - 30b^5c^5$.

445.• Keressétek meg, és javítsátok ki a hibákat az egyenlőségekben:
1) $4a + 4 = 4\ (a + 4)$;
2) $6ab - 3b = b\ (6a - 2b)$;
3) $-5x - 10y = -5\ (x - 2y)$;
4) $x^6 - x^4 + x^2 = x^2\ (x^3 - x^2 + x)$.

446.• Bizonyítsátok be, hogy bármely természetes szám és e szám négyzetének összege páros szám.

447.• Bontsátok tényezőkre:
1) $a\,(2a + b)\,(a + b) - 4a\,(a + b)^2$;
2) $3m^2\,(m - 8) + 6m\,(m - 8)^2$;
3) $(2a + 3)\,(a + 5) + (a - 1)\,(a + 5)$;
4) $(3x + 7)\,(4y - 1) - (4y - 1)\,(2x + 10)$;
5) $(5m - n)^3\,(m + 8n)^2 - (5m - n)^2\,(m + 8n)^3$.

448.• Írjátok fel a kifejezéseket többtagok szorzataként:
1) $(x - 6)\,(2x - 4) + (x - 6)\,(8 - x)$;
2) $(x^2 - 2)\,(3y + 5) - (x^2 - 2)\,(y + 12)$;
3) $(4a - 3b)\,(5a + 8b) + (3b - 4a)\,(2a + b)$;
4) $(p - 9)^4\,(2p + 1)^3 + (p - 9)^3\,(2p + 1)^4$.

449.• Oldjátok meg az egyenleteket a tényezőkre bontás felhasználásával:
1) $(x - 3)\,(x + 7) - (x + 7)\,(x - 8) = 0$;
2) $(4x - 9)\,(x - 2) + (1 - x)\,(x - 2) = 0$;
3) $0{,}2x\,(x - 5) + 8\,(x - 5) = 0$;
4) $7\,(x - 7) - (x - 7)^2 = 0$.

450.• Oldjátok meg az egyenleteket a tényezőkre bontás felhasználásával:
1) $(2x - 9)\,(x + 6) - x\,(x + 6) = 0$;
2) $(3x + 4)\,(x - 10) + (10 - x)\,(x - 8) = 0$;
3) $3\,(3x + 1)^2 - 4\,(3x + 1) = 0$;
4) $(9x - 12) - x\,(9x - 12) = 0$.

451.• Vigyétek ki a közös tényezőt a zárójel elé:
1) $(2x - 6)^2$;
2) $(5y + 5)^2$;
3) $(36x + 30y)^2$;
4) $(2x + 4)^4$;
5) $(6x - 9y)^3$;
6) $(a^2 + ab)^2$;
7) $(-7a - 14ab)^2$;
8) $(3c^4 - 6c^3)^4$.

452.• Vigyétek ki a közös tényezőt a zárójel elé:
1) $(4x - 4y)^2$;
2) $(18a + 27b)^2$;
3) $(8m - 10n)^3$;
4) $(a^2 - 9a)^2$;
5) $(16x^2y + 40xy^2)^2$;
6) $(22x^4 - 28x^2y^3)^5$.

453.• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke:

1) $19^5 + 19^4$ a 20 többszöröse;
2) $8^{10} - 8^9 - 8^8$ a 11 többszöröse;
3) $8^7 + 2^{15}$ az 5 többszöröse;
4) $2 \cdot 3^{2006} + 5 \cdot 3^{2005} + 7 \cdot 3^{2004}$ a 10 többszöröse;
5) $27^4 - 9^5$ a 24 többszöröse;
6) $12^4 - 4^6$ a 130 többszöröse.

454.• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke:

1) $25^{25} - 25^{24}$ maradék nélkül osztható 12-vel;
2) $16^4 + 8^5 - 4^7$ maradék nélkül osztható 10-zel;
3) $36^5 + 6^9$ maradék nélkül osztható 42-vel;
4) $10^5 - 5^7$ maradék nélkül osztható 7-tel.

455.•• Bizonyítsátok be, hogy amikor:

1) $a + b = 2$, akkor $a^2b + ab^2 - 2ab = 0$;
2) $3a + 4b = -2$, akkor $12a^3b + 16a^2b^2 + 32a^2b = 24a^2b$.

456.•• Bizonyítsátok be, hogy amikor:

1) $a + b + c = 0$, akkor $a^3b^2c^2 + a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3 = 0$;
2) $a^2 - b^2 = 2ab + 1$, akkor $a^4b^2 - 2a^3b^3 - a^2b^4 = a^2b^2$.

457.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $8x^2 - 3(x - 4) = 12$;
2) $5x^3 - x(2x - 3) = 3x$;
3) $4x - 0{,}2x(x + 20) = x^3$;
4) $9x(x - 3) + (x - 4)(x - 5) = 20$.

458.•• Határozzátok meg az egyenlet gyökét:

1) $(3x - 2)(3x + 2) - (2x - 5)(8x - 3) = 4x - 19$;
2) $\frac{1}{3}(12 + x^3) = \frac{1}{9}x^2 + 4$.

459.•• A közös tényező kiemelésének alkalmazásával egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $(a - 1)(a + 2) - (a - 2)(a + 2) + (a - 3)(a + 2) - (a - 4)(a + 2)$;
2) $(3a - 2)(5b^2 - 4b + 10) + (2 - 3a)(5b^2 - 6b + 10)$;
3) $(4a - 7b)(2a^2 - 4ab + b^2) - (4a - 7b)(2a^2 - 4ab - b^2)$.

460.•• A közös tényező kiemelésének alkalmazásával egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $ab(a^2 + ab + b^2) - ab(a^2 - ab + b^2)$;
2) $(a + b)(a + 1) - (a + b)(1 - b) + (b + a)(b - a)$.

461.•• Oldjátok meg a $4x^2 - 1{,}2x = a$ egyenletet, ha az egyik gyöke 0,3-del egyenlő.

462.•• Oldjátok meg az $5x^2 + 8x = a$ egyenletet, ha az egyik gyöke –1,6-del egyenlő.

463.•• Vigyétek ki a zárójel elé a közös tényezőt (n természetes szám):

1) $a^{n+1} + a^n$;
2) $b^n - b^{n-3}$, $n > 3$;
3) $c^{n+2} + c^{n-4}$, $n > 4$;
4) $4^{2n} - 4^n$;
5) $2^{n+3} + 3 \cdot 2^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+1}$;
6) $9^{n+1} + 3^{n+2}$.

464.•• Bontsátok tényezőkre (n természetes szám):

1) $a^{n+2} - a^n$; 2) $3b^{n+2} - 2b^{n+1} + b^n$; 3) $32^n + 16^{2n+1}$.

465.•• Ismeretes, hogy az y valamely értéke mellett az $y^2 - 4y + 2$ kifejezés értéke 6-tal egyenlő. Határozzátok meg az y ezen értékénél a kifejezések értékét:

1) $5y^2 - 20y + 10$; 3) $3y^2 - 12y + 8$.

2) $y^2(y^2 - 4y + 2) - 4y(y^2 - 4y + 2)$;

466.•• Ismert, hogy az a valamely értéke mellett az $a^2 + 2a - 5$ kifejezés értéke –4-gyel egyenlő. Határozzátok meg a ezen értékénél a kifejezések értékét:

1) $-2a^2 - 4a + 10$; 3) $4a^2 + 8a - 16$.

2) $a^2(a^2 + 2a - 5) + 2a(a^2 + 2a - 5)$;

467.•• Az a mely értékénél nincs gyöke az egyenletnek:

1) $(x + 1)(x - 3) - x(x - 3) = ax$;

2) $x(5x - 1) - (x - a)(5x - 1) = 4x - 2a$;

3) $(2x - 5)(x + a) - (2x + 3)(x + 1) = 4$?

468.•• Az a mely értékénél van az egyenletnek számtalan gyöke:

1) $(x - 4)(x + a) - (x + 2)(x - a) = -6$;

2) $x(3x - 2) - (x + 2a)(3x + 2) = 5a + 6$?

469.* Határozzátok meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyek egyenlők számjegyeik szorzatának eggyel növelt értékével.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

470. Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $0{,}42ac^3 \cdot 1\frac{3}{7}a^4c^2$; 3) $-2\frac{1}{3}m^2np^3 \cdot \left(\frac{3}{7}np^4\right)^2$;

2) $1{,}2xyz \cdot 2\frac{1}{6}x^5y^6$; 4) $\left(1\frac{1}{2}x^2y^3\right)^5 \cdot \frac{16}{27}x^7y^2$.

471. A tengervíz 5% sót tartalmaz. Hány kg édesvizet kell hozzáönteni 30 kg tengervízhez, hogy a kapott oldat sótartalma 3%-os legyen?

472. Az iskola felújításához festéket vásároltak. Az első napon az összes festék félénél 2 dobozzal több festéket használtak fel, a második napon az első napon felhasznált festék $\frac{5}{8}$ részét. Ezután 2 doboz festék maradt. Hány doboz festéket vásároltak?

473. A dobozban 2 piros, 4 zöld és 10 kék ceruza van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a találomra kivett ceruza:

1) piros; 2) zöld; 3) nem zöld?

Legalább hány ceruzát kell kivenni a dobozból, hogy biztosan legyen közöttük kék színű?

474. Létezik-e olyan kétjegyű szám, amelyben a tízesek helyén álló számjegy 4-gyel nagyobb az egyesek helyén álló számjegynél, ezenkívül ennek a számnak és e szám fordított sorrendben felírt számjegyeiből alkotott számnak a különbsége 27-tel egyenlő?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

475. Egy kartonlapból kivágtak néhány azonos méretű egyenlő oldalú háromszöget. Mindegyik csúcsába beírták az 1, 2, 3 számokat. Ezután ezeket a háromszögeket egymásra rakták. Előfordulhat-e, hogy a halom mindegyik széle mentén a számok összege 55 lesz?

13. Többtagok tényezőkre bontása. A csoportosítási módszer

Az $ax + bx + ay + by$ többtagot nem lehet tényezőkre bontani a közös tényező zárójel elé való kiemelésével, mivel nem tartalmaz olyan tényezőt, amelyik közös lenne mindegyik összeadandóban. Ugyanakkor a többtag tagjait csoportosíthatjuk úgy, hogy a csoportok tagjai tartalmazzanak közös tényezőt:

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b).$$

Kaptunk egy olyan kifejezést, amelyben mindkét tag közös tényezője az $(a + b)$. Kivisszük a zárójel elé:

$$x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y).$$

Az adott többtagot sikerült tényezőkre bontani, mivel megfelelő módon csoportosítottuk a tagjait. Ezért a többtagok tényezőkre bontásának ezt a módját **csoportosítási módszernek** nevezzük.

1. PÉLDA Bontsátok tényezőkre a többtagokat:

1) $2ac + 2bc + 5am + 5bm$; 3) $xy - 12 + 4x - 3y$.

2) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6$;

Megoldás: 1) A többtag tagjait úgy csoportosítjuk, hogy mindegyik csoportban a tagoknak legyen közös tényezőjük. A következőt kapjuk:

$$2ac + 2bc + 5am + 5bm = (2ac + 2bc) + (5am + 5bm) =$$
$$= 2c(a + b) + 5m(a + b) = (a + b)(2c + 5m).$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha az összeadandókat másképp csoportosítjuk:

$$(2ac + 5am) + (2bc + 5bm) = a(2c + 5m) + b(2c + 5m) =$$
$$= (2c + 5m)(a + b).$$

2) Felírjuk: $x^4 - 2x^3 - 3x + 6 = (x^4 - 2x^3) - (3x - 6) =$
$= x^3 (x - 2) - 3 (x - 2) = (x - 2) (x^3 - 3).$

3) $xy - 12 + 4x - 3y = (xy + 4x) + (-12 - 3y) = x (y + 4) - 3 (4 + y) =$
$= (y + 4) (x - 3).$ ●

2. PÉLDA Bontsátok tényezőkre az $x^2 + 6x + 8$ háromtagot.

Megoldás: Miután a $6x$ összeadandót felírjuk $2x + 4x$ összegeként, alkalmazzuk a csoportosítási módszert:

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8 = (x^2 + 2x) + (4x + 8) =$$
$$= x (x + 2) + 4 (x + 2) = (x + 2) (x + 4).$$ ●

GYAKORLATOK

476.° Bontsátok tényezőkre a többtagokat:
1) $ma + mb + 4a + 4b$;
2) $3x + cy + cx + 3y$;
3) $5a - 5b + ap - bp$;
4) $7m + mn + 7 + n$;
5) $a - 1 + ab - b$;
6) $xy + 8y - 2x - 16$;
7) $ab + ac - b - c$;
8) $3p - 3k - 4ap + 4ak$.

477.° Írjátok fel a kifejezéseket többtagok szorzataként:
1) $ay - 3y - 4a + 12$;
2) $9a + 9 - na - n$;
3) $6x + ay + 6y + ax$;
4) $8x - 8y + xz - yz$;
5) $mn + m - n - 1$;
6) $ab - ac - 2b + 2c$.

478.° Bontsátok tényezőkre a többtagokat:
1) $a^3 + a^2 + a + 1$;
2) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 12$;
3) $c^6 - 10c^4 - 5c^2 + 50$;
4) $y^3 - 18 + 6y^2 - 3y$;
5) $a^2 - ab + ac - bc$;
6) $20a^3bc - 28ac^2 + 15a^2b^2 - 21bc$;
7) $x^2y^2 + xy + axy + a$;
8) $24x^6 - 44x^4y - 18x^2y^3 + 33y^4$.

479.° Bontsátok tényezőkre a többtagokat:
1) $8c^3 - 2c^2 + 4c - 1$;
2) $x^2y + x + xy^2 + y$;
3) $9a^2b - 3a^2 + 3b^2 - b$;
4) $8a^2 - 2ab - 4ac + bc$;
5) $2b^3 - 7b^2c - 4b + 14c$;
6) $6x^5 + 4x^2y^2 - 9x^3y - 6y^3$.

480.• Bontsátok tényezőkre, majd határozzátok meg a kifejezések értékét:
1) $2a^3 - 3a^2 - 2ab + 3b$, ha $a = 0,5$, $b = 2,25$;
2) $xy + y^2 - 12x - 12y$, ha $x = 10,8$, $y = -8,8$;
3) $27x^3 - 36x^2 + 6x - 8$, ha $x = -1\frac{1}{3}$.

481.• Határozzátok meg a kifejezések értékét:
1) $2a + b + 2a^2 + ab$, ha $a = -3$, $b = 4$;
2) $3x^3 - x^2 - 6x + 2$, ha $x = \frac{2}{3}$.

482.• Számítsátok ki számológép használata nélkül:

1) $3{,}74^2 + 3{,}74 \cdot 2{,}26 - 3{,}74 \cdot 1{,}24 - 2{,}26 \cdot 1{,}24$;

2) $58{,}7 \cdot 1{,}2 + 36 \cdot 3{,}52 - 34{,}7 \cdot 1{,}2 - 2{,}32 \cdot 36$;

3) $2\frac{4}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}8 + 2\frac{5}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}2$.

483.• Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $34{,}4 \cdot 13{,}7 - 34{,}4 \cdot 8{,}7 - 15{,}6 \cdot 8{,}7 + 13{,}7 \cdot 15{,}6$;

2) $0{,}6^3 - 2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}8^2 - 2 \cdot 0{,}8^3$.

484.• Bontsátok tényezőkre a többtagokat:

1) $ax^2 + ay - bx^2 - by + cx^2 + cy$;

2) $a^2b + a + ab^2 + b + 3ab + 3$;

3) $x^3 - x^2 + x^2y + x - xy + y$;

4) $m^2n + mn - 5 - 5m + n - 5m^2$;

5) $x^6 - 2x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$;

6) $a^3b + ab^2 - abc^3 - a^2c - bc + c^4$.

485.• Írjátok fel a kifejezéseket többtagok szorzataként:

1) $ab + ac + ad + bx + cx + dx$;

2) $7p - 7k - px + kx + k - p$;

3) $x^3y^3 - x^2y^2 + xy - 6 + 6xy - 6x^2y^2$;

4) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

486.•• Bontsátok tényezőkre a kifejezéseket (n természetes szám):

1) $a^{n+1} + a^n + a + 1$;

2) $b^{n+2} - b - 1 + b^{n+1}$;

3) $3y^{n+3} - 3y^2 - 5 + 5y^{n+1}$.

487.•• Bontsátok tényezőkre a háromtagot, előzőleg felírva egyet a tagjai közül egynemű tagok összegeként:

1) $x^2 + 8x + 12$; 2) $x^2 - 5x + 4$; 3) $x^2 + 7x - 8$; 4) $x^2 - 4x - 5$.

488.•• Bontsátok tényezőkre a háromtagokat:

1) $x^2 + 4x + 3$; 2) $x^2 - 10x + 16$; 3) $x^2 + 3x - 18$; 4) $x^2 - 4x - 32$.

489.* Bizonyítsátok be, hogy az n összes természetes értéke mellett az $n^3 + 3n^2 + 2n$ kifejezés osztható 6-tal:

490.* Bontsátok tényezőkre az $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ többtagot.

491.* Bizonyítsátok be, hogy az n bármely 1-nél nagyobb értékénél a $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ kifejezés értéke osztható 10-zel.

492.* Ismert, hogy az x és az y néhány értéke mellett igaz az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlőség. Az x és az y ugyanezen értékei mellett határozzátok meg a $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$ kifejezés értékét.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

493. (*Ukrán folklórból származó feladat.)* A pásztor kihajtotta a juhokat a legelőre. A legelőn cövekek vannak. Ha a pásztor mindegyik cövekhez kiköt egy bárányt, akkor egynek nem jut cövek. Ha mindegyik cövekhez két bárányt köt ki, akkor viszont egy cövek felesleges lesz. Hány bárányt hajtott ki a pásztor a legelőre?

494. Peti és Miki, ha együtt dolgoznak, akkor 2,4 óra alatt locsolják meg a veteményest. Peti egyedül ezt a munkát 4 óra alatt tudja elvégezni. Mennyi időre van szüksége Mikinek a munka elvégzéséhez?

495. Az egyik kannában 4-szer több tej van, mint a másikban. Miután az első kannából 10 liter tejet átöntöttek a másikba, a másik kannában lévő tej mennyisége $\frac{2}{3}$-a annak, mint amennyi az első kannában maradt. Mennyi tej volt mindegyik kannában eredetileg?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

496. Emeljétek négyzetre az egytagokat:

1) $2a$; 3) $3b^3$; 5) $0,3x$; 7) $\frac{1}{6}a^2b^3c^4$;

2) a^2; 4) $7x^4$; 6) $0,4y^5z^2$; 8) $1\frac{1}{3}m^6n$.

497. Írjátok fel kifejezés alakjában:
1) az a és c összegét;
2) az m és n különbségét;
3) az x és y összegének és különbségének szorzatát;
4) az x és y különbségének a négyzetét;
5) az x és y négyzetének a különbségét.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

498. A kieséses rendszerű sportversenyen (aki veszít, az kiesik) n teniszező vesz részt. Hány meccset kell lejátszani ahhoz, hogy ki tudják hirdetni a győztest?

3. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Adjátok meg többtag alakjában a $3y^2(y^3 + 1)$ kifejezést.
A) $3y^6 + 1$; B) $3y^6 + 3y^2$; C) $3y^5 + 1$; D) $3y^5 + 3y^2$.

2. Hozzátok egyszerűbb alakra a $-9y(y - 3) + 4,5y(2y - 4)$ kifejezést.
A) $45y$; B) $-45y$; C) $-9y$; D) $9y$.

3. Melyik többtaggal egyenlő az $(x - 3)(x + 7)$ kifejezés?
A) $x^2 + 4x - 21$; C) $x^2 + 10x - 21$;
B) $x^2 - 4x - 21$; D) $x^2 - 10x - 21$.

4. Hozzátok egyszerűbb alakra a $(3x + 2)(2x - 1) - (5x - 2)(x - 4)$ kifejezést.
A) $x^2 - 23x - 10$; C) $x^2 - 21x + 6$;
B) $x^2 + 23x - 10$; D) $x^2 + 21x + 6$.

5. Emeljétek ki a közös tényezőt a zárójel elé: $3mn - 4mk$.
A) $n(3m - 4k)$; C) $n(4m - 3k)$;
B) $m(3n - 4k)$; D) $m(4n - 3k)$.

6. Bontsátok tényezőkre az $m^2n + mn^2$ kifejezést.
A) $m(m + n)$; C) $mn(m + n)$;
B) $n(m + n)$; D) $m^2n^2(m + n)$.

7. Bontsátok tényezőkre az $mn - mn^2$ kifejezést.
A) $mn(1 - n)$; C) $m(1 - n)(1 - n)$;
B) $mn(1 + n)$; D) $n(1 - m)(1 - m)$.

8. Írjátok fel a $2x^2 - 4x^6$ többtagot egytag és többtag szorzataként.
A) $2x^2(1 - 2x^3)$; C) $2x^2(2 - x^3)$;
B) $2x^2(1 - 2x^4)$; D) $2x^2(2 - x^4)$.

9. Oldjátok meg az $x^2 - 2x = 0$ egyenletet.
A) 0; B) 0; –2; C) 0; 2; D) 2.

10. Írjátok fel szorzat alakjában az $ax - ay + 5x - 5y$ többtagot.
A) $(x - y)(a + 5)$; C) $(x + y)(a - 5)$;
B) $(x - y)(a - 5)$; D) $(x + y)(a + 5)$.

11. Oldjátok meg az $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 1$ egyenletet.
A) 11; B) 1; C) 7; D) 5.

12. Az a változó értéke olyan, hogy az $a^2 - 7a + 3$ kifejezés értéke egyenlő 2-vel. Határozzátok meg a $2a^2 - 14a + 10$ kifejezés értékét.
A) 4; B) 12; C) 8; D) 14.

14. Két kifejezés különbségének és összegének a szorzata

A matematikában nem ritka, hogy az általános törvényen (tételen) kívül egyedi esetekben sokszor használunk más szabályt is.

Például tizedes törtek 10-zel, 100-zal, 1000-rel történő szorzásakor nincs értelme a szokásos módon (egymás alá írva) összeszorozni a számokat, sokkal kézenfekvőbb alkalmazni a tizedesvessző áthelyezésének szabályát.

Egyedi szituációk fordulnak elő a többtagok szorzásánál is.

Megvizsgálunk egy olyan esetet, amikor két többtag szorzásakor az egyik tényező két kifejezés különbsége, a másik pedig e két kifejezés összege.

Felíjuk:

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2.$$

A következő azonosságot kaptuk:

$$\boxed{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}\ .$$

Ezek után két kifejezés különbségének és összegének a szorzásakor lerövidíthetjük a munkánkat, és rögtön felírhatjuk az eredményt e két kifejezés négyzetének különbségeként. Ezért ezt az azonosságot a **rövidített szorzás képletének** nevezzük. Ezt a következő szabály fejezi ki:

Két kifejezés különbségének és összegének a szorzata egyenlő e kifejezések négyzetének a különbségével.

1\. PÉLDA Végezzétek el a szorzást:

1) $(2a-5b)(2a+5b)$;
2) $(y^2+3x^4)(3x^4-y^2)$;
3) $(-4mn-p)(4mn-p)$.

Megoldás: 1) $(2a-5b)(2a+5b)=(2a)^2-(5b)^2=4a^2-25b^2$.
2) $(y^2+3x^4)(3x^4-y^2)=(3x^4+y^2)(3x^4-y^2)=(3x^4)^2-(y^2)^2=9x^8-y^4$.
3) $(-4mn-p)(4mn-p)=(-p-4mn)(-p+4mn)=$
$=(-p)^2-(4mn)^2=p^2-16m^2n^2$. ●

2\. PÉLDA Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

1) $(b-3)(b+3)-(2b+1)(2b-1)$;
2) $-2x(x+5)(5-x)$;
3) $(a^3-2)(a^3+2)(a^6+4)$.

Megoldás: 1) $(b-3)(b+3)-(2b+1)(2b-1)=$
$=b^2-9-(4b^2-1)=b^2-9-4b^2+1=-3b^2-8$.
2) $-2x(x+5)(5-x)=-2x(25-x^2)=-50x+2x^3$.
3) Kétszer felhasználva két kifejezés különbségének és összegének szorzatát, a következőt kapjuk:
$(a^3-2)(a^3+2)(a^6+4)=(a^6-4)(a^6+4)=a^{12}-16$. ●

?

1. Mivel egyenlő két kifejezés különbségének és összegének a szorzata?
2. Adjátok meg két kifejezés különbségének és összegének a szorzatát kifejező képletet!

GYAKORLATOK

499.° Az alábbi többtagok közül melyikkel azonosan egyenlő a $(7a - 2b)(7a + 2b)$ szorzat:
1) $7a^2 - 2b^2$; 2) $7a^2 + 2b^2$; 3) $49a^2 - 4b^2$; 4) $49a^2 + 4b^2$?

500.° Végezzétek el a többtagok szorzását:
1) $(m - n)(m + n)$;
2) $(x - 1)(x + 1)$;
3) $(9 - y)(9 + y)$;
4) $(3b - 1)(3b + 1)$;
5) $(10m - 7)(10m + 7)$;
6) $(4a - b)(b + 4a)$;
7) $(5b + 1)(1 - 5b)$;
8) $(3x - 5y)(3x + 5y)$;
9) $(13c - 10d)(13c + 10d)$;
10) $(8m + 11n)(11n - 8m)$.

501.° Írjátok fel többtag alakjában a kifejezést:
1) $(c - 2)(c + 2)$;
2) $(12 - x)(12 + x)$;
3) $(3x + y)(3x - y)$;
4) $(6x - 9)(6x + 9)$;
5) $(x + 7)(7 - x)$;
6) $(5a - 8b)(5a + 8b)$;
7) $(8m + 2)(2 - 8m)$;
8) $(13c - 14d)(14d + 13c)$.

502.° Végezzétek el a szorzást:
1) $(a^2 - 3)(a^2 + 3)$;
2) $(5 + b^2)(b^2 - 5)$;
3) $(3x - 2y^2)(3x + 2y^2)$;
4) $(10p^3 - 7k)(10p^3 + 7k)$;
5) $(4x^2 - 8y^3)(4x^2 + 8y^3)$;
6) $(11a^3 + 5b^2)(5b^2 - 11a^3)$;
7) $(7 - xy)(7 + xy)$;
8) $\left(8a^2b - \frac{1}{3}ab^2\right)\left(8a^2b + \frac{1}{3}ab^2\right)$;
9) $(0{,}3m^5 + 0{,}1n^3)(0{,}3m^5 - 0{,}1n^3)$;
10) $\left(\frac{7}{9}a^2c - 1{,}4b^4\right)\left(1{,}4b^4 + \frac{7}{9}a^2c\right)$.

503.° Végezzétek el a szorzást:
1) $(x^3 + 4)(x^3 - 4)$;
2) $(ab - c)(ab + c)$;
3) $(x - y^2)(y^2 + x)$;
4) $(3m^2 - 2c)(3m^2 + 2c)$;
5) $(6a^3 - 8b)(6a^3 + 8b)$;
6) $(5n^4 - m^4)(5n^4 + m^4)$;
7) $(0{,}2m^2 - 0{,}8n^6)(0{,}2m^2 + 0{,}8n^6)$;
8) $\left(\frac{2}{7}p^7 + \frac{4}{11}k^9\right)\left(\frac{4}{11}k^9 - \frac{2}{7}p^7\right)$.

504.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:
1) $(2a - b)(2a + b) + b^2$;
2) $10x^2 + (y - 5x)(y + 5x)$;
3) $64m^2 - (8m + 9)(8m - 9)$;
4) $(4x - 7y)(4x + 7y) + (7x - 4y)(7x + 4y)$;
5) $(a - 2)(a + 3) + (6 - a)(a + 6)$;
6) $3a(a - b) - (3a + 2b)(3a - 2b)$.

505.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

1) $(9a-2)(9a+2)-18a^2$;
2) $25m^2-(5m-7)(5m+7)$;
3) $(b+7)(b-4)+(2b-6)(2b+6)$;
4) $4x(3x-10y)-(4x+y)(4x-y)$.

506.° Milyen kifejezéssel kell megszorozni a $0{,}3x^3 - xy^2$ kéttagot, hogy eredményül a $0{,}09x^6 - x^2y^4$ többtagot kapjuk?

507.° Milyen kifejezéssel kell megszorozni a $7t^4 + 9p^5$ többtagot, hogy eredményül a $49t^8 - 81p^{10}$ többtagot kapjuk?

508.• Melyik egytaggal kell helyettesíteni a csillagot, hogy azonosságot kapjunk:

1) $(*-12a)(*+*)=9b^2-*$;
2) $(*-5c)(*+5c)=16a^2-*$;
3) $(0{,}7p+*)(*-0{,}7p)=\frac{1}{9}m^8-0{,}49p^2$;
4) $(3m^2+*)(*-*)=9m^4-n^6$?

509.• Helyettesítsétek a csillagot olyan egytaggal, hogy azonosságot kapjunk:

1) $(8a^2b-*)(8a^2b+*)=*-25c^6$;
2) $\left(*-\frac{1}{12}x^4y^5\right)\left(\frac{1}{15}a^2+*\right)=\frac{1}{225}a^4-\frac{1}{144}x^8y^{10}$.

510.• Írjátok fel a kifejezést többtag alakjában:

1) $a(a-2)(a+2)$;
2) $-3(x+3)(x-3)$;
3) $7b^2(b+4)(4-b)$;
4) $(c-d)(c+d)(c^2+d^2)$;
5) $(2a-1)(2a+1)(4a^2+1)$;
6) $(c^3-5)(c^3+5)(c^6+25)$.

511.• Végezzétek el a szorzást:

1) $5b(b-1)(b+1)$;
2) $(c+2)(c-2)\cdot 8c^2$;
3) $(m-10)(m^2+100)(m+10)$;
4) $(a^2+1)(a^2-1)(a^4+1)$.

512.• Szorozzátok össze a kéttagokat (n természetes szám):

1) $(a^n-4)(a^n+4)$;
2) $(b^{2n}+c^{3n})(b^{2n}-c^{3n})$;
3) $(x^{4n}+y^{n+2})(y^{n+2}-x^{4n})$;
4) $(a^{n+1}-b^{n-1})(a^{n+1}+b^{n-1})$, $n > 1$.

513.• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $(8a-3)(8a+3)-(7a+4)(8a-4)$;
2) $0{,}6m(2m-1)(2m+1)+0{,}3(6+5m)(6-5m)$;
3) $(7-2x)(7+2x)-(x-8)(x+8)-(4-3x)(5+3x)$;
4) $-b^2c(4b-c^2)(4b+c^2)+16b^4c$.

514.• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $(x+1)(x-1)-(x+5)(x-5)+(x+1)(x-5)$;
2) $81a^8-(3a^2-b^3)(9a^4+b^6)(3a^2+b^3)$.

515.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $8x(3+2x)-(4x+3)(4x-3)=9x-6$;
2) $7x-4x(x-5)=(8-2x)(8+2x)+27x$;
3) $(6x+7)(6x-7)+12x=12x(3x+1)-49$;
4) $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)=x^8+10x$.

516.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $(x-17)(x+17)=x^2+6x-49$;

2) $(1{,}2x-4)(1{,}2x+4)-(1{,}3x-2)(1{,}3x+2)=0{,}5x(8-0{,}5x)$.

517.• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezések értéke nem függ a változó (változók) értékétől:

1) $(x-9)(x+9)-(x+19)(x-19)$;

2) $(2a-b)(2a+b)+(b-c)(b+c)+(c-2a)(c+2a)$.

518.• Bizonyítsátok be, hogy a $(7n+8)(7n-8)-(5n+10)(5n-10)$ kifejezés értéke bármely természetes n esetében osztható 12-vel.

519.• Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan természetes n szám, amelynél a $(4n+3)(9n-4)-(6n-5)(6n+5)-3(n-2)$ kifejezés érétke osztható 8-cal.

520.• Bizonyítsátok be, hogy a $(9n-4)(9n+4)-(8n-2)(4n+3)+5(6n+9)$ kifejezés értéke bármely természetes n esetében osztható 7-tel.

521.•• Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $3^{20}\cdot 6^{20}-(18^{10}-2)(18^{10}+2)$;

2) $(5+28^{17})(5-28^{17})+14^{34}\cdot 2^{34}$;

3) $7^{24}\cdot 2^{24}-(14^{12}+3)(14^{12}-3)$;

4) $(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)-3^{64}$;

5) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)-2^{32}$.

522.•• Mennyivel egyenlő a kifejezések értéke:

1) $81^{15}\cdot 2^{60}-(6^{30}+1)(6^{30}-1)$;

2) $5^{24}-(5^3-2)(5^3+2)(5^6+4)(5^{12}+16)$?

523.* Hasonlítsátok össze a kifejezéseket anélkül, hogy kiszámítanátok értéküket:

1) $415\cdot 425$ és $426\cdot 414$; 2) $1\,234\,567\cdot 1\,234\,569$ és $1\,234\,568^2$.

524.* Hasonlítsátok össze a kifejezéseket anélkül, hogy kiszámítanátok értéküket:

1) $253\cdot 259$ és $252\cdot 260$; 2) $987\,654^2$ és $987\,646\cdot 987\,662$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

525. Lackó a faluból az állomásra kerékpáron 3 óra alatt ér el, gyalog pedig 7 óra alatt. Gyalog a sebessége 8 km/ó-val kisebb, mint kerékpáron. Mekkora sebességgel halad Lackó a kerékpárral? Milyen messze van az állomás a falutól?

526. Az egyik zsákban 60 kg, a másikban pedig 100 kg cukor volt. Miután a második zsákból 4-szer több cukrot vettek ki, mint az elsőből, az első zsákban 2-szer annyi cukor maradt, mint a másodikban. Hány kg cukrot vettek ki mindegyik zsákból?

527. Az egyik teherautó 10 óra alatt tudja behordani a mezőről a betakarított termést, a második 12 óra alatt, a harmadik pedig 15 óra alatt. Hány óra alatt tudja elszállítani a termést a mezőről a három teherautó együtt?

528. (*Ősrégi egyiptomi feladat.*) Hét ember mindegyikének hét macskája van, s mindegyik macska hét egeret eszik meg, minden egér hét kalászt pusztít el, minden kalászból hét marék árpa lenne. Egy marék árpa súlya 80 gramm. Hány marék magot mentenek meg a macskák évente? Mennyi ez tonnában kifejezve? A választ kerekítsétek százasokra.

529. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\frac{4x-1}{12}-\frac{3x+1}{8}=x+1$; 2) $\frac{3x-2}{9}-\frac{2x+1}{6}=\frac{5-x}{3}$.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

530. Adjátok meg a kifejezést kéttag négyzeteként:

1) x^6; 3) $4x^2$; 5) a^2b^{10}; 7) $1,21m^{10}n^{20}$;

2) y^4; 4) $\frac{1}{9}x^4$; 6) $0,36x^4y^{10}$; 8) $1\frac{9}{16}a^{14}b^{16}$.

531. Felírhatjuk-e a kifejezéseket két egytag négyzetének különbségeként:

1) a^2-16b^2; 3) $100b^4-25c^6$; 5) $-a^{12}-49c^2$;

2) $25c^2 + 9b^2$; 4) $-64+a^{10}$; 6) $-0,01a^4 + 0,04b^4$?

Igenlő válasz esetén írjátok le négyzetek különbségeként.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

532. A teherszállításra 4, 7 és 8 tonnás teherautókat használnak. Mindegyik autó csak egyszer fordulhat. Hány teherautóra van szükség mindegyik fajtából, hogy elszállítsanak 44 t terhet?

15. Két kifejezés négyzetének a különbsége

A többtag tényezőkre bontásának két módját már ismeritek: a közös tényező kiemelését a zárójel elé és a csoportosítási módszert.

Az $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ képletet a következőképpen írhatjuk át:

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}\ .$$

Ez az azonosság **két kifejezés négyzetének különbsége** képlet alakjában felírva.

Megfogalmazzuk a következő szabályt:

Két kifejezés négyzetének a különbsége e két kifejezés különbségének és összegének a szorzatával egyenlő.

Felírunk néhány példát arra, hogyan tudjuk tényezőkre bontani a többtagokat a fenti képlet segítségével.

1. PÉLDA Bontsátok tényezőkre:

1) $a^2 - 4$; 2) $36m^2 - 2\frac{7}{9}n^8$; 3) $-a^2b^6 + 1$.

Megoldás: 1) Felírjuk: $a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a - 2)(a + 2)$.

2) $36m^2 - 2\frac{7}{9}n^8 = 36m^2 - \frac{25}{9}n^8 = (6m)^2 - \left(\frac{5}{3}n^4\right)^2 =$

$$= \left(6m - \frac{5}{3}n^4\right)\left(6m + \frac{5}{3}n^4\right).$$

3) $-a^2b^6 + 1 = 1 - a^2b^6 = (1 - ab^3)(1 + ab^3)$. ●

2. PÉLDA Bontsátok tényezőkre a négyzetek különbségének felhasználásával:

1) $100 - (a + 5)^2$; 2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2$.

Megoldás: 1) $100 - (a + 5)^2 = 10^2 - (a + 5)^2 =$

$$= (10 - (a + 5))(10 + (a + 5)) =$$

$$= (10 - a - 5)(10 + a + 5) = (5 - a)(15 + a).$$

2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2 = ((2a + 3b) - (3a - b))((2a + 3b) +$ $+ (3a - b)) = (2a + 3b - 3a + b)(2a + 3b + 3a - b) = (4b - a)(5a + 2b)$. ●

3. PÉLDA Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $(2x - 7)^2 - 81 = 0$.

Megoldás: 1) A négyzetek különbsége képletének és a szorzat 0-val való egyenlősége szabályának felhasználásával megkapjuk:

$$(x - 6)(x + 6) = 0;$$

$$x - 6 = 0 \text{ vagy } x + 6 = 0;$$

$$x = 6 \text{ vagy } x = -6.$$

Felelet: 6; –6.

2) Felírjuk:

$$(2x - 7 - 9)(2x - 7 + 9) = 0;$$

$$(2x - 16)(2x + 2) = 0;$$

$$2x - 16 = 0 \text{ vagy } 2x + 2 = 0;$$

$$x = 8 \text{ vagy } x = -1.$$

Felelet: 8; –1. ●

4. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy bármely természetes n esetében a $(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2$ kifejezés értéke osztható 8-cal.

Megoldás:

$$(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2 = (6n + 7 - 2n + 1)\,(6n + 7 + 2n - 1) =$$
$$= (4n + 8)\,(8n + 6) = 4\,(n + 2) \cdot 2\,(4n + 3) = 8\,(n + 2)\,(4n + 3).$$

A kapott kifejezés három tényező szorzata, amelyek közül az egyik 8, a másik kettő pedig szintén természetes szám. Ebből következik, hogy a kifejezés értéke maradék nélkül osztható 8-cal bármely természetes n esetén.

? Írjátok fel két kifejezés négyzetének különbségét képlet alakjában!

GYAKORLATOK

533.° Az alábbi szorzatok közül melyikkel egyenlő azonosan az $a^2 - 144$ többtag:

1) $(a - 12)^2$; 3) $(12 - a)\,(12 + a)$;
2) $(a - 12)\,(a + 12)$; 4) $(12 - a)\,(-12 - a)$?

534.° Az alábbi egyelőségek közül melyik azonosság:

1) $-49 + b^2 = (7 - b)\,(7 + b)$; 3) $-49 + b^2 = (7 - b)^2$;
2) $-49 + b^2 = (b - 7)\,(b + 7)$; 4) $-49 + b^2 = (b - 49)\,(b + 49)$?

535.° Tényezőkre bonthatók-e az alábbi kifejezések a négyzetek különbségének felhasználásával:

1) $a^2 - 9$; 4) $25 + x^2$; 7) $81 + 100p^2$; 10) $-m^2n^2 - 25$?
2) $b^2 + 1$; 5) $1 - y^2$; 8) $81 - 100p^2$;
3) $4 - c^2$; 6) $16a^2 - b^2$; 9) $m^2n^2 - 25$;

Ha ez nem lehetséges, akkor végezzétek el a tényezőkre bontást más módon.

536.° Bontsátok tényezőkre:

1) $b^2 - a^2$; 7) $900 - 81k^2$; 13) $a^2b^2c^2 - 1$;
2) $x^2 - 1$; 8) $16x^2 - 121y^2$; 14) $100a^2 - 0{,}01b^2$;
3) $-x^2 + 1$; 9) $b^2c^2 - 1$; 15) $a^4 - b^2$;
4) $36 - c^2$; 10) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$; 16) $p^2t^2 - 0{,}36k^2d^2$;
5) $4 - 25a^2$; 11) $-4a^2b^2 + 25$; 17) $y^{10} - 9$;
6) $49a^2 - 100$; 12) $144x^2y^2 - 400$; 18) $4x^{12} - 1\frac{11}{25}y^{16}$.

537.° Bontsátok tényezőkre:

1) $16-b^2$; 5) $4x^2-25$; 9) $4a^2c^2-9x^2y^2$;
2) c^2-49; 6) $81c^2-64d^2$; 10) $x^{24}-y^{22}$;
3) $0,04-a^2$; 7) $0,09x^2-0,25y^2$; 11) $-1600+a^{12}$;
4) $x^2-\frac{4}{9}$; 8) $a^2b^4-c^6d^2$; 12) $a^{12}-\frac{49}{64}$.

538.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $x^2 - 49 = 0$; 3) $x^2 + 36 = 0$; 5) $9x^2 - 4 = 0$;
2) $\frac{1}{4}-z^2=0$; 4) $x^2 - 0,01 = 0$; 6) $0,04x^2-1=0$.

539.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $c^2 - 0,25 = 0$; 2) $81x^2 - 121 = 0$; 3) $-0,09 + 4x^2 = 0$.

540.• Bontsátok tényezőkre a négyzetek különbsége képletének felhasználásával:

1) $(x+2)^2-49$; 6) $(8y + 4)^2 - (4y - 3)^2$;
2) $(x-10)^2-25y^2$; 7) $(5a + 3b)^2 - (2a - 4b)^2$;
3) $25-(y-3)^2$; 8) $4\ (a - b)^2 - (a + b)^2$;
4) $(a-4)^2-(a+2)^2$; 9) $(x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - x + 2)^2$;
5) $(m-10)^2-(n-6)^2$; 10) $(-3x^3+y)^2-16x^6$.

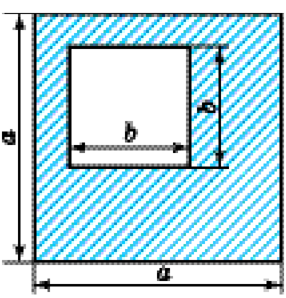
541.• Írjátok fel a kifejezéseket szorzat alakjában:

1) $(x-2)^2-4$; 4) $a^4-(7b-a^2)^2$;
2) $(b + 7)^2 - 100c^2$; 5) $(4x-9)^2-(2x+19)^2$;
3) $121 - (b + 7)^2$; 6) $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$.

542.• Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $(9x - 4)^2 - (7x + 5)^2$, ha $x = 1,5$;
2) $(5x + 3y)^2 - (3x + 5y)^2$, ha $x = 2,1$, $y = 1,9$.

543.• Határozzátok meg a $(2,5a - 1,5b)^2 - (1,5a - 2,5b)^2$ kifejezés értékét, ha $a = -1,5$, $b = -3,5$.



4. ábra

544.• Mivel egyenlő a 4. ábrán látható besatírozott alakzat területe? Határozzátok meg a kapott kifejezés értékét, ha $a = 7,4$ cm, $b = 2,6$ cm.

545.• Két körnek, amelyeknek a sugarai R és r ($R > r$), közös a középpontjuk. Fejezzétek ki π, R és r segítségével a körvonalak által határolt alakzat területét. Számítsátok ki a kapott kifejezés értékét, ha $R = 5,1$ cm, $r = 4,9$ cm.

546.• Írjátok fel három tényező szorzataként a kifejezéseket:
1) $m^4 - 625$;
2) $x^{16} - 81$;
3) $2^{4n} - 16$, ha n természetes szám.

547.• Bontsátok tényezőkre:
1) $a^2 - b^2$;
2) $a^{16} - 256$.

548.• Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $(3x - 5)^2 - 49 = 0$;
2) $(4x + 7)^2 - 9x^2 = 0$;
3) $(a - 1)^2 - (2a + 9)^2 = 0$;
4) $25(3b + 1)^2 - 16(2b - 1)^2 = 0$.

549.• Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $16 - (6 - 11x)^2 = 0$;
2) $(7m - 13)^2 - (9m + 19)^2 = 0$.

550.• Bizonyítsátok be, hogy bármely természetes n esetében a kifejezések értéke:
1) $(7n + 4)^2 - 9$ maradék nélkül osztható 7-tel;
2) $(8n + 1)^2 - (3n - 1)^2$ maradék nélkül osztható 11-gyel;
3) $(3n + 7)^2 - (3n - 5)^2$ maradék nélkül osztható 24-gyel;
4) $(7n + 6)^2 - (2n - 9)^2$ maradék nélkül osztható 15-tel.

551.• Bizonyítsátok be, hogy bármely természetes n esetében a kifejezések értéke:
1) $(5n + 4)^2 - (5n - 4)^2$ maradék nélkül osztható 80-nal;
2) $(9n + 10)^2 - (9n + 8)^2$ maradék nélkül osztható 36-tal;
3) $(10n + 2)^2 - (4n - 10)^2$ maradék nélkül osztható 12-vel.

552.•• Bizonyítsátok be, hogy:
1) két egymást követő természetes szám négyzetének különbsége egyenlő e két szám összegével;
2) két egymást követő páros szám négyzetének különbsége osztható 4-gyel.

553.•• Bizonyítsátok be, hogy:
1) két egymást követő páros szám négyzetének különbsége egyenlő e két szám összegének kétszeresével;
2) két egymást követő páratlan szám négyzetének különbsége osztható 8-cal.

554.•• Bizonyítsátok be az azonosságot:
$$(m^3 - n^3)^2 (m^3 + n^3)^2 - (m^6 + n^6)^2 = -4m^6n^6.$$

555.•• Két olyan kétjegyű szám négyzetének különbsége, amelyekben a számjegyeik egyenlők egymással, egyenlő 693. Határozzátok meg ezeket a számokat.

556.•• Az egyik természetes szám 7-tel való osztásakor a maradék 4, a másik szám 7-tel való osztásakor pedig a maradék 3. Bizonyítsátok be, hogy e két szám négyzetének különbsége 7 többszöröse.

557.•• A b mely értéke mellett lesz a $(b^2 - 4)\,x = b - 2$ egyenletnek:
1) számtalan gyöke;
2) nem lesz gyöke;
3) egy gyöke?

558.•• Az a mely értéke mellett lesz az $(a^2 - 25)\,x = a + 5$ egyenletnek:
1) számtalan gyöke;
2) nem lesz gyöke;
3) egy gyöke?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

559. A csónak 2,4 órán át haladt a vízfolyás irányában és 3,6 órán át a vízfolyással szemben. A vízfolyás irányában megtett út 5,4 km-rel hosszabb a vízfolyással szemben megtett út hosszánál. Határozzátok meg a csónak sebességét, ha a vízfolyás sebessége 2,5 km/ó.

560. Három nap alatt 130 kg narancsot adtak el. A második napon eladott narancs az első napon eladott narancs mennyiségének a $\frac{4}{9}$-e, a harmadik napon pedig annyit adtak el, mint amennyit az első és második napon összesen. Hány kg narancsot adtak el az első napon?

561. Az ..., a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... sorozatban mindegyik szám egyenlő a két előző összegével. Mivel egyenlő az a szám?

562. Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $\frac{2x-1}{8} - \frac{x+2}{4} = x$; 2) $3\,(2x + 3) - 2\,(3x + 5) = -1$.

563. A két tagból álló kifejezésekben határozzátok meg az a összes olyan értékét, amelyek mellett a kifejezések második tagja 3-szor nagyobb az első tag megfelelő értékénél:
1) a és $3a$; 2) a^2 és $3a^2$; 3) $a^2 + 1$ és $3a^2 + 3$.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

564. Írjátok fel kifejezés alakjában:
1) az a és a b számok összegének négyzetét;
2) az a és a b számok négyzetének összegét;
3) az a és a b számok kétszeres szorzatát;
4) a $3m$ és a $4n$ egytagok különbségének négyzetét.

565. Határozzátok meg az egytagok kétszeres szorzatát:
1) a^2 és $3b$; 2) $5x$ és $6y$; 3) $0,5m$ és $4n$; 4) $\frac{1}{3}m^2$ és $6m$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

566. Az étlapon 101 étel szerepel. Bizonyítsátok be, hogy páratlan számú ételből ugyanannyiféleképpen választhatjuk ki az ebédet, mint páros számúból, azzal a feltétellel, hogy nem választhatjuk ki az összes ételt az étlapról.

16. Két kifejezés összegének és különbségének a négyzete

Átalakítjuk az $(a + b)^2$ kifejezést. Felírjuk:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Tehát

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}\ .$$

Képlet alakjában megkaptuk két kifejezés összegének négyzetét. Megfogalmazhatjuk a következő szabályt:

Két kifejezés összegének négyzetét úgy határozzuk meg, hogy az első kifejezés négyzetéhez hozzáadjuk e két kifejezés kétszeres szorzatát, majd hozzáadjuk a második kifejezés négyzetét.

Átalakítjuk az $(a - b)^2$ kifejezést. Felírjuk:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Képlet alakjában megkaptuk két kifejezés különbségének négyzetét.

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Két kifejezés különbségének négyzetét úgy határozzuk meg, hogy az első kifejezés négyzetéből kivonjuk e két kifejezés kétszeres szorzatát, majd hozzáadjuk a második kifejezés négyzetét.

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy két kifejezés különbségének négyzetét megkaphatjuk a két kifejezés összegének négyzetéből is:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

A kapott képletek segítségével egyszerűbben emelhetjük négyzetre két kifejezés összegét vagy különbségét anélkül, hogy felhasználnánk a többtagok szorzásának a szabályát. Ezért ezeket a képleteket a rövidített szorzás képletei közé soroljuk.

1. PÉLDA Írjátok fel többtag alakjában a kifejezéseket:
1) $(3b - 4c)^2$; 2) $(a^3 + 5a)^2$.

Megoldás: 1) Két kifejezés különbségének négyzete alapján felírhatjuk:

$$(3b - 4c)^2 = (3b)^2 - 2 \cdot 3b \cdot 4c + (4c)^2 = 9b^2 - 24bc + 16c^2.$$

2) Két kifejezés összegének négyzete alapján felírhatjuk:

$$(a^3 + 5a)^2 = (a^3)^2 + 2 \cdot a^3 \cdot 5a + (5a)^2 = a^6 + 10a^4 + 25a^2.$$ ●

2. PÉLDA Alakítsátok át többtaggá a kifejezéseket:
1) $(-a - b)^2$; 2) $(-x^2 - 6)^2$.

Megoldás: 1) Képlet: $(-a - b)^2 = (-a)^2 - 2\,(-a) \cdot b + b^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2$.

Ezt a példát megoldhatjuk másképpen is.

Mivel a $(-a - b)^2 = (-1 \cdot (a + b))^2 = (-1)^2 \cdot (a + b)^2 = (a + b)^2$, vagyis a $(-a - b)^2$ és $(a + b)^2$ kifejezések azonosan egyenlők, ezért felírhatjuk:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2) $(-x^2 - 6)^2 = (x^2 + 6)^2 = x^4 + 12x^2 + 36$. ●

3. PÉLDA Oldjátok meg az $(x - 10)^2 = (x + 7)^2 - 17$ egyenletet.

Megoldás:

$$x^2 - 20x + 100 = x^2 + 14x + 49 - 17;$$
$$x^2 - 20x - x^2 - 14x = 49 - 17 - 100;$$
$$-34x = -68;$$
$$x = 2.$$

Felelet: 2. ●

4. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy a természetes szám négyzetének 3-mal való osztásakor a maradék vagy 0 vagy 1.

Megoldás: Legyen n valamely természetes szám. Megvizsgálunk három esetet.

1) Az n szám három többszöröse. Ekkor $n = 3k$, ahol k természetes szám. Felírjuk: $n^2 = (3k)^2 = 9k^2$. A $9k^2$ kifejezés értéke 3 többszöröse, vagyis n^2 3-mal való osztásakor a maradék 0.

2) Ha az n szám 3-mal való osztásakor a maradék 1, akkor az n számot felírhatjuk az $n = 3k + 1$ alakban, ahol k természetes szám. Felírjuk:

$$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3\,(3k^2 + 2k) + 1 = 3p + 1,$$

ahol $p = 3k^2 + 2k$ az n^2-nek 3-mal történő osztásakor a nem teljes hányados, a maradék pedig 1.

3) Ha az n számnak 3-mal történő osztásakor a maradék 2, akkor $n = 3k + 2$, ahol k természetes szám. Felírjuk: $n^2 = (3k + 2)^2 =$ $= 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1 = 3\,(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Könnyen belátható, hogy ebben az esetben az n^2-nek 3-mal történő osztásakor a maradék 1. ●

?

1. Melyik azonosság fejezi ki két kifejezés összegének négyzetét?
2. Fogalmazzátok meg, hogyan emeljük négyzetre két kifejezés összegét!
3. Melyik azonosság fejezi ki két kifejezés különbségének négyzetét?
4. Fogalmazzátok meg, hogyan emeljük négyzetre két kifejezés különbségét!

GYAKORLATOK

567.° Az alábbi többtagok közül melyikkel egyenlő azonosan az $(5a + 3)^2$ kifejezés:
1) $25a^2 + 15a + 9$; 2) $25a^2 + 30a + 9$; 3) $25a^2 + 9$; 4) $5a^2 + 9$?

568.° Az alábbi egyenletek közül melyik azonosság:
1) $(12a - b)^2 = 144a^2 - b^2$; 3) $(12a - b)^2 = 144a^2 - 24ab + b^2$;
2) $(12a - b)^2 = 144a^2 + 24ab + b^2$; 4) $(12a - b)^2 = 12a^2 - 24ab + b^2$?

569.° Írjátok fel többtag alakjában a kifejezéseket:
1) $(a + x)^2$; 7) $(7b + 6)^2$; 13) $(b^2 - 11)^2$;
2) $(x + 2)^2$; 8) $(8x + 4y)^2$; 14) $(a^2 + 4b)^2$;
3) $(y - 1)^2$; 9) $(0{,}4m - 0{,}5n)^2$; 15) $(x^2 + y^3)^2$;
4) $(5 - p)^2$; 10) $\left(3a + \frac{1}{3}b\right)^2$; 16) $(a^3 - 4b)^2$;
5) $(4 + k)^2$; 11) $(y - 10)^2$; 17) $(a^2 + a)^2$;
6) $(3a - 2)^2$; 12) $(13 - y)^2$; 18) $(3b^2 - 2b^5)^2$.

570.° Végezzétek el a négyzetre emelést:
1) $(a + 8)^2$; 6) $(4x - 3)^2$; 11) $(c^2 - 6)^2$;
2) $(b - 2)^2$; 7) $(5m - 4n)^2$; 12) $(15 + k^2)^2$;
3) $(7 + c)^2$; 8) $(10c + 7d)^2$; 13) $(m^2 - 3n)^2$;
4) $(6 - d)^2$; 9) $\left(4x - \frac{1}{8}y\right)^2$; 14) $(m^4 - n^3)^2$;
5) $(2m + 1)^2$; 10) $(0{,}3a + 0{,}9b)^2$; 15) $(5a^4 - 2a^7)^2$.

571.° Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:
1) $a^2 + (3a - b)^2$; 6) $3m(m - 4) - (m + 2)^2$;
2) $(4x + 5)^2 - 40x$; 7) $(y - 9)^2 + (4 - y)(y + 6)$;
3) $50a^2 - (7a - 1)^2$; 8) $(x - 4)(x + 4) - (x - 1)^2$;
4) $c^2 + 36 - (c - 6)^2$; 9) $(2a - 3b)^2 + (3a + 2b)^2$;
5) $(x - 2)^2 + x(x + 10)$; 10) $(x - 5)^2 - (x - 7)(x + 7)$.

572.° Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $(x - 12)^2 + 24x$;
2) $(x+8)^2 - x(x+5)$;
3) $2x(x+2) - (x-2)^2$;
4) $(y+7)^2 + (y+2)(y-7)$;
5) $(a+1)(a-1) - (a+4)^2$;
6) $(x-10)(9-x) + (x+10)^2$.

573.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $(x-8)^2 - x(x+6) = -2$;
2) $(x+7)^2 = (x-3)(x+3)$;
3) $(2x+1)^2 - (2x-1)(2x+3) = 0$;
4) $x(x-2) - (x+5)^2 = 35$.

574.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $(x+9)^2 - x(x+8) = 1$;
2) $(x - 11)^2 = (x - 7)(x - 9)$;
3) $(x - 4)(x + 4) - (x + 6)^2 = -16$;
4) $(1-3x)^2 - x(9x-2) = 5$.

575.• Helyettesítsétek a csillagokat olyan egytagokkal, hogy azonosságokat kapjatok:

1) $(* + b)^2 = * + 4ab + b^2$;
2) $(4x - *)^2 = 16x^2 - * + 100y^2$;
3) $(* - 5c)^2 = * - 20b^2c + 25c^2$;
4) $(7a^2 + *)^2 = * + * + 9b^6$.

576.• Helyettesítsétek a csillagokat olyan egytagokkal, hogy azonosságokat kapjatok:

1) $(* + 6b)^2 = * + 24ab + *$;
2) $(* - *)^2 = 9m^4 - 42m^2n^2 + *$.

577.• Bizonyítsátok be az $(a - b)^2 = (b - a)^2$ azonosságot.

578.• Alakítsátok át többtagokká a kifejezéseket:

1) $(-x+1)^2$;
2) $(-m-9)^2$;
3) $(-5a+3b)^2$;
4) $(-4x - 8y)^2$;
5) $(-0,7c - 10d)^2$;
6) $\left(-4a^2 + \frac{1}{8}ab\right)^2$.

579.• Végezzétek el a négyzetre emelést:

1) $(-3m+7n)^2$;
2) $(-0,4x - 1,5y)^2$;
3) $(-x^2-y)^2$;
4) $(-a^2b^2+c^{10})^2$.

580.• Végezzétek el a négyzetre emelést:

1) $(10a^2 - 7ab^2)^2$;
2) $(0,8b^3 + 0,2b^2c^4)^2$;
3) $(30m^3n + 0,04n^2)^2$;
4) $(0,5x^4y^5 - 20y^6)^2$;
5) $\left(1\frac{1}{3}a^2b + 2\frac{1}{4}ab^2\right)^2$;
6) $\left(2\frac{1}{3}x^3y^2 - \frac{9}{14}y^2x\right)^2$;
7) $\left(15m^6 + \frac{5}{6}m^3\right)^2$;
8) $\left(3\frac{1}{8}x^2y^{10} + \frac{16}{25}x^2y^6\right)^2$.

581.• Alakítsátok át többtagokká a kifejezéseket:

1) $6(1-2c)^2$;
2) $-12\left(x+\frac{1}{3}y\right)^2$;
3) $a(a-5b)^2$;
4) $5b(b^2+7b)^2$;
5) $(a+3)(a-4)^2$;
6) $(2x+4)^2(x-2)$;
7) $(a-5)^2(a+5)^2$;
8) $(3x+4y)^2(3x-4y)^2$.

582.• Alakítsátok át többtagokká a kifejezéseket:

1) $(0{,}02p^3k+20p^2k^4)^2$;
2) $\left(1\frac{1}{6}mn-\frac{4}{21}m^2n^5\right)^2$;
3) $-15\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{5}b\right)^2$;
4) $7x(x^3-2x)^2$;
5) $(5y-2)^2(2y+1)$;
6) $(10p-k)^2(10p+k)^2$.

583.• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket, és határozzátok meg az értéküket:

1) $(a+3)^2-(a-9)(a+9)$, ha $a=-2{,}5$;
2) $(5x-8)^2-(4x-3)^2+26x$, ha $x=-\frac{1}{3}$;
3) $(3y^2+4)^2+(3y^2-4)^2-2(1-3y^2)(1+3y^2)$, ha $y=\frac{1}{2}$.

584.• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket, és határozzátok meg az értéküket:

1) $2m(m-6)^2-m^2(2m-15)$, ha $m=-4$;
2) $(2x-5)^2-4(x+1)(x-7)$, ha $x=-3{,}5$.

585.• A változó mely értéke mellett lesz az $x+12$ kéttag értéke 225-tel nagyobb az $x-13$ kéttag megfelelő értékénél?

586.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $(x-12)(x+12)=2(x-6)^2-x^2$;
2) $(3x-1)^2+(4x+2)^2=(5x-1)(5x+1)$;
3) $5(x+2)^2+(2x-1)^2-9(x+3)(x-3)=22$.

587.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $(3x+2)^2+(4x-1)(4x+1)=(5x-1)^2$;
2) $2(m+1)^2+3(m-1)^2-5(m+1)(m-1)=-4$.

588.• Határozzátok meg a négyzet oldalát, ha oldalának 5 cm-rel történő növelésekor olyan négyzetet kapunk, amelynek a területe 95 cm^2-rel lesz nagyobb az adott négyzet területénél.

589.• Ha a négyzet oldalát 8 cm-rel kisebbítjük, akkor egy olyan négyzetet kapunk, amelynek a területe 352 cm^2-rel kisebb az adott négyzet területénél. Határozzátok meg az adott négyzet oldalát.

590.• Határozzátok meg azt a három egymást követő természetes számot, amelyek közül a legnagyobb szám négyzetének kétszerese 79-cel nagyobb a másik két szám négyzetének összegénél.

591.• Határozzátok meg azt a négy egymást követő természetes számot, amelyek közül a második és a negyedik szám négyzetének összege 82-vel nagyobb az első és harmadik szám négyzetének összegénél.

592.• Az a és a b mely értéke mellett lesznek igazak az alábbi egyenlőségek:

1) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$; 2) $(a-b)^2 = (a+b)^2$?

593.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$;

2) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$;

3) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$;

4) $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.

594.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$;

2) $(a-b)^2 + (ab+1)^2 = (a^2+1)(b^2+1)$.

595.• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezések értéke nem függ a változó értékétől:

1) $(x-3)^2 + (x+3)^2 - 2(x-6)(x+6)$;

2) $(4x^2+5)^2 + (2x^2-1)^2 - 4(5x^2+4)(x^2+1)$.

596.• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezések értéke nem függ az x változó értékétől.

1) $(6x-8)^2 + (8x+6)^2 - (10x-1)(10x+1)$;

2) $2(4x-y)(8x+5y) - (8x-5y)^2 - 4y(26x+1)$.

597.• Milyen szám, páros vagy páratlan lesz a páratlan természetes szám négyzete?

598.• Vezessétek le két kifejezés összege köbének a képletét:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

A fenti képlet felhasználásával alakítsátok át többtagokká a kifejezéseket:

1) $(x+3)^3$; 2) $(2x+y)^3$.

599.• Vezessétek le két kifejezés különbsége köbének a képletét:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Ennek a képletnek a felhasználásával alakítsátok át többtagokká a kifejezéseket:

1) $(1-x)^3$; 2) $(x-5y)^3$.

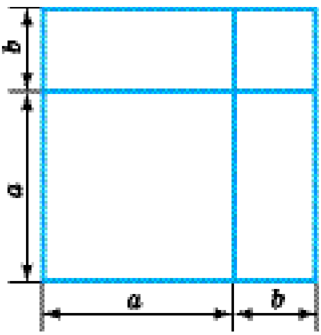
600.• Vezessétek le a háromtag négyzetének a képletét:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

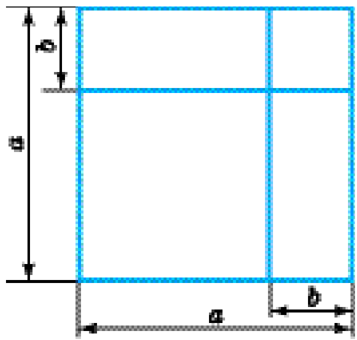
A fenti képlet felhasználásával alakítsátok át többtagokká a kifejezéseket:

1) $(a+b-c)^2$; 2) $(a-b+4)^2$.

601.• Az ókori görög tudós, Eukleidész (i. e. III. század) két kifejezés összege négyzetének és különbségének képletét geometriai módszerekkel bizonyította be. Az 5. és a 6. ábra felhasználásával végezzétek el a bizonyítást.



5. ábra



6. ábra

602.•• Mennyivel egyenlő a maradék, ha páratlan természetes szám négyzetét 8-cal osztjuk?

603.•• Tisztázzátok, hogy milyen lehet a maradék, ha természetes szám négyzetét 4-gyel osztjuk?

604.•• Bizonyítsátok be, hogy két egymást követő természetes szám négyzetének összege és e két szám kétszeres szorzata közötti különbség nem függ a számok kiválasztásától.

605.•• Bizonyítsátok be, hogy amikor valamely természetes szám 16-tal történő osztásakor a maradék 4, akkor ennek a számnak a négyzete maradék nélkül osztható 16-tal.

606.•• Bizonyítsátok be, hogy amikor valamely természetes szám 25-tel történő osztásakor a maradék 5, akkor ennek a számnak a négyzete maradék nélkül osztható 25-tel.

607.•• Valamely természetes szám 9-cel történő osztásakor a maradék 5. Mennyi lesz a maradék, ha ennek a számnak a négyzetét osztjuk 9-cel?

608.•• Valamely természetes szám 11-gyel történő osztásakor a maradék 6. Mennyi lesz a maradék, ha ennek a számnak a négyzetét osztjuk 11-gyel?

609.•• A rövidített szorzás képleteinek felhasználásával írjátok fel a kifejezéseket többtagok alakjában:

1) $(a + b + c)(a + b - c)$;
2) $(a + b + c)(a - b - c)$;
3) $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$.

610.•• A rövidített szorzás képleteinek felhasználásával írjátok fel a kifejezéseket többtagok alakjában:

1) $(a - b - c)(a + b - c)$;
2) $(a - b + c + d)(a - b - c - d)$.

611.•• Az a mely értéke mellett nincs megoldása a $(6x - a)^2 + (8x - 3)^2 = (10x - 3)^2$ egyenletnek?

612.•• Az a mely értéke mellett nincs megoldása a $(2a - 3x)^2 + (x - 1)^2 = 10(x - 2)(x + 2)$ egyenletnek?

613.* Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2.$$

Ez az azonosság az ismert ókori görög tudós, Pitagorasz (i. e. VI. század) nevéhez fűződik. Az azonosság segítségével kiszámíthatjuk a derékszögű háromszög oldalainak a hosszát, ha azok egész számokkal egyenlők. Egy és ugyanazon természetes n értéke esetében a $2n + 1$; $2n^2 + 2n$; $2n^2 + 2n + 1$ kifejezések a derékszögű háromszög oldalai hosszával egyenlők.

614.* (*J. L. Lagrange azonossága*[1].) Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+k^2)-(am+bn+ck)^2 =$$
$$= (an-bm)^2 + (ak-cm)^2 + (bk-cn)^2.$$

615.* Bizonyítsátok be, hogy öt egymást követő természetes szám négyzetének összege nem lehet természetes szám négyzete.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

616. Az Ukrajnában termesztett növények közül a cukorrépának a legmagasabb, 25% a cukortartalma, míg a cukornádnak csak 18%. Mennyi cukornádat kell feldolgozni ahhoz, hogy annyi cukrot kapjanak, mint amennyit 3600 tonna cukorrépából nyernek?

617. Az üzletbe 80 láda narancsot és banánt szállítottak, amelyekben 740 kg gyümölcs volt. Mindegyik ládában 10 kg narancs vagy 8 kg banán volt. Hány kg narancsot szállítottak az üzletbe?

618. Az első ládában 45 golyó van, közülük 15 fehér; a másikban 75 golyó van, közülük 25 fehér; a harmadikban 24 fehér és 48 piros golyó van; a negyedikben egyenlő számú fehér, piros és zöld golyó van. Melyik ládából húzhatunk ki a legnagyobb eséllyel fehér golyót?

619. A változó mely értéke mellett, és mennyi lesz a kifejezések legkisebb értéke:

1) x^2; 2) $x^2 - 16$; 3) $(x + 4)^2 + 20$?

620. A változó mely értéke mellett, és mennyi lesz a kifejezések legnagyobb értéke:

1) $-x^2$; 2) $-x^2 + 4$; 3) $12 - (x - 1)^2$?

[1] Lagrange Joseph Louis (1736–1813) –francia matematikus és csillagász.

621. A változó mely értéke mellett igazak az egyenlőségek:

1) $(x-1)^2+(x+1)^2=-10$; 3) $(x^2-1)^2+(x+1)^2=0$?

2) $(x-1)^2+(x+1)^2=0$;

622. Az x és az y változók mely értéke mellett igazak az egyenlőségek:

1) $(x+2)^2+(y-6)^2=-1$; 2) $(x+2)^2+(y-6)^2=0$?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

623. Ismert, hogy az m és az n természetes számok értéke olyan, hogy a $10m + n$ kifejezés értéke maradék nélkül osztható 11-gyel. Bizonyítsátok be, hogy a $(10m + n)(10n + m)$ kifejezés osztható 121-gyel.

17. Többtag átalakítása két kifejezés összegének és különbségének négyzetévé

Felírjuk az összeg és különbség négyzetének képletét fordított sorrendben:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Az ilyen alakban kapott képlet segítségével a háromtag kéttag négyzetévé alakítható át.

A kéttag négyzeteként felírható háromtagot **teljes négyzetnek** nevezzük.

1. PÉLDA Írjátok fel a háromtagot kéttag négyzeteként:

1) $x^2 + 10x + 25$; 2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4$.

Megoldás: 1) $x^2+10x+25=x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2=(x+5)^2$.

2) $9a^6-42a^3b^2+49b^4=(3a^3)^2-2\cdot 3a^3\cdot 7b^2+(7b^2)^2=(3a^3-7b^2)^2$.

2. PÉLDA A kifejezés kéttaggá való alakításának képlete segítségével határozzátok meg az $5{,}2^2 + 10{,}4\cdot 4{,}8 + 4{,}8^2$ kifejezés értékét.

Megoldás: $5{,}2^2+10{,}4\cdot 4{,}8+4{,}8^2=$

$$=5{,}2^2+2\cdot 5{,}2\cdot 4{,}8+4{,}8^2=(5{,}2+4{,}8)^2=10^2=100.$$

3. PÉLDA Oldjátok meg a $4x^2 - 12x + 9 = 0$ egyenletet.

Megoldás: Az egyenlet bal oldalát felírjuk különbség négyzeteként:

$$(2x - 3)^2 = 0.$$

Mivel a négyzet értéke abban és csakis abban az esetben nulla, ha a hatvány alapja nulla, ezért:

$$2x - 3 = 0;$$
$$x = 1,5.$$

Felelet: 1,5.

4. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy a

$$(2x + 1)^2 - 2\,(2x + 1)\,(2x - 5) + (2x - 5)^2$$

kifejezés értéke nem függ a változó értékétől.

Megoldás: $(2x + 1)^2 - 2\,(2x + 1)\,(2x - 5) + (2x - 5)^2 =$

$$= ((2x + 1) - (2x - 5))^2 = (2x + 1 - 2x + 5)^2 = 6^2 = 36.$$

5. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy az $x^2 - 4x + 5$ kifejezés értéke bármilyen x esetében pozitív. Mennyi a kifejezés legkisebb értéke, és milyen x esetében veszi fel ezt az értéket?

Megoldás: Átalakítjuk a kifejezést:

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1.$$

A kifejezés összeg alakjában való felírását, amelyben az egyik öszszeadandó kéttag négyzete (a mi esetünkben $(x - 2)^2$), a **kéttagú kifejezés négyzetének kiemeléséről** beszélünk.

Mivel bármely x esetén $(x - 2)^2 \geqslant 0$, ezért az $(x - 2)^2 + 1$ kifejezés csak pozitív értékeket vehet fel. Érthető, hogy $(x - 2)^2 + 1 \geqslant 1$. Tehát a kifejezés a legkisebb értékét, ami egyenlő 1-gyel, $x = 2$ esetén veszi fel.

6. PÉLDA Az x és y milyen értékeinél lesz az $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40$ kifejezés értéke nulla?

Megoldás: $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40 =$

$$= x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = (x - 6)^2 + (y + 2)^2.$$

A többtagot két olyan összeadandó összegeként adtuk meg, amelyek kizárólag nem negatív értékeket vehetnek fel. Az összegük és egyben az adott többtag is csak abban az esetben lesz nulla, ha az összes összeadandó nulla, azaz $x = 6$ és $y = -2$.

Felelet: $x = 6$, $y = -2$.

GYAKORLATOK

624.° Az alábbi kifejezések közül melyik azonosan egyenlő az $a^2 - 18a + 81$ többtaggal:

1) $(a-3)^2$; 2) $a - 9$; 3) $(a - 9)(a + 9)$; 4) $(a-9)^2$?

625.° Az alábbi egyenlőségek közül melyik azonosság:

1) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 8b)^2$;
2) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 4b)^2$;
3) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (ab + 4)^2$;
4) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 2b)^2$?

626.° Írjátok fel összeg vagy különbség négyzeteként:

1) $a^2 + 2a + 1$;
2) $x^2 - 12x + 36$;
3) $y^2 - 18y + 81$;
4) $100 - 20c + c^2$;
5) $a^2 - 6ab + 9b^2$;
6) $9a^2 - 30ab + 25b^2$;
7) $b^4 - 2b^2c + c^2$;
8) $m^2 + mn^2 + \frac{1}{4}n^4$;
9) $36a^2b^2 - 12ab + 1$;
10) $x^4 + 2x^2 + 1$;
11) $\frac{1}{16}x^4 - 2x^2y^3 + 16y^6$;
12) $0{,}01a^2 + 25b^{14} - ab^7$.

627.° Adjátok meg a háromtagot kéttag négyzeteként:

1) $b^2 - 2b + 1$;
2) $4 + 4n + n^2$;
3) $x^2 - 14x + 49$;
4) $4a^2 + 4ab + b^2$;
5) $9x^2 - 24xy + 16y^2$;
6) $a^6 - 2a^3 + 1$;
7) $36a^6 - 84a^3b^5 + 49b^{10}$;
8) $81x^4y^2 - 36x^2yz^6 + 4z^{12}$.

628.° Adjátok meg kéttag négyzeteként, majd határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $y^2 - 8y + 16$, ha $y = -4$;
2) $c^2 + 24c + 144$, ha $c = -10$;
3) $25x^2 - 20xy + 4y^2$, ha $x = 3$, $y = 5{,}5$;
4) $49a^2 + 84ab + 36b^2$, ha $a = 1\frac{1}{7}$, $b = 2\frac{5}{6}$.

629.° Határozzátok meg a kifejezés értékét.

1) $b^2 - 30b + 225$, ha $b = 6$;
2) $100a^2 + 60ab + 9b^2$, ha $a = 0{,}8$, $b = -3$.

630.• Milyen egytagot kell a csillag helyébe írni, hogy a kifejezés felírható legyen kéttag összegeként:

1) $* - 56a + 49$;
2) $9c^2 - 12c + *$;
3) $* - 42xy + 49y^2$;
4) $0{,}01b^2 + * + 100c^2$;

5) $a^4b^2 - 4a^3b^5 + *$;
7) $64 - 80y^{20} + *y^{40}$;
6) $1{,}44x^2y^4 - *y + 0{,}25y^6$;
8) $\frac{9}{25}a^6b^2 - a^5b^5 + *$?

631.• Helyettesítsetek a csillagokat egytaggal oly módon, hogy igaz legyen az azonosság:

1) $n^2 + 60n + * = (* + 30)^2$;
3) $225a^2 - * + 64b^4 = (* - *)^2$;
2) $25c^2 - * + * = (* - 8k)^2$;
4) $0{,}04x^2 + * + * = (* + 0{,}3y^3)^2$.

632.• Ha lehetséges, adjátok meg a háromtagot kéttag négyzeteként vagy a kéttag négyzetével ellentétes kifejezés alakjában:

1) $-8x + 16 + x^2$;
5) $81c^2 - 54b^2c + 9b^2$;
2) $a^8 + 4a^4b^3 + 4b^6$;
6) $b^{10} - a^2b^5 + 0{,}25a^4$;
3) $2x - 25 - 0{,}04x^2$;
7) $\frac{1}{16}x^2 - xy + 4y^2$;
4) $25m^2 - 30mn + 9n^2$;
8) $-\frac{9}{64}n^6 - 3mn^5 - 16m^2n^4$.

633.• Ha lehetséges, adjátok meg a háromtagot kéttag négyzeteként vagy a kéttag négyzetével ellentétes háromtag alakjában:

1) $-a^4 - 0{,}8a^3 - 0{,}16a^2$;
4) $\frac{25}{49}a^8 - 10a^4b^6 + 49b^{12}$;
2) $121m^2 - 44mn + 16n^2$;
5) $80xy + 16x^2 + 25y^2$;
3) $-a^6 + 4a^3b - 4b^2$;
6) $b^{10} - \frac{1}{3}b^5c + \frac{1}{9}c^2$.

634.• Írjátok fel kéttag négyzeteként:

1) $(4a + 3b)^2 - 8b(4a + b)$;
2) $(10x + 3y)^2 - (8x + 4y)(8x - 4y)$.

635.• Alakítsátok át kéttag négyzetévé:

1) $(3m - 2n)^2 + 5m(4n - m)$;
2) $(9x + 2y)^2 - (8x + 3y)(4x - 4y)$.

636.• Két szám összege vagy különbsége négyzetének képlete segítségével számítsátok ki a kifejezés értékét:

1) $1{,}02^2 - 1{,}02 \cdot 1{,}96 + 0{,}98^2$;
2) $24^2 + 96 \cdot 38 + 76^2$.

637.• Számítsátok ki:

1) $203^2 - 406 \cdot 103 + 103^2$;
2) $1{,}58^2 + 1{,}58 \cdot 2{,}84 + 1{,}42^2$.

638.• Milyen számot kell hozzáadni a $81a^2b^2 - 36ab + 9$ többtaghoz, hogy az így kapott kifejezés kéttag négyzete legyen?

639.• Milyen számot kell hozzáadni a $100m^4 + 120m^2 + 40$ többtaghoz, hogy az így kapott kifejezés kéttag négyzete legyen?

640.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $x^2 - 16x + 64 = 0$;
2) $81x^2 + 126x + 49 = 0$.

641.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $x^2 + 12x + 36 = 0$;
2) $25x^2 - 30x + 9 = 0$.

642.• Azonosság-e a következő egyenlőség:

$$(a - 2)(a - 3)(a + 3)(a + 2) + a^2 = (a^2 - 6)^2\ ?$$

643.• Bizonyítsátok be a következő azonosságot:

1) $(a-1)^2+2(a-1)+1=a^2$;

2) $(a+b)^2-2(a+b)(a-b)+(a-b)^2=4b^2$;

3) $(a-8)^2+2(a-8)(3-a)+(a-3)^2=25$;

4) $(x^n-2)^2-2(x^n-2)(x^n+2)+(x^n+2)^2=16$, ahol n tetszőleges természetes szám.

644.• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke független a változó értékétől:

1) $(3x+8)^2-2(3x+8)(3x-8)+(3x-8)^2$;

2) $(4x-7)^2+(4x-11)^2+2(4x-7)(11-4x)$.

645.•• Bizonyítsátok be, hogy az egyenletnek nincs gyöke:

1) $x^2-14x+52=0$;
2) $4x^2-2x+1=0$.

646.•• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke bármilyen x esetében pozitív. Milyen x esetén lesz a kifejezés értéke a legkisebb? Számítsátok ki:

1) $x^2-6x+10$;
2) $16x^2+24x+25$;
3) x^2+x+1.

647.•• Lehet-e negatív a kifejezés értéke:

1) $x^2-24x+144$;
2) $4x^2+20x+28$?

648.•• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke bármilyen x esetében negatív. Milyen x esetén lesz a kifejezés értéke a legnagyobb? Számítsátok ki:

1) $-x^2+4x-12$;
2) $22x-121x^2-2$;
3) $-56-36x^2-84x$.

649.•• Lehet-e pozitív a kifejezés értéke:

1) $-x^2+20x-100$;
2) $-x^2-10-4x$?

650.•• Az x milyen értékénél lesz a kifejezés értéke a legnagyobb? Számítsátok ki:

1) $-x^2-16x+36$;
2) $2-16x^2+24x$.

651.•• Az x milyen értékénél lesz a kifejezés értéke a legkisebb? Számítsátok ki:

1) $x^2-28x+200$;
2) $9x^2+30x-25$.

652.•• Írjátok le a $\frac{81}{16}x^4+y^8-\frac{9}{2}x^2y^4$ többtagot két kéttag négyzetének szorzataként.

653.•• Bizonyítsátok be, hogy az $(a-3b)(a-3b-4)+4$ kifejezés értéke a változók bármely értékénél nem negatív.

654.•• Írjátok fel két kifejezés négyzetének összegeként:

1) $2a^2-2a+1$;
4) $10x^2-6xy+y^2$;
2) $a^2+b^2+2a+2b+2$;
5) $x^2+5y^2+4xy-4y+4$;
3) $x^2+6x+y^2-2y+10$;
6) $2a^2+2b^2$.

655.•• Írjátok fel a többtagot négyzetek különbségeként, majd adjátok meg szorzat alakjában:

1) $a^4 + a^2 + 1$;
2) $x^2 - y^2 + 4x - 4y$;
3) $a^2b^2 + 2ab - c^2 - 8c - 15$;
4) $8a^2 - 12a + 2ab - b^2 + 4$.

656.•• Írjátok fel két kifejezés négyzetének összegeként vagy különbségeként:

1) $a^4 + 17a^2 + 16$;
2) $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 74$;
3) $2x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x + 9$;
4) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$.

657.•• Az x és y milyen értékeinél lesz a kifejezés értéke nulla:

1) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 41$;
2) $x^2 + 37y^2 + 12xy - 2y + 1$?

658.•• Létezik-e az x-nek és y-nak olyan értéke, amelyeknél a kifejezés értéke nulla:

1) $x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2$;
2) $9x^2 + y^2 - 12x + 8y + 21$?

659.•• Ismeretes, hogy $a + b = 7$, $ab = 2$. Határozzátok meg az $a^2 + b^2$ kifejezés értékét.

660.•• Az a és b pozitív értékei esetén $a^2 + b^2 = 34$, $ab = 15$. Határozzátok meg az $a + b$ kifejezés értékét.

661.•• Az a és b negatív értékei esetén $a^2 + b^2 = 68$, $ab = 16$. Határozzátok meg az $a + b$ kifejezés értékét.

662.• Adjátok meg a 24-et két szám összegeként úgy, hogy az összeadandók szorzata a legnagyobb értékű legyen.

663.• Határozzátok meg az összes 20 cm kerületű téglalap közül a legnagyobb területű téglalap oldalait.

664.• Ismeretes, hogy $b^2 + \frac{a^2}{4} = 1$, $ab = 3$, $a > 0$, $b > 0$. Határozzátok meg az $a + 2b$ kifejezés értékét.

665.• Ismeretes, hogy $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$. Mivel egyenlő az $a + b - 2c$ kifejezés értéke?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

666. Az első napon a turista az út 0,4-ét tette meg, a másodikon a maradék út $\frac{2}{3}$-át, míg a harmadikon a megmaradt 20 km-t. Határozzátok meg az út hosszát.

667. Két, kukoricával bevetett mező területe 100 ha. Az első mezőről 90 t zöldtakarmányt takarítottak be egy hektárról, míg a másodikról 80 tonnát. Határozzátok meg a mezők területét, ha ismeretes, hogy az első mezőről 2200 t-val többet takarítottak be, mint a másodikról.

668. Adjátok meg szorzat alakjában:
1) $2ab - 3ab^2$;
2) $8x^4 + 2x^3$;
3) $12a^3b^2 + 6a^2b^3 + 12ab^3$;
4) $2a - 2b + ac - bc$;
5) $m^2 - mn - 4m + 4n$;
6) $ax - ay + cy - cx - x + y$.

669. Valamilyen x esetén a $3x^2 - x + 7$ kifejezés értéke 10. Mennyi lesz ennél az x-nél a $6x^2 - 2x + 7$ kifejezés értéke?

670. (*Ősi bolgár feladat.*) Hét halász a tavon horgászott. Az egyik minden nap kiment a tóra, a másik csak kétnaponta, a harmadik minden harmadik napon stb., a hetedik minden hetedik napon. Ma mind a heten horgásznak. Legkevesebb hány nap múlva lesznek ismét mind a heten egyszerre a tónál?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

671. Írjátok fel kifejezések alakjában:
1) az a és b számok összegének köbe;
2) az a és b számok köbének összege;
3) a c és d számok köbének különbsége;
4) a c és d számok különbségének köbe.

672. Emeljétek köbre az egytagot:
1) y^2;
2) $2x^3$;
3) $3a^2b^4$;
4) $0{,}1mn^5$;
5) $\frac{1}{6}b^6c^7$;
6) $\frac{2}{7}p^{10}k^{15}$.

673. Adjátok meg egytag köbeként:
1) a^3b^6;
2) $8x^3y^9$;
3) $\frac{1}{64}c^9$;
4) $125m^{12}n^{21}$;
5) $0{,}216k^{15}p^{24}$;
6) $0{,}008a^9b^{12}c^{27}$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

674. Feloszthatók-e az 1 és 32 közötti természetes számok három csoportra úgy, hogy mindhárom csoport tagjainak a szorzata egyenlő legyen?

4. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Végezzétek el a szorzást: $(3n + 1)(3n - 1)$.
A) $9n^2 - 6n + 1$;
B) $9n^2 + 6n + 1$;
C) $9n^2 - 1$;
D) $9n^2 + 1$.

2. Melyik többtaggal egyenlő a $(4x - 1)^2$ kifejezés?
A) $16x^2 + 8x + 1$;
B) $16x^2 - 8x + 1$;
C) $16x^2 + 1$;
D) $16x^2 - 1$.

3. Bontsátok szorzótényezőkre a $4a^2 - 25$ kifejezést.
A) $(2a - 5)^2$; C) $(2a - 5)(2a + 5)$;
B) $(2a + 5)^2$; D) $2a(2a - 25)$.

4. Adjátok meg szorzat alakjában: $-0{,}09x^4 + 81y^{16}$.
A) $(0{,}03x^2 - 9y^4)(0{,}03x^2 + 9y^4)$; C) $(9y^8 - 0{,}3x^2)(9y^8 + 0{,}3x^2)$;
B) $(9y^8 - 0{,}03x^2)(9y^8 + 0{,}03x^2)$; D) $(9y^4 - 0{,}3x^2)(9y^4 + 0{,}3x^2)$.

5. Az alábbi kéttagok közül melyik bontható fel tényezőkre a négyzetek különbségének képlete alapján?
A) $-a^2 - 4b^2$; B) $4a^2 + b^2$; C) $a^2 - 4b^2$; D) $4b^2 + a^2$.

6. Adjátok meg az $a^2 - 8a + 16$ kifejezést kéttag négyzeteként.
A) $(a + 4)^2$; B) $(a - 4)^2$; C) $(4a + 1)^2$; D) $(a - 1)^2$.

7. Ismeretes, hogy $\left(\frac{1}{2}x - 3y^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + axy^2 + 9y^4$. Mennyi az a értéke?
A) 3; B) –3; C) 6; D) –6.

8. Hozzátok egyszerűbb alakra az $(x + 8)(x - 8) - x(x - 6)$ kifejezést.
A) $6x - 16$; B) $6x + 16$; C) $-6x - 64$; D) $6x - 64$.

9. Melyik kéttaggal egyenlő a $(7m - 2)^2 - (7m - 1)(7m + 1)$ kifejezés?
A) $-14m + 5$; B) $-14m + 3$; C) $-28m + 5$; D) $-28m + 3$.

10. Hozzátok egyszerűbb alakra a $(c - 4)^2 - (3 - c)^2$ kifejezést.
A) $2c - 7$; B) $7 - 2c$; C) $7 + 2c$; D) $-2c - 7$.

11. Számítsátok ki az $(x - 4)^2 + 2(4 + x)(4 - x) + (x + 4)^2$ kifejezés értékét, ha $x = -1{,}2$.
A) 64; B) 32; C) 48; D) 72.

12. Adjátok meg a $(4 + a^2)(a - 2)(a + 2)$ kifejezést többtag alakjában.
A) $a^2 - 16$; B) $16 - a^2$; C) $16 - a^4$; D) $a^4 - 16$.

18. Két kifejezés köbének összege és különbsége

Meghatározzuk az $a + b$ kéttag és az $a^2 - ab + b^2$ háromtag szorzatát. A következőt kapjuk:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \underline{a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} + \underline{a^2b} - \underline{\underline{ab^2}} + b^3 = a^3 + b^3.$$

Ezzel bebizonyítottuk az

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

azonosságot.

Ez az azonosság a **köbök összegének képlete**.

A képlet jobb oldalán található $a^2 - ab + b^2$ többtagot a **különbség nem teljes négyzetének** nevezzük. A megnevezés az a és b számok különbsége négyzetéhez ($a^2 - 2ab + b^2$) való hasonlóságából ered.

Megfogalmazzuk a szabályt.

Két kifejezés köbének összege a két kifejezés összegének és különbségük nem teljes négyzetének a szorzatával egyenlő.

Felírjuk szorzat alakjában az $a^3 - b^3$ kifejezést:

$$a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3 = (a + (-b))\,(a^2 - a(-b) + (-b)^2) =$$
$$= (a - b)\,(a^2 + ab + b^2).$$

Bebizonyítottuk az azonosságot:

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)}$$

Ez az azonosság a **köbök különbségének** képlete.

Az $a^2 + ab + b^2$ többtagot az **összeg nem teljes négyzetének** nevezzük.

Megfogalmazzuk a következő szabályt.

Két kifejezés köbének különbsége a két kifejezés különbségének és összegük nem teljes négyzetének a szorzatával egyenlő.

Megjegyezzük, hogy ez a képlet is bebizonyítható a képlet jobb oldalán álló többtagok összeszorzásával.

1. PÉLDA Írjátok fel szorzat alakjában.

1) $8a^3 + 27b^3$; 2) $x^6 - y^9$.

Megoldás: 1) A többtagot felírjuk két kifejezés köbének összegeként:

$8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)\,(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

2) A többtagot felírjuk két kifejezés köbének különbségeként:

$x^6 - y^9 = (x^2)^3 - (y^3)^3 = (x^2 - y^3)\,(x^4 + x^2y^3 + y^6)$. ●

2. PÉLDA Hozzátok egyszerűbb alakra a $(4y - 1)\,(16y^2 + 4y + 1)$ kifejezést, és számítsátok ki az értékét, ha $y = \frac{1}{2}$.

Megoldás: $(4y - 1)\,(16y^2 + 4y + 1) = (4y)^3 - 1 = 64y^3 - 1$.

Ha $y = \frac{1}{2}$, akkor:

$$64y^3 - 1 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{8} - 1 = 8 - 1 = 7. \text{ ●}$$

3. PÉLDA Alakítsátok át az $(m - 4)^3 + 216$ kifejezést szorzattá.

Megoldás: Az összeg köbének a képlete alapján:

$$(m - 4)^3 + 216 = (m - 4)^3 + 6^3 =$$
$$= (m - 4 + 6)\,((m - 4)^2 - 6\,(m - 4) + 36) =$$
$$= (m + 2)\,(m^2 - 8m + 16 - 6m + 24 + 36) =$$
$$= (m + 2)\,(m^2 - 14m + 76). \text{ ●}$$

4. PÉLDA Bizonyítsátok be, hogy a $25^3 - 1$ kifejezés értéke maradék nélkül osztható 24-gyel.

Megoldás: A köbök különbségének képlete alapján:

$$25^3 - 1 = (25 - 1)(25^2 + 25 + 1) = 24(25^2 + 26).$$

A kifejezést egy olyan szorzat alakjában írtuk fel, ahol az egyik tényező 24, a másik pedig egy tetszőleges természetes szám. Tehát a kifejezés értéke osztható 24-gyel. ●

?

1. Milyen azonosságot nevezünk a köbök összege képletének?
2. Milyen többtagot nevezünk a különbség nem teljes négyzetének?
3. Fogalmazzátok meg két kifejezés köbének összege tényezőkre való bontásának szabályát!
4. Milyen azonosságot nevezünk a köbök különbsége képletének?
5. Milyen többtagot nevezünk az összeg nem teljes négyzetének?
6. Fogalmazzátok meg két kifejezés köbének különbsége tényezőkre való bontásának szabályát!

GYAKORLATOK

675.° Az alábbi kifejezések közül melyik azonosan egyenlő az $a^3 - 27$ többtaggal:

1) $(a-3)(a^2+6a+9)$;
2) $(a-3)(a^2-9)$;
3) $(a-3)(a^2-3a+9)$;
4) $(a-3)(a^2+3a+9)$?

676.° Melyek azonosságok az alábbi egyenlőségek közül:

1) $m^3+8n^6=(m+2n^2)(m^2+2mn^2+4n^4)$;
2) $m^3+8n^6=(m-2n^2)(m^2+2mn^2+4n^4)$;
3) $m^3+8n^6=(m+2n^2)(m^2-2mn^2+4n^4)$;
4) $m^3+8n^6=(m-2n^2)(m^2-2mn^2+4n^4)$?

677.° Írjátok fel szorzat alakjában:

1) a^3+8;
2) c^3-64;
3) $125-b^3$;
4) $1+x^3$;
5) a^3+1000;
6) $27a^3-1$;
7) $1000c^3-216$;
8) a^3b^3-1;
9) $m^3n^3+0{,}001$;
10) $\frac{64}{343}m^3-\frac{125}{216}n^3$;
11) $8m^6+27n^9$;
12) $m^6n^3-p^{12}$;
13) $0{,}027x^{21}+0{,}125y^{24}$;
14) $0{,}216-8c^{27}$;
15) $1000a^{12}b^3+0{,}001c^6d^{15}$.

678.° Írjátok fel szorzat alakjában:

1) x^3-1;
2) $27+a^3$;
3) $216-y^3$;

4) $\frac{1}{8}a^3 + b^3$; 5) $a^6 - 8$; 6) $a^3b^3 - c^3$; 7) $a^3 - b^{15}c^{12}$; 8) $125c^3d^3 + 0{,}008b^3$; 9) $\frac{64}{729}x^3 - \frac{27}{1000}y^6$.

679.° Adjátok meg többtag alakjában:

1) $(x-2)(x^2+2x+4)$; 2) $(2a-1)(4a^2+2a+1)$; 3) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)$; 4) $(0{,}5xy+2)(0{,}25x^2y^2-xy+4)$.

680.° Végezzétek el a szorzást:

1) $(b-4)(b^2+4b+16)$; 2) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$; 3) $(x^3+6y^2)(x^6-6x^3y^2+36y^4)$; 4) $\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{5}b\right)\left(\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{20}ab+\frac{1}{25}b^2\right)$.

681.° Egyszerűsítsétek a kifejezést, és határozzátok meg az értékét:

1) $(9a^2+3a+1)(3a-1)$, ha $a=\frac{1}{3}$;

2) $(5y-2)(25y^2+10y+4)+8$, ha $y=-\frac{1}{5}$.

682.° Határozzátok meg a kifejezés értékét.

1) $(1-b^2)(1+b^2+b^4)$, ha $b = -2$;

2) $2x^3+7-(x+1)(x^2-x+1)$, ha $x = -1$.

683.• Írjátok fel szorzat alakjában.

1) $(a+6)^3-27$; 2) $(2x-1)^3+64$; 3) $8a^6-(4a-3)^3$; 4) $1000+(y-10)^3$; 5) $(x+y)^3-(x-y)^3$; 6) $(a-2)^3+(a+2)^3$.

684.• Írjátok le szorzat alakjában:

1) $(b-5)^3+125$; 2) $(4-3x)^3-8x^3$; 3) $(a-b)^3+(a+b)^3$; 4) $(c+3)^3-(c-3)^3$.

685.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(x+1)(x^2-x+1)+(2-x)(4+2x+x^2)$;

2) $(x-4)(x^2+4x+16)-x(x-5)(x+5)$;

3) $a(a-3)^2-(a+3)(a^2-3a+9)$;

4) $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)(a^6+1)(a^{12}+1)$.

686.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(a-5)(a^2+5a+25)-(a-1)(a^2+a+1)$;

2) $(y-3)(y^2+3y+9)-y(y-3)(y+3)-(y+3)^2$;

3) $(a-b)(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)$.

687.• A csillagok helyébe írjatok olyan egytagokat, hogy a kapott kifejezés azonosság legyen:

1) $(7k-p)(*+*+*)=343k^3-p^3$;

2) $(* + *)(25a^4 - * + 36b^2) = 125a^6 + 216b^3$;

3) $(mn + *)(* - * + k^6) = m^3n^3 + k^9$.

688.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - 9x(3x^2 - 4) = 17$;

2) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - x(x - 7)(x + 7) = 15$;

3) $(x + 6)(x^2 - 6x + 36) - x(x - 9)^2 = 4x(4{,}5x - 13{,}5)$.

689.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(7 - 2x)(49 + 14x + 4x^2) + 2x(2x - 5)(2x + 5) = 43$;

2) $100(0{,}2x + 1)(0{,}04x^2 - 0{,}2x + 1) = 5x(0{,}16x^2 - 4)$.

690.• Bizonyítsátok be, hogy:

1) $456^3 - 156^3$ maradék nélkül osztható 300-zal;

2) $254^3 + 238^3$ maradék nélkül osztható 123-mal;

3) $17^6 - 1$ maradék nélkül osztható 36-tal.

691.• Bizonyítsátok be, hogy:

1) $341^3 + 109^3$ maradék nélkül osztható 90-nel;

2) $2^{15} + 3^3$ maradék nélkül osztható 35-tel.

692.•• Határozzátok meg azt a legkisebb n természetes számot, amelylyel az $x^{2n} - y^{3n}$ kifejezés szorzótényezőkre bontható mind a négyzetek, mind a köbök különbségének képlete alapján. Bontsátok tényezőkre mindkét képlet segítségével.

693.•• Gondoljatok ki olyan többtagot, amelyet szorzótényezőkre bonthattok a négyzetek és a köbök különbségének a képletével is.

694.•• Igaz-e az állítás, miszerint ha két természetes szám összege maradék nélkül osztható egy harmadikkal, akkor ezzel a számmal maradék nélkül osztható:

1) négyzetük különbsége;

2) négyzetük összege;

3) köbük összege?

695.•• Bizonyítsátok be, hogy két egymást követő páratlan természetes szám köbeinek összege maradék nélkül osztható 4-gyel.

696.•• Bizonyítsátok be, hogy két egymást követő természetes szám, melyek közül egyik sem a 3 többszöröse, köbeinek összege maradék nélkül osztható 9-cel.

697.•• Ismeretes, hogy $x^2 + y^2 = 1$. Határozzátok meg az $x^6 + 3x^2y^2 + y^6$ kifejezés értékét.

698.•• Ismeretes, hogy $x^3 - y^2 = 2$. Határozzátok meg az $x^9 - 6x^3y^2 - y^6$ kifejezés értékét.

699.•• Bizonyítsátok be, hogyha $2a - b = 1$, akkor $8a^3 - b^3 = 6ab + 1$.
700.•• Bizonyítsátok be, hogyha $a + 3b = 2$, akkor $a^3 + 27b^3 = 8 - 18ab$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

701. Az egyik ládában 12 kg almával több volt, mint a másikban. Miután az egyik ládából áttettek 4 kg-ot a másikba, kiderült, hogy a második ládában lévő alma tömege az első ládában lévő alma tömegének $\frac{5}{7}$-e. Hány kilogramm alma volt mindegyik ládában eredetileg?
702. Milyen az utolsó számjegye a $3^{16} + 7^{16}$ kifejezés értékének?
703. Határozzátok meg a kifejezések értékét, ha $a = 1$, illetve $a = -1$:
1) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{99} + a^{100}$; 3) $aa^2a^3a^4 \ldots a^{99}a^{100}$;
2) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{98} + a^{99}$; 4) $aa^2a^3a^4 \ldots a^{98}a^{99}$.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

704. Írjátok fel szorzat alakjában:
1) $3x^2 + 12xy$; 5) $49b^2 - c^2$;
2) $10m^5 - 5m$; 6) $p^2 + 12pk + 36k^2$;
3) $ab - ac + 7b - 7c$; 7) $100a^4 - \frac{1}{9}b^2$;
4) $6x - xy - 6y + y^2$; 8) $25a^2 - (a - 3)^2$.
705. Oldjátok meg az egyenletet:
1) $(x - 4)(x + 3) = 0$; 4) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;
2) $x^2 - 81 = 0$; 5) $x(x + 7)(3x - 2) = 0$;
3) $7x^2 + 21x = 0$; 6) $12x^3 - 2x^2 = 0$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

706. Van 100 halom érménk, mindegyikben 100 darabjával. Az egyik halom hamis érmékből áll, amelyek 1 g-mal könnyebbek a valódinál, melynek tömege 10 g. Legalább hány mérésre van szükség digitális mérleg segítségével, hogy megtalálhassuk a hamis érmékből álló halmot?

19. Többtagok tényezőkre bontásának különböző módszerei

Az előzőkben a többtagok tényezőkre bontásának három módszerével ismerkedtünk meg:
- közös tényező kiemelésével;
- csoportosítási módszerrel;
- rövidített szorzás képleteinek felhasználásával.

Több matematikai feladat megoldása során gyakran többféle módszer bizonyos sorrendben történő együttes használatára van szükség. Egyebek között számtalan olyan többtag létezik, melyeknek tényezőkre bontásához egyszerre többféle módszert kell alkalmazni.

Felmerül a jogos kérdés: milyen módszereket, és milyen sorrendben kell alkalmaznunk a többtagú kifejezések tényezőkre való felbontásakor? Mindent figyelembe vevő eljárás nem létezik, minden a konkrét többtagtól függ. Mégis megfogalmazunk néhány általános útmutatást:

1) ha lehetséges, a felbontást a közös tényező kiemelésével kezdjük;

2) a továbbiakban megvizsgáljuk a rövidített szorzás képletei felhasználásának lehetőségét;

3) ha nem használhatók a rövidített szorzás képletei, meg kell próbálni a csoportosítási módszert.

1. PÉLDA Bontsátok tényezőkre a többtagú kifejezést:

1) $3a^2b - 12b$; 3) $24m^4 + 3m$;

2) $-5x^2 + 30xy - 45y^2$; 4) $3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab$.

Megoldás: 1) Előbb kiemeljük a zárójel elé a közös tényezőt, majd felhasználva a négyzetek különbségének a képletét, a következőt kapjuk:

$$3a^2b - 12b = 3b\,(a^2 - 4) = 3b\,(a - 2)\,(a + 2).$$

2) Előbb kiemeljük a zárójel elé a közös tényezőt, majd felhasználva a különbségek négyzetének a képletét, a következőt kapjuk:

$$-5x^2 + 30xy - 45y^2 = -5\,(x^2 - 6xy + 9y^2) = -5\,(x - 3y)^2.$$

3) Előbb kiemeljük a tényezőt a zárójel elé, és felhasználjuk a köbök összegének képletét:

$$24m^4 + 3m = 3m\,(8m^3 + 1) = 3m\,(2m + 1)\,(4m^2 - 2m + 1).$$

4) Kombinálva a közös tényező kiemelését a csoportosítás módszerével, a következőt kapjuk:

$$3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab = 3a\,(a^2 + 7a - 2ab - 14b) =$$
$$= 3a\,((a^2 + 7a) + (-2ab - 14b)) = 3a\,(a\,(a + 7) - 2b\,(a + 7)) =$$
$$= 3a\,(a + 7)\,(a - 2b).$$

2. PÉLDA Írjátok fel szorzat alakjában.

1) $x^{16} - 1$; 2) $a^{12} - b^{12}$.

Megoldás: 1) $x^{16} - 1 = (x^8 - 1)(x^8 + 1) =$

$= (x^4 - 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) = =$

$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)$.

2) $a^{12} - b^{12} = (a^6 - b^6)(a^6 + b^6) = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)(a^6 + b^6)$.

Három szorzótényezőt kaptunk, melyek közül az egyik köbök különbsége, a másik kettő pedig köbök összege. A megfelelő képletek segítségével a következőt kapjuk:

$$a^{12} - b^{12} = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2) \times$$
$$\times (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4).$$

3. PÉLDA Bontsátok fel tényezőkre.

1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n$; 2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$.

Megoldás: 1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n = (m^2 - 16n^2) + (2m - 8n) =$

$= (m - 4n)(m + 4n) + 2(m - 4n) = (m - 4n)(m + 4n + 2)$.

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16 = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 16 =$

$= (x + 2y)^2 - 4^2 = (x + 2y - 4)(x + 2y + 4)$.

4. PÉLDA Oldjátok meg az $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ egyenletet.

Megoldás:

$$x^2(x + 1) - 4(x + 1) = 0;$$
$$(x + 1)(x^2 - 4) = 0;$$
$$(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0;$$
$$x + 1 = 0, \text{ vagy } x - 2 = 0, \text{ vagy } x + 2 = 0;$$
$$x = -1, \text{ vagy } x = 2, \text{ vagy } x = -2.$$

Felelet: –1; 2; –2.

5. PÉLDA Bontsátok tényezőkre az $x^2 + 8x - 9$ háromtagot, kiemelve először a kéttag négyzetét.

Megoldás: Ha az $x^2 + 8x$ összeghez hozzáadunk 16-ot, akkor a kapott $x^2 + 8x + 16$ kifejezést felírhatjuk az összeg négyzetének a képlete alapján. Hozzáadva és kivonva a háromtagból 16-ot, a következő kifejezést kapjuk:

$$x^2 + 8x - 9 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 9 = (x + 4)^2 - 25 =$$
$$= (x + 4 - 5)(x + 4 + 5) = (x - 1)(x + 9).$$

6. PÉLDA Bontsátok tényezőkre az $x^4 + 4y^4$ többtagot.

Megoldás: Mivel $x^4 = (x^2)^2$, $4y^4 = (2y^2)^2$, ezért a többtaghoz hozzáadva, majd kivonva belőle a $4x^2y^2$ egytagot (az x^2 és $2y^2$ egytagok kétszeres szorzatát), a következőt kapjuk:

$$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy).$$

GYAKORLATOK

707.° Bontsátok tényezőkre:

1) $2a^2-2b^2$; 4) $3ab^2-27a$; 7) x^4-x^2;
2) cx^2-cy^2; 5) x^3-4x; 8) $0{,}09t^4-t^6$;
3) $3x^2-3$; 6) $2y^3-18y$; 9) $\frac{16}{49}a^2b^4c^5-b^2c^3$.

708.° Adjátok meg szorzat alakjában a többtagú kifejezést:

1) $12b^2-12c^2$; 4) $3mn^2-48m$;
2) $2a^2c-2b^2c$; 5) $7y^3-7y$;
3) $5a^2-20$; 6) a^3-a^5.

709.° Bontsátok tényezőkre:

1) $3a^2+6ab+3b^2$; 4) $-7b^2-14bc-7c^2$;
2) $5m^2+5n^2-10mn$; 5) $x^2y+14xy^2+49y^3$;
3) $-3x^2+12x-12$; 6) $-8a^3b+56a^2b^2-98ab^3$.

710.° Bontsátok tényezőkre:

1) $8x^2+16xy+8y^2$; 3) $-12b^3-12b^2-3b$;
2) $-2a^2+24ab-72b^2$; 4) $48m^3n-72m^2n+27mn$.

711.° Adjátok meg szorzat alakjában a többtagú kifejezést:

1) a^4-b^4; 2) c^4-81.

712.° Bontsátok tényezőkre:

1) x^4-16; 2) y^8-1.

713.° Bontsátok szorzótényezőkre:

1) $4a^3-4b^3$; 3) $7+7b^3$; 5) $2a^4-250a$;
2) $2m^3-16$; 4) $-x^4+27x$; 6) $9a^5-9a^2$.

714.° Adjátok meg szorzat alakjában:

1) $3x^3+3y^3$; 2) $5m^4-320mn^3$; 3) $6c^5-6c^8$.

715.° Bontsátok tényezőkre:

1) a^7+ab^6; 2) x^8-y^8; 3) c^6-1.

716.° Bontsátok tényezőkre:

1) c^6+c^9; 2) m^6-n^6; 3) a^8-b^4.

717.° Adjátok meg szorzat alakjában a többtagú kifejezést:

1) $3ab+15b-3a-15$; 5) a^3+a^2-a-1;
2) $84-42y-7xy+14x$; 6) $2x^3-2xy^2-8x^2+8y^2$;
3) $abc+6ac+8ab+48a$; 7) $5a^2-5b^2-15a^2b+15ab^2$;
4) $m^3-m^2n+m^2-mn$; 8) $a^2b^2-1-b^2+a^2$.

718.° Bontsátok tényezőkre:

1) $15cx + 2cy - cxy - 30c$;
2) $35a^2 - 42ab + 10a^2b - 12ab^2$;
3) $x^3 + x^2y + x^2 + xy$;
4) $mn^4 - n^4 + mn^3 - n^3$.

719.• Bontsátok tényezőkre:

1) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$;
2) $81 - (x^2 + 6x)^2$;
3) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$;
4) $c^2 + 4c + 4 - h^2$;
5) $9a^2 + c^2 + 6ac - 9$;
6) $a^2 - b^2 - 10b - 25$;
7) $49 - y^2 + x^2 - 14x$;
8) $mn^2 - m^3 - 12m^2 - 36m$.

720.• Adjátok meg szorzat alakjában a többtagú kifejezést:

1) $(m^2 - 2m)^2 - 1$;
2) $16 - (m^2 + 4m)^2$;
3) $x^2 - 18xy + 81y^2 - z^2$;
4) $64x^2 + 48xy + 9y^2 - 144$;
5) $c^2 - a^2 + 22a - 121$;
6) $100 - 25y^2 - 60x^2y - 36x^4$.

721.• Bontsátok tényezőkre:

1) $a^2 - b^2 - a - b$;
2) $x - y - x^2 + y^2$;
3) $4m^2 - 9n^2 + 2m + 3n$;
4) $c^2 - d^2 + 4c - 4d$;
5) $5x^2y - 5xy^2 - x^2 + y^2$;
6) $a^2 - 10a + 25 - ab + 5b$;
7) $8mp + 8np - m^2 - 2mn - n^2$;
8) $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2$;
9) $m^3 - 8n^3 - m^2 + 4mn - 4n^2$;
10) $a^3 - 4a^2 + 4a - 1$.

722.• Bontsátok tényezőkre:

1) $m^2 - n^2 - m + n$;
2) $c + d - c^2 + d^2$;
3) $16x^2 - 25y^2 - 4x - 5y$;
4) $12a^2b^3 + 3a^3b^2 + 16b^2 - a^2$;
5) $49c^2 - 14c + 1 - 21ac + 3a$;
6) $ax^2 + ay^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$;
7) $27c^3 - d^3 + 9c^2 + 3cd + d^2$;
8) $b^3 - 2b^2 - 2b + 1$.

723.• Bontsátok tényezőkre:

1) $x^2(x - 2) - 18x(x - 2) + 81(x - 2)$;
2) $4x(y^2 - 9) + 4x^2(y^2 - 9) - 9 + y^2$;
3) $b^2(a + 1) - a^2(b + 1)$;
4) $(a - b)(b^2 - c^2) - (b - c)(a^2 - b^2)$.

724.• Adjátok meg szorzat alakjában a többtagú kifejezést:

1) $x^2(x + 4) - 20x(x + 4) + 100(x + 4)$;
2) $a^2 - 36 - 2a(36 - a^2) - a^2(36 - a^2)$;
3) $a^2(b - 1) - b^2(a - 1)$;
4) $(m - n)(n^3 - p^3) - (n - p)(m^3 - n^3)$.

725.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $x^3 - 4x = 0$;
2) $x^4 - x^2 = 0$;
3) $x^5 - 36x^3 = 0$;
4) $9x^3 - x = 0$;
5) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$;
6) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$;
7) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$;
8) $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$.

726.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $x^3 - x = 0$;
2) $x^4 + x^2 = 0$;
3) $x^4 - 8x^3 = 0$;
4) $49x^3 + 14x^2 + x = 0$;
5) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$;
6) $x^3 - 4x^2 - 25x + 100 = 0$.

727.• Azonosság-e a következő egyenlőség:

1) $(a-1)^3 - 9(a-1) = (a-1)(a-4)(a+2)$;
2) $(x^2+1)^2 - 4x^2 = (x-1)^2(x+1)^2$?

728.• Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $(a+2)^3 - 25(a+2) = (a+2)(a+7)(a-3)$;
2) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2 = (a + b + c - d)(a + b - c + d)$.

729.• Bontsátok tényezőkre a kifejezéseket kétféleképpen:
1) használjátok a négyzetek különbségének képletét;
2) bontsátok fel a zárójeleket, majd csoportosítsátok a kifejezéseket.

1) $(ab+1)^2 - (a+b)^2$;
2) $(a+2b)^2 - (ab+2)^2$.

730.•• Adjátok meg a kifejezést kéttag köbeként:

1) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$;
2) $b^3 - 6b^2 + 12b - 8$.

731.•• Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(a+c)$;
2) $(a-b)^3 + (b-c)^3 - (a-c)^3 = -3(a-b)(b-c)(a-c)$.

732.•• Bontsátok tényezőkre a kifejezést:

1) $(x - y)(x + y) + 2(x + 3y) - 8$;
2) $(2a - 3b)(2a + 3b) - 4(a + 3b) - 3$.

733.•• Adjátok meg a kifejezést szorzat alakjában:

1) $(5x - y^2)(5x + y^2) - 2(15x - 7y^2) - 40$;
2) $(3m - 2n)(12m + 5n) + 3m(3n + 4) - 2(3n^2 - 20n + 12)$.

734.•• Kiemelve a kéttag négyzetét, bontsátok tényezőkre a háromtagot:

1) $x^2 - 10x + 24$;
2) $a^2 + 4a - 32$;
3) $b^2 - 3b - 4$;
4) $4a^2 - 12a + 5$;
5) $9x^2 - 24xy + 7y^2$;
6) $36m^2 - 60mn + 21n^2$.

735.•• Bontsátok tényezőkre a többtagot:

1) $x^2 - 4x + 3$; 3) $y^2 + 12y + 35$; 5) $c^2 + 8cd + 15d^2$;
2) $a^2 + 2a - 24$; 4) $x^2 + x - 6$; 6) $9x^2 - 30xy + 16y^2$.

736.•• Az x_1 és x_2 értékeire érvényesek az $x_1 - x_2 = 8$ és $x_1x_2 = 5$ egyenlőségek. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $x_1x_2^2 - x_1^2x_2$; 2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $(x_1 + x_2)^2$; 4) $x_1^3 - x_2^3$.

737.•• Az x és y értékei olyanok, hogy $x + y = 6$, $xy = -3$. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $x^3y^2 + x^2y^3$; 2) $(x - y)^2$; 3) $x^4 + y^4$.

738.* Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges n természetes szám esetén a $(2n - 1)^3 - 4n^2 + 2n + 1$ kifejezés értéke maradék nélkül osztható 16-tal.

739.* Bontsátok tényezőkre:

1) $x^4 - 5x^2 + 4$; 3) $4x^4 - 12x^2 + 1$; 5) $x^4 + 4$;
2) $x^4 + x^2 + 1$; 4) $x^5 + x + 1$; 6) $x^8 + x^4 - 2$.

740.* Adjátok meg a kifejezést szorzat alakjában:

1) $x^4 + 5x^2 + 9$; 2) $x^4 - 8x^2 + 4$.

741.* Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges, 1-től eltérő n természetes szám esetén az $n^4 + n^2 + 1$ kifejezés értéke összetett szám.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

742. Adott három szám, melyek közül minden következő 4-gyel több az előzőnél. Határozzátok meg ezeket a számokat, ha ismeretes, hogy a legkisebb és legnagyobb szorzata 88-cal kevesebb a középső és legnagyobb szorzatánál.

743. Péter 2,5 km/ó sebességgel mászta meg a hegyet, majd egy másik úton 4 km/ó sebességgel ereszkedett le. Határozzátok meg a Péter által megtett utat, ha a hegyre felfelé vezető út 3 km-rel rövidebb, a lefelé vezető útnál, az oda-vissza úthoz szükséges idő pedig 4 ó.

744. Oldjátok meg az egyenletet:

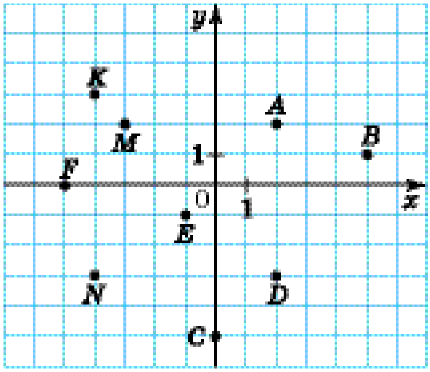
1) $|7x - 3| = 4$; 3) $4(x - 2) + 5|x| = 10$;
2) $||x| - 10| = 8$; 4) $|x| = 3x - 8$.

745. Bizonyítsátok be, hogy egy háromjegyű számnak és számjegyei kétszeres összegének az összege a 3 többszöröse.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

746. Számítsátok ki az y értékét az $y = 0{,}2x - 3$ képlet segítségével, ha: 1) $x = 4$; 2) $x = -3$.

747. A 7. ábra alapján határozzátok meg az *A, B, C, D, E, F, K, M* és *N* pontok koordinátáit.



7. ábra

748. Tüntessétek fel a koordinátasíkon az *A* (2; 3), *B* (4; 5), *C* (–3; 7), *D* (–2; 2), *K* (–2; –2), *M* (0; 2), *N* (–3; 0), *P* (1; –6), *F* (–4; –2) pontokat.

749. Szerkesszétek meg az *AB* és *CD* szakaszokat, majd határozzátok meg metszéspontjuk koordinátáit, ha *A* (–5; –2), *B* (1; 4), *C* (–3; 2) és *D* (2; –3).

750. Hogyan helyezkednek el a koordinátasíkon az *x* tengelyhez viszonyítva a következő pontok:
1) *A* (2; 6); 2) *B* (–3; 1); 3) *C* (–4; –5); 4) *D* (–3; 0)?

751. Határozzátok meg a 4 egység oldalú négyzet csúcsainak koordinátáit, ha két oldala a koordinátatengelyen fekszik, az egyik csúcsa koordinátáinak szorzata pedig pozitív szám. Hány megoldása van a feladatnak?
Ismételjétek át a 26. és 34. pontokat a 241., 243. oldalakon!

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

752. Legyen az $x_1, x_2, ..., x_{25}$ tetszőleges természetes számok halmaza, az $y_1, y_2, ..., y_{25}$ az előző halmaz néhány tagja áthelyezése után kapott számsor. Bizonyítsátok be, hogy az $(x_1 - y_1) \cdot (x_2 - y_2) ...$ $... (x_{25} - y_{25})$ kifejezés értéke páros szám.

5. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Adjátok meg az $(x - 6)(x^2 + 6x + 36)$ kifejezést többtag alakjában.
A) $x^3 - 36$; B) $x^3 + 36$; C) $x^3 - 216$; D) $x^3 + 216$.

2. Határozzátok meg az *M* többtagot, ha $y^3 - 64 = (y - 4) \cdot M$.
A) $y^2 - 8y + 16$; C) $y^2 - 4y + 16$;
B) $y^2 + 8y + 16$; D) $y^2 + 4y + 16$.

3. Egyszerűsítsétek le az $(a^2 + 2b^3)\ (a^4 - 2a^2b^3 + 4b^6)$ kifejezést.
A) $a^6 + 4b^9$; B) $a^6 - 4b^9$; C) $a^6 - 8b^9$; D) $a^6 + 8b^9$.

4. Írjátok fel a $3c^2 - 48$ többtagot szorzat alakjában.
A) $3\ (c - 16)$; C) $3\ (c - 4)^2$;
B) $3\ (c - 4)\ (c + 4)$; D) $3c\ (c - 16)$.

5. Írjátok fel a $7a^2 -42a + 63$ kifejezést szorzat alakjában.
A) $7\ (a - 3)\ (a + 3)$; C) $7\ (a + 3)^2$;
B) $7\ (a - 3)^2$; D) $7\ (a - 9)^2$.

6. Adjátok meg az $a^8 - a^6$ többtagot szorzat alakjában.
A) $a^6\ (a - 1)$; C) $a^6\ (a + 1)^2$;
B) $a^6\ (a - 1)\ (a + 1)$; D) $a^6\ (a - 1)^2$.

7. Írjátok fel az $m^2 - n^2 + m + n$ kifejezést szorzat alakjában.
A) $(m + n)\ (m - n + 1)$; C) $(m - n)\ (m + n + 1)$;
B) $(m - n)\ (m - n + 1)$; D) $(m + n)\ (m + n + 1)$.

8. Adjátok meg az $x^2 - y^2 + 14y - 49$ kifejezést szorzat alakjában.
A) $(x - y + 7)\ (x + y + 7)$; C) $(x - y + 7)\ (x + y - 7)$;
B) $(x - y - 7)\ (x + y + 7)$; D) $(x - y - 7)\ (x + y - 7)$.

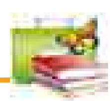
9. Írjátok fel a $81a^4 - 1$ többtagot szorzat alakjában.
A) $(3a - 1)\ (3a + 1)\ (9a^2 + 1)$; C) $(3a - 1)^2\ (3a + 1)^2$;
B) $(3a^2 - 1)\ (3a^2 + 1)\ (9a^2 + 1)$; D) $(3a - 1)^4$.

10. Oldjátok meg a $49x - x^2 = 0$ egyenletet.
A) 0; 7; B) –7; 0; 7; C) 0; 49; D) –7; 7.

11. Oldjátok meg az $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ egyenletet.
A) –1; 1; B) –1; 3; C) 1; 3; D) –3; –1; 1.

12. Adjátok meg az $(x^2 - 2)^2 - 4\ (x^2 - 2) + 4$ kifejezést szorzat alakjában.
A) $(x - 4)^2$; C) x^4;
B) $(x - 2)^2\ (x + 2)^2$; D) $(x^2 - 6)^2$.

A mindenki számára érthető nyelv



Az alábbiakban három nyelven – arabul, kínaiul és héberül – írtuk fel a mindenki számára ismert tulajdonságot: az összeadandók felcserélésétől az összeg nem változik.

في الجمع تبديل أماكن الأعداد لا يغير النتيجة

加数的次序不影响加和的结果

כאשר מחברים שני מספרים, אין חשיבות לשאלה מי הראשון ומי השני.

Ha az ember nem ismeri ezeket a nyelveket, természetesen még ezt az egyszerű mondatot sem érti meg. Itt siet a segítségünkre a nemzetközi matematikai nyelv, amelyen a fenti tulajdonság a következőképpen írható fel:

$$a + b = b + a.$$

Mint minden nyelvnek, a matematikainak is megvan a saját ábécéje – a matematikai szimbólumok. Ezek számok, betűk, műveleti jelek stb. Ezekből állnak össze a matematikai nyelv szavai, például a kifejezések. A szavak mondatokat alkotnak, például a képleteket stb.

Azt gondolhatnánk, nincs annál könnyebb, mint felírni a $2x = 4$ lineáris egyenletet. Viszont ezt még a nagy al-Hárizmi[1] is jóval hosszabban írta fel: *Két gyök 4 dirhammal*[2] *egyenlő*. Ennek az az oka, hogy al-Hárezmi idejében még nem léteztek matematikai szimbólumok.

Ez nem jelenti azt, hogy a IX. század előtt élt tudósok nem kísérelték meg a matematikai nyelv létrehozását.

Még az I. században Alexandriai Héron görög matematikus az ismeretlent a ζ (*szigma*) betűvel jelölte meg. A szimbólumok létrehozásában a következő lépést a III. században Alexandriai Diophantosz tette meg. Az *Aritmetika* című híres művében nemcsak az ismeretlen jelölését vezette be, hanem annak néhány hatványát is:

első hatvány	—	σ;
második hatvány	—	Δ^{ν} (Δυναμις – *dunamis*, ami *erőt*, *hatványt* jelent);
harmadik hatvány	—	K^{ν} (Κυβος – *kubosz*, azaz *köb*).

Egyenlőségként Diophantosz az ισ jelet használta – az ισος *iszosz* szó első két betűjét, ami *egyenlőt* jelent.

Diophantosz jeleinek nem egyszerű a használata. Például az összeadás és szorzás műveleteire nem vezetett be semmilyen külön szimbólumot. Az összes ismeretlen egyetlen ς betűvel való jelölése megnehezítette a többismeretlenes egyenletek megoldását. A kor hanyatlásával a Diophantosz által bevezetett algebrai szimbólumok is feledésbe merültek.

Az algebrai szimbólumok létrehozása a tehetséges német tudós, Jordanus Nemorarius munkáinak köszönhetően a XIII. században újult meg. Ő élesztette újjá az európai matematikában a betűszimbólum ötletét.

A XV. században a neves olasz matematikus, Luca Pacioli által használt szimbólumok terjedtek el széles körben.

---

[1] A 11. oldalon olvashattatok róla.

[2] D i r h a m – ókori arab ezüstpénz.

Sokat tettek a matematikai szimbólumok tökéletesítésében a XVI. században élt Johannes Widman és Adam Riese német matematikusok is.

Francois Viéte
(1540–1603)

A betűszimbólumok megalkotójának joggal tekinthető az egyik leghíresebb francia matematikus, a XVI. században élt Francois Viéte. Ő elsőként nemcsak a változókat, hanem a mennyiségek értékét is betűkkel jelölte meg. Viéte a következőt ajánlotta: *A keresett mennyiségeket A vagy másik magánhangzóval (E, I, O, U) jelöljük, az adott mennyiségeket pedig B, D, G vagy további mássalhangzókkal.* Ezek a jelölések nemcsak egyes egyenletek megoldásához nyújtottak lehetőséget Viétenek, hanem egy teljes csoport egyenlet megoldási folyamatának a vizsgálatához is. Például Viéte szimbólumainak köszönhetően írhatjuk fel a lineáris egyenletet ($ax = b$) a 2. pontban bemutatott alakban.

A népek nyelve folyamatosan fejlődik. Nincs ez másként a matematikában sem. Az új felfedezések új szakkifejezések és szimbólumok bevezetésével járnak.

Az ukrán matematikai szaknyelv fejlesztésében és rendszerezésében nagy szerepe volt Volodimir Levickijnek, a lvivi (lembergi) egyetem fizika-matematika szakos professzorának. Tudományos munkái nagy mértékben elősegítették az ukrán matematikai iskola létrejöttét és fejlődését.

Az ukrán matematikai kultúra megalapítójának egyértelműen az európai hírű tudóst, a filozófia doktorát, Miron Zarickij professzort tekintik.

V. Levickij
(1872–1956)

M. Zarickij
(1889–1961)

A 2. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Azonosan egyenlő kifejezések

Azokat a kifejezéseket, melyeknek az értéke a változók megfelelő értékeinél egyenlők, azonosan egyenlő kifejezéseknek nevezzük.

Azonosság

Azonosságnak nevezzük a változó bármilyen értékénél azonos egyenlőségeket.

Az azonosság bizonyításának módja

- Az egyenlőség egyik oldalát átalakítva megkapjuk a másik oldalt;
- az egyenlőség mindkét oldalát átalakítva ugyanazt a kifejezést kapjuk;
- igazoljuk, hogy az egyenlőség bal és jobb oldalának a különbsége nulla.

Természetes kitevőjű hatvány

Az a szám n ($n > 1$) természetes kitevőjű hatványának az n darab a szám szorzatát nevezzük. Az a szám 1 kitevőjű hatványa maga az a szám.

A hatvány előjele

Nem negatív szám hatványra emelésekor az eredmény szintén nem negatív szám.
Negatív szám páros hatványra emelésekor pozitív, míg páratlan hatványra emelésekor negatív számot kapunk.

A természetes kitevőjű hatvány tulajdonsága

$a^m a^n = a^{m+n}$ (a hatvány alaptulajdonsága)
$a^m : a^n = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{mn}$
$(ab)^n = a^n b^n$

Egytag vagy egytagú kifejezés

A számokat, változókat és azok hatványait tartalmazó kifejezést egytagnak nevezzük.

Az egytag normálalakja

Az egytagot normálalakúnak nevezzük, ha az egytagban az első helyen csak egy, nullától eltérő számtényező található, a többi tényező pedig különböző alapú hatványok szorzata.

Az egytag együtthatója

A normálalakú egytag számtényezőjét az egytagú kifejezés együtthatójának nevezzük.

Az egytag fokszáma

Az egytagban lévő változók hatványkitevőinek összegét az egytag fokszámának nevezzük. A csak nullától eltérő számból álló egytagú kifejezés fokszáma nulla.

Többtagú kifejezés

Néhány egytag összegét többtagnak nevezzük.

A többtag normálalakja

A normálalakú egytagokból álló többtagot, ha azok között nincs egynemű, a többtag normálalakjának nevezzük.

A többtag fokszáma

A többtag fokszámának a benne lévő legnagyobb fokszámú egytag hatványkitevőjét nevezzük.

Egytag szorzása többtaggal

Egytag többtaggal való szorzásakor az egytagot beszorozzuk a többtag minden tagjával, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

Többtagok szorzása

Többtagok szorzásakor az első többtag minden egyes tagját beszorozzuk a második többtag minden tagjával, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

Két kifejezés különbségének és összegének szorzata

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Két kifejezés négyzetének különbsége

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Két kifejezés összegének négyzete

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Két kifejezés különbségének négyzete

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Két kifejezés köbének összege

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Két kifejezés köbének különbsége

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

3. §. FÜGGVÉNYEK

- Ebben a paragrafusban tanulmányozzátok a mennyiségek közötti összefüggéseket.
- Megismerkedtek ezen összefüggéseket szabályozó fogalommal – a függvényekkel.
- Elsajátítjátok a függvények megadásának módjait.

20. A mennyiségek közötti összefüggések. Függvények

A tanár a táblára ír. Ezalatt változik a kréta hossza, tömege, térfogata, sőt a hőmérséklete is.

Üzemel az iskolai étkezde. A nap leforgása alatt változik az étkező tanulók száma, az elektromos energia és a víz felhasználása, a bevétel.

A körülöttünk végbemenő folyamatokban számtalan mennyiség értéke változik. Egyesek összefüggenek egymással, azaz az egyik mennyiség változása a másik változását eredményezi.

A fizika, kémia, biológia és sok más tudományág is foglalkozik a mennyiségek közötti összefüggések vizsgálatával. A reális folyamatok matematikai modelljeinek a felállításával a matematika szintén kiveszi a részét az összefüggések tanulmányozásából. A matematikai modell fogalmával a 3. pontban már találkozhattatok.

Megvizsgálunk néhány példát.

1. PÉLDA Változik a négyzet oldala. Érhető, hogy eközben a kerülete is megváltozik. Ha a négyzet oldalát a betűvel jelöljük, a kerületét P-vel, akkor a P változónak az a változó értékeitől való függését a következő képlet segítségével adhatjuk meg:

$$P = 4a.$$

Ez a képlet a négyzet kerülete és oldalhossza közötti összefüggés matematikai modellje.

Megadva az oldalhossz bármilyen értékét, a képlet segítségével meghatározható a négyzet megfelelő kerülete. Ezért ebben a modellben az a **független változó**, a P pedig **függő változó** vagy **függvény**.

Kihangsúlyozzuk, hogy az adott képlet azt a szabályt adja meg, melynek segítségével a változó értéke alapján *egyértelműen* meghatározható a függvény értéke.

2. PÉLDA A család 10 000 hrivnyát tett be a bankba 10%-os kamatra. Egy év múlva a számlán lévő M összeg a következő lesz:

$$M = 10\,000 + \frac{10\,000 \cdot 10}{100} = 11\,000 \text{ (hrn).}$$

Két év múlva:

$$M = 11\,000 + \frac{11\,000 \cdot 10}{100} = 12\,100 \text{ (hrn).}$$

Hasonlóképpen számítható ki, hogy három év múlva M = 13 310 hrn, négy év múlva M = 14 641 hrn, öt év múlva M = 16 105,1 hrn.

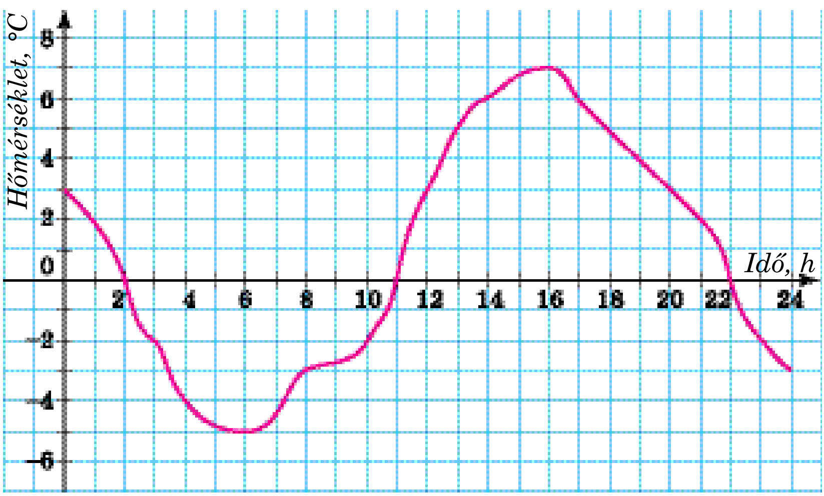
A táblázatban látható a számlán lévő pénzösszeg és a számlanyitás óta eltelt évek közötti összefüggés.

Évek száma n	1	2	3	4	5
A számlán lévő pénzösszeg M, hrn	11 000	12 100	13 310	14 641	16 105,1

A létrehozott táblázat az M és n mennyiségek közötti összefüggés matematikai modellje. Ebben az esetben az n független változó, az M pedig a függvény.

Kihangsúlyozzuk, hogy a táblázat azt a szabályt adja meg, amelynek segítségével a független változó értéke alapján *egyértelműen* meghatározható a függvény értéke.

3. PÉLDA A 8. ábrán a hőmérséklet és az idő közötti összefüggés látható.



8. ábra

A grafikon segítségével bármely t időpontban meghatározható a levegő T hőmérséklete (°C-ban). Ebben az esetben a t a független változó, a T pedig a függvény.

A grafikonra a T (hőmérséklet) és t (idő) mennyiségek közötti összefüggés matematikai modelljeként tekinthetünk.

Megjegyezzük, hogy a grafikon megadja a független változó alapján a függvény *egyértelmű* hozzárendelési szabályát.

Az előző példák eltérő jellege ellenére, mindhárom esetben a *függvény hozzárendelési szabályát* adtuk meg *a független változó alapján*. Ezt a szabályt **függvénynek**, a változók egymástól való függését pedig **függvénykapcsolatnak** nevezzük.

Tehát az 1–3. példákban leírt szabályok – függvények.

Az egyik változó másiktól való függése nem minden esetben függvénykapcsolat. Legyen például az autóbusz útvonalának hossza 15 km. A menetjegy ára a következő táblázat szerint határozható meg:

Menetjegy ára, hrn	2	4	6
Az útvonalszakasz hossza, km	5-ig	5-től 10-ig	10-től 15-ig

Érthető, hogy a menetjegy ára és az útvonalszakasz hossza változók kapcsolatban vannak egymással. Amennyiben a menetjegy árát vesszük független változónak, a leírt összefüggés nem függvény. Valóban, ha az utas 2 hrivnyát fizet, nem állapítható meg *egyértelműen*, hány kilométert utazott.

Ha a 3. példában a T hőmérsékletet tekintjük független változónak, akkor nem minden esetben határozható meg a T mennyiség értéke alapján *egyértelműen* a t mennyiség értéke. Ezért a t idő és a T hőmérséklet közötti összefüggés nem függvény.

Általában a független változót x betűvel jelölik, a függő változót – y-nal, a függvényt – f-fel. Ha az y és az x változók között függvénykapcsolat van, akkor ezt így jelölik: $y = f(x)$ (olvasd: ipszilon egyenlő ef iksz).

Az x változót a függvény **argumentumának** nevezik.

Az argumentum által felvett összes érték képezi a **függvény értelmezési tartományát**. Az 1. példában a függvény értelmezési tartománya az összes pozitív szám; a 2. példában az 1, 2, 3, 4, 5 természetes számok; a 3. példában a 24-nél nem nagyobb negatív számok.

Az f függvény esetében az x argumentum minden értékének az y függvény valamely értéke felel meg. Az y függő változót a **függvény értékének** is nevezik. A függvénynek az x változó x_0 értékének megfelelő értékét $f(x_0)$-val jelöljük. Például a függvény értéke $x = 7$ esetén egyenlő $f(7)$.

Ha az előző három példában leírt szabályt f betűvel jelöljük, akkor az első példában $f(2) = 8$, a másodikban $f(2) = 12\,100$, a harmadikban pedig $f(2) = 0$. Általánosítva tehát elmondhatjuk: az $f(a) = b$ kifejezés azt jelenti, hogy az argumentum a értékének a függvény b értéke felel meg.

A függvény által felvehető értékeket a **függvény értékkészletének** nevezzük.

Az 1. példában a függvény értékkészlete az összes pozitív szám; a 2. példában a táblázat második sorában található számok; a 3. példában az 5 és 7 közötti számok.

?

1. Milyen szabályt neveznek függvénynek?
2. A változók milyen összefüggését nevezik függvénykapcsolatnak?
3. Hogyan olvassuk az $y = f(x)$ kifejezést?
4. Mit nevezünk a függvény argumentumának?
5. Mit nevezünk a függvény értelmezési tartományának?
6. Mit nevezünk a függvény értékének?
7. Mit jelent az $f(a) = b$ kifejezés?
8. Mit nevezünk a függvény értékkészletének?

GYAKORLATOK

753.° Van-e összefüggés az egyenlő oldalú háromszög kerülete és oldalai között? Ha a háromszög oldala a, a kerülete pedig P, akkor milyen képlettel adható meg a közöttük lévő összefüggés? Van-e függvénykapcsolat a változók között?

754.° Függ-e a négyzet területe az oldal hosszától? Ha a négyzet oldala a, a területe S, milyen képlettel adható meg a közöttük lévő összefüggés? Van-e függvénykapcsolat a változók között?

755.° A gépkocsi sebessége 60 km/h. Hogyan függ az s megtett út a t menetidőtől? Adjátok meg az összefüggést képlet segítségével. Van-e függvénykapcsolat a változók között? Ha igen, nevezzétek meg a függvény argumentumát.

756.° A tartályban 300 l víz volt. A nyitott csapon percenként 2 l víz folyt ki. Adjátok meg képlet segítségével a tartályban maradt víz V térfogata és a kifolyás t ideje közötti összefüggést. Függvény-e a t és a V változók közötti hozzárendelés? Ha igen, határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

757.° Legyen az a – a kocka élhossza, V – a térfogata. Adjátok meg az a és V változók közötti összefüggés képletét. Van-e függvénykapcsolat a változók között?

758.° A gépkocsi v sebességgel 120 km-t tett meg. Milyen képlettel adható meg az út megtételéhez szükséges t idő és a v sebesség közötti kapcsolat? Van-e függvénykapcsolat a változók között? Ha igen, akkor mutassatok rá a függvény argumentumára.

759.° Két mellékszög értéke α és β. Adjátok meg a β szög α-tól való függőségének a képletét. Függvény-e a közöttük lévő hozzárendelés? Amennyiben igen, úgy nevezzétek meg a függvény argumentumát, és határozzátok meg az értelmezési tartományát valamint értékkészletét.

760.° Az osztályotokban matematikai dolgozatot írtak.

1) Minden tanulóhoz hozzárendelték az általa kapott osztályzatot.
2) Minden osztályzathoz hozzárendelték a tanulót, amelyik az adott osztályzatot kapta.

A két eset közül melyik függvény?

761.° Megvizsgáljuk azt a szabályt, amely szerint minden természetes számnak a vele ellentétes előjelű szám felel meg. Függvény-e az adott hozzárendelés?

762.° Minden negatív számhoz hozzárendelték magát a számot, minden pozitív számhoz az ellentétes előjelű értékét. Függvény-e az adott hozzárendelés?

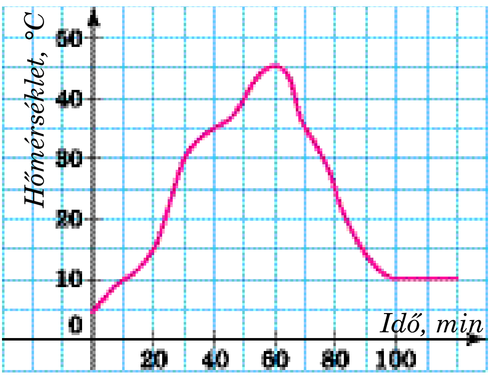
763.° Minden nullától eltérő racionális számhoz hozzárendelték az ellentétes előjelű értékét. Függvény-e az adott hozzárendelés?

764.° A napi hőmérséklet és az eltelt idő közötti összefüggés grafikonja alapján (8. ábra) határozzátok meg:

1) hány fok volt 4 órakor; 6 órakor; 10 órakor; 18 órakor; 22 órakor;
2) hány órakor volt a hőmérséklet 5 °C; –2 °C;
3) hány órakor volt a hőmérséklet értéke nulla fok;
4) hány órakor volt legalacsonyabb a hőmérséklet; mennyi volt az értéke;
5) hány órakor volt legmagasabb a hőmérséklet; mennyi volt az értéke;
6) milyen időközben volt a hőmérséklet értéke alacsonyabb 0 °C-nál; magasabb 0 °C-nál;
7) milyen időközben emelkedett a levegő hőmérséklete; milyen időközben csökkent.

A grafikon alapján állítsatok össze táblázatot a levegő napi hőmérsékletének 2 óránkénti változásáról.

765.° A 9. ábrán egy oldat hőmérséklete és a kísérlet időtartama közötti összefüggés grafikonja látható.



9. ábra

1) Mennyi volt az oldat kezdeti hőmérséklete?
2) Mennyi volt az oldat hőmérséklete a kísérlet kezdete után 30 perccel? Másfél órával?
3) Mennyi volt az oldat legmagasabb hőmérséklete, és mennyi idővel a kísérlet elkezdése után?
4) Hány perccel a kísérlet kezdete után lett az oldat hőmérséklete 35 °C?

A grafikon alapján állítsatok össze táblázatot az oldat hőmérsékletének 10 percenkénti változásáról a kísérlet első két órájában.

10. ábra

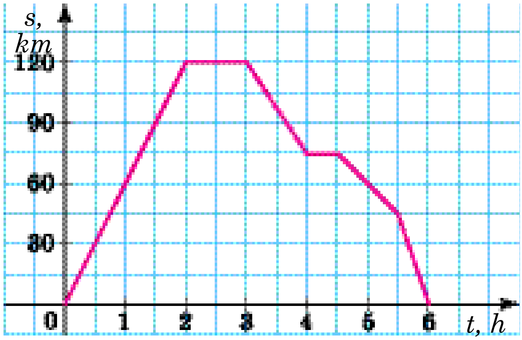
766.° A 10. ábrán a napi hőmérséklet és az eltelt idő közötti összefüggés grafikonja látható. A grafikon alapján állapítsátok meg:

1) mennyi volt a levegő hőmérséklete 2 órakor; 8 órakor; 12 órakor; 16 órakor; 22 órakor;
2) hány órakor volt a hőmérséklet –3 °C; –4 °C; 0 °C;
3) hány órakor volt legalacsonyabb a hőmérséklet; mennyi volt az értéke;
4) hány órakor volt legmagasabb a hőmérséklet; mennyi volt az értéke;
5) milyen időközben volt a hőmérséklet értéke alacsonyabb 0 °C-tól; magasabb 0 °C-nál;
6) milyen időközben emelkedett, és milyenben csökkent a hőmérséklet.

A grafikon alapján állítsatok össze táblázatot a levegő napi hőmérsékletének 2 óránkénti változásáról.

767.• A motorkerékpáros elment otthonról, majd bizonyos idő elteltével hazajött. A 11. ábrán a motorkerékpáros és az otthona közötti távolság változása, valamint az eltelt idő közötti összefüggés grafikonja látható (*a kerékpáros mozgásgrafikonja*). A grafikon segítségével állapítsátok meg:

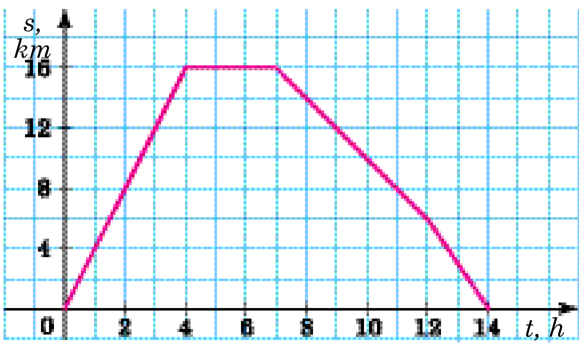
1) mekkora távolságot tett meg a motorkerékpáros az első óra alatt;
2) a mozgás kezdőpontjától mekkora távolságra állt meg pihenni első alkalommal; második alkalommal;
3) mennyi ideig tartott az első pihenő; a második pihenő;
4) mekkora távolságra volt az otthonától a motorkerékpáros az indulás után 5 órával;
5) milyen sebességgel haladt az utolsó fél órában.



11. ábra

768.• A turista túrázni indult a táborból, majd néhány óra elteltével visszatért oda. A 12. ábrán a mozgásgrafikonja látható.

1) Milyen távolságra volt a turista a tábortól az elindulás után 10 órával?
2) Mennyi időt töltött pihenéssel?
3) Az elindulása után mennyi idő múlva volt 8 km-re a tábortól?
4) Mekkora volt a turista sebessége a pihenőig?
5) Milyen sebességgel tette meg az utolsó két órát?



12. ábra

769.• Minden számhoz hozzárendelték a számot jelölő pont és az origó (koordinátatengely kezdőpontja) közötti távolságot. Magyarázzátok meg, hogy a fent leírt szabály miért függvény. Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. A függvényt f betűvel jelölve, határozzátok meg az f (2), f (–5), f (0) függvényértékeket.

770.• Megvizsgáljuk a következő szabály szerint megadott *g* függvényt: minden egyjegyű természetes számhoz hozzárendelték a négyzete értékének utolsó számjegyét.

1) Írjátok le, mivel egyenlő g (7); g (3); g (1); g (9); g (4).

2) Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

771.• Megvizsgáljuk azt a szabályt, melynek alapján az összes páros számot a 0-hoz rendelik, a páratlanokat pedig az 1-hez. Függvény-e az ilyen hozzárendelés?

772.• Mondjatok példát olyan *f* függvényre, melynek az értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, az értékkészlete pedig három szám: 0; 1; 2. Határozzátok meg az f (7); f (15); f (101) függvényértékeket.

773.• Megvizsgáljuk azt az esetet, amikor minden természetes számhoz a szám 7-tel való osztásának maradékát rendelik. Függvény-e az ilyen hozzárendelés? Amennyiben igen, határozzátok meg az értelmezési tartományát és értékkészletét.

774.• A táblázatban a napi hőmérséklet óránkénti értékeit láthatjátok[1]. Az adatok alapján rajzoljatok grafikont.

Idő, h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hőmérséklet, °C	2	3	1	0	–2	–3	–5	–4	–2	0	1	4	7
Idő, h	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Hőmérséklet, °C	8	9	7	5	4	3	2	1	0	–2	–3	–6	

A grafikon segítségével határozzátok meg, mennyi ideig emelkedett, illetve mennyi ideig csökkent a hőmérséklet.

775.• A kerékpáros kirándulásra indult. Az első 2 órát 12 km/h sebességgel tette meg, majd miután egy órát pihent, 8 km/h sebességgel ért haza. Rajzoljátok meg a kerékpáros mozgásgrafikonját.

776.• A táblázatban a folyó vízállása átlagvízszinttől való eltérésének május 1-je és 15-ödike között mért értékei találhatók.

[1] A táblázatban az argumentum értéke minden egyes oszlopban az előző értéktől 1-gyel nagyobb. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a táblázat *1 lépésenként* van összeállítva.

Dátum	Vízállás, cm	Dátum	Vízállás, cm	Dátum	Vízállás, cm
1	8	6	20	11	4
2	10	7	18	12	0
3	12	8	14	13	–3
4	15	9	10	14	–5
5	16	10	8	15	–6

Ábrázoljátok a vízállásváltozás grafikonját az említett időszakban.

777.• A melegítés kezdete előtt a víz hőmérséklete 6 °C-os volt. A melegítés folyamán a víz hőmérséklete percenként 2 °C-al növekedett.

1) Írjátok fel a T hőmérséklet és a melegítés t ideje közötti összefüggés képletet.
2) Állítsátok össze a T percenkénti változásának táblázatát 0 és 10 perc időközben.
3) Ábrázoljátok a víz hőmérsékletváltozása és az eltelt idő közötti összefüggés grafikonját az első 10 percben.

778.• A turistatábor egy egyenes út mellett terül el. A tábortól 5 km-re lévő turista 4 km/h sebességgel indult el az ellenkező irányba.

1) Határozzátok meg a turista és a tábor közötti s távolságot az indulástól számított t idő múlva.
2) Töltsétek ki a táblázatot.

t, h	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
s, km									

3) A táblázat alapján ábrázoljátok a tábor távolsága és a menetidő közötti összefüggés grafikonját.

779.• Gazdasági kutatások alkalmával gyakran használják a keresleti függvényt vagy görbét. A *keresleti görbe* az áru ára és a hozzá tartozó keresleti mennyiség közötti összefüggés grafikonja. A táblázatban a burgonya egyes térségekben való keresletének és kilogrammonkénti árának összefüggése található.

1 kg burgonya ára, hrn	3	4	5	6	7	8
Kereslet, ezer t	15	12	10	6	4	1

Az felsorolt adatokat ábrázoljátok grafikon segítségével. A feltüntetett pontokat összekötve rajzoljátok meg a keresleti görbét.

780.• Aprajafalva húsz tagú tanácsában két párt képviselői kaptak helyet: a törpök és Hókuszpók hívei. A képviselői testület 20 tagú. A táblázatban a törpök által az elmúlt 8 választás során szerzett képviselői helyek száma található.

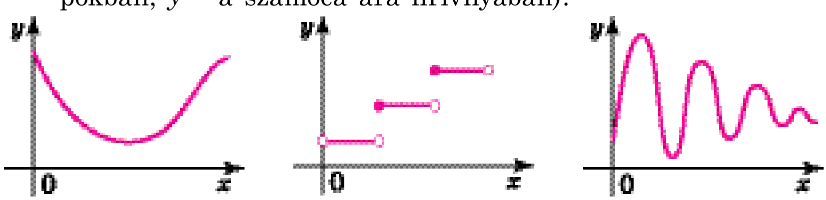
Választás	1	2	3	4	5	6	7	8
A törpök által szerzett képviselői helyek száma	14	12	10	16	18	15	14	10

1) Állítsatok össze hasonló táblázatot Hókuszpók pártja esetére is.
2) Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben a két táblázat adatait, és rajzoljátok meg a pártok népszerűségi görbéjét.

781.• A tartályba, melyben eredetileg 8 l petróleum volt, percenként 4 l petróleumot öntenek.
1) Írjátok fel a tartályban lévő petróleum y literje és az x idő közötti összefüggés képletét.
2) Ábrázoljátok az y változásának grafikonját az x 0-tól 10-ig felvett értékei esetében.
3) A grafikon segítségével határozzátok meg:
   a) hány liter petróleum lesz a tartályban 12 perc múlva; 15 perc múlva;
   b) hány perc múlva lesz a tartályban 40 l petróleum.
4) Hány perc alatt telik meg a 80 literes tartály?

782.• A telepre, ahol 100 t szén volt, mindennap még 20 t-t szállítottak.
1) Képlet segítségével fejezzétek ki a szén m mennyisége és a t idő közötti összefüggést.
2) Ábrázoljátok az összefüggés grafikonját.

783.•• A 13. ábrán látható grafikonok közül melyik fejezi ki az x és y változók közötti összefüggést:
1) az autóbusz menetjegyének ára 10 km-ként 1 hrivnyával emelkedik (x – az út hossza kilométerben, y – a jegy ára hrivnyában);
2) a fém rugót megnyújtották, majd elengedték (x – az eltelt idő szekundumban (s), y – a rugó hossza centiméterben;
3) a szamóca ára a piacon május–június folyamán (x – az idő napokban, y – a szamóca ára hrivnyában)?



a *b* *c*

13. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

784. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $-1{,}2x + 7{,}2 = 0$;
2) $-\frac{1}{3}x - 6 = 0$;
3) $3x + 1{,}5 = -2{,}5$;
4) $6 - 0{,}5x = 16$.

785. Bontsátok tényezőkre a kifejezéseket:

1) $-\frac{9}{64}b^6 - 3mn^6 - 16m^2n^4$;
2) $20z^2 + 3xy - 15xz - 4yz$;
3) $0{,}027a^{12} + b^9$.

786. Határozzátok meg azt a legkisebb a természetes számot, amelynél az $x^2 - 4x + 2a$ kifejezés az x bármely értékénél pozitív lesz.

787. (*J. Vojtyahovszkij: A tiszta matematika elméleti és gyakorlati kurzusa c. könyvéből vett feladat*[1]) A kapitány arra a kérdésre, hány ember van a csapatában, a következőt válaszolta: a csapat $\frac{2}{5}$ része őrségben van, $\frac{2}{7}$ része dolgozik, $\frac{1}{4}$ része kórházban és 27-en vannak jelen. Hány emberből áll a csapat?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

788. Az x és y természetes számokra érvényes a $34x = 43y$ egyenlőség. Bizonyítsátok be, hogy az $x + y$ összetett szám.

21. A függvény megadásának módjai

Az előző pontban megvizsgált feladatok arról tanúskodnak, hogy a függvények különböző módon adhatók meg.

A függvényt megadottnak tekintjük, ha ismert az értelmezési tartománya, valamint a szabály, amely szerint a független változó értéke alapján meghatározható a függvény értéke.

[1] Juhim Vojtyahovszkij (1750–1812) orosz matematikus. *A tiszta matematika elméleti és gyakorlati kurzusa* c. könyve (1787–1790) sok kiadást élt meg és 40 éven át az akkori idők legelterjedtebb tankönyve volt.

Bizonyára sok alkalommal fogalmaztatok meg különféle szabályokat. Mivel a függvény egy szabály, tehát kifejezhető szavakkal is, vagyis a **függvény szóban is megadható**.

Megvizsgálunk néhány példát.

1. PÉLDA A független változó bármilyen értéket felvehet. A függvény meghatározásának szabálya a következő: a független változó 2-szeres szorzatából kivonunk 1-et. Ez a mód lehetőséget ad egyértelműen meghatározni a függvény értékét. Tehát megadtuk az f függvényt, melynek értelmezési tartománya az összes szám. Például $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$, $f(-13{,}4) = (-13{,}4) \cdot 2 - 1 = -27{,}8$ stb. ●

2. PÉLDA A független változó 0 kivételével bármilyen értéket felvehet. A független változó és a függvény megfelelő értékei – kölcsönösen fordított (reciprok) értékek. Ebben az esetben adott az f függvény, melynek értelmezési tartománya 0 kivételével az összes szám. Például $f(1) = 1$; $f(3) = \frac{1}{3}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$ stb. ●

A függvényeket leggyakrabban **képletek segítségével** adják meg.

Ha az 1. példában a független változót x-szel, a függvényt pedig y-nal jelöljük, megadjuk az értelmezési tartományt, ami az összes szám, akkor az említett függvény az $y = 2x - 1$ képlet segítségével írható fel.

Érthető, hogy a 2. példa függvénye az $y = \frac{1}{x}$ képlettel adható meg, ahol x – bármely szám, a 0 kivételével.

Ha a függvény egy olyan képlettel van megadva, amelynek jobb oldala egész kifejezés és eközben nincs megadva az értelmezési tartománya, akkor úgy tekintjük, hogy a függvény értelmezési tartománya bármilyen szám. Például az $y = x^2$, $y = \frac{x-3}{5}$; $y = x^2 - x + 2$ képletek olyan függvényeket adnak meg, melyek értelmezési tartománya bármilyen szám lehet.

Ha a függvény az $y = x^3$ képlettel van megadva, akkor azt mondjuk, hogy adott az $y = x^3$ függvény.

Ha ki szeretnénk hangsúlyozni például, hogy az $y = 5 - \frac{x}{3}$ képlet egy f függvényt ad meg, akkor azt így írjuk fel: $f(x) = 5 - \frac{x}{3}$.

Ha azt szeretnék kiemelni például, hogy az $s = 10t + 2$ képlet a t argumentumú függvényt adja meg, ennek a következő a jelölése: $s(t) = 10t + 2$.

Megvizsgáljuk a -1; 0; $\frac{1}{2}$; 1; 3 értelmezési tartományú $f(x) = x - 2x^2$ függvényt.

$f(-1) = -3$; $f(0) = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; $f(1) = -1$; $f(3) = -15$.

A kapott eredményeket táblázatba foglaljuk.

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	-3	0	0	-1	-15

A táblázat első sorában lévő értékek alkotják az f függvény értelmezési tartományát. A táblázat segítségével meghatározható az argumentum értékeinek megfelelő függvényérték. Tehát az f függvény megadásának még egy módja a **táblázat**.

Ezt a módot abban az esetben célszerű használni, ha a függvény értelmezési tartománya csupán néhány számból áll.

3. PÉLDA A függvény az $y = 5x + 2$ képlettel van megadva. Határozzátok meg az argumentum azon értékét, melynél a függvény értéke 12.

Megoldás: Behelyettesítve az $y = 5x + 2$ képletbe az y helyett a 12-t, az $5x + 2 = 12$ egyenletet kapjuk, ahonnan $x = 2$.

Felelet: 2. ●

4. PÉLDA Az f függvényt a következő képlettel adták meg: $f(x) = x + 7$, ha $x \leqslant -1$ és $f(x) = 2$, ha $x > -1$. Határozzátok meg az f függvény értékét az argumentum következő értékei esetén: 1) -2; 2) -1; 3) 1.

Megoldás: 1) Mivel $-2 \leqslant -1$, ezért a függvény értékét az $f(x) = x + 7$ képlettel számítjuk ki. Tehát: $f(-2) = -2 + 7 = 5$.

2) Mivel $-1 \leqslant -1$, ezért $f(-1) = -1 + 7 = 6$.

3) Mivel $1 > -1$, ezért $f(1) = 2$.

Az adott függvény felírható kapcsos zárójel segítségével:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, & \text{ha } x \leqslant -1, \\ 2, & \text{ha } x > -1. \end{cases}$$ ●

5. PÉLDA A függvények az $y = 4x + 1$ és $y = 2x - 7$ képletekkel vannak megadva. Az argumentum mely értékénél lesz egyenlő a két függvény értéke?

Megoldás: Hogy megtalálhassuk az argumentum keresett értékét, megoldjuk a $4x + 1 = 2x - 7$ egyenletet:

$$4x - 2x = -7 - 1;$$
$$x = -4.$$

Felelet: $x = -4$ esetén.

?

1. Mikor mondhatjuk, hogy a függvény meg van adva?
2. A függvény megadásának milyen módjait ismeritek?

GYAKORLATOK

789.° Jelöljétek meg a függvények argumentumát és a függő változót:

1) $s(t) = 70t$; 3) $V(a) = a^3$;
2) $y(x) = -2x + 4$; 4) $f(x) = x^2 - 4$.

790.° A függvény az $y = 10x + 1$ képlettel van megadva. Határozzátok meg az y értékét, ha:

1) $x = -1$; 2) $x = 3$; 3) $x = -\frac{1}{5}$; 4) $x = 7$.

791.° A függvény az $y = x^2 - 3$ képlettel van megadva. Határozzátok meg az y értékét, ha:

1) $x = 5$; 2) $x = -4$; 3) $x = 0{,}1$; 4) $x = 0$.

792.° A függvényt az $y = -\frac{1}{6}x + 2$ képlettel adták meg. Számítsátok ki:

1) a függvény értékét a következő argumentumok esetén: 12; 6; –6; 0; 1; 2; –4; –3;
2) az argumentum értékét, ha a függvény értéke 4; 3; 0; –1.

793.° A függvény az $f(x) = 3 - 4x$ képlettel van megadva. Igazak-e a következő egyenlőségek:

1) $f(-2) = -5$; 2) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; 3) $f(0) = -1$; 4) $f(-1) = 7$?

794.° A függvényt az $f(x) = 2x - 1$ képlettel adták meg.

1) Számítsátok ki az $f(3)$; $f(-4)$; $f(0)$; $f(-0{,}5)$; $f(3{,}2)$.
2) Határozzátok meg az x értékét, amelynél $f(x) = 7$; $f(x) = -9$; $f(x) = 0$; $f(x) = -2{,}4$.
3) Igazak-e az egyenlőségek: $f(5) = 9$; $f(0{,}3) = 0{,}4$; $f(-3) = -7$?

795.° A függvény az $y = x\ (x + 8)$ képlettel van megadva. Töltsétek ki a táblázatot.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							

796.° A függvényt az $y = -\frac{2}{3}x$ képlettel adták meg. Töltsétek ki a táblázatot.

x	–9	–6	–3	–2	–1	0	1	2	3	6
y										

797.° Minden 10-nél nagyobb, de 20-nál kisebb természetes számhoz a 6-tal való osztásának maradékát rendelték.
1) Milyen módon adták meg a függvényt?
2) Milyen a függvény értékkészlete?
3) Adjátok meg a függvényt táblázat segítségével.

798.° A függvény értelmezési tartománya – az egyjegyű természetes számok, a függvény értékkészlete pedig az argumentum értékeinél 2-szer nagyobb számok.
1) Milyen módon adták meg a függvényt?
2) Adjátok meg a függvényt táblázat és képlet segítségével.

799.• Adjátok meg a függvényt képlet segítségével, ha értéke:
1) ellentétes előjelű az argumentum megfelelő értékével;
2) ha egyenlő az argumentum megfelelő értékének háromszorosával;
3) ha 4-gyel nagyobb az argumentum megfelelő értékének négyzeténél.

800.• Adjátok meg a függvényt képlet segítségével, ha a függvény értéke:
1) 3-mal kisebb az argumentum megfelelő értékénél;
2) 5-tel több az argumentum megfelelő értékének kétszeresénél.

801.• Állítsatok össze 0,5 lépésenként táblázatot az $y = x^2 + 2x$ képlettel megadott függvény értékeiből, ha $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

802.• Állítsatok össze táblázatot 1 lépésenként az $y = x - 1$ képlettel megadott függvény értékeiből, ha $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

803.• A függvényt az $y = 0{,}2x - 5$ képlet adja meg. Töltsétek ki a táblázatot.

x	4		–1,5		–3
y		2		–1,4	

804.• Adott az $y = 8 - \frac{1}{7}x$ függvény. Töltsétek ki a táblázatot.

x	14		–1,4	
y		0		9

805.• Adott a $g(x) = \frac{20}{x} - 3$ és a $h(x) = 8 - 3x$ függvény. Hasonlítsátok össze:
1) g (1) és h (1); 2) g (5) és h (2); 3) g (–2) és h (6).

806.• Adott a következő függvény: $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & \text{ha } x \le -2, \\ x^2, & \text{ha } -2 < x < 3, \\ 6, & \text{ha } x \ge 3. \end{cases}$

Számítsátok ki: 1) f (–3); 2) f (–2); 3) f (2); 4) f (3); 5) f (2,9); 6) f (8,1).

807.• Számítsátok ki az $y = \begin{cases} -2x+4, & \text{ha } x > 0, \\ 0{,}1x - 5, & \text{ha } x \le 0 \end{cases}$ függvény azon értékeit, amelyek az argumentum következő értékeinek felelnek meg:
1) 3; 2) 0,001; 3) 0; 4) –8.

808.• A függvény táblázat segítségével van megadva.

x	2	4	6	8
y	5	7	9	11

1) Milyen számokból áll a függvény értelmezési tartománya?
2) Adjátok meg a függvényt szóban és képlet segítségével is.

809.• A függvényt a következő táblázat adja meg:

x	1	3	5	7	9
y	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5

1) Milyen számokból áll a függvény értelmezési tartománya?
2) Adjátok meg a függvényt utasítással és képlettel.

810.• Két függvényt az $y = x^2 - 8x$ és $y = 4 - 8x$ képletek adják meg. Az x mely értékeinél lesz egyenlő a két függvény értéke?

811.• A függvény az $f(x) = 3x + 5$ képlettel van megadva. Az x milyen értékénél egyenlő a függvény az argumentummal?

812.• A függvény az $y = x^2 + 2x - 1$ képlettel van megadva. Az x milyen értékeinél lesz egyenlő a függvény az argumentum kétszeresével?

813.* Az f függvényt utasítással adták meg: a függvény értéke egyenlő a legnagyobb egész számmal, amelyik nem nagyobb az argumentum megfelelő értékénél[1]. Számítsátok ki: f (3,7); f (0,64); f (2); f (0); f (–0,35); f (–2,8).

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

814. Az alábbi egyenletek közül melyiknek: a) van egy gyöke; b) van két gyöke, c) van számtalan gyöke; d) nincs egy gyöke sem:

1) $3{,}4\,(1 + 3x) - 1{,}2 = 2\,(1{,}1 + 5{,}1x)$;
2) $|\ 2x - 1\ | = 17{,}3$;
3) $3\,(|\ x - 1\ | - 6) + 21 = 0$;
4) $0{,}2\,(7 - 2x) = 2{,}3 - 0{,}3\,(x - 6)$?

815. Adott három szám, melyeknél minden következő 10-zel nagyobb az előzőnél. Határozzátok meg ezeket a számokat, ha a legnagyobb és a középső szorzata 320-szal több a legnagyobb és legkisebb szorzatánál.

816. Bizonyítsátok be: ha $a + c = 2b$, akkor $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

817. Ismeretes, hogy $x + y = \frac{a^2}{4}$, $y + z = -a$ és $x + z = 1$. Bizonyítsátok be, hogy az $x + y + z$ kifejezésnek minden esetben nem negatív értéke lesz.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

818. Rajzoljatok az $A(-2;\ 3)$ és $B(4;\ 3)$ pontokon áthaladó egyenest. Mivel egyenlők az egyenes pontjainak ordinátái?

819. Rajzoljatok a $C(3;\ 0)$ és $D(3;\ -4)$ pontokon áthaladó egyenest. Mivel egyenlők az egyenes pontjainak abszcisszái?

Ismételjétek át a 34. pont (243. old.) tartalmát!

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

820. Bizonyítsátok be, hogy bármely 60-jegyű szám esetében, melynek a normálalakja nem tartalmaz nullákat, áthúzható néhány számjegy és az így kapott szám osztható 1001-gyel.

---

[1] Az említett függvénynek egyedi jelölése van: $y = [x]$ (olvasd: y egyenlő az x egész részével).

22. A függvények grafikonja

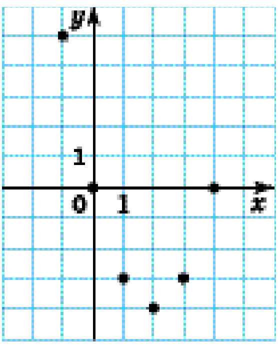
Megvizsgáljuk az $y = x^2 - 4x$ függvényt, ahol $-1 \leqslant x \leqslant 4$. Elkészítjük a függvény értéktáblázatát az argumentum egész értékeire.

x	–1	0	1	2	3	4
y	5	0	–3	–4	–3	0

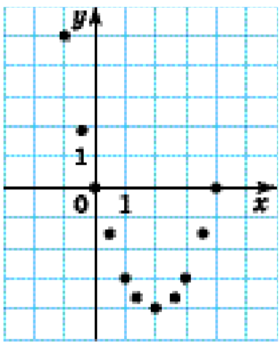
Az oszlopokban található számpárokat a koordinátasíkon található pontok $(x;\ y)$ koordinátájaként vizsgáljuk meg. Az argumentum értéke a pont abszcisszája, a függvény megfelelő értéke pedig a pont ordinátája.

A pontokat a 14. ábrán láthatjátok.

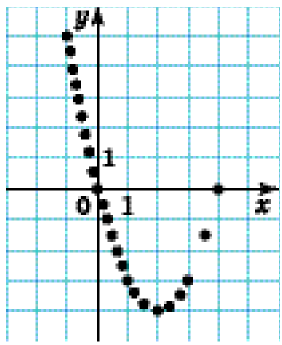
Nyilvánvaló, hogy amennyiben az argumentumnak az értelmezési tartományból más (az egésztől eltérő) értékeket adunk, a függvény értékeinek a meghatározásával egyre több pontot tüntethetünk fel a koordinátasíkon (15., 16. ábra).



14. ábra



15. ábra



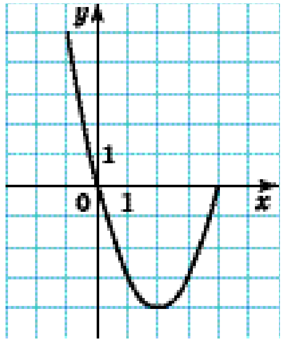
16. ábra

Az így felvett pontok alkotják a **függvény grafikonját**.

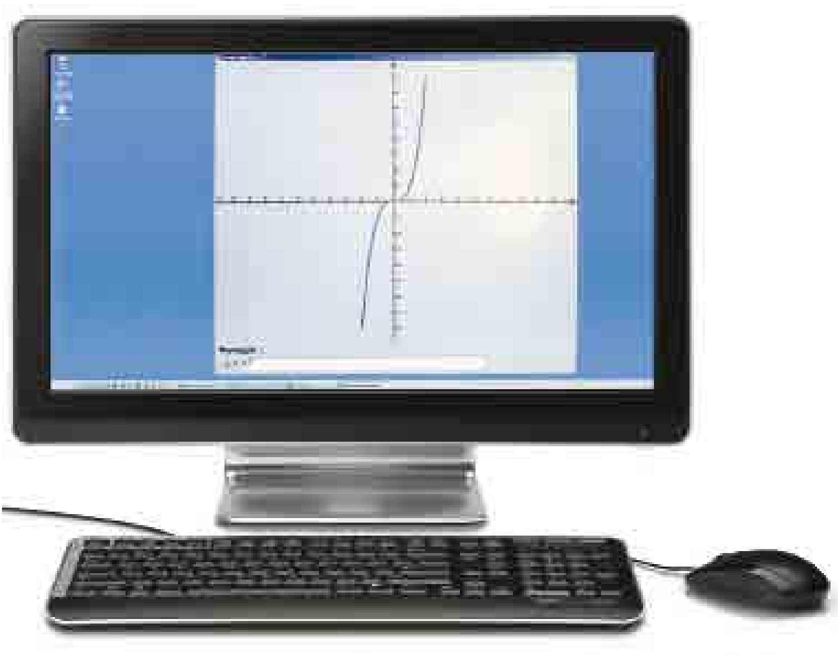
Meghatározás. Az f **függvény grafikonjának azt a mértani alakzatot nevezzük, amely azokból és csakis azokból a pontokból áll, melyek abszcisszája az f függvény argumentumával, ordinátája pedig az f függvény megfelelő értékeivel egyenlő.**

Nyilvánvaló, hogy az $y = x^2 - 4x$ függvény grafikonját a leírt módon gyakorlatilag lehetetlen megrajzolni, mivel a felvehető pontok száma végtelen. Viszont ha elegendő pontot határozunk meg, majd folytonos vonallal kötjük azokat össze (17. ábra), a kapott görbe annál kevésbé fog eltérni a keresett grafikontól, minél több pontot tüntetünk fel.

Mivel a leírt szerkesztési módszer sok aprólékos munkával jár, annak jelentős része számítógép segítségével is elvégezhető. Manapság számtalan grafikonkészítő program létezik. A 18. ábrán az $y = x^3$ függvény grafikonja látható, ahol $-2 \leqslant x \leqslant 2$.



17. ábra



18. ábra

Ha valamely alakzat az f függvény grafikonja, akkor érvényes a következő két feltétel:

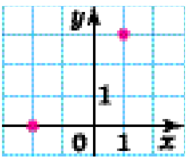
1) *ha* x_0 *az argumentum valamely értéke, az* $f(x_0)$ *pedig a megfelelő függvényérték, akkor az* $(x_0; f(x_0))$ *koordinátájú pont a grafikonhoz tartozik*;

2) *ha* $(x_0; y_0)$ *a grafikon tetszőleges pontjának koordinátája, akkor az* x_0 *és* y_0 *az argumentum és az f függvény megfelelő értékei, azaz* $y_0 = f(x_0)$.

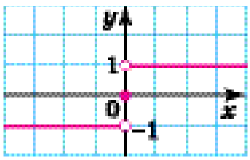
A függvény grafikonja nem minden esetben vonal. A 19. ábrán a következő táblázattal megadott függvény grafikonja látható:

x	1	–2
y	3	0

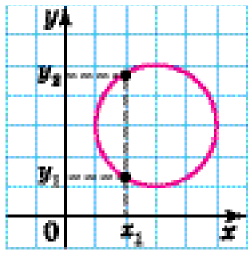
Mindössze két pontból áll.



19. ábra



20. ábra



21. ábra

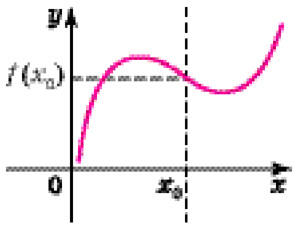
Elkészítjük az utasítással megadott függvény grafikonját.

Legyen a függvény értelmezési tartománya az összes szám. Minden pozitív argumentum esetén a függvény értéke 1; minden negatív argumentum esetén pedig –1; ha az argumentum nulla, akkor a függvény értéke is nulla. A függvény grafikonja a 20. ábrán látható. A grafikon három részből áll: az O (0; 0) pontból és két félegyenesből, melyeknek „üres” a kezdőpontja.

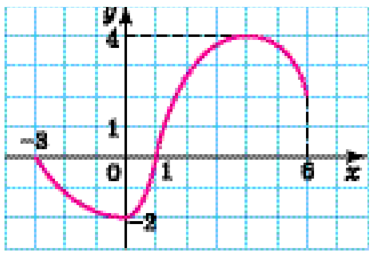
A koordinátasíkon ábrázolt alakzatok nem mindegyike felel meg a grafikon követelményének. Vegyük például a körvonalat, amely nem grafikon, mivel az x változó megadott értékeinek nem minden esetben felel meg egyértelműen az y változó értéke (21. ábra).

A koordinátasíkon ábrázolt alakzat abban az esetben lesz valamely függvény grafikonja, ha az abszcisszatengelyre merőleges bármely egyenesnek az alakzattal nem több mint egy közös pontja van. A függvények megadásának ezt a módját **grafikus** módnak nevezzük. Az alakzat pontjainak abszcisszái és ordinátái alkotják a függvény megfelelő értelmezési tartományát és értékkészletét.

Ha a függvény grafikusan van megadva, akkor az argumentum megadott x_0 értékei alapján a függvény értékeit a következő szabály szerint határozhatjuk meg: az $(x_0; 0)$ ponton keresztül az abszcisszatengelyre merőlegest szerkesztünk, majd megkeressük a merőleges és a grafikon metszéspontját. Az így kapott ordináta értéke $f(x_0)$ (22. ábra).



22. ábra



23. ábra

Ábra, séma vagy fénykép segítségével módunk van vizuálisan elképzelni valamely objektumot, illetve folyamatot. Hasonló szerepe van a függvény esetében a grafikonnak. Például a 23. ábrán látható grafikont tanulmányozva, a következőket állapíthatjuk meg:

1) a függvény értelmezési tartománya: $-3 \leqslant x \leqslant 6$;

2) a függvény értékkészlete: $-2 \leqslant y \leqslant 4$;

3) az argumentum azon értékei, melyeknél a függvény értéke nulla: $x = -3$ vagy $x = 1$;

4) az argumentum azon értékei, melyeknél a függvény értéke pozitív: $1 < x \leqslant 6$;

5) az argumentum azon értékei, melyeknél a függvény negatív értékeket vesz fel: $-3 < x < 1$.

Az adott pont anyagának elsajátítása után érthetővé válik számotokra, miért terjedtek el olyan széles körben a technikában, orvostudományban, közgazdaságtanban és egyéb tudományágban a különféle grafikonok elkészítésére szolgáló számítógépes programok.

1. PÉLDA Állapítsátok meg, hozzátartoznak-e az $y = x - 6$ függvény grafikonjához a következő pontok: 1) A (8; 2); 2) B (2; 4).

Megoldás: Hogy megállapíthassuk, hozzátartoznak-e a pontok a grafikonhoz, meghatározzuk a függvény értékét, ha az argumentum értéke egyben az adott pont abszcisszája is. Ha eközben a függvény értéke megegyezik a pont ordinátájával, akkor a pont a grafikonhoz tartozik, ellenkező esetben nem tartozik a függvényhez.

1) Ha $x = 8$, akkor $y = 8 - 6 = 2$. Tehát az A pont a grafikonhoz tartozik.

2) Ha $x = 2$, akkor $y = 2 - 6 = -4 \neq 4$, vagyis a B pont nem tartozik az $y = x - 6$ függvény grafikonjához. ●

2. PÉLDA Szerkesztés nélkül határozzátok meg az $y = x^2 - 4$ függvény grafikonja és a koordinátatengelyek metszéspontjait.

Megoldás: Egy pont abban és csakis abban az esetben fekszik az abszcisszatengelyen, ha az ordinátája 0. Tehát a grafikonnak az abszcisszatengellyel való metszéspontjának koordinátáit megtalálhatjuk, ha megoldjuk az $x^2 - 4 = 0$ egyenletet. Innen $x = 2$ vagy $x = -2$. Tehát az adott függvény két pontban metszi az abszcisszatengelyt: A (2; 0) és B (–2; 0).

A pont abban és csakis abban az esetben fekszik az ordinátatengelyen, ha az abszcisszája 0. Ezért, ha $x = 0$, akkor $y = -4$. Tehát a grafikon a C (0; –4) pontban metszi az ordinátatengelyt. ●

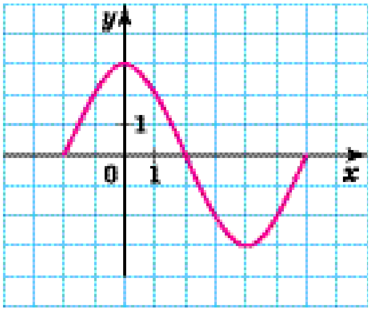
?

1. Mit nevezünk a függvény grafikonjának?
2. Milyen két feltételnek kell teljesülni ahhoz, hogy az adott alakzat az f függvény grafikonja legyen?
3. Állhat-e a függvény grafikonja egy pontból?
4. Lehet-e a koordinátasíkon elhelyezkedő bármely alakzat az f függvény grafikonja?
5. Mondjatok példát olyan alakzatokra, amelyek nem lehetnek függvény grafikonjai!
6. Hány közös pontja lehet a függvény grafikonjának és az abszcisszatengelyre merőleges egyenesnek?

GYAKORLATOK

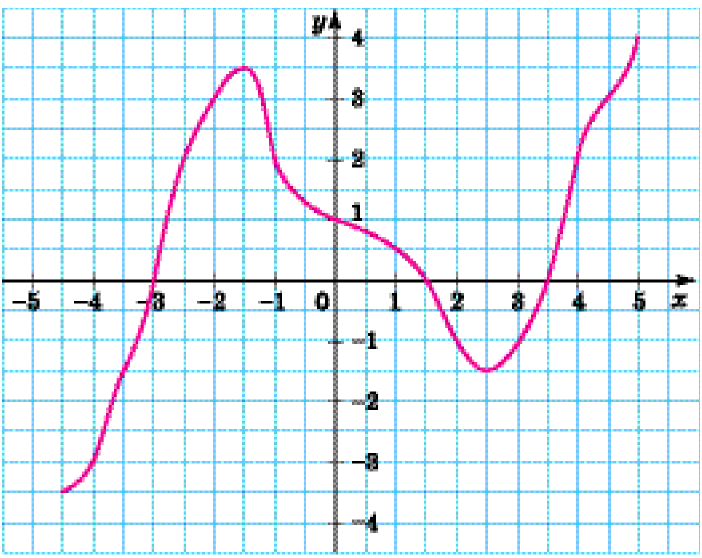
821.° Az $y = f(x)$ függvény 24. ábrán látható grafikonja segítségével töltsétek ki a táblázatot.

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									



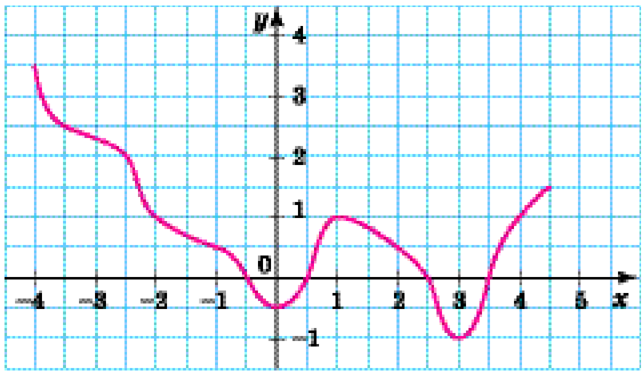
24. ábra

822.° A 25. ábrán egy függvény grafikonja látható. A grafikon segítségével határozzátok meg:
1) az y értékét, ha $x = -3{,}5$; $-1{,}5$; 2; 4;
2) az x értékét, ha $y = -3$; $-1{,}5$; 2.
3) az argumentum azon értékét, melynél a függvény értéke nulla;
4) a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét;
5) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke pozitív;
6) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke negatív.



25. ábra

823.° A 26. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. A grafikon segítségével határozzátok meg:
1) $f(-4)$; $f(-2,5)$; $f(0,5)$; $f(2)$;
2) az x azon értékeit, melyeknél $f(x) = 2,5$; $f(x) = 1$; $f(x) = 0$;
3) a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét;
4) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke pozitív;
5) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke negatív.



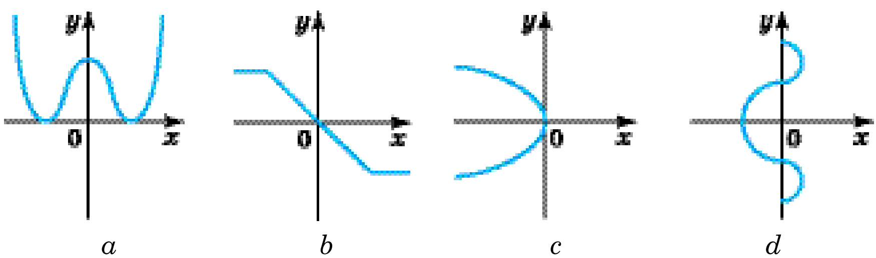
26. ábra

824.° A következő pontok közül melyik tartozik az $y = x^2 + 2$ függvény grafikonjához:
1) $A(0; 2)$; 2) $B(-1; 1)$; 3) $C(-2; 6)$; 4) $D(-3; -7)$?

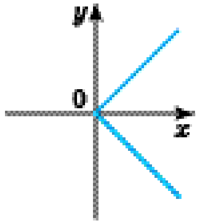
825.° Nevezzetek meg néhány olyan pontot, amelyek az alábbi függvények grafikonjaihoz tartoznak:
1) $y = 7x - 4$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = 4 - |x|$.

826.° Hozzátartoznak-e az $y = -\frac{x}{3}$ függvény grafikonjához a következő pontok:
1) $A(9; -3)$; 2) $B(6; 2)$; 3) $C(-1; 3)$; 4) $D(-12; 4)$?

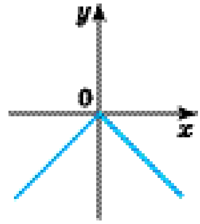
827.° A 27. ábrán látható alakzatok közül melyik lehet az x argumentumú függvény grafikonja?



27. ábra



a



b

28. ábra

828.° A 28. ábrán látható alakzatok közül melyik lehet az x argumentumú függvény grafikonja?

829.• A függvény grafikonja az A (–3; 6), B (–1; 2), C (3; –2) és D (9; 0) csúcsokkal rendelkező $ABCD$ töröttvonal.

1) Ábrázoljátok a függvény grafikonját.
2) Határozzátok meg a függvény értékét, ha az argumentum: –2; 0; 2; 6.
3) Határozzátok meg az argumentum értékét, melyeknél a függvény értéke: 1; –1; 0.

830.• Lehet-e az ABC töröttvonal valamely függvény grafikonja, ha:

1) A (–4; –1), B (1; 2), C (2; 4);
2) A (–4; –1), B (1; 2), C (1; 3)?

831.• Az MKE töröttvonal, melynek csúcsai M (–4; 1), K (2; 4), E (5; –2), valamely függvény grafikonja.

1) Ábrázoljátok a függvény grafikonját.
2) Határozzátok meg a függvény értékeit, ha az argumentum: –2; 0; 3.
3) Határozzátok meg az x értékeit, melyeknél $y = -2;\ 0;\ 2$.

832.• A függvény az $y = x^2 - 1$ képlettel van megadva, ahol $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

1) Állítsátok össze a függvény értéktáblázatát 1 lépésenként.
2) Az összeállított táblázat segítségével ábrázoljátok a függvény grafikonját.
3) A grafikon segítségével határozzátok meg, az argumentum milyen értékeinél lesz a függvény értéke kisebb, illetve nagyobb nullánál?
4) A grafikon alapján határozzátok meg a függvény értékkészletét.

833.• A függvény az $y = 4 - x^2$ képlettel van megadva, ahol $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

1) Állítsátok össze a függvény értéktáblázatát 1 lépésenként.
2) Az összeállított táblázat segítségével ábrázoljátok a függvény grafikonját.

3) A grafikon segítségével határozzátok meg, az argumentum milyen értékeinél lesz a függvény értéke kisebb, illetve nagyobb nullánál?

4) A grafikon alapján határozzátok meg a függvény értékkészletét.

834.• Az $y = f(x)$ függvény értéke 0, ha az argumentum értéke –5 és 4. Melyik igaz a következő állítások közül:

1) a függvény grafikonja a (0; –5) és (0; 4) koordinátájú pontokban metszi az ordinátatengelyt;

2) a függvény grafikonja a (–5; 0) és (4; 0) koordinátájú pontokban metszi az abszcisszatengelyt?

835.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a koordinátatengelyek és az alábbi függvények grafikonjai metszéspontjainak koordinátáit:

1) $y = x^2 - 16x$; 2) $y = |x| - 2$; 3) $y = x^3 - 9x$; 4) $y = 0{,}8x$.

836.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a koordinátatengelyek és az alábbi függvények grafikonjai metszéspontjainak koordinátáit:

1) $y = 36 - 9x$; 2) $y = x^2 + x$; 3) $y = 49 - x^2$.

837.• Adott az $y = 1 - x$ függvény, melynek értelmezési tartománya az összes egyjegyű természetes szám. Ábrázoljátok a függvény grafikonját.

838.• Ábrázoljátok az $f(x) = 1{,}5x + 1$ függvény grafikonját, melynek értelmezési tartománya a $-4 \leqslant x \leqslant 2$ intervallumban található egész számok.

839.* Ábrázoljátok annak a függvénynek a grafikonját, melynek az értelmezési tartománya az összes természetes szám, az értéke az argumentum páros értékeinél 1, a páratlanok esetében pedig –1.

840.* Az f függvényt utasítással adták meg: a függvény értéke a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb az argumentum megfelelő értékénél. Ábrázoljátok a függvény grafikonját.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

841. Egyszerűsítsétek le:

1) $(c + 2)(c - 3) - (c + 1)(c + 3)$; 3) $3(x - 5)^2 - (3x^2 - 10x)$;

2) $(p + 4)(p - 11) + (p + 6)^2$; 4) $7(2y - 5)^2 - 2(7y - 1)^2$.

842. Bizonyítsátok be az egyenlőségeket:

1) $(4a^2 + 3)^2 + (7 - 4a^2)^2 - 2(4a^2 + 3)(4a^2 - 7) = 100$;

2) $(a^2 - 6ab + 9b^2)(a^2 + 6ab + 9b^2) - (a^2 - 9b^2)^2 = 0$.

843. Bizonyítsátok be, hogy bármely páratlan n esetében a $(4n + 1)^2 - (n + 4)^2$ kifejezés értéke osztható 120-al.

844. Találjatok az x változónak három olyan természetes számot, melyek segítségével az $a^2 - 2x$ kifejezés a négyzetek különbségének képlete segítségével bontható fel. A kapott kifejezéseket bontsátok tényezőkre.

845. (*Bhászkara*[1] *feladata.*) A kadamba virág szirmára a méhraj egyötöde szállt, a mellette virító szimendgára pedig egyharmada. A számuk különbségét szorozd hárommal, annyian ültek a jázminra. Csak egy méhecske nem találta a helyét és röpdösött ide-oda, szívta magába a virágok illatát. Most pedig mondd meg, hány méhből állt az egész raj?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

846. A táblázatban az x és y megfelelő értékei találhatók. Állapítsátok meg, egyenesen arányosak-e ezek a mennyiségek.

1)

x	2	5	7	9
y	6	15	21	27

2)

x	0,4	1,8	2,3	3,1
y	0,8	3,8	4,6	6,2

847. Töltsétek ki a táblázatot, ha az y és az x egyenesen arányosak.

x	0,3	8	3,2		
y			9,6	2,7	42

Ismételjétek át a 33. pont (243. old.) tartalmát!

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

848. Az egész számú négyzetet tartalmazó négyzet alakú kockás papírlapból, a rácsvonalak mentén olyan négyzetet vágtak ki, amely szintén egész számú négyzeteket tartalmaz. Ezután még 71 négyzet maradt. Hány négyzet volt eredetileg a papírlapon?

[1] Bhászkara (1114–1185) hindú matematikus és csillagász. *A csillagászat koronája* (kb. 1150) c. értekezés szerzője, melyben egész sor algebrai feladat megoldását adta meg.

23. Lineáris függvény. A lineáris függvény grafikonja és tulajdonságai

Megvizsgálunk két példát.

1. PÉLDA A medencében 200 l víz volt, majd t percen át percenként 80 l vizet szivattyúztak még bele. Mielőtt a medence megtelne, a benne lévő víz V térfogata a következő képlettel határozható meg:

$$V = 80t + 200, \text{ ahol } t \geqslant 0.$$

A képlet a V változó t változótól való függését adja meg. ●

2. PÉLDA Az egyik brigád 25 láda, míg a másik brigád minden tagja 2-2 láda almát szedett. Legyen a második brigád létszáma x fő. A brigádok által szedett alma mennyiségét jelöljük y-nal. Akkor az x és y változók közötti összefüggést a következő képlet fejezi ki:

$$y = 2x + 25, \text{ ahol } x \text{ – természetes szám.}$$ ●

A fenti példákban két valós helyzetet leíró függvényt állítottunk össze, melyek alakja minkét esetben $y = kx + b$.

Meghatározás. **Az $y = kx + b$ képlettel megadható függvényt, ahol k és b – adott számok, x – független változó, lineáris függvénynek nevezzük.**

Lineáris függvények példái:

$$y = -2x + 1; \; y = 1 - x; \; y = 5x; \; y = 2.$$

Megjegyezzük, hogy a *lineáris függvények értelmezési tartománya az összes szám*.

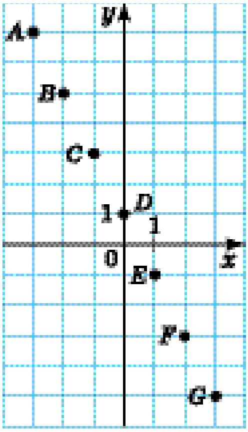
Megrajzoljuk az $y = -2x + 1$ függvény grafikonját.

A függvény és az argumentumok értékeiből táblázatot készítünk.

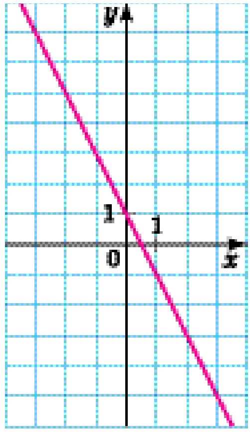
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	–1	–3	–5

Az A (–3; 7), B (–2; 5), C (–1; 3), D (0; 1), E (1; –1), F (2; –3), G (3; –5) pontok a keresett grafikonhoz tartoznak (29. ábra). Minden pont egy egyenesen fekszik, amely az $y = -2x + 1$ függvény grafikonja (30. ábra).

Majd a 9. osztályban mértanórán bebizonyítjátok, hogy a ***lineáris függvény grafikonja egyenes***.



29. ábra



30. ábra

Megjegyezzük, hogy az egyenes nem lehet függőleges, vagyis merőleges az abszcisszatengelyre. Valóban, a függőleges egyenes nem lesz függvény grafikonja.

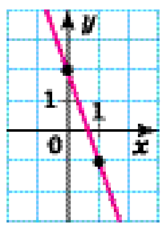
Mivel az egyenes egyértelműen megadható két pont segítségével, ezért a lineáris függvény grafikonjának a megszerkesztéséhez elegendő kiválasztanunk az argumentum két értékét, majd összeállítani a függvény értékeinek táblázatát, amely két oszlopból fog állni.

3. PÉLDA Ábrázoljátok az $y = -3x + 2$ függvény grafikonját.

Megoldás: Összeállítjuk a függvény értéktáblázatát az argumentum bármely két értékével:

x	0	1
y	2	–1

Felvesszük a koordinátasíkon a (0; 2) és (1; –1) pontokat, majd egyenest húzunk rajtuk keresztül (31. ábra). Ez az egyenes az $y = -3x + 2$ függvény grafikonja.



31. ábra

A $y = kx + b$ képlettel megadható lineáris függvényben előfordul, hogy a $k = 0$ vagy/és $b = 0$.

Megvizsgáljuk azt az esetet, amikor $b = 0$ és $k \neq 0$. Akkor a képlet alakja: $y = kx$. Ebből az következik, hogy a nullától eltérő argumentumértékekre felírható az $\frac{y}{x} = k$ képlet. Ez a képlet azt mutatja, hogy az $y = kx$ függvény esetében, ha $x \neq 0$, a függvény és az argu-

32. ábra

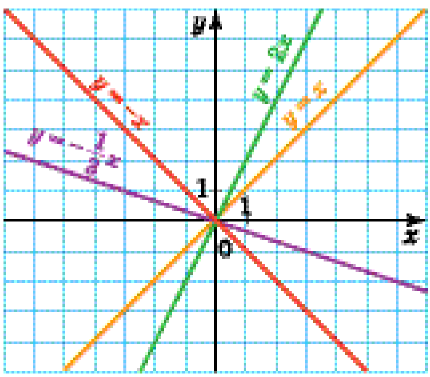
mentum hányadosa állandó marad és k-val egyenlő.

A 6. osztályban már megismerkedtetek a mennyiségek közötti hasonló összefüggésekkel, amelyet egyenes arányosságnak nevezünk. Ezek alapján az $y = kx$, ha $k \neq 0$ képlettel megadott függvényt **egyenes arányosságnak** nevezzük.

Az $y = 2x$; $y = x$; $y = -x$; $y = -\frac{1}{3}x$ függvények az egyenes arányosság példái.

Mivel az egyenes arányosság a lineáris függvények speciális esete (ahogyan a 32. ábrán látható), ezért a grafikonja egy olyan egyenes, amely bármilyen k esetén átmegy az O (0; 0) ponton, azaz az origón. Valóban, ha a képlet alapján $x = 0$, akkor $y = 0$. Ezért aztán az egyenes arányosság grafikonjának a megszerkesztéséhez elegendő találni egy, az origótól eltérő pontot és meghúzni rajta és az O (0; 0) ponton keresztül az egyenest.

A 33. ábrán a fent felsorolt egyenes arányosságok grafikonjai láthatók.

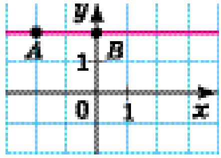


33. ábra

Megvizsgáljuk a lineáris függvények még egy esetét.

Tekintsük, hogy az $y = kx + b$ képletben $k = 0$. Akkor $y = b$. Érthető, hogy ebben az esetben a függvény értéke változatlan marad bármilyen argumentum esetén.

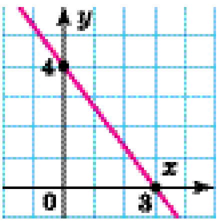
4. PÉLDA Ábrázoljátok az $y = 2$ függvény grafikonját.



34. ábra

Megoldás: Mint általában a lineáris függvények esetében, keresnünk kell a grafikonhoz tartozó két pontot. Ezeknek azonos lesz az ordinátájuk – 2. Az abszcissza bármilyen szám lehet. Legyen a –2 és a 0. Ezek után az A (–2; 2) és B (0; 2) pontokon keresztül egyenest húzunk, amely párhuzamos az abszcisszatengellyel (34. ábra). ●

Megjegyezzük, hogy az $y = 0$ függvény grafikonja maga az abszcisszatengely. Az $y = b$, ahol $b \neq 0$ függvény grafikonja az abszcisszatengellyel párhuzamos egyenes.



35. ábra

5. PÉLDA Írjátok le a 35. ábrán látható függvény képletét.

Megoldás: A grafikon a (0; 4) pontban metszi az ordinátatengelyt. Behelyettesítjük ezeket a koordinátákat az $y = kx + b$ képletbe: $4 = k \cdot 0 + b$. Innen $b = 4$.

Mivel a grafikon a (3; 0) pontban metszi az abszcisszatengelyt, a koordinátákat újból behelyettesítjük az $y = kx + b$ képletbe: $3k + 4 = 0$; $k = -\frac{4}{3}$.

Felelet: $y = -\frac{4}{3}x + 4$. ●

?

1. Milyen függvényt nevezünk lineárisnak?
2. Milyen a képe a lineáris függvény grafikonjának?
3. Milyen függvényt nevezünk egyenes arányosságnak?
4. Hogyan néz ki az egyenes arányosság grafikonja?
5. Milyen az $y = b$ függvény grafikonja?
6. Milyen függvény grafikonja az abszcisszatengely?
7. Létezik-e olyan függvény, melynek az ordinátatengely a grafikonja?

GYAKORLATOK

849.° Lineárisak-e az alábbi függvények:

1) $y = 3x - 2$;	4) $y = \frac{3}{x} + 2$;	7) $y = \frac{x}{5}$;
2) $y = 8 - 7x$;	5) $y = 2x^2 + 4$;	8) $y = -4$;
3) $y = \frac{x}{3} + 2$;	6) $y = \frac{12x - 8}{4}$;	9) $y = 0$?

Amennyiben igen, úgy nevezzétek meg a k és b együtthatók értékeit.

850.° Egyenes arányosságok-e az alábbi függvénye:

1) $y = 4x$; 3) $y = \frac{x}{4}$; 5) $y = -4x$;

2) $y = \frac{4}{x}$; 4) $y = 0$; 6) $y = -\frac{x}{4}$?

Ha igen, akkor nevezzétek meg a k értékeit.

851.° A lineáris függvény az $y = 6x - 5$ képlettel van megadva. Töltsétek ki a táblázatot.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							

852.° A függvényt az $y = -2x + 5$ képlet adja meg. Határozzátok meg:
1) a függvénynek a –4; 3,5; 0 argumentumoknak megfelelő értékeit;
2) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke 9; –5; 0.

853.° A függvény az $y = 0{,}3x + 5$ képlettel van megadva. Határozzátok meg:
1) a függvénynek az 5; –2; 0 argumentumoknak megfelelő értékeit;
2) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke 1; –11; 0,8.

854.° Ábrázoljátok a függvények grafikonjait:

1) $y = x - 5$; 2) $y = 3x + 1$; 3) $y = -\frac{1}{6}x - 2$; 4) $y = 0{,}4x + 3$.

855.° Ábrázoljátok a függvények grafikonjait:

1) $y = 4 - x$; 2) $y = -4x + 5$; 3) $y = 0{,}2x - 3$.

856.° A függvényt az $y = \frac{1}{3}x$ képlettel adták meg. Határozzátok meg:

1) az y értékeit, ha $x = 6$; –3; –3,2;

2) az x értékeit, melyeknél $y = -2$; $\frac{1}{3}$; 12.

857.° A függvény az $y = 1{,}2x$ képlettel van megadva. Határozzátok meg:
1) az y értékeit, ha $x = 10$; 0,6; –5; –4;
2) az x azon értékeit, melyeknél $y = 3{,}6$; –2,4; 6.

858.° Ábrázoljátok az egyenes arányosság grafikonjait:

1) $y = 3x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -0{,}6x$; 4) $y = \frac{1}{7}x$.

859.° Ábrázoljátok a függvények grafikonjait:

1) $y = 5x$; 2) $y = 0{,}8x$; 3) $y = -\frac{1}{6}x$.

860.° Az x és y változók között egyenes arányosság van.

1) Töltsétek ki a táblázatot

x	8	6	2	1	$\frac{1}{2}$	0	–1	–2	–3	–4
y	4									

2) Adjátok meg a függvény képletét.
3) Ábrázoljátok a függvény grafikonját.

861° Ábrázoljátok közös koordinátasíkon a következő lineáris függvények grafikonjait: $y = 3$; $y = -5$; $y = 0$.

862.° Ábrázoljátok az $y = 2x - 3$ függvény grafikonját, majd a grafikon alapján határozzátok meg:
1) a függvény értékét, ha az argumentum: 4; –1; 0,5;
2) az argumentumot, amelynél a függvény értéke: 1; –1; 0;
3) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény pozitív értékeket vesz fel.

863.° Ábrázoljátok az $y = 2 - 4x$ függvény grafikonját, és a grafikon alapján határozzátok meg:
1) a függvény értékét, ha az argumentum: 1; 0; –2;
2) az argumentumot, amelynél a függvény értéke: –4; –2; 2;
3) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értékei negatívak.

864.° Ábrázoljátok az $y = 0{,}5x$ függvény grafikonját, és a grafikon alapján határozzátok meg:
1) a függvény értékét, ha az argumentum: 4; –6; 3;
2) az argumentum értékét, amelynél a függvény értéke: 2,5; –2; 1;
3) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény negatív értékeket vesz fel.

865.° Ábrázoljátok az $y = -4x$ függvény grafikonját. A grafikon alapján határozzátok meg:
1) a függvény értékét, ha az argumentum: 2; –1; 0,5;
2) az argumentum azon értékét, amelynél a függvény értéke: –4; 2;
3) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értékei pozitívak.

866.° Grafikon megrajzolása nélkül határozzátok meg, az adott pontok melyikén halad át az $y = 1,8x - 3$ függvény grafikonja: A (–2; –6,6); B (1; 1,2); C (0; –3); D (5; 7).

867.° Szerkesztés nélkül állapítsátok meg, melyik pont tartozik az $y = 8x - 14$ függvény grafikonjához:
1) A (–1; –6); 2) B (2; 2).

868.• Ábrázoljátok közös koordinátasíkon az $y = x - 1$ és $y = \frac{1}{4}x + 2$ függvények grafikonjait, és határozzátok meg a metszéspontjaik koordinátáit.

869.• Ábrázoljátok közös koordinátasíkon az $y = 5x - 6$ és $y = -2x + 1$ függvények grafikonjait, és határozzátok meg a metszéspontjaik koordinátáit.

870.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a függvények grafikonjai és a koordinátatengelyek által alkotott metszéspontok koordinátáit:
1) $y = 2,5x + 10$; 2) $y = 6x - 4$.

871.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a függvények grafikonjai és a koordinátatengelyek által alkotott metszéspontok koordinátáit:
1) $y = \frac{2}{3}x - 4$; 2) $y = 7 - 3x$.

872.• Az $y = 2x - 9$ függvény grafikonjának szerkesztése nélkül találjátok meg a grafikon azon pontját, amelyben:
1) az abszcissza egyenlő az ordinátával;
2) az ordináta az abszcissza 6-szorosa.

873.• Az $y = -7x + 8$ függvény grafikonjának megszerkesztése nélkül találjátok meg a grafikon azon pontját, amelyben az abszcissza és az ordináta ellentétes számok.

874.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a függvények grafikonjainak metszéspontjait.
1) $y = 3,7x + 10$ és $y = 1,4x - 13$; 2) $y = 4 - \frac{2}{7}x$ és $y = \frac{9}{7}x + 26$.

875.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg az $y = 4x - 7$ és $y = -2x + 11$ függvények grafikonjai metszéspontjának koordinátáit.

876.• Az x változó milyen értékénél lesz az $f(x) = 4x - 3$ és $g(x) = 3x - 2$ függvények értéke azonos? Ábrázoljátok az f és g függvények grafikonjait közös koordinátasíkon, és határozzátok meg, hogy az x milyen értékeinél igazak a következő egyenlőtlenségek:
1) $f(x) > g(x)$; 2) $f(x) < g(x)$.

877.• Az x változó milyen értékénél lesz az $f(x) = 5 - 2x$ és $g(x) = 2x - 3$ függvények értéke azonos? Ábrázoljátok az f és g függvények grafikonjait közös koordinátasíkon, és határozzátok meg, hogy az x milyen értékeinél igazak a következő egyenlőtlenségek:
1) $f(x) < g(x)$; 2) $f(x) > g(x)$.

878.• Adjátok meg annak az egyenes arányossági függvénynek a képletét, melynek grafikonja az M (2; –5) ponton halad át.

879.• Határozzátok meg a b azon értékét, melynél az $y = -\frac{1}{9}x + b$ függvény grafikonja áthalad az A (–27; 4) ponton.

880.• A k milyen értékénél halad át az $y = kx - 15$ függvény grafikonja a B (3; –6) ponton?

881.• Az $y = kx + b$ függvény grafikonja a C (0, 4) és D (–8; 0) pontokban metszi a koordinátatengelyeket. Határozzátok meg a k és b értékét.

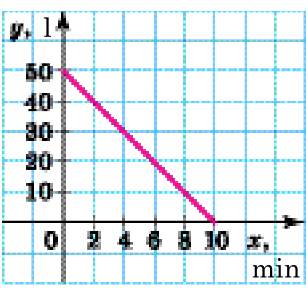
882.• Az $y = kx + b$ függvény grafikonja az M (3, 0) és K (0; –1) pontokban metszi a koordinátatengelyeket. Határozzátok meg a k és b értékét.

883.• Az $y = kx + b$ függvény grafikonja összes pontjának ordinátája –6. Határozzátok meg a k és b értékét.

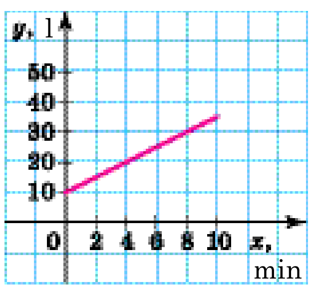
884.• Az $y = kx + b$ függvény grafikonja párhuzamos az abszcisszatengellyel, és az A (–2; 3) ponton halad át. Határozzátok meg a k és b értékét.

885.• A 36. ábrán látható grafikonok egyike egy tartály vízzel való feltöltését, a másik pedig a víz egy másik tartályból való kifolyását ábrázolja.

1) Melyik folyamatnak melyik grafikon felel meg?
2) Mennyi víz volt a tartályokban eleinte?
3) Mennyi víz volt a tartályokban a csapok megnyitása után 2 perccel? 6 perccel?
4) A csapok megnyitása után hány perccel lesz egy-egy tartályban 30 l víz?
5) Hány liter víz folyik be az egyik tartályba, illetve folyik ki a másik tartályból percenként?
6) Adjátok meg mindkét tartály esetében a bennük lévő víz mennyisége és az eltelt idő közötti összefüggés képletét.

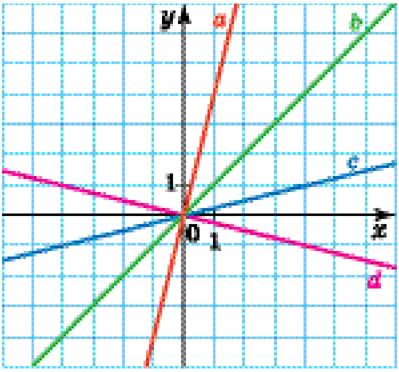


a

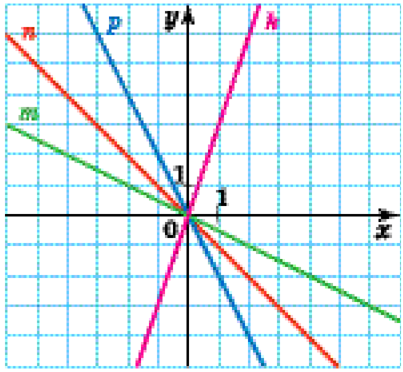


b

36. ábra



37. ábra



38. ábra

886.• A 37. ábrán látható egyenesek közül melyik a következő függvények grafikonja:

1) $y = x$; 2) $y = 4x$; 3) $y = \frac{1}{4}x$; 4) $y = -\frac{1}{4}x$?

887.• A 38. ábrán látható egyenesek közül melyik a következő függvények grafikonja:

1) $y = -x$; 2) $y = 3x$; 3) $y = -\frac{1}{2}x$; 4) $y = -2x$?

888.•• Adjátok meg két olyan lineáris függvény képletét, melynek grafikonjai áthaladnak a következő ponton:

1) $A\ (0;\ 4)$; 2) $B\ (1;\ 3)$.

889.•• Az $y = 0{,}5x - 3$, $y = -4x + 6$ és $y = kx$ függvények grafikonjai egy pontban metszik egymást. Határozzátok meg a k értékét. Ábrázoljátok közös koordinátasíkon a grafikonokat.

890.•• A b melyik értékénél metszik egymást egy pontban az $y = 1{,}5x - 3$, $y = 2{,}5x + 1$ és $y = 5x + b$ függvények grafikonjai?

891.•• A C pont a 8 cm hosszúságú AB szakaszhoz tartozik. Az AC szakasz hossza x, a BC szakaszé pedig y. Ábrázoljátok az y és x közötti összefüggés grafikonját, ha $0 < x < 8$. Jelöljétek meg a grafikonon azt a pontot, amely annak az esetnek felel meg, ha C az AB szakasz felezőpontja.

892.•• Az $ABCD$ téglalap kerülete 12, $AB = x$, $AD = y$, $0 < x < 6$. Ábrázoljátok az y és x közötti összefüggés grafikonját. Jelöljétek meg a grafikonon azt a pontot, amely annak az esetnek felel meg, ha az $ABCD$ négyzet.

893.•• Ábrázoljátok a függvények grafikonját:

1) $y = \begin{cases} x - 4, & \text{ha } x \geq 0, \\ -2x - 4, & \text{ha } x < 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 3x - 2, & \text{ha } x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1; \end{cases}$

3) $y=\begin{cases}2, & \text{ha } x \neq 2,\\ 3, & \text{ha } x = 2;\end{cases}$ 4) $y=\begin{cases}2x, & \text{ha } x < -1,\\ 1, & \text{ha } x = -1,\\ x+3, & \text{ha } x > -1.\end{cases}$

894.•• Ábrázoljátok a függvények grafikonját:

1) $y=\begin{cases}-3x, & \text{ha } x \leq -1,\\ 3, & \text{ha } -1 < x < 1,\\ 2x+1, & \text{ha } x \geq 1;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}5-x, & \text{ha } x \leq 3,\\ x+1, & \text{ha } x > 3.\end{cases}$

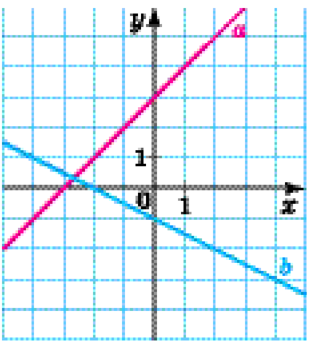
895.•• Ábrázoljátok a függvények grafikonját:
1) $y = |x|$; 2) $y = |x| + x$; 3) $y = 4x - |x| + 2$.

896.•• Ábrázoljátok a függvények grafikonját:
1) $y = -|x|$; 2) $y = x - |x|$; 3) $y = 3x + 2|x|$.

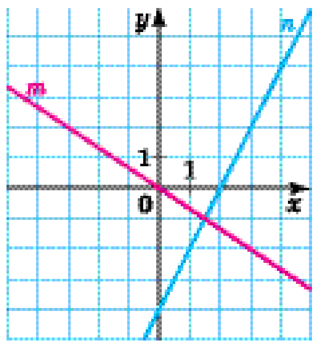
897.•• Adjátok meg annak a lineáris függvénynek a képletét, amelynek grafikonja a 39. ábrán látható: 1) a egyenes; 2) b egyenes.

898.•• Adjátok meg annak a lineáris függvénynek a képletét, amelynek grafikonja a 40. ábrán látható: 1) m egyenes; 2) n egyenes.

899.• A függvényt utasítással adták meg: a függvény értéke egyenlő az argumentum és az argumentum egész része különbségével[1]. Ábrázoljátok a függvény grafikonját.



39. ábra



40. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

900. Számítsátok ki a kifejezés értékét:
1) $(2 + 3a)(5 - a) - (2 - 3a)(5 + a)$, ha $a = -1{,}5$;
2) $(3a + b)^2 - (3a - b)^2$, ha $a = -3\frac{1}{3}$, $b = 0{,}3$.

[1] Az adott függvényt a szám törtrészének nevezik, és a következő a jelölése: $y = \{x\}$. A meghatározás szerint $\{x\} = x - [x]$, ahol $[x]$ az x egész része. Például $\{3{,}2\} = 0{,}2$; $\{-3{,}2\} = 0{,}8$; $\{-0{,}16\} = 0{,}84$; $\{2\} = 0$.

901. Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $(5x + 1)(2x - 3) = (10x - 9)(x + 2)$;
2) $(7x - 1)(x + 5) = (3 + 7x)(x + 3)$.

902. Bizonyítsátok be, hogy három egymást követő természetes szám összegének köbe maradék nélkül osztható 3-mal.

903. Két hordóban azonos mennyiségű víz volt. Az első hordóban a víz térfogatát először 10%-kal növelték, majd 10%-kal csökkentették. A másik hordóban ellenkezőleg, először 10%-kal csökkentették, majd 10%-kal növelték a víz térfogatát. Melyik hordóban lett több víz?

904. Ismeretes, hogy $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$. Mivel egyenlő az $x^4 + x^2y^2 + y^4$ kifejezés értéke?

905. Bizonyítsátok be, hogy bármely x esetében az $|x| - x$ kifejezés értéke nagyobb a $2x - x^2 - 2$ kifejezés megfelelő értékénél.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

906. Határozzátok meg a kifejezések értékét:
1) $0{,}1x + 5y$, ha $x = -4$, $y = 0{,}6$;
2) $x^2 - 3y + 7$, ha $x = 6$, $y = -2$;
3) $|x| + |y - 6|$, ha $x = -10$, $y = 2$;
4) $(2y - 3)^2 - (x + 4)^2$, ha $x = -4$, $y = 1{,}5$.

907. Tüntessétek fel a koordinátasíkon az összes olyan $(x; y)$ pontot, melyeknél:
1) $x = -3$, y – tetszőleges szám;
2) $y = 2$, x – tetszőleges szám;
3) $x = 0$, y – tetszőleges szám.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

908. Van két nyomdagép. Az egyik gép az $(a; b; c)$ számokat tartalmazó kártya alapján az $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b+c}{2}; \frac{a+c}{2}\right)$ számokat tartalmazó kártyát ad ki, a másik az $(a; b; c)$ számok alapján – $(2a - b; 2b - c; 2c - a)$ számokat tartalmazó kártyákat. Kaphatunk-e az említett nyomdagépek segítségével a $(2{,}8; -1{,}7; 16)$ kártyából $(1{,}73; 2; 0{,}4)$ kártyát?

6. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Az argumentum milyen értékénél lesz az $y = -1{,}5x + 4$ függvény értéke -2?

A) 4; B) -4; C) 2; D) -2.

2. Az alábbi függvények közül melyik egyenes arányosság?

A) $y = 12 + x$; B) $y = 12$; C) $y = \frac{12}{x}$; D) $y = 12x$.

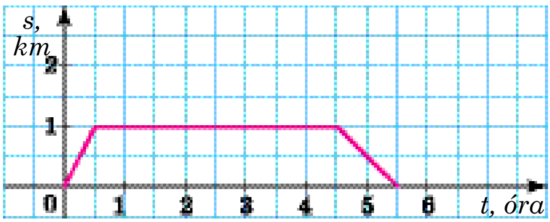
3. Az alábbi függvények közül melyik nem lineáris?

A) $y = -2x + 9$; B) $y = -\frac{2}{x} + 9$; C) $y = -\frac{x}{2} + 9$; D) $y = 9 - 0{,}2x$.

4. Melyik ponton megy át az $y = x^2 - 3$ függvény grafikonja?

A) A (–3; 0); B) B (–3; 6); C) C (–3; 3); D) D (–3; –12).

5. Reggel a tanuló iskolába ment, majd a tanítás végeztével hazatért. A 41. ábrán a tanuló és az otthona közötti távolság időtől való függésének grafikonja látható. Hány órát volt a tanuló az iskolában?



41. ábra

A) 5 óra; B) 4,5 óra; C) 4 óra; D) 3,5 óra.

6. Melyik függvénynek a grafikonja a koordinátasík középpontján átható egyenes?

A) $y = 20 + x$; B) $y = 20x$; C) $y = 20 - x$; D) $y = x - 20$.

7. Melyik függvény grafikonja vízszintes egyenes?

A) $y = \frac{1}{9}$; B) $y = \frac{1}{9} - x$; C) $y = \frac{1}{9}x + 1$; D) $y = \frac{1}{9}x$.

8. Melyik pontban metszi az $y = x - 2$ függvény grafikonja az ordinátatengelyt?

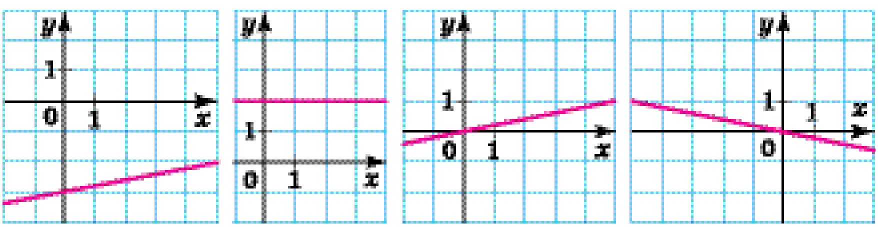
A) A (0; –2); B) B (0; 2); C) C (2; 0); D) D (–2; 0).

9. Határozzátok meg az $y = 8 - 4x$ és $y = x + 14$ függvények grafikonjai metszéspontjának abszcisszáját.

A) –2; B) 2; C) –1,2; D) 1,2.

10. Melyik ábra tartalmazza az $y = 0{,}2x$ függvény grafikonját (42. ábra)?

A) B) C) D)



42. ábra

11. Melyik függvény grafikonja látható a 43. ábrán?

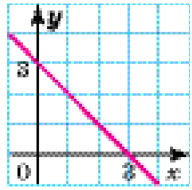
A) $y = 3x$; C) $y = x + 3$;

B) $y = -x + 3$; D) $y = \frac{1}{3}x$.

12. Az m melyik értékénél metszi az $y = mx + 2m - 5$ függvény grafikonja a –1 abszcisszájú pontban az x tengelyt?

A) 5; C) –3;

B) –5; D) 3.



43. ábra

A 3. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Függvény

Függvénynek nevezzük azt a megfeleltetést, amikor a független változó tetszőleges értékének a függvény egyetlen értéke felel meg.

A függvény értelmezési tartománya

Az argumentum által felvett értékek alkotják a függvény értelmezési tartományát.

A függvény értékkészlete

A függvény által felvehető értékeket értékkészletnek nevezzük.

A függvény megadásának módjai

Utasítással; képlet segítségével; táblázat formájában; grafikusan.

A függvény grafikonja

Az f függvény grafikonjának azt a mértani alakzatot nevezzük, amely azokból és csakis azokból a pontokból áll, melyek abszcisszája az f függvény argumentumával, ordinátája pedig az f függvény megfelelő értékeivel egyenlő.

Lineáris függvény

Az $y = kx + b$ képlettel megadható függvényt, ahol k és b – számok, x – független változó, lineáris függvénynek nevezzük.

A lineáris függvény grafikonja

A lineáris függvény grafikonja egyenes.

Egyenes arányosság

Az $y = kx$ képlettel megadott lineáris függvényt, ahol $k \neq 0$, egyenes arányosságnak nevezzük.

4. §. KÉTVÁLTOZÓS LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

- Ebben a paragrafusban megismerkedtek a kétváltozós egyenletekkel és azok rendszerével. Elsajátítjátok megoldásuk egyes módjait.
- Megtudjátok, hogy a kétváltozós egyenlet valós helyzet matematikai modellje is lehet.
- Megtanuljátok a szöveges feladatok megoldásának újszerű, hatásos módszerét.

24. Kétváltozós egyenletek

Megvizsgálunk néhány gyakorlati példát.

1. PÉLDA A Kijev–Harkiv távolság 450 km. Kijevből Harkivba x km/h sebességgel elindult egy gépkocsi. 1 óra múlva vele szemben Harkivból is elindult egy gépkocsi, melynek sebessége y km/h. Két órával a második gépkocsi indulása után találkoztak.

Összeállítjuk a valós helyzet matematikai modelljét.

A második gépkocsi által a találkozásig megtett út $2y$ km. Mivel az első gépkocsi 1 órával többet volt úton, mint a második, vagyis 3 órát, ezért az a találkozásig $3x$ km távolságot tett meg. Összesen 450 km-t tettek meg. Ezek alapján:

$$3x + 2y = 450.$$

A kapott kétváltozós egyenlet a leírt valós helyzet matematikai modellje. ●

Megvizsgálunk még néhány példát olyan szituációkról, melyek leírásának matematikai modelljei kétváltozós egyenletek.

2. PÉLDA A 10 cm oldalú négyzet területe egyenlő másik két négyzet területének összegével.

A 10 cm oldalú négyzet területe 100 cm^2. Legyen a másik két négyzet oldala x cm és y cm. Akkor a következő egyenlőséget kapjuk:

$$x^2 + y^2 = 100.$$ ●

3. PÉLDA Adott egy derékszögű háromszög.

Jelöljük a hegyesszögeit x-szel és y-nal. Akkor felírhatjuk, hogy

$$x + y = 90.$$

4. PÉLDA Adva van egy 12 cm^2 területű téglalap. Legyen a két oldala x cm és y cm. Akkor

$$xy = 12.$$

5. PÉLDA Vásároltak 5 tollat és 7 füzetet, amiért összesen 19 hrivnyát fizettek.

Ha egy toll ára x hrn, egy füzeté pedig y hrn, akkor

$$5x + 7y = 19.$$

Mint látjuk, az előző öt példában kapott egyenletek

$$3x + 2y = 450,$$
$$x^2 + y^2 = 100,$$
$$x + y = 90,$$
$$xy = 12,$$
$$5x + 7y = 19$$

mindegyike két változót tartalmaz, az x-et és y-t. Az ilyen egyenlőségeket **kétváltozós egyenleteknek** nevezzük.

Ha például az $xy = 12$ egyenletbe az x és y helyett 2-t és 6-t helyettesítünk be, igaz egyenlőséget kapunk: $2 \cdot 6 = 12$. Azt mondjuk, hogy az $x = 2$ és $y = 6$ értékpár **kiegyenlíti** az egyenletet vagy az adott egyenlet **megoldása**.

Meghatározás. A változók azon értékpárját, amelyek az egyenletet igaz egyenlőséggé alakítják, a kétváltozós egyenlet megoldásának nevezzük.

A következő számpárok mindegyike megoldása az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletnek:

$$x = 8,\ y = 6;$$
$$x = -6,\ y = 8;$$
$$x = 10,\ y = 0.$$

Viszont az $x = 5$, $y = 9$ számpár nem megoldása.

A meghatározás hasonló az egyváltozós egyenletek gyökeinek a megfogalmazására. Ennek következtében a számpárokat vagy külön a számokat tévesen az egyenlet gyökének nevezik.

Az a tény, hogy az $x = a$ és $y = b$ számpár az egyenlet megoldása, a következőképpen írható fel: $(a; b)$ az egyenlet megoldása. A zárójelbe az első helyre[1] az x, a másodikra az y értékét írjuk.

[1] Ha az egyenletben lévő változók jelölése nem x és y, akkor a megoldáspárok felírásánál előre meg kell állapodni, melyik változó értékét írjuk az első, és melyiket a második helyre. Általában az ábécé sorrendet vesszük alapul.

Felhasználva a jelölést, felírhatjuk például, hogy az (5; 85), (40; 50), (50; 40) számpárok mindegyike megoldása az $x + y = 90$ egyenletnek.

A három felírt számpáron kívül az egyenletnek számtalan megoldása létezik. Ha az $x + y = 90$ egyenletbe behelyettesítjük az y változó bármelyik értékét, akkor egyváltozós lineáris egyenletet kapunk, melynek az x változó megfelelő értékei lesznek a gyökei. Érthető, hogy végtelen számpár található, amelyek az $x + y = 90$ egyenlet megoldásaként szolgálhatnak.

A kétváltozós egyenletnek nincs minden esetben végtelen számú megoldása. Például az $|x|+|y|=0$ egyenlet egy megoldással rendelkezik: (0; 0). Valóban, mivel $|x|\geq 0$ és $|y|\geq 0$, ezért $x \neq 0$ és $y \neq 0$ esetében az egyenlet bal oldala csak pozitív értékű lehet. Az $x^2 + y^2 = -2$ egyenletnek például egyetlen megoldása sincs.

Megjegyezzük, hogy az $|x|+|y|=0$ és $x^2 + y^2 = -2$ egyenleteket megoldottuk, az $x + y = 90$ egyenletet viszont nem.

Meghatározás. Megoldani a kétváltozós egyenletet annyit jelent, mint megtalálni az összes megoldását, vagy megmutatni, hogy nincs megoldása.

A kétváltozós egyenletek tulajdonságait könnyű megjegyezni: hasonlók az egyváltozós egyenletek esetében megfogalmazott tulajdonságokhoz, amelyekkel a 6. osztályban ismerkedtetek meg.

- Ha az egyenlet jobb és bal oldalához hozzáadjuk (vagy mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot, akkor a kapott egyenletnek is ugyanazok lesznek a megoldásai, mint az eredeti egyenleté.
- Ha valamelyik összeadandót az egyenlet egyik oldaláról átviszszük ellenkező előjellel a másik oldalra, az egyenlet megoldásai nem változnak.
- Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (elosztjuk) ugyanazon nullától eltérő számmal, az egyenlet megoldásai nem változnak.

Megvizsgáljuk az $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$ egyenletet. Az egyenletek tulajdonságainak felhasználásával átalakítjuk a kifejezést:

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 0.$$

Tovább alakítjuk: $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0$;

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0.$$

Mivel $(x - 1)^2 \geqslant 0$ és $(y + 1)^2 \geqslant 0$, ezért a bal oldal abban az esetben lesz 0, ha *egyszerre* teljesülnek a következő egyenlőségek: $x - 1 = 0$ és $y + 1 = 0$. Innen következik, hogy az (1; –1) számpár az egyenlet egyetlen megoldása.

Egyes objektumok tanulmányozása során nemcsak a tulajdonságai leírására hagyatkozunk, hanem megpróbáljuk vizuálisan is elképzelni. Mivel a kétváltozós egyenlet megoldása egy számpár, például $(a; b)$, ezért kézenfekvő, hogy a koordinátasíkon egy $M\ (a; b)$ ponttal ábrázoljuk. Feltüntetve az egyenlet összes megoldását, megkapjuk az **egyenlet grafikonját.**

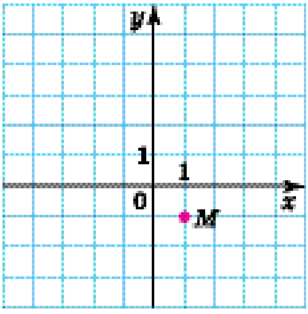
Meghatározás. A kétváltozós egyenlet grafikonjának azt a mértani alakzatot nevezzük, amelyik a koordinátasík azon, és csakis azon pontjaiból áll, melyek koordinátái (számpárok) az egyenlet megoldásai.

Például az imént vizsgált $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$ egyenletnek egy megoldása létezik: (1; –1). Ezért a grafikonja egy M (1; –1) pont (44. ábra).

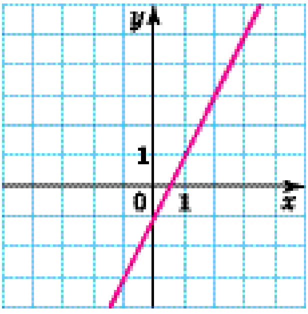
A 45. ábrán az $y = 2x - 1$ függvény grafikonja látható. Mivel a lineáris függvényt megadó képlet kétváltozós egyenlet, ezért úgy is mondhatjuk, hogy a 45. ábrán az $y = 2x - 1$ egyenlet grafikonja látható.

Az egyenlet grafikonját alkotó alakzat esetében igazak a következő állítások:

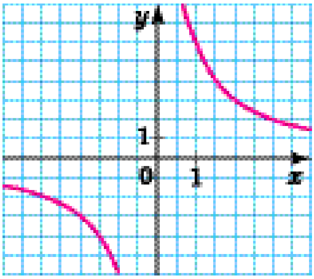
1) *az egyenlet mindegyik megoldása a grafikont alkotó pontok koordinátája;*
2) *a grafikonhoz tartozó bármelyik pont koordinátája – az adott egyenlet megoldása.*



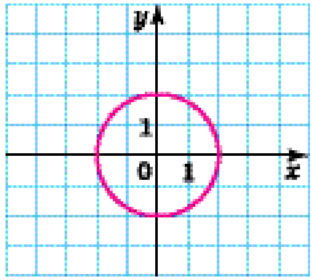
44. ábra



45. ábra



46. ábra



47. ábra

Az egyenletek grafikonjai nagyon sokfélék. Többükkel a későbbiekben fogtok megismerkedni az algebra tanulása közben. Például a 8. osztályos algebrából megtudhatjátok, hogy a pont elején vizsgált $xy = 12$ egyenlet grafikonja a 46. ábrán látható alakzat, amelyet **hiperbolának** neveznek. A 9. osztályos mértanból pedig azt tudhatjátok meg, hogy az $x^2 + y^2 = 4$ egyenlet grafikonja **körlap** (47. ábra).

6. PÉLDA Ábrázoljátok az $xy + 3y = 0$ egyenlet grafikonját.

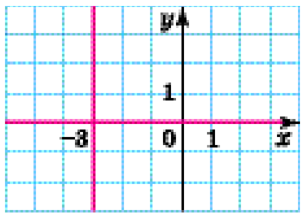
Megoldás: Átalakítjuk az egyenletet: $y\,(x + 3) = 0$. Innen az következik, hogy $y = 0$ vagy $x + 3 = 0$.

Tehát az egyenlet megoldása az összes $(x; 0)$ alakú számpár, ahol x – tetszőleges szám, valamint az összes $(–3; y)$ alakú számpár, ahol y – tetszőleges szám.

Az összes $(x; 0)$ koordinátájú pont, ahol x – tetszőleges szám, az abszcisszatengelyt alkotja.

Az összes $(–3; y)$ koordinátájú pont, ahol y – tetszőleges szám, a $(–3; 0)$ ponton átmenő az ordinátatengellyel párhuzamos egyenes.

Tehát az adott egyenlet grafikonja a 48. ábrán látható két egyenes.



48. ábra

?

1. Mit nevezünk a kétváltozós egyenlet megoldásának?
2. Mit jelent megoldani a kétváltozós egyenletet?
3. Fogalmazzátok meg a kétváltozós egyenletek tulajdonságait!
4. Mit nevezünk a kétváltozós egyenlet grafikonjának?
5. Állhat-e a kétváltozós egyenlet grafikonja egy pontból?
6. Milyen alakzat az $y = kx + b$ egyenlet grafikonja?

GYAKORLATOK

909.° Az alábbiak közül melyik kétváltozós egyenlet:
1) $2x + y = 8$; 4) $a^2 - 3b = 8c$; 7) $x^2 - 8x = 100$;
2) $x + y + z = 0$; 5) $xy + 1 = 2$; 8) $x^2 - 8y = 100$;
3) $a^2 - 3b = 8$; 6) $5m - 3n = 6$; 9) $x^2 - 8xy = 100$?

910.° Megoldása-e a (–2; 3) számpár az egyenleteknek:
1) $4x + 3y = 1$; 2) $x^2 + 5 = y^2$; 3) $xy = 6$?

911.° A (0; 1); (5; –4); (0; 1,2); (–1; 1); (1; –1) számpárok közül melyek az egyenletek megoldásai:
1) $x^2 + 5y - 6 = 0$; 2) $xy + x = 0$?

912.° Hozzátartozik-e a $2x^2 - y + 1 = 0$ egyenlet grafikonjához a következő pont:
1) A (–3; –17); 2) B (2; 9); 3) C (–2; 9); 4) D (–1; 4)?

913.° Bizonyítsátok be, hogy a következő pontok nem tartoznak az $xy - 12 = 0$ egyenlet grafikonjához:
1) A (3; –4); 2) B (–2; 6); 3) C (7; 2).

914.° Metszi-e a koordinátasík középpontját a következő egyenletek grafikonja:
1) $12x + 17y = 0$; 2) $x^2 - xy + 2 = 0$; 3) $x^2 - 4y = y^2 + 3x$?

915.° Nevezzétek meg az egyenletek tetszőleges három megoldását:
1) $x - y = 10$; 2) $x = 4y$; 3) $2x^2 + y = 20$.

916.° Nevezzétek meg az egyenletek tetszőleges három megoldását:
1) $x + y = 1$; 2) $5x - y = 2$.

917.• A $4x + 3y = 30$ egyenlet grafikonja átmegy az A (6; b) ponton. Mennyi a b értéke?

918.• A $7x - 5y = 47$ egyenlet grafikonja átmegy a B (a; –1) ponton. Határozzátok meg az a értékét.

919.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a függvények grafikonjai és a koordinátatengelyek metszéspontjainak a koordinátáit.
1) $x + y = 2$; 2) $x^3 - y = 1$; 3) $x^2 + y^2 = 9$; 4) $|x| - y = 5$.

920.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a függvények grafikonjai és a koordinátatengelyek metszéspontjainak a koordinátáit.
1) $2x - 3y = 6$; 2) $x^2 + y = 4$; 3) $|x| + |y| = 7$.

921.• Állítsatok fel olyan kétváltozós egyenleteket, melyeknek megoldásai lesznek a következő számpárok:
1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = -3$, $y = 5$; 3) $x = 10$, $y = 0$.

922.• Állítsatok fel olyan kétváltozós egyenleteket, melyek grafikonjai áthaladnak a következő pontokon:
1) A (–2; 2); 2) B (4; –1); 3) C (0; 0).

923.• Gondoljatok ki három olyan egyenletet, melyek grafikonjai áthaladnak az M (6; –3) ponton.

924.• Állítsatok fel három olyan egyenletet, melyek grafikonjai áthaladnak a K (0; 4) ponton.

925.• Hozzátartoznak-e az $x^4 - y = -2$ egyenlet grafikonjához a negatív ordinátájú pontok?

926.• Hozzátartoznak-e az $x + y^2 = -4$ egyenlet grafikonjához a pozitív abszcisszájú pontok?

927.• Létezik-e megoldása az egyenleteknek:

1) $y^2 = x^2$; 4) $x^2 + y^2 = 25$; 7) $|x| + |y| = 1$;
2) $y^2 = -x^2$; 5) $x^2 + y^2 = -25$; 8) $|x| + |y| = 0$;
3) $xy = 0$; 6) $x^2 - y^2 = -9$; 9) $|x| + |y| = -1$?

Pozitív válasz esetén mondjatok néhány megoldást.

928.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$; 3) $x^4 + y^6 = -4$.

929.• Hány megoldása van az egyenleteknek:

1) $x^2 + (y - 2)^2 = 0$; 5) $xy = 2$;
2) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$; 6) $|x + 1| + |y| = 0$;
3) $9x^2 + 16y^2 = 0$; 7) $x^2 + |y| = -100$;
4) $(x^2 + y^2)y = 0$; 8) $x + y = 2$?

930.• Állítsatok fel az x és y változók segítségével olyan egyenletet:

1) melynek egy megoldása van;
2) melynek nincs megoldása;
3) melynek számtalan megoldása van;
4) amelynek bármely számpár a megoldása.

931.•• Milyen alakzatok a következő egyenletek grafikonjai:

1) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 0$; 3) $4x + y = y + 4x$;
2) $|x + 9| + |y - 8| = 0$; 4) $(x - 1)(y + 5) = 0$?

932.•• Ábrázoljátok az egyenlet grafikonját:

1) $(x + 2)^2 + y^2 = 0$; 4) $(x + 1)(y - 1) = 0$;
2) $|x| + (y - 3)^2 = 0$; 5) $xy - 2y = 0$.
3) $xy = 0$;

933.•• Ábrázoljátok az egyenlet grafikonját:

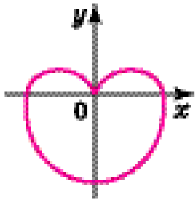
1) $|x - 4| + |y - 4| = 0$; 2) $(x - 4)(y - 4) = 0$;
3) $xy + x = 0$.

934.•• Határozzátok meg az alábbi egyenletek megoldásának összes természetes (x; y) számpárját:

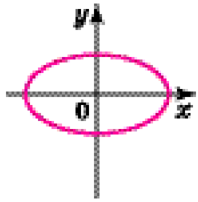
1) $2x + 3y = 5$; 2) $x + 5y = 16$.

935.•• Határozzátok meg az $|x| + |y| = 2$ egyenlet megoldásának összes egész (x; y) számpárját.

936.•• Határozzátok meg az $x^2 + y^2 = 5$ egyenlet megoldásának összes egész (x; y) számpárját.



49. ábra



50. ábra

937.•• Katalinnak a matematikai feladatgyűjteményért 29 hrivnyát kell fizetnie. Csak 2 és 5 hrivnyás bankjegyei vannak. Hányféleképpen számolhat el a könyvért visszajáró nélkül?

938.•• A 7. osztályos tanulók a matematikaversenyen algebra- és mértanpéldákat oldottak meg. Minden helyesen megoldott algebrafeladatért 2 pont, míg a mértanfeladatért 3 pont járt. A legmagasabb elérhető pontszám 24. Hány feladatot kaptak a versenyzők algebrából és mértanból, ha minden tantárgyból legalább egy feladat volt? Írjátok fel az összes lehetséges megoldást.

939.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $x^2 + y^2 + 4 = 4y$;
3) $x^2 + y^2 + x + y + 0{,}5 = 0$;
2) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$;
4) $9x^2 + y^2 + 2 = 6x$.

940.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $x^2 + 10y + 30 = 10x - y^2 - 20$;
2) $4x^2 + y^2 + 4x = 2y - 3$.

941.•• Az $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ egyenlet grafikonja úgynevezett *kardioid* (49. ábra). Határozzátok meg a koordinátatengelyekkel való metszéspontjai koordinátáit.

942.•• Az $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ egyenlet grafikonja az 50. ábrán látható *ellipszis*. Határozzátok meg a koordinátatengelyekkel való metszéspontjai koordinátáit.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

943. A 150 ml 8%-os savelegyet tartalmazó üvegbe 90 ml vizet öntöttek. Mennyi lesz a kapott elegy savkoncentrációja?

944. A táskában 7 piros, 10 zöld és 12 sárga alma van. Legkevesebb hány almát kell kivennünk bekötött szemmel, hogy a kiemelt almák között legalább egy zöld legyen?

945. Határozzátok meg az egyenletek gyökeit:

1) $\frac{4x+1}{5}-\frac{2x-3}{3}=x-4$; 2) $\frac{3x-5}{4}-\frac{5x-2}{3}=x+9$.

946. Az A városból a B városba egyszerre egy személy- és egy tehergépkocsi indult el. 3,5 óra múlva a személyautó a B városba ért, a tehergépkocsinak pedig még 77 km-t kellett megtennie. Határozzátok meg a városok közötti távolságot, ha a tehergépkocsi sebessége 1,4-szer kisebb a személygépkocsiénál.

947. Igaz-e az állítás, hogy tetszőleges n természetes páros szám esetén az $(5n + 10)^2 – (2n + 4)^2$ kifejezés értéke maradék nélkül osztható 84-gyel?

948. Ismeretes, hogy az m, n és k egyes értékeinél a $3m^2n$ kifejezés értéke 2, az n^2k^4 kifejezésé pedig 3. Számítsátok ki az m, n és k ugyanazon értékeivel a kifejezések értékét:

1) $(3m^2n^2k^2)^2$; 2) $(–2m^2nk^2)^3 \cdot (0,5n^2k)^2$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

949. Hasonlítsátok össze a kifejezések értékeit:

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 999 \cdot 1000)^2 \text{ és } 1000^{1000}.$$

25. A kétváltozós lineáris egyenlet és grafikonja

Meghatározás. Kétváltozós lineáris egyenletnek nevezzük az $ax + by = c$ alakban felírható egyenletet, ahol x és y – változók, a, b és c – tetszőleges számok.

Az előző pontban említett $3x + 2y = 450$; $x + y = 90$ egyenletek lineárisak. A következő egyenletek szintén lineárisak: $x + y = 3$; $0x + 5y = –1$; $–3x + 0y = 5$; $0x + 0y = 0$; $0x + 0y = 2$.

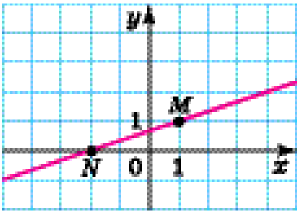
Tisztázzuk, milyen alakzat lesz a lineáris egyenlet grafikonja. Megvizsgálunk három lehetőséget.

1. lehetőség. Adott az $ax + by = c$ lineáris egyenlet, melyben $b \neq 0$. Az egyenletet a következőképpen alakítjuk át:

$$by = –ax + c.$$

Mivel $b \neq 0$, a jobb és bal oldalt elosztjuk b-vel:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$



51. ábra

Végezzük el a következő helyettesítést: $-\frac{a}{b}=k$, $\frac{c}{b}=p$. Tehát a képletünk a következő alakban írható fel:

$$y = kx + p.$$

A kapott képlet lineáris függvényt ad meg, melynek a grafikonja nem függőleges egyenes. Tehát az $ax + by = c$, ahol $b \neq 0$ egyenlet grafikonja nem függőleges egyenes.

1. PÉLDA Ábrázoljátok az $x - 3y = -2$ egyenlet grafikonját.

Megoldás: Már tudjuk, hogy az egyenlet grafikonja egyenes. Ezért a grafikon megrajzolásához elég meghatároznunk két tetszőleges pont koordinátáját. Ha $x = 1$, akkor $y = 1$; ha $x = -2$, akkor $y = 0$. A kapott M (1; 1) és N (–2; 0) pontokon keresztül egyenest húzunk, és megkapjuk a keresett grafikont (51. ábra). ●

2. lehetőség. Adott az $ax + by = c$ lineáris egyenlet, ahol $a \neq 0$, $b = 0$. Ebben az esetben $ax + 0y = c$. Az ilyen típusú egyenletek grafikonját a 2. példában vizsgáljuk meg.

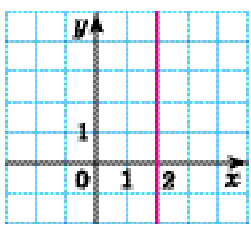
2. PÉLDA Ábrázoljátok a $3x + 0y = 6$ egyenlet grafikonját.

Megoldás: Nem okoz nehézséget megtalálnunk az egyenlet néhány megoldását. Vegyük például a következő négy számpárt: (2; –1); (2; 0); $\left(2; \frac{1}{3}\right)$; (2; –100). Érthető, hogy bármely (2; t) alakú számpár, ahol t – tetszőleges szám, megoldása a $3x + 0y = 6$ egyenletnek. Tehát a keresett grafikonhoz tartozik minden olyan pont, melyek abszcisszája 2, ordinátája pedig tetszőleges szám. Mindezek a pontok az abszcisszatengelyre merőleges és a (2; 0) ponton átmenő egyenesen fekszenek (52. ábra). Eközben az egyenesen fekvő pontok bármelyikének a koordinátája – számpár – megoldása lesz az egyenletnek. Tehát a keresett grafikon az említett függőleges egyenes. ●

Hasonlóképpen gondolkodva igazolhatjuk, hogy az $ax + 0y = c$ egyenlet grafikonja, ahol $a \neq 0$, szintén függőleges egyenes.

Levonhatjuk a következtetést***: mindkét esetben:*** 1) $\boldsymbol{b \neq 0}$***;*** 2) $\boldsymbol{b = 0}$ ***és*** $\boldsymbol{a \neq 0}$ ***– az*** $\boldsymbol{ax + by = c}$ ***egyenlet grafikonja egyenes.***

Az „adva az $y = 2x$ egyenlet” kifejezés helyett az „adott az $y = 2x$ egyenes” kifejezést használják.



52. ábra

3. lehetőség. Adott az $ax + by = c$ lineáris egyenlet, melyben $a = b = 0$. Ekkor $0x + 0y = c$.

Ha $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, tehát nincsenek olyan pontok a koordinátasíkon, amelyek az egyenlet grafikonját alkotnák.

Ha $c = 0$, akkor:

$$0x + 0y = 0.$$

Ebben az esetben bármely tetszőleges számpár az egyenlet megoldása lesz, és a grafikon a teljes koordinátasík.

A táblázatban összefoglaljuk a tanultakat.

Egyenletek	Az a, b és c értékei	Grafikon
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a és c tetszőleges szám	Nem merőleges egyenes
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c tetszőleges szám	Merőleges egyenes
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	A teljes koordinátasík
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

3. PÉLDA Fejezzétek ki a $3x - 2y = 6$ egyenletből az x változót az y által, és találjatok két megoldását.

Megoldás: Az adott egyenletből: $3x = 2y + 6$;

$$x = \frac{2y + 6}{3};$$

$$x = \frac{2}{3}y + 2.$$

Az y változónak adott érték alapján az $x = \frac{2}{3}y + 2$ képlet segítségével kiszámíthatjuk az x értékét, amivel a $3x - 2y = 6$ egyenletnek számtalan megoldását kapjuk.

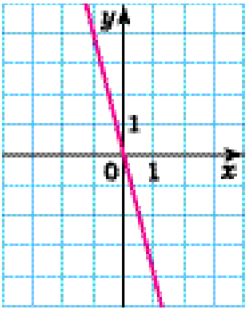
Például,

ha $y = 6$, akkor $x = \frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = 6;$

ha $y = -2$, akkor $x = \frac{2}{3} \cdot (-2) + 2 = \frac{2}{3}.$

A (6; 6) és $\left(\frac{2}{3}; -2\right)$ számpárok az adott egyenlet megoldásai.

4. PÉLDA Állítsátok fel azt a kétváltozós lineáris egyenletet, melynek grafikonja a koordinátasík kezdőpontján és az A (3; –12) ponton átmenő egyenes. Rajzoljátok meg a grafikonját.



53. ábra

Megoldás: Mivel a keresett egyenlet grafikonja átmegy az O (0; 0) és az A (3; –12) eltérő abszcisszájú pontokon, ezért az nem merőleges egyenes. Akkor az egyenes egyenlete $y = kx + b$ alakban írható fel, ahol k és b – tetszőleges számok.

Abból, hogy a grafikon átmegy az origón, az következik, hogy $b = 0$. Mivel áthalad az A (3; –12) ponton, ezért $-12 = k \cdot 3$, ahonnan $k = -4$.

Tehát a keresett egyenlet: $y = -4x$ vagy $4x + y = 0$. Az egyenlet grafikonja az 53. ábrán látható.

Felelet: $4x + y = 0$.

?

1. Milyen egyenletet nevezünk kétváltozós lineáris egyenletnek?
2. Milyen az $ax + by = c$ egyenlet grafikonja, ha $b \neq 0$ vagy amikor $b = 0$ és $a \neq 0$?
3. Milyen az $ax + by = c$ egyenlet grafikonja, ha $a = b = c = 0$?
4. Az a, b és c mely értékeinél nincs megoldása az $ax + by = c$ egyenletnek?

GYAKORLATOK

950.° Lineárisak-e a kétváltozós egyenletek:
1) $7x + 11y = 36$; 3) $12x - 17y = 0$;
2) $x^2 + 4y = 6$; 4) $-3x + xy = 10$?

951.° Melyek a $3x - 7y = 14$ egyenlet megoldásai a (7; 1), (0; –2), (8; 2), (–7; –5), (10; 3) számpárok közül?

952.° Melyik egyenlet megoldása a (3; –2) számpár:
1) $4x + 5y = 2$; 2) $3x - 2y = 5$; 3) $0{,}2x - 0{,}5y = 1{,}6$?

953.° Ismeretes, hogy a (–5; y) számpár a $2x + 9y = 17$ egyenlet megoldása. Határozzátok meg az y értékét.

954.° Ismeretes, hogy az (x; 6) számpár a $8x - 3y = 22$ egyenlet megoldása. Határozzátok meg az x értékét.

955.° Melyik egyenlet grafikonjához tartozik az M (1; 4) pont:
1) $4y - 2x = -4$; 2) $6x + 11y = 50$?

956.° Átmegy-e a $3x + y = -1$ egyenlet grafikonja a következő pontok valamelyikén:
1) M (–3; 10); 2) N (4; –13); 3) K (0; –1)?

957.° Fejezzétek ki az egyenletekből az x változót az y által, és határozzátok meg mindegyik egyenlet három-három megoldását:
1) $x + y = 12$; 3) $2x + 8y = 16$;
2) $x - 7y = 5$; 4) $-6x + 5y = 18$.

958.° Fejezzétek ki az egyenletekből az y változót az x által, és határozzátok meg mindegyik egyenlet két-két megoldását:
1) $4x - y = 7$; 2) $-2x + y = 11$; 3) $5x - 3y = 15$.

959.° Találjátok meg az egyenletek három-három megoldását:
1) $x - y = 10$; 2) $2y - 5x = 11$.

960.° Találjátok meg az egyenletek három tetszőleges megoldását:
1) $6x + y = 7$; 2) $2x - 3y = -4$.

961.° Ábrázoljátok az egyenlet grafikonját:
1) $x - y = 4$; 2) $4x + y = 3$; 3) $x - 5y = 5$; 4) $3x + 2y = 6$.

962.° Ábrázoljátok az egyenlet grafikonját:
1) $x + y = -3$; 2) $6x + y = 0$; 3) $2x - 3y = 9$.

963.° Milyen számpárok lesznek az egyenlet megoldásai:
1) $0x + 4y = 20$; 2) $-3x + 0y = 27$?

964.° Ábrázoljátok az egyenlet grafikonját:
1) $4y = -8$; 2) $1{,}2x = 3{,}6$.

965.° Ábrázoljátok az egyenlet grafikonját:
1) $-0{,}2x = 1$; 2) $0{,}5y = 2$.

966.° Milyen pontban metszi a $7y - 3x = 21$ egyenes: 1) az x tengelyt; 2) az y tengelyt?

967.° Határozzátok meg a $0{,}3x + 0{,}2y = 6$ egyenlet grafikonja és a koordinátatengelyek metszéspontjainak koordinátáit.

968.° Állítsatok össze olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek a $(-2; 1)$ számpár a megoldása.

969.° Állítsatok össze olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek a $(3; 5)$ számpár a megoldása.

970.• Találjatok a $7x + 8y = 30$ egyenletnek olyan megoldást, amely két azonos számjegyből áll.

971.• Találjatok a $-12x + 17y = -87$ egyenletnek olyan megoldást, amely két egyenlő, de ellenkező előjelű számból áll.

972.• Az a milyen értékénél lesz az $(a; 2a)$ számpár megoldása a $2x + 7y = 16$ egyenletnek?

973.• Az a milyen értékénél lesz a $(-4; 2)$ számpár megoldása az egyenletnek:
1) $3x + 5y = a$; 2) $ax + 5y = 18$?

974.• Az a milyen értékénél halad át a $11x - 13y = a + 4$ egyenlet grafikonja az origón?

975.• Az a milyen értékénél megy át az A $(5; -3)$ ponton a függvény grafikonja:
1) $4x - 9y = a$; 2) $6x - ay = 15$?

976.• Az a milyen értékénél megy át az $ax + 4y = 0$ egyenlet grafikonja a következő pontokon:
1) A $(12; -4)$; 2) B $(0; 2)$; 3) O $(0; 0)$?

977.• A b milyen értékénél megy át az $5x + by = 0$ egyenlet grafikonja a következő pontokon:
1) M $(-4; -10)$; 2) N $(0; 1)$; 3) K $(-2; 0)$?

978. • Melyik egyenletnek lesz ugyanaz az egyenes a grafikonja, mint a $2x - 5y = 3$-nak:
1) $4x - 10y = 6$; 3) $2x - 5y = 6$; 5) $x - 2{,}5y = 1{,}5$;
2) $4x - 10y = 3$; 4) $5y - 2x = -3$; 6) $-0{,}4x - y = 0{,}6$?

979. • Állítsatok össze kétváltozós egyenleteket a következő feltételek alapján:
1) a téglalap hosszúsága x m, szélessége – y m, kerülete – 18 m;
2) az autóbusz 4 órán át x km/ó, 3 órán át pedig y km/ó sebességgel haladt, miközben 250 km-t tett meg;
3) a füzet ára x hrn, a tol y hrn, 2 toll 1,2 hrivnyával drágább 5 füzetnél;
4) az x kg tömegű ötvözet réztartalma 12%, az y kg tömegűé pedig 20%; miután a két ötvözetet összeolvasztották, a kapott ötvözet 9 kg rezet tartalmazott;
5) az egyik ládában x kg, a másikban pedig y kg cukorka volt; miután az egyik ládából áttettek a másikba 8 kg-ot, mindkét ládában azonos mennyiségű cukorka lett.

980. • Állítsatok össze kétváltozós egyenleteket a következő feltételek alapján:
1) az egyenlő szárú háromszög oldala a cm, az alapja b cm, kerülete 32 cm;
2) az egyik gépkocsi 6 ó alatt x km/ó sebességgel haladva 32 km-rel kisebb távolságot tett meg, mint a másik gépkocsi 7 ó alatt y km/ó sebességgel;
3) az egyik üzletben x q, míg a másikban y q alma volt; az egyik üzletből az alma 14%-át adták el egy nap alatt, a másikból pedig a 18%-át, ami 1,2 q-val kevesebb, mint az első üzletből eladott mennyiség.

981. • Bizonyítsátok be, hogy az $5y - x = 6$ és $3x - 7y = 6$ egyenesek az A (9; 3) pontban metszik egymást.

982. • Bizonyítsátok be, hogy a $4x - 3y = 12$ és $3x + 4y = -66$ egyenesek a B (–6; –12) pontban metszik egymást.

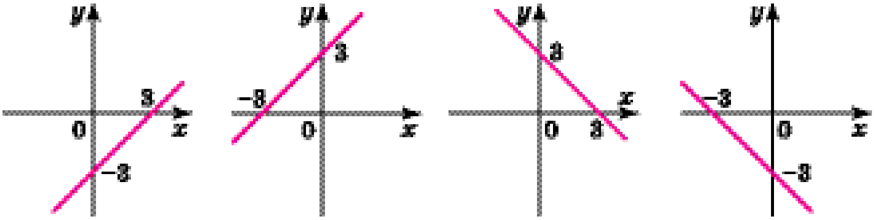
983. • Állítsatok össze olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek grafikonja átmegy az origón és a következő pontokon:
1) A (2; 8); 2) B (–6; 15).

984. • Állítsatok össze olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek grafikonja átmegy az origón és a C (8; –12) ponton.

985. • Bizonyítsátok be, hogy nem létezik az a-nak olyan értéke, melynél az $ax - 3y = 12$ egyenes áthalad az origón.

986. • Az a milyen értékénél fekszik az abszcisszatengelyen a $2x - 3y = -6$ és $4x + y = a$ egyenesek metszéspontja?

987. • A b milyen értékénél fekszik az ordinátatengelyen a $9x + 7y = 35$ és $x + by = -20$ egyenesek metszéspontja?



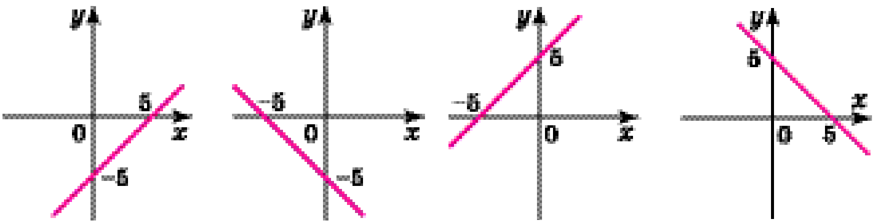
a *b* *c* *d*

54. ábra

988.• Az a és b milyen értékénél metszi az $ax + by = 24$ egyenes a koordinátatengelyeket az A (–6; 0) és B (0; 12) pontokban?

989.• Az 54. *a, b, c, d* ábrán látható egyenesek közül melyik lesz az $x + y = 3$ egyenlet grafikonja?

990.• Az 55. *a, b, c, d* ábrán látható egyenesek közül melyik lesz az $x - y = -5$ egyenlet grafikonja?



a *b* *c* *d*

55. ábra

991.• Az 56. ábrán látható egyenesek közül melyik lesz az egyenletek grafikonja:

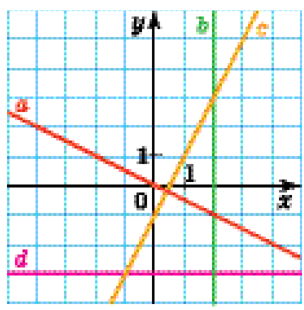
1) $0x + y = -3$;
2) $2x - y = 1$;
3) $3x + 0y = 6$;
4) $x + 2y = 0$?

992.• Hozzátartozik-e a $13x + 17y = -40$ egyenlet grafikonjához legalább egy olyan pont, melynek koordinátái pozitív számok?

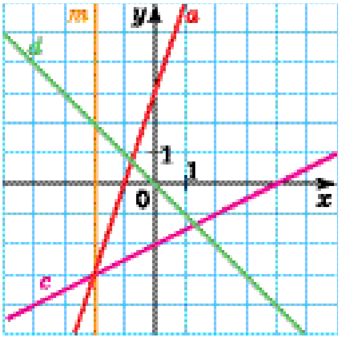
993.• Hozzátartozik-e a $4x - 8y = 7$ egyenlet grafikonjához legalább egy olyan pont, melynek mindkét koordinátája egész szám?

994.•• Állítsatok fel olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek grafikonja áthalad a következő pontokon:

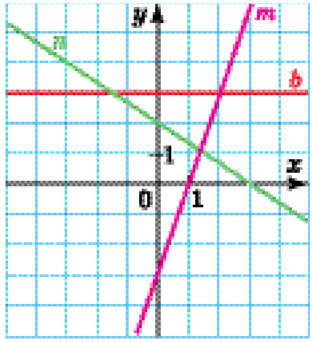
1) A (–4; 0) és B (0; 2); 2) C (0; –3) és D (5; 0).



56. ábra



57. ábra



58. ábra

995.•• Állítsatok fel olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek grafikonja áthalad az M (6; 0) és N (0; 6) pontokon.

996.•• Állítsátok fel azokat az egyenleteket, amelyeknek grafikonjai az 57. ábrán láthatók.

997.•• Állítsátok fel azokat az egyenleteket, amelyeknek grafikonjai az 58. ábrán láthatók.

998.• Hány olyan $(x; y)$ prím számpár létezik, amelyek megoldásai az $5x - 6y = 3$ egyenletnek?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

999. Két brigád 840 alkatrészt készített, miközben az egyik 80%-kal többet gyártott a másiknál. Hány alkatrészt készített mindegyik brigád?

1000. Ismeretes, hogy 4 azonos markológép 12 ó alatt ás ki egy munkagödröt. Hány óra alatt ás ki 3 gödröt 6 ilyen markológép?

1001. Bizonyítsátok be, hogy $2^{36} + 4^{100} - 2^{32} - 4^{98}$ kifejezés értéke osztható: 1) 15-tel; 2) 240-nel.

1002. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x-8)^2 - (x-4)(x+4) = 0$; 2) $(4x-5)(4x+5) - (4x-1)^2 = 9 - 2x$.

1003. Írjátok fel szorzat alakjában:

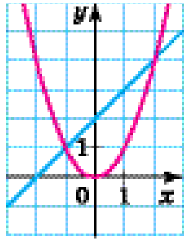
1) $6x^3 - 8x^2 + 3xy - 4y$; 3) $\frac{125x^3}{27} - \frac{m^6n^9}{64}$;

2) $x^4 - 6x^2y + 9y^2 - 16$; 4) $c^2 - 2c - b^2 - 4b - 3$.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

1004. A (3; 3), (–3; 3), (–3;–3) számpárok közül melyik megoldása az $x^2 + y^2 = 18$ és $x + y = 0$ egyenletek mindegyikének?

1005. Az 59. ábrán az $y = x^2$ és $x - y + 2 = 0$ egyenletek grafikonjai láthatók. A grafikonok alapján határozzátok meg azokat a számpárokat, amelyek mindkét egyenlet megoldásai.



59. ábra

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1006. 100 különböző természetes szám összege 5051. Határozzátok meg ezeket a számokat.

Hogyan építették az algebra és a mértan közötti hidat?

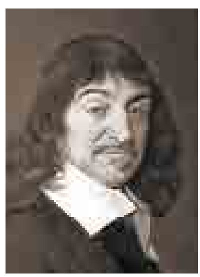
A koordináták ötlete már nagyon rég megszületett. Az emberek az őskorban tanulmányozták a Földet, megfigyelték a csillagokat és a kapott adatok alapján rajzokat és térképeket készítettek.

Az i. e. II. században Hipparkhosz görög csillagász elsőként használta a koordinátákat helymegállapításhoz a Föld felszínén.

Nicole Oresme (*ejtsd: Nikol Orem*) (1323–1392) francia tudós a XIV. században alkalmazta először a matematikában Hipparkhosz ötletét: a síkot négyzetrácsokra osztotta (hasonlóan a kockás füzetlaphoz), majd a pontok helyzetét szélesség és hosszúság alapján adta meg.

A koordinátákban rejlő nagy lehetőségeket viszont csak a XVII. században fedezte fel Pierre Fermat (*ejtsd*: *Pier Fermá*) és René Descartes (*ejtsd*: *Röné Dékárt*) francia matematikusok. A tudósok munkáikban bemutatták, hogy a koordináta-rendszer segítségével hogyan juthatunk el a pontoktól a számokig, a vonalaktól az egyenletekig, az algebrától a mértanig.

Pierre Fermat
(1601–1665)



René Descartes
(1596–1650)

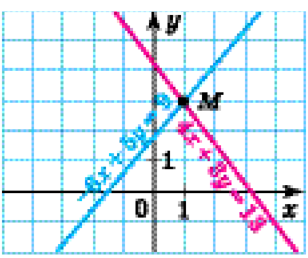
Noha Fermat a tanulmányát Descartesnél egy évvel korábban publikálta, a matematikában ma is használt koordináta-rendszert mégis **Descartes-féle** koordináta-rendszernek nevezik. Ez annak köszönhető, hogy Descartes az *Értekezés a módszerről* című munkájában bemutatott egy új, kisebb változtatásokkal ma is használatos betűs jelölési módszert. Ennek alapján jelöljük az ismeretleneket a latin ábécé utolsó betűivel: x, y, z, az együtthatókat pedig az elsőkkel: a, b, c, … . A már ismert x^2, x^3, y^5 stb. hatványjelöléseket szintén Descartesnak köszönhetjük.

26. Kétváltozós egyenletrendszerek. A kétváltozós egyenletrendszerek megoldásának grafikus módszere

Könnyen belátható, hogy a (–2; 0) számpár megoldása mind az $x^2 + y^2 = 4$, mind pedig az $y = x^2 - 4$ egyenletnek. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a (–2; 0) számpár az említett egyenletek **közös megoldása**.

A 60. ábrán a $-6x + 5y = 9$ és a $4x + 3y = 13$ egyenletek grafikonjai láthatók. Az M (1; 3) pontban metszik egymást. A pont mindkét grafikonhoz hozzátartozik. Tehát az (1; 3) számpár a két egyenlet közös megoldása.

Hogy meghatározhassuk a 12 cm^2 területű és 14 cm kerületű téglalap oldalait, meg kell találnunk az $xy = 12$ és $2x + 2y = 14$ egyenletek közös megoldásait, ahol x cm és y cm a téglalap szomszédos oldalainak hossza.



60. ábra

Ahhoz, hogy megtaláljuk néhány egyenlet közös megoldását, meg kell oldani az **egyenletrendszert**.

Az egyenletrendszert kapcsos zárójel segítségével írják fel.

Az $\begin{cases} xy = 12, \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$

kifejezés például a 12 cm^2 területű és 14 cm kerületű téglalap oldalainak a meghatározásáról szóló feladat matematikai modellje.

$$\text{A} \begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$$

egyenletrendszer a két egyenes közös pontjai koordinátáinak a meghatározásáról szóló feladat matematikai modellje (60. ábra).

A rendszer mindkét egyenlete lineáris. Ezért ezt a rendszert **két egyenletből álló kétváltozós lineáris egyenletrendszernek** nevezzük.

Meghatározás. A kétváltozós lineáris egyenletrendszer megoldásának azt a számpárt nevezzük, amely mindegyik egyenletet igaz egyenlőséggé alakítja.

A fentebb vizsgált példában tehát a (–2; 0) számpár az

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása.

Viszont ez egyáltalán nem jelenti azt, hogy a rendszert megoldottuk.

Meghatározás. Az egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni az összes megoldását, vagy bebizonyítani, hogy nincs megoldása.

A (–2; 0) számpáron kívül az utolsó egyenletrendszernek több megoldása is létezik, például a (2; 0) számpár. Ezt az egyenletrendszert, a téglalapról szóló feladathoz hasonlóan, a 9. osztályban tanuljátok majd megoldani.

Viszont az

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -4, \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

egyenletrendszert már most megoldhatjuk. Nyilvánvaló, hogy az első egyenletnek nincs megoldása, tehát nem létezik közös megoldás sem. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Hasonlóképpen oldhatjuk meg a

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$$

egyenletrendszert. Az egyenletek grafikonjai az M (1; 3) pontban metszik egymást (60. ábra). A pont koordinátái mindkét egyenletnek megoldása, tehát megoldása az egyenletrendszernek is. Mivel a grafikonoknak nincs több közös pontjuk, ezért az egyenletrendszernek sincs több megoldása. Tehát az (1; 3) számpár az adott rendszer egyetlen megoldása.

Az egyenletrendszerek megoldásának fentebb leírt módszerét **grafikus módszernek** nevezzük. A módszer lényege a következő:

- *ábrázolni közös koordináta-rendszerben az összes egyenlet grafikonját;*

- *meghatározni a grafikonok összes metszéspontjának koordinátáját;*
- *a kapott számpárok lesznek az egyenletrendszer megoldásai.*

Nem minden egyenletrendszert célszerű grafikusan megoldani. Például, ha az $\left(\frac{1}{17}; -\frac{36}{85}\right)$ számpár valamilyen egyenletrendszer megoldása, akkor érthető, hogy ezt grafikusan nehéz megállapítani. Ezért a grafikus módszert abban az esetben használják, ha a megoldást elég hozzávetőlegesen meghatározni. Hogy az (1; 3) számpár a $\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$ rendszer megoldása, egyszerű behelyettesítéssel leellenőrizhető.

A grafikus módszer használata abban az esetben is célszerű, ha meg kell tudni a megoldások számát. Például a 61. ábrán az $y = f(x)$ és $y = g(x)$ függvények grafikonjai láthatók. A grafikonoknak három közös pontja van, ami alapján az állapítható meg, hogy az $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x) \end{cases}$ egyenletrendszernek három megoldása van.

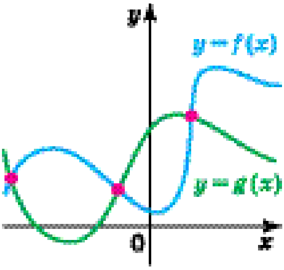
Tisztázzuk, hány megoldása lehet a két egyenletből álló kétváltozós lineáris egyenletrendszernek.

Ha a rendszer egyik egyenletének nincs megoldása, akkor nyilvánvaló, hogy a rendszer sem rendelkezik megoldással.

Például a $\begin{cases} 0x + 0y = 7, \\ 2x - 3y = 15 \end{cases}$ egyenletrendszernek nincs megoldása.

Megvizsgáljuk azt az esetet, amikor az egyenletrendszer mindkét egyenletének van megoldása.

Ha a rendszer egyik egyenletének a grafikonja egy sík, akkor az egyenletrendszer végtelen számú megoldással rendelkezik. Valóban, a síknak és a rajta fekvő egyenesnek végtelen közös pontja van. Például a $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ 2x - 3y = 15 \end{cases}$ rendszernek végtelen számú megoldása van.



61. ábra

Ha az egyenletrendszer grafikonjai egyenesek, akkor a megoldások száma a két egyenes kölcsönös elhelyezkedésétől függ:

1) *ha az egyenesek metszik egymást, a rendszernek egy megoldása van;*
2) *ha az egyenesek egybeesnek, a rendszer végtelen számú megoldással rendelkezik;*
3) *ha az egyenesek párhuzamosak, a rendszernek nincs megoldása.*

Fentebb már megvizsgáltuk azt a példát, amikor a rendszernek egy megoldása van. Ez a $\begin{cases} -6x+5y=9, \\ 4x+3y=13 \end{cases}$ egyenletrendszer.

A következő példák segítségével bemutatjuk a 2. és 3. esetet.

Tehát, ha az

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}-y=1, \\ x-2y=2 \end{cases}$$

rendszerben az első egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk 2-vel, attól az egyenlet és így a teljes rendszer megoldása nem változik.

A következőt kaptuk:

$$\begin{cases} x-2y=2, \\ x-2y=2. \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy a rendszer megoldása azonos a $x-2y=2$ egyenlet megoldásával. Mivel az egyenletnek végtelen számú megoldása van, ezért a rendszerről is elmondhatjuk, hogy végtelen számú megoldással rendelkezik.

Megvizsgálunk egy olyan egyenletrendszert, amelynek nincs megoldása:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+y=2, \\ 2x+3y=7. \end{cases}$$

Valóban, az első egyenlet mindkét oldalát megszorozva 3-mal, a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 2x+3y=7. \end{cases}$$

Érthető, hogy nem találunk olyan $(x;\ y)$ számpárt, amelyekkel a $2x+3y$ kifejezés értéke 6 és 7 is lehet egyszerre.

Végül megjegyezzük, hogy a grafikus módszer alapján állapították meg, hogy nem létezik olyan lineáris egyenletrendszer, amelyik pontosan két vagy három, illetve pontosan 100 megoldással rendelkezik.

?

1. Milyen esetben mondják, hogy meg kell oldani az egyenletrendszert?
2. Mit nevezünk a kétváltozós egyenletrendszer megoldásának?
3. Mit jelent megoldani az egyenletrendszert?
4. Mi a lényege a kétváltozós egyenletrendszer grafikus megoldásának?
5. Hány megoldása lehet a két egyenletből álló kétváltozós egyenletrendszernek?
6. Milyen a kétváltozós egyenletrendszer két egyenletét ábrázoló egyeneseknek a kölcsönös helyzete, ha:
1) a rendszernek egyetlen megoldása van;
2) a rendszernek nincs megoldása;
3) a rendszer végtelen számú megoldással rendelkezik?

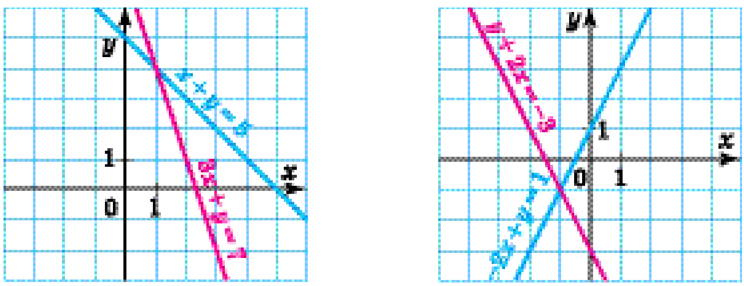
GYAKORLATOK

1007.° A (–2; 1), (2; –1), (6; 4), (8; –4) számpárok közül melyik megoldása az egyenletrendszernek: $\begin{cases} 3x - 8y = -14, \\ 4x + y = 28? \end{cases}$

1008.° Melyik rendszer megoldása a (–5; 2) számpár:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 31, \\ 4x - 5y = -30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y - 2x = 16, \\ 6x + 7y = -16; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = -9, \\ 10y - x = 15? \end{cases}$

1009.° Határozzátok meg a 62. ábrán látható egyenesek metszéspontjának koordinátáit. Írjátok le a megfelelő egyenletrendszert, majd behelyettesítve a metszéspont koordinátáit, ellenőrizzétek le a megoldást.



a *b*

62. ábra

1010.° Oldjátok meg grafikusan:

1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x - 3y = -26, \\ y - 2x = 8. \end{cases}$

1011.° Oldjátok meg grafikusan:

1) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 5x + y = -18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 4x - y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -1. \end{cases}$

1012.• Állítsatok fel két olyan lineáris kétváltozós egyenletből álló rendszert, melynek megoldása a következő számpár:

1) $x = 3,\ y = 2$; 2) $x = -4,\ y = 1$; 3) $x = 5,\ y = 0$.

1013.• Állítsatok fel két olyan lineáris kétváltozós egyenletből álló rendszert, melynek megoldása a (2; –2) számpár.

1014.• A (6; 4) számpár az egyenletrendszer megoldása:

1) $\begin{cases} ax+2y=26, \\ 4x+by=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+by=6, \\ ax+by=0. \end{cases}$

Határozzátok meg az a és b értékét.

1015.• Az a és b milyen értékeinél lesz a (–2; 3) számpár megoldása az $\begin{cases} ax-3y=-13, \\ 7x+by=1 \end{cases}$ egyenletrendszernek?

1016.• Van-e megoldása az egyenletrendszernek:

1) $\begin{cases} 2x-7y=6, \\ 8x-28y=24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=-2, \\ 6x+3y=9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=0{,}5, \\ 2x+4y=2? \end{cases}$

1017.• Van-e megoldása az egyenletrendszernek:

1) $\begin{cases} x-y=4, \\ 3x-3y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1{,}5y=-4, \\ 3y-2x=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9x+9y=18, \\ x+y=2? \end{cases}$

1018.•• Az $2x - 3y = 6$ egyenlethez válasszatok egy olyan egyenletet, hogy a vele alkotott egyenletrendszernek:
1) egy megoldása legyen;
2) végtelen számú megoldása legyen;
3) ne legyen megoldása.

1019.•• Az $x - y = 2$ egyenlethez válasszatok egy olyan egyenletet, hogy a vele alkotott egyenletrendszernek:
1) egy megoldása legyen;
2) végtelen számú megoldása legyen;
3) ne legyen megoldása.

1020.•• Az a mely értékeinél nincs megoldása az egyenletrendszernek:

$\begin{cases} 8x+9y=7, \\ 8x+9y=a? \end{cases}$

1021.•• Az a mely értékeinél lesz végtelen számú megoldása az egyenletrendszernek:

1) $\begin{cases} x+5y=4, \\ 4x+20y=a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+ay=12, \\ 9x-15y=36? \end{cases}$

1022.•• Az a mely értékeinél:

1) nincs megoldása a $\begin{cases} 7x-12y=14, \\ 7x-12y=a \end{cases}$ egyenletrendszernek;

2) rendelkezik a $\begin{cases} 6x+ay=4, \\ 3x-5y=2 \end{cases}$ egyenletrendszer végtelen számú megoldással?

1023.•• Válasszatok az a és b számára olyan értékeket, amelyekkel az $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ ax + 4y = b \end{cases}$ egyenletrendszernek:

1) végtelen számú megoldása van;
2) egy megoldása van;
3) nincs megoldása.

1024.•• Válasszatok az m és n számára olyan értékeket, amelyekkel az $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - my = n \end{cases}$ egyenletrendszernek:

1) végtelen számú megoldása van;
2) egy megoldása van;
3) nincs megoldása.

1025.* Oldjátok meg grafikusan:

1) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x - y = -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x + 3y = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y + |x| = 0, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - |y| = 0, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

1026.* Oldjátok meg grafikusan:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |y - 2x| = 3, \\ x - 2y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ |x + y| = 2. \end{cases}$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1027. Az 5,5 kg tömegű réz-ólom ötvözetben 20%-kal több a réz, mint az ólom. Határozzátok meg a réz tömegét az ötvözetben.

1028. Kijevből a tőle 200 km-re fekvő Lubenbe egy autóbusz indult el. Elindulása után 32 perccel Lubenből egy gépkocsi indult el vele szemben az autóbusz sebességénél 20 km/ó-val nagyobb sebességgel. Mennyi volt a busz sebessége, ha a gépkocsi indulása után 1,2 ó múlva találkoztak?

1029. Találjatok négy olyan egymás után következő páratlan természetes számot, melyek négyzeteinek összege 164.

1030. Bizonyítsátok be, hogyha $x + y = a - 1$, akkor $ax + x + ay + y + 1 = a^2$.

1031. Az a szám 5-tel való osztásakor a maradék 4, a b szám 5-tel való osztásakor pedig 3. Bizonyítsátok be, hogy az $a^2 + b^2$ kifejezés értéke osztható 5-tel.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

1032. Fejezzétek ki az x-et az y-on, valamint az y-t az x-en keresztül:

1) $x + y = 10$; 3) $y - x = -4$; 5) $5y - 4x = 0$;
2) $2x + y = 7$; 4) $x - 6y = 1$; 6) $4x + 3y = -12$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1033. Egy ötjegyű szám 2-es és 3-as, a másik ötjegyű szám pedig 3-as és 4-es számjegyekből áll. Állhat-e a két szám szorzata kizárólag 2-es és 4-es számjegyekből?

27. Lineáris egyenletrendszerek megoldása behelyettesítő módszerrel

Ha a matematikusok új feladattal találkoznak, akkor igyekeznek annak megoldását a már ismert feladatok megoldására visszavezetni.

Megmutatjuk, hogyan lehet a kétváltozós lineáris egyenletrendszer megoldását visszavezetni az egyváltozós lineáris egyenlet megoldására. Ez utóbbi számotokra már jól ismert.

Megoldjuk a

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

egyenletrendszert.

Az első egyenletből kifejezzük az y változót az x-en keresztül:

$$y = 2x - 8.$$

Behelyettesítjük a második egyenletbe az y helyett a kapott $2x - 8$ kifejezést:

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2(2x - 8) = 5. \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek ugyanazok a megoldásai, mint az eredeti rendszernek. Ezt a tényt indoklás nélkül fogadjuk el. Bizonyítását a matematikai szakkörön elvégezhetitek.

Az utóbbi rendszer második egyenlete már egyváltozós. Megoldjuk:

$$3x + 2(2x - 8) = 5;$$
$$3x + 4x - 16 = 5;$$
$$7x = 21;$$
$$x = 3.$$

Az x változó megkapott értékét behelyettesítjük az $y = 2x - 8$ kifejezésbe:

$$y = 2 \cdot 3 - 8;$$
$$y = -2.$$

A $(3; -2)$ számpár a keresett megoldás.

Az egyenletrendszer megoldásának imént leírt módszerét **behelyettesítő módszernek** nevezzük.

Tehát, *hogy behelyettesítő módszerrel oldhassuk meg a lineáris egyenletrendszert, a következő lépéseket kell megtenni*:

1) *az egyik egyenletből kifejezzük az egyik változót a másikon keresztül;*
2) *a kifejezett változó helyett kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenletbe;*
3) *megoldjuk a második lépésben kapott egyváltozós egyenletet;*
4) *a változó megkapott értékét behelyettesítjük az első lépésben kapott kifejezésbe;*
5) *kiszámítjuk a másik változó értékét.*

A felsorolt lépések sorát a két lineáris egyenletet tartalmazó kétváltozós egyenletrendszer behelyettesítő módszerrel való megoldása **algoritmusának** nevezzük.

GYAKORLATOK

1034.° Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 15 - x = 2y, \\ 4x - 3y = 27; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2y - 8, \\ x - 4y = 4; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5y - x = 8, \\ 5x - 4y = 23; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x - y = 6{,}2, \\ 0{,}8x + 3y = 13. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 6y, \\ x + 5y = 88; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 5y = 46; \end{cases}$

1035.° Határozzátok meg az egyenletrendszer megoldását:

1) $\begin{cases} 4x + y = 12, \\ 7x + 2y = 20; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 9y - 2x = -25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x - y = -1, \\ 2x - 3y = -11; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 3y = 0, \\ 15x + 2y = 55. \end{cases}$

1036.• Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} 4x - 3y = 15, \\ 3x - 4y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5y - 6x = 4, \\ 7x - 4y = -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5a - 4b = 3, \\ 2a - 3b = 11; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 5x + 2y = 24; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x + 5y = 1, \\ 8x - 2y = 38; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 8m - 2n = 11, \\ 9m + 4n = 8. \end{cases}$

1037. • Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} 5x+2y=15, \\ 8x+3y=20; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 8p-5q=-11, \\ 5p-4q=-6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x+4y=5, \\ 3x+2y=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6u-5v=-38, \\ 2u+7v=22. \end{cases}$

1038. • Határozzátok meg az egyenletrendszerek megoldását:

1) $\begin{cases} 6-5(x-y)=7x+4y, \\ 3(x+1)-(6x+8y)=69+3y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6y-5x=1, \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{3y-x}{4}=-4\dfrac{3}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=2, \\ 5x-y=34; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1,5x-3}{3}+\dfrac{7-3y}{8}=3, \\ \dfrac{2,5x-2}{3}-\dfrac{2y+1}{6}=x-0,5. \end{cases}$

1039. • Oldjátok meg az egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} 6x+3=5x-4(5y+4), \\ 3(2x-3y)-6x=8-y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8}+\dfrac{x-y}{6}=4, \\ \dfrac{3x+y}{4}-\dfrac{2x-5y}{3}=5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}-\dfrac{y-4}{7}=1, \\ 6y-x=5; \end{cases}$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1040. Számítsátok ki a kifejezés értékét:

1) $m(m-3)(m+3)-(m-2)(m^2+2m+4)$, ha $m=-\dfrac{2}{3}$;

2) $(6m-n)(6m+n)-(12m-5n)(3m+n)$, ha $m=-\dfrac{8}{9}$, $n=\dfrac{3}{4}$.

1041. (*Bolgár folklórból származó feladat.*) Három férfi bement a borbélyhoz. Az miután megnyírta az elsőt, azt mondta: „Nézd meg, mennyi pénz van az asztalfiókban, tegyél oda ugyanannyit és vegyél el 8 leva[1] visszajárót”. Ugyanezt mondta a borbély a másodiknak és a harmadiknak is. Miután mindhárman elmentek, kiderült, hogy a fiókban nincs pénz. Mennyi pénz volt a fiókban azelőtt, mielőtt az első férfi fizetett volna?

[1] Leva – bolgár pénz

1042. A függvény az $y = 6 - kx$ képlettel van megadva. A k milyen értékénél megy át a függvény grafikonja az A (4; –2) ponton?

1043. Bizonyítsátok be, hogy a $2^{4n} - 1$ kifejezés értéke bármilyen n természetes szám esetén maradék nélkül osztható 5-tel.

1044. Határozzátok meg a $2376^3 + 1624^3$ kifejezés értékének három utolsó számjegyét.

1045. a-nak és b-nek 6-tal való osztásakor a maradék 2, illetve 3. Bizonyítsátok be, hogy az ab szorzat maradék nélkül osztható 6-tal.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1046. Határozzátok meg az összes x és y egész számot, amelyek esetében igaz az $x + y = xy$ egyenlőség.

28. Lineáris egyenletrendszerek megoldása egyenlő együtthatók módszerével

Megvizsgálunk még egy módszert, amely lehetőséget ad a két lineáris egyenletből álló kétváltozós egyenletrendszer megoldását visszavezetni az egyváltozós lineáris egyenlet megoldására.

Megoldjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5. \end{cases}$$

Mivel a rendszerben az y együtthatói ellenkező előjelű számok, ezért ahhoz, hogy egyváltozós egyenletet kapjunk, elegendő tagonként összeadni az egyenletek jobb és bal oldalát. A következőt kapjuk:

$$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5;$$
$$6x = 12$$
$$x = 2.$$

Az x értékét a rendszer bármelyik egyenletébe behelyettesíthetjük. Helyettesítjük be az elsőbe. Ekkor:

$$2 \cdot 2 - 5y = 7;$$
$$-5y = 3;$$
$$y = -0{,}6.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása a (2; –0,6) számpár.

A leírt megoldási módot az **egyenlő együtthatók módszerének** nevezzük.

Ez a módszer a következő kijelentésen alapszik: ha a rendszer egyik egyenletét felcseréljük az egyenletek jobb és bal oldalának összeadása után kapott egyenlettel, akkor az így létrejött egyenletrendszernek ugyanazok lesznek a megoldásai, mint az eredeti rendszernek (bizonyítás nélkül fogadjuk el).

A megoldás során a $\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5 \end{cases}$ rendszert a $\begin{cases} 2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5, \\ 2x - 5y = 7 \end{cases}$ rendszerre cseréltük. Megoldunk még egy egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Ha tagonként összeadjuk az egyenletek jobb és bal oldalát, akkor újból kétváltozós egyenletet kapunk. A kapott rendszernél még nem alkalmazhatjuk az egyenlő együtthatók módszerét.

Az első egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk –3-mal. A következő rendszert kapjuk: $\begin{cases} -6x + 9y = -33, \\ 6x + 5y = 19, \end{cases}$ melynek megoldásai azonosak az első rendszer megoldásaival.

Erre a rendszerre már alkalmas az egyenlő együtthatók módszere:

$$-6x + 9y + 6x + 5y = -33 + 19;$$
$$14y = -14;$$
$$y = -1.$$

Az y értékét behelyettesítjük az eredeti egyenletrendszer első egyenletébe:

$$2x - 3 \cdot (-1) = 11;$$
$$2x = 8;$$
$$x = 4.$$

A (4; –1) számpár a keresett megoldás.

Megoldunk egy olyan egyenletrendszert, amelyben mindkét egyenletet elő kell készíteni a módszer alkalmazására:

$$\begin{cases} 7x + 8y = 9, \\ 3x + 5y = 7. \end{cases}$$

Hogy megszabaduljunk az y változótól, az első egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk 5-tel, a második egyenlet mindkét oldalát pedig –8-cal, majd összeadjuk az egyenleteket:

$$\begin{cases} 35x + 40y = 45, \\ -24x - 40y = -56; \end{cases}$$

$$35x + 40y - 24x - 40y = 45 - 56;$$
$$11x = -11;$$
$$x = -1.$$

Behelyettesítve az x értékét az első egyenletbe:

$$-7 + 8y = 9;$$
$$y = 2.$$

Tehát a (–1; 2) számpár az adott egyenletrendszer megoldása.

Hogy az egyenlő együtthatók módszerével oldhassuk meg a lineáris egyenletrendszert, a következő lépéseket kell megtennünk:

1) *kiválasztva a megfelelő együtthatókat, átalakítjuk az egyik, esetleg mindkét egyenletet úgy, hogy az azonos változók melletti együtthatók ellenkező előjelűek legyenek;*
2) *tagonként összeadjuk az első lépésben kapott egyenletek jobb és bal oldalát;*
3) *megoldjuk a második lépésben kapott egyváltozós egyenletet;*
4) *a harmadik lépésben kapott értéket behelyettesítjük az eredeti rendszer valamelyik egyenletébe;*
5) *kiszámítjuk a másik változó értékét.*

GYAKORLATOK

1047.° Oldjátok meg az egyenletrendszert egyenlő együtthatók módszerével:

1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y = 14, \\ 5x - y = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$

4) $\begin{cases} -6x + y = 16, \\ 6x + 4y = 34; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 8x + y = 8, \\ 12x + y = 4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 7x - 5y = 29, \\ 7x + 8y = -10. \end{cases}$

1048.° Oldjátok meg az egyenletrendszert egyenlő együtthatók módszerével:

1) $\begin{cases} 4x - y = 20, \\ 4x + y = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x + 17y = 52, \\ 26x - 17y = 18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -5x + 7y = 2, \\ 8x + 7y = 15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9x - 6y = 24, \\ 9x + 8y = 10. \end{cases}$

1049.• Oldjátok meg az egyenletrendszert egyenlő együtthatók módszerével:

1) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 4x + 9y = 41; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 10x + 2y = 12, \\ -5x + 4y = -6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + 8y = 13, \\ 2x - 3y = 17; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x - 4y = 16, \\ 5x + 6y = 14; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x + 5y = 8; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5u - 7v = 24, \\ 7u + 6v = 2; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 0{,}2x + 1{,}5y = 10, \\ 0{,}4x - 0{,}3y = 0{,}2. \end{cases}$

1050.• Oldjátok meg az egyenletrendszert egyenlő együtthatók módszerével:

1) $\begin{cases} 5x + y = 7, \\ 7x - 4y = -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x - 2y = 16, \\ 8x + 3y = 38; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4a + 6b = 9, \\ 3a - 5b = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x - 5y = 23, \\ 2x - 7y = 13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - 4y = 10, \\ 2x - 3y = -3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 9m - 13n = 22, \\ 2m + 3n = -1. \end{cases}$

1051.• Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} 2(4x - 5) - 3(3 + 4y) = 5, \\ 7(6y - 1) - (4 + 3x) = 21y - 86; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 3, \\ \dfrac{3x}{4} + \dfrac{5y}{6} = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2(2x + 1) + 2{,}5 = 3(y + 2) - 8x, \\ 8 - 5(4 - x) = 6y - (5 - x); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x + 2}{6} - \dfrac{y - 3}{15} = 1, \\ \dfrac{x + 2{,}5}{9} - \dfrac{y + 3}{6} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

1052.• Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} 0{,}2x - 0{,}3(2y + 1) = 1{,}5, \\ 3(x + 1) + 3y = 2y - 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{15x - 3y}{4} + \dfrac{3x + 2y}{6} = 3, \\ \dfrac{3x + y}{3} - \dfrac{x - 3y}{2} = 6. \end{cases}$

1053.• Határozzátok meg az egyenletrendszer megoldását:

1) $\begin{cases} (x - 3)^2 - 4y = (x + 2)(x + 1) - 6, \\ (x - 4)(y + 6) = (x + 3)(y - 7) + 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x - y)(x + y) - x(x + 10) = y(5 - y) + 15, \\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = (x + 4)^2 + (y + 2)^2 - 18. \end{cases}$

1054.• Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} (2x + 1)^2 - (2x - y)(2x + y) = (y + 8)(y - 10), \\ 4x(x - 5) - (2x - 3)(2x - 9) = 6y - 104; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - x(x - 4)(x + 4) = 20 - 20y, \\ (3x - 2)(4y + 5) = 2y(6x - 1) - 58. \end{cases}$

1055.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg az egyenesek metszéspontjának koordinátáit:

1) $y = 2 - 3x$ és $2x + 3y = 7$; 2) $5x + 6y = -20$ és $2x + 9y = 25$.

1056.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg az egyenesek metszéspontjának koordinátáit:

1) $2x - 3y = 8$ és $7x - 5y = -5$; 2) $9x + y = 3$ és $8x + 3y = -10$.

1057.• Az a és b mely értékeinél halad át az $ax + by = 8$ egyenlet grafikonja az $A\ (1; 3)$ és $B\ (2; -4)$ pontokon?

1058.• Az m és n mely értékeinél halad át az $mx - ny = 6$ egyenlet grafikonja a C (2; –1) és D (–6; 5) pontokon?

1059.• Írjátok le a következő pontokon áthaladó $y = kx + b$ egyenes egyenletét:

1) M (2; 1) és K (–3; 2); 2) P (–4; 5) és Q (4; –3).

1060.• Írjátok le a következő pontokon áthaladó $y = kx + b$ egyenes egyenletét:

1) A (3; 2) és B (–1; 4); 2) C (–2; –3) és D (1; 6).

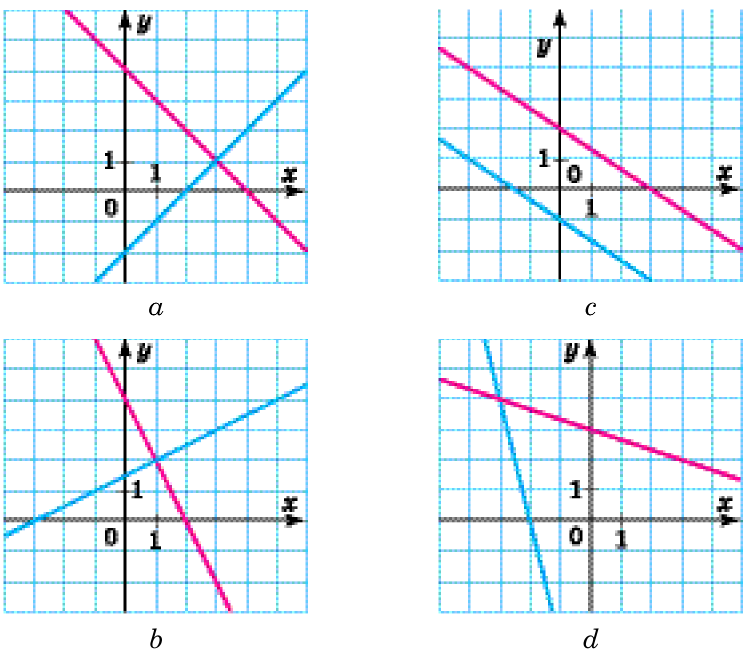
1061.• Létezik-e megoldása az egyenletrendszernek:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x - 4y = 24, \\ x - 2y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 3x + 5y = 1, \\ 5x + 9y = 5? \end{cases}$

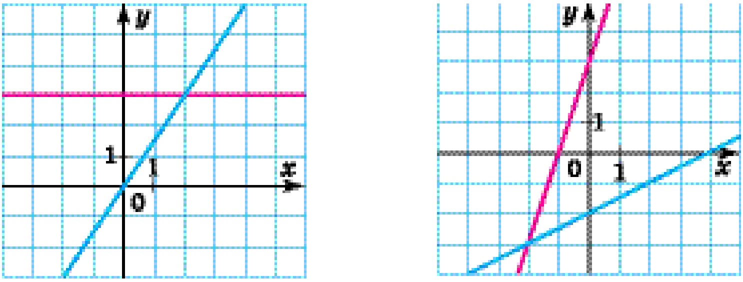
1062.• Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} 6x + 5y = 10, \\ 8x - 5y = 32, \\ 3x + 10y = -7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 2x + y = 7, \\ 4x + y = 14. \end{cases}$

1063.• Írjátok le a 63. ábrán látható grafikonokhoz tartozó kétváltozós lineáris egyenletrendszert.



63. ábra



a *b*

64. ábra

1064.• Írjátok le a 64. ábrán látható grafikonokhoz tartozó kétváltozós lineáris egyenletrendszert.

1065.•• A k együttható milyen értékénél halad át az $y = kx + 2$ egyenes a $3x + 5y = 5$ és $7x - 4y = 43$ egyenesek metszéspontján?

1066.•• Az a milyen értékénél van megoldása az egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} 8x - 7y = 21, \\ 5x - 3y = 20, \\ ax + 2y = 24? \end{cases}$$

1067.•• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x + y)^2 + (x - 3)^2 = 0$;
2) $(x + 2y - 3)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
3) $| x - 3y - 6 | + (9x + 6y - 32)^2 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 0$;
5) $25x^2 + 10y^2 - 30xy + 8y + 16 = 0$.

1068.•• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x - 2y)^2 + (y - 5)^2 = 0$;
2) $(4x + 2y - 5)^2 + | 4x - 6y + 7 | = 0$;
3) $50x^2 + 4y^2 - 28xy + 16x + 64 = 0$.

1069.* Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} = 15, \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{8}{y} = 23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x - 3y} + \dfrac{10}{3x - 2y} = 3, \\ \dfrac{20}{3x - 2y} - \dfrac{15}{2x - 3y} = 1. \end{cases}$

1070.* Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{7}{y} = 6, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 46; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{9}{x + 4y} - \dfrac{6}{5x - y} = -2, \\ \dfrac{3}{x + 4y} + \dfrac{18}{5x - y} = 1. \end{cases}$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1071. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $(a^2 + 1)^2 + (a - 1)(a^2 + 1) - a^2$, ha $a = -2$;

2) $(a - 1)(a^2 + 1)(a + 1) - (a^2 + 1)^2$, ha $a = \frac{1}{2}$.

1072. A matematikaversenyen a résztvevőknek 12 feladatot kellett megoldaniuk. Minden helyesen megoldott feladatért 5 pont járt, a nem megoldottakért pedig levontak 3 pontot. Hány feladatot oldott meg helyesen a résztvevő diák, ha a végén 36 pontot sikerült összegyűjtenie?

1073. (*Német folklórból származó feladat.*) Mennyi idő alatt eszik meg együtt az oroszlán, a farkas és a kutya három bárányt, ha az oroszlán egyedül egy bárányt 1 óra alatt fogyaszt el, a farkas 3 óra alatt, a kutya pedig 6 óra alatt?

1074. Bizonyítsátok be, hogy két, hárommal nem osztható tetszőleges természetes szám négyzetének különbsége maradék nélkül osztható 3-mal.

1075. A gyümölcsösben 90-nél több, de 100-nál kevesebb fa nő. Az összes fa egyharmada almafa, negyede pedig szilva. Hány fa nő a kertben?

1076. Melyik kifejezésnek lesz minden esetben negatív az értéke bármilyen x esetében:

1) $-x^2 - 4x + 6$; 2) $-x^2 + 16x - 64$; 3) $-x^2 + 8x - 18$?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1077. A 101 × 101 méretű táblázat celláiba úgy írták a számokat, hogy az egy oszlopban lévő számok szorzata negatív. Lehetséges-e, hogy azoknak a soroknak a száma, amelyekben a számok szorzata pozitív, 51?

29. Feladatok megoldása lineáris egyenletrendszerek segítségével

Megvizsgálunk néhány olyan feladatot, amelyekben a két egyenletből álló kétváltozós lineáris egyenletrendszert használnak fel valós problémák matematikai modelljeként.

1. PÉLDA Egy ruha és négy szoknya megvarrásához 9 m, míg három ugyanilyen ruha és nyolc ugyanilyen szoknya megvarrásához 21 m anyagot használtak el. Hány méter anyagra van szükség külön-külön egy ruha és egy szoknya megvarrásához?

Megoldás: Tételezzük fel, hogy egy ruhához x m anyagra van szükség, egy szoknyához pedig y m-re. Akkor egy ruhára és 4 szoknyára $(x + 4y)$ m anyag szükséges, ami a feltétel szerint 9 m. Tehát $x + 4y = 9$.

3 ruhához és 8 szoknyához $(3x + 8y)$ m vagy 21 m anyagra van szükség. Tehát $3x + 8y = 21$.

Felállítjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + 4y = 9, \\ 3x + 8y = 21. \end{cases}$$

Miután megoldottuk, a következő eredményt kapjuk: $x = 3$, $y = 1{,}5$. Ez azt jelenti, hogy egy ruha megvarrásához 3 m, míg egy szoknya megvarrásához 1,5 m anyagra van szükség.

Felelet: 3 m, 1,5 m.

2. PÉLDA *A* városból a tőle 264 km-re lévő *B* városba egy motorkerékpáros indult el. 2 ó múlva a *B* városból szembe vele egy kerékpáros indult el, aki 1 ó-val az elindulása után találkozott a motorkerékpárossal. Határozzátok meg mindkettőjük sebességét, ha a motorkerékpáros 2 ó alatt 40 km-rel többet tesz meg, mint a kerékpáros 5 ó alatt.

Megoldás: Legyen a motoros sebessége x km/ó, a kerékpárosé pedig y km/ó. A találkozásig a motoros 3 ó-t volt úton és $3x$ km-t tett meg, a kerékpáros pedig 1 ó-t és y km-t. Összesen 264 km-t tettek meg. Akkor $3x + y = 264$.

A kerékpáros 5 ó alatt $5y$ km-t tesz meg, a motoros pedig 2 ó alatt $2x$ km-t, ami 40 km-rel több, mint $5y$ km. Ezek alapján $2x - 5y = 40$.

A következő egyenletrendszert kaptuk:

$$\begin{cases} 3x + y = 264, \\ 2x - 5y = 40, \end{cases}$$

melynek a megoldása az $x = 80$, $y = 24$ számpár.

Tehát a motorkerékpáros sebessége 80 km/ó, a kerékpárosé pedig 24 km/ó.

Felelet: 80 km/ó, 24 km/ó.

3. PÉLDA A szék és az asztal együtt 680 hrivnyába került. Miután az asztal 20%-kal olcsóbb, a szék pedig 10% drágább lett, együtt 580 hrivnyába kerültek. Határozzátok meg az asztal és a szék eredeti árát.

Megoldás: Legyen az asztal eredeti ára x hrn, a széké pedig y hrn. A feladat feltétele szerint $x + y = 680$.

Az asztal új ára a régi ár 80%-a, ami $0{,}8x$ hrn. A szék új ára a régi ár 110%-a, ami $1{,}1y$ hrn. Akkor $0{,}8x + 1{,}1y = 580$.

A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} x + y = 680, \\ 0{,}8x + 1{,}1y = 580. \end{cases}$$

A megoldás az $x = 560$, $y = 120$ számpár.

Tehát az asztal eredeti ára 560 hrn, a széké pedig 120 hrn.

Felelet: 560 hrn, 120 hrn.

4. PÉLDA Hány gramm 3%-os és hány gramm 8%-os sóoldatra van szükség 500 g 4%-os sóoldat előállításához?

Megoldás: Legyen az első oldatból szükséges mennyiség x g, a másodikból szükséges mennyiség pedig y g. A feltétel szerint $x + y = 500$.

A 3%-os sóoldat $0{,}03x$ g, a 8%-os pedig $0{,}08y$ g sót tartalmaz. Az 500 g 4%-os oldatban $500 \cdot 0{,}04 = 20$ (g) só van. Tehát $0{,}03x + 0{,}08y = 20$. Összeállítjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y = 500, \\ 0{,}03x + 0{,}08y = 20. \end{cases}$$

A rendszer megoldása: $\begin{cases} x = 400, \\ y = 100. \end{cases}$

Vagyis 400 g 3%-os és 100 g 8%-os oldatra van szükség.

Felelet: 400 g, 100 g.

5. PÉLDA Péternek 5 hrivnyás és 20 hrivnyás címletű pénze volt. Azt mondta, hogy 20 db bankjeggyel fizetve vásárolt 255 hrivnyáért egy futball-labdát. Laci viszont azt állítja, hogy ez lehetetlen. Melyiküknek van igaza?

Megoldás: Tételezzük fel, hogy volt x darab 5 hrivnyás és y darab 20 hrivnyás bankjegye. Akkor:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 5x + 20y = 255. \end{cases}$$

A rendszer megoldása a $\left(9\frac{2}{3}; 10\frac{1}{3}\right)$ számpár. Ez nem felel meg a feladat feltételének, mivel a bankjegyek száma csak természetes szám lehet.

Felelet: Lacinak van igaza.

GYAKORLATOK

1078.° Találjatok két olyan számot, melyek összege 63, különbsége pedig 19.

1079.° Találjatok két olyan számot, melyek különbsége 23, a nagyobbik szám kétszeresének és a másik számnak az összege pedig 22.

1080.° (*A. Csehov* Házitanító *c. elbeszéléséből*[1].) A kupec (kereskedő) 138 arsin[2] fekete és kék anyagot vásárolt 540 rubelért. Kérdés: hány arsint vett egyik és másik anyagból, ha a kékből egy arsin 5 rubel, a feketéből pedig 3 rubel?

1081.° A 46 turistából álló csoport 10 csónakon indult vízitúrázni, melyek egy része négy-, másik része hatszemélyes volt. Hány darab volt az egyes fajta csónakokból?

1082.° 4 ló és 12 tehén ellátásához naponta 120 kg szénára van szükség, 3 ló és 20 tehén ellátásához pedig 167 kg-ra. Határozzátok meg egy ló és egy tehén napi szénaadagját.

1083.° Az első napon 2 lánctalpas és egy kerekes traktor 22 ha-t szántott fel, a második napon pedig 3 lánctalpas és 8 kerekes traktor 72 ha-t. Hány hektár földet tud felszántani naponta egy lánctalpas és mennyit egy kerekes traktor?

1084.° Két munkás 135 alkatrészt készített. Az egyik munkás 7 napot dolgozott, a másik pedig 12-t. Hány alkatrészt gyártott le egy-egy munkás naponta, ha az első 3 nap alatt 3 alkatrésszel többet készített el, mint a másik 4 nap alatt?

1085.° A gyümölcsösben két brigád szedte az almát. Az egyik brigád első nap 5 ó-t dolgozott, a másik pedig 4-et. Összesen 40 q almát szedtek. Másnap hasonló teljesítmény mellett az első brigád 3 ó alatt 2 q-val többet szedett, mint a második 2 ó alatt. Hány mázsa almát szedett mindegyik brigád egy óra alatt?

1086.° 6 ceruzakészletért és 5 körzőért 144 hrivnyát fizettek. Mennyibe került egy ceruzakészlet és egy körző, ha 3 ceruzakészlet egy körzőnél 30 hrivnyával drágább?

1087.° 11 füzetért és 8 tollért 49 hrivnyát fizettek. Mennyibe kerül egy füzet és mennyibe egy toll, ha 5 füzet 7 hrivnyával drágább 4 tollnál?

1088.° Kijevből és a tőle 256 km-re lévő Vinnicából egyszerre indult el egymással szemben egy gépkocsi és egy autóbusz, amelyek 2 ó múlva találkoztak. Határozzátok meg mindkét jármű sebességét, ha ismeretes, hogy az autóbusz 2 ó alatt 46 km-rel többet tett meg, mint a gépkocsi 1 ó alatt.

1089.° Két, egymástól 300 km-re lévő állomásról egyszerre indult el egymással szemben egy személy- és egy tehervonat, majd 3 ó múlva találkoztak. Ha a személyvonat 1 ó-val hamarabb indult volna el, mint a tehervonat, akkor a tehervonat indulásától számított

[1] A. Csehov (1860–1904) – neves orosz író.

[2] Arsin – régi hosszmérték, ami 71,12 cm-nek felel meg.

2,4 ó-múlva találkoztak volna. Határozzátok meg a vonatok sebességét.

1090.• A faluból a gyalogos az állomás felé indult. 30 perc múlva ugyanebből a faluból egy kerékpáros is elindult, majd 10 perc múlva utolérte a gyalogost. Határozzátok meg a gyalogos és a kerékpáros sebességét, ha ismeretes, hogy a gyalogos 3 ó alatt 4 km-rel nagyobb utat tesz meg, mint a kerékpáros fél óra alatt.

1091.• Zsitomirból a tőle 536 km-re lévő Odesszába egy gépkocsi indult el. Az indulás után 2,5 ó-val vele szemben Odesszából is elindult egy gépkocsi, majd 2 ó múlva találkozott a másik gépkocsival. Határozzátok meg a gépkocsik sebességét, ha az első 2 ó alatt 69 km-rel kisebb távolságot tesz meg, mint a második 3 ó alatt.

1092.• Két kannában tej volt. Ha az egyik kannából átöntenek 10 l-t a másikba, mindkét kannában azonos mennyiségű tej lesz. Ha a másik kannából öntenek át 20 l-t az elsőbe, akkor abban 2,5-szer több tej lesz. Hány liter tej volt mindegyik kannában?

1093.• Miután a vonat első kocsijába felszállt 4 utas, a második kocsiból pedig 4 leszállt, mindkét kocsiban azonos számú utas lett. Ha az első kocsiba felszállna még 2 utas, a másodikba pedig 24, akkor az első kocsiban 2-szer kevesebben lennének, mint a másodikban. Hány utas volt a kocsikban eredetileg?

1094.• A motorcsónak 3 ó-t a vízfolyás ellen, majd 2,5 ó-t a vízfolyás irányában haladva 98 km-t tett meg. Határozzátok meg a csónak és a vízfolyás sebességét, ha 5 ó alatt a vízfolyás irányában 36 km-rel többet tesz meg, mint 4 ó alatt a vízfolyással szemben.

1095.• A motorcsónak a vízfolyás irányában 5 ó alatt 70 km-rel nagyobb távolságot tesz meg, mint 3 ó alatt a vízfolyással szemben. Határozzátok meg a motorcsónak sebességét állóvízben, valamint a vízfolyás sebességét, ha 9 ó alatt a tavon akkora távolságot tesz meg, mint a vízfolyással szemben 10 ó alatt.

1096.• (*Görög folklórból származó feladat.*) Ballag egymás mellett áruval megpakolva a szamár és az öszvér. A szamár panaszkodik a nehéz teherre, mire az öszvér azt feleli: „Mit panaszkodsz? Ha átveszem az egyik zsákot a hátadról, akkor az én terhem kétszer nehezebb lesz a tiédnél. Ha viszont te veszel el tőlem egy zsákot, akkor mindketten ugyanannyit cipelünk majd.” Mondjátok meg bölcs matematikusok, hány zsákot cipelt a szamár és hányat az öszvér?

1097.• (*Indiai folklórból származó feladat.*) Az egyik azt mondja a másiknak: „Adjál 100 rúpiát és én kétszer gazdagabb leszek nálad.” A másik erre ezt felelte: „Ha te adsz nekem 10 rúpiát, akkor én hatszor leszek gazdagabb nálad.” Mennyi pénze volt mindegyiknek?

1098.• A fiú 6 évvel ezelőtt 4-szer fiatalabb volt az apjánál, 12 év múlva pedig 2-szer lesz nála fiatalabb. Hány éves az apa és a fia?

1099.• A nagymama 6 évvel ezelőtt 9-szer idősebb volt az unokájánál, 4 évvel ezelőtt pedig 7-szer. Hány éves a nagymama és az unokája?

1100.• Két szabóműhelynek 75 öltönyt kellett megvarrni. Mikor az egyik műhely elkészült a rendelés 60%-ával, a másik pedig az 50%-kal, kiderült, hogy az első műhely 12 öltönnyel többet varrt meg, mint a másik. Hány öltönyt kellett megvarrnia mindegyik műhelynek?

1101.• Lacinak és Évának 60 hrivnyája volt. Amikor Laci a pénze $\frac{1}{3}$-ból matematikai feladatgyűjteményt, míg Éva a saját pénze $\frac{1}{6}$-ból helyesírási gyakorlófüzetet vásárolt, kiderült, hogy Laci 1 hrivnyával kevesebbet költött. Mennyi pénzük volt külön-külön a vásárlás előtt?

1102.• 4 kg uborka és 3 kg paradicsom 24 hrivnyába került. Miután az uborka 50%-kal megdrágult, a paradicsom viszont 20%-kal olcsóbb lett, 2 kg uborkáért és 5 kg paradicsomért 25 hrivnyát fizettek. Határozzátok meg 1 kg uborka és 1 kg paradicsom kezdeti árát.

1103.• Ismeretes, hogy 2 doboz festék és 3 doboz alapozó 64 hrivnyába került. Miután a festék 50%-kal olcsóbb lett, az alapozónak pedig 40%-kal felment az ára, 6 doboz festékért és 5 doboz alapozóért 116 hrivnyát fizettek. Mennyibe került eredetileg egy doboz festék és egy doboz alapozó?

1104.• Zoltán 1400 hrivnyát tett be a bankba két különböző számlára. Az egyik számla évi 4%, a másik pedig évi 6% kamatot fizet. A két számlán egy év alatt 68 hrivnya kamat jött össze. Hány hrivnyát tett be Zoltán a bankba mindegyik számlára?

1105.• Tamás 1200 hrivnyát tett a bankba két különböző számlára. Az egyik számla évi 5%-ot, míg a másik évi 7%-ot kamatozik. Egy év múlva az 5%-os számlára 24 hrivnyával több kamatot kapott, mint a másikra. Hány hrivnyát tett Tamás mindegyik számlára?

1106.• Ismeretes, hogy az a szám 60%-a 2-vel több a b szám 70%-ánál, a b szám 50%-a pedig 10-zel több az a szám $\frac{1}{3}$-nál. Határozzátok meg az a és b számokat.

1107.• Tudjuk, hogy az egyik szám 25%-a egyenlő a másik szám 20%-ával, viszont az első szám $\frac{1}{6}$-a 4-gyel kevesebb a második szám 40%-ánál. Határozzátok meg a két számot.

1108.• Van két réz-cink ötvözetünk. Az egyik ötvözetben 9%, a másikban 30% a cink részaránya. Hány kilogramm ötvözetet kell vennünk mind a két fajtából, hogy olyan 300 kg ötvözetet kapjunk, amelyben a cink részaránya 23% ?

1109.• Van két vizes sóoldatunk. Az egyik oldatban 25%-os, a másikban 40%-os a sótartalom. Hány kilogramm oldatot kell összekevernünk mindegyik fajtából, hogy 50 kg 34%-os sóoldatot kapjunk?

1110.• Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 15. Ha megcseréljük a két számjegy helyét, akkor a kezdeti számnál 9-cel kisebb számot kapunk. Határozzátok meg a számot.

1111.• A téglalap kerülete 28 cm. Ha a két szembelévő oldalát 6 cm-rel megnöveljük, a másik kettőt pedig 2 cm-rel csökkentjük, a területe 24 cm^2-rel megnő. Határozzátok meg a téglalap oldalainak hosszát.

1112.• Ha a téglalap mindegyik oldalát növeljük 3 cm-rel, a területe 45 cm^2-rel megnő. Ha viszont a két szemben lévő oldalát megnöveljük 4 cm-rel, a másik kettőt pedig 5 cm-rel csökkentjük, akkor a területe 17 cm^2-rel csökken. Határozzátok meg a téglalap oldalainak a hosszát.

1113.• Az egymástól 45 km-re lévő faluból egymással szemben egyszerre egy kerékpáros és egy gyalogos indult el. 3 ó múlva találkoztak. Ha a kerékpáros a gyalogostól 1 ó 15 perccel hamarabb indult volna el, akkor 2 ó-val a gyalogos elindulása után találkozhattak volna. Milyen sebességgel haladt mindegyikük?

1114.• Az egymástól 24 km-re lévő A és B táborból egymással szemben egyszerre két turista indult el. Elindulásuk után 2 ó-val még nem találkoztak, és a közöttük lévő távolság 6 km volt. Még 2 ó elteltével egyikőjüknek 4 km-rel kevesebbet kellett megtennie a B táborig, mint a másiknak az A-ig. Határozzátok meg a turisták sebességét.

1115.•• A kerékpáros meghatározott sebességgel az előre eltervezett idő alatt ért az A pontból a B pontba. Ha 3 km/ó-val növeli a sebességét, akkor 1 ó-val hamarább ér a B pontba, ha viszont óránként 2 km-rel kevesebbet tett volna meg, akkor 1 ó-val később ér oda. Határozzátok meg a kerékpáros sebességét.

1116.•• A rakományt néhány azonos teherbírású gépkocsi szállította el. Ha minden gépkocsira 1 t-val több terhet raknak, akkor 3 gépkocsival kevesebb is elegendő lett volna. Ha viszont 2 t-val kevesebb a teher, akkor 5 gépkocsival kevesebbre van szükség. Határozzátok meg az elszállított rakomány tömegét.

1117.•• A két állomás közötti távolságot a személyvonat 3 ó-val gyorsabban teszi meg, mint a tehervonat, a gyorsvonat pedig 1 ó-val kevesebb idő alatt, mint a személyvonat. A tehervonat sebessége 25 km/ó-val kisebb a személyvonat sebességénél, a gyorsvonaté pedig 15 km/ó-val nagyobb a személyvonaténál. Határozzátok meg a vonatok sebességét, és az állomások közötti távolságot.

1118.•• Az autóbusz és az iránytaxi menetrend szerint mindennap 8 ó-kor indulnak ki egymással szemben Alsószabadi és Felsőszabadi városokból, majd 8 ó 10 perckor találkoznak. A városok közötti távolság 18 km. Egyik nap az autóbusz menetrend szerint indult el, az iránytaxi viszont némi késéssel 8 ó 9 perckor. Ezért aznap csak 8 ó 15 perckor találkoztak. Határozzátok meg a járművek sebességét.

1119.•• Napvárosból Vidámfalvára 9 ó 5 perckor és 9 ó 45 perckor azonos sebességgel egy-egy autóbusz indult el. Vidámfalváról Napvárosba viszont 9 ó 30 perckor egy kerékpáros indult útnak, és 9 ó 45 perckor találkozott az egyik, majd 10 ó 15 perckor a másik autóbusszal. Határozzátok meg a buszok és a kerékpáros sebességét, ha a két település közötti távolság 36 km.

1120.•• A két anyagból álló keverék tömege 800 g. Miután kiválasztották belőle az egyik anyag $\frac{5}{8}$ részét és a másik anyag 60%-át, az első anyagból 72 g-mal kevesebb maradt a keverékben, mint a másodikból. Hány gramm volt mindkét anyagból a keverékben eredetileg?

1121.•• A réz-cink ötvözetben az utóbbiból 48 kg-mal kevesebb volt, mint rézből. Miután az ötvözetből kinyerték a benne lévő réz $\frac{8}{9}$-ét, valamint a cink 80%-át, az ötvözet tömege 10 kg lett. Hány kilogramm volt mindegyik összetevőből az ötvözetben eredetileg?

1122.•• Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 9, ráadásul a tízesek számjegye nagyobb az egyesekénél. Az adott számnak és számjegyei különbségének a hányadosa 14, a maradék pedig 2. Határozzátok meg az adott számot.

1123.•• Egy kétjegyű szám számjegyeinek különbsége 6, miközben a tízesek számjegye kisebb az egyesekénél. Ha elosztjuk a számot a számjegyei összegével, akkor 3-at kapunk és a maradék 3. Határozzátok meg a keresett számot.

1124.* Az egyik tartályban 12 l, a másikban 32 l víz volt. Ha az első tartályt színültig töltjük vízzel a második tartályból, akkor a második félig üres marad. Ha viszont a második tartályt töltjük színültig az első tartályból, akkor az első tartály $\frac{1}{6}$ része lesz megtöltve. Határozzátok meg a tartályok térfogatát.

1125.* A 40 l és 60 l űrtartalmú edényekben valamennyi víz volt. Ha a nagyobbik edényből vett vízből színültig töltjük a kisebbik edényt, akkor a nagyobbikban a korábban benne lévő víz $\frac{5}{7}$ része marad. Ha viszont a nagyobbik edényt töltjük teli a kisebbik edényből, akkor a kisebbikben az eredetileg benne lévő víz $\frac{5}{14}$-e marad. Hány liter víz volt mindegyik edényben?

1126.* Létezik-e olyan kétjegyű szám, amelyre igaz a következő állítás: a tízesek számjegye 2-vel nagyobb az egyesekénél, a szám és az azonos számjegyekből fordítva felírt szám közötti különbség pedig: 1) 20; 2) 18? Ha létezik, határozzátok meg.

1127.* (*L. Tolsztoj*[1] *feladata*) Kiment a rétre a kaszások csapata. Két területet kellett lekaszálniuk, amelyek közül az egyik kétszer nagyobb a másiknál. Délig az egész csapat a nagyobbik területet kaszálta, majd délben kettéváltak, és a csapat fele ott maradt, a másik fele a kisebbik rétet kezdte kaszálni. Estig a nagyobbik réttel elkészültek, a kisebbikből pedig egy olyan rész maradt, amelyet másnap, egész nap dolgozva, egy ember kaszált le. Hány kaszásból állt a csapat?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1128. A $4\,(0{,}5x - 3) = 3x + *$ egyenlőségbe a csillag helyébe írjatok olyan kifejezést, hogy a kapott egyenletnek:
1) ne legyen gyöke;
2) számtalan gyöke legyen;
3) egy gyöke legyen.

1129. Ábrázoljátok a függvény grafikonját:
1) $y = (2x - 1)\,(4x^2 + 2x + 1) - 8x^3$;
2) $y = (x + 1)\,(x + 4) - (x + 3)^2$;
3) $y = (0{,}5x + 2)^2 - (0{,}5x - 1)\,(0{,}5x + 1)$.

1130. Írjátok le a $12ab$ kifejezést két többtag négyzetének különbségeként. Hány megoldás létezik?

1131. Bizonyítsátok be, hogy az a bármely értékénél az $(a - 3) \times \times (a^2 - a + 2) - a\,(a - 2)^2 + 2a$ kifejezés maradék nélkül osztható 3-mal.

1132. Bizonyítsátok be az azonosságot: $(a - bc)^2 - 2\,(b^2c^2 - a^2) + + (bc + a)^2 = 4a^2$.

---

[1] Lev Tolsztoj (1828–1910) – neves orosz író.

1133. Bontsátok tényezőkre a kifejezést:
1) $4kn + 6ak + 6an + 9a^2$; 3) $y^4(x^2 + 8x + 16) - a^8$;
2) $b^6 - 4b^4 + 12b^2 - 9$; 4) $9x^2 - 6x - 35$.

1134. Ismeretes, hogy $x + y = a$, $xy = b$, $x^2 + y^2 = c$. Határozzátok meg az a, b és c közötti összefüggést.

1135. Az A (2; 3) és B (5; a) pontok az $y = kx$ egyenesen fekszenek. Határozzátok meg az a értékét.

1136. Határozzátok meg az x azon értékét, amelynél az $(a - 1)^2 + 4(a - 1) - x$ kifejezés tényezőkre bontható az összeg négyzetének képlete alapján.

1137. Az $y = ax + 12$ és $y = (3 - a)x + a$ függvények grafikonjai a 2 abszcisszájú pontban metszik egymást. Határozzátok meg a metszéspont ordinátáját.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1138. Bizonyítsátok be, hogy a természetes szám négyzete páratlan számú osztóval rendelkezik.

7. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. A következő számpárok közül melyik az $5x + 3y = 4$ egyenlet megoldása?
A) (2; 1); B) (1; 0); C) (2; –2); D) (–1; 2).

2. Melyik számpár a $2x - 5y = 10$ egyenlet grafikonja és az abszciszszatengely metszőpontjának koordinátája?
A) (0; –2); B) (–2; 0); C) (0; 5); D) (5; 0).

3. Oldjátok meg az $\begin{cases} 5x - 4y = 11, \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$ egyenletrendszert.
A) (3; 1); B) (1; 3); C) (1; 2); D) (2; 1).

4. Oldjátok meg a $\begin{cases} 15x + 2y = 7, \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ egyenletrendszert.
A) (3; –19); B) (1; –4); C) (–5; 41); D) (–1; 11).

5. Legyen az $(a; b)$ számpár az $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása. Határozzátok meg az $a^2 - b^2$ kifejezés értékét.
A) 5; B) –5; C) 3; D) –3.

6. Az a milyen értékénél nincs megoldása a $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ x - ay = -6 \end{cases}$ egyenletrendszernek?
A) 3; B) –3; C) $\frac{1}{3}$; D) $-\frac{1}{3}$.

7. A b milyen értékénél rendelkezik a $\begin{cases} 4x + by = 10, \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ egyenletrendszer végtelen számú megoldással?

A) –6; B) 6; C) 3; D) nem létezik olyan érték.

8. A lineáris függvény grafikonja áthalad az A (1; 4) és B (–2; 13) pontokon. Adjátok meg a függvény képletét.

A) $y = 3x + 1$; B) $y = -3x + 7$; C) $y = -3x + 1$; D) $y = 3x + 7$.

9. Az anya és kislánya együtt 208 derelyét készített, miközben a kislány 2 ó-t, az anyja 3 ó-t dolgozott. 1 ó alatt az anya 16 derelyével többet készít el, mint a lánya.

Tételezzük fel, hogy a kislány 1 ó alatt x derelyét készít, az anyja pedig y-t. Az alábbi egyenletrendszerek közül melyik a feladat matematikai modellje?

A) $\begin{cases} 2x + 3y = 208, \\ x - y = 16; \end{cases}$ C) $\begin{cases} 2x + 3y = 208, \\ y - x = 16; \end{cases}$

B) $\begin{cases} 3x + 2y = 208, \\ x - y = 16; \end{cases}$ D) $\begin{cases} 3x + 2y = 208, \\ y - x = 16. \end{cases}$

10. Két, egymástól 60 km-re lévő városból elindult egy teherautó és egy személygépkocsi. Ha egymással szemben haladnak, akkor 30 perc múlva találkoznak. Ha egy irányban haladnak, a személygépkocsi 3 ó múlva éri utol az teherautót.

Legyen x km/ó a teherautó és y km/ó a személygépkocsi sebessége. Melyik egyenletrendszer felel meg a feladat feltételeinek?

A) $\begin{cases} 0,5x + 0,5y = 60, \\ 3y - 3x = 60; \end{cases}$ C) $\begin{cases} 30x + 30y = 60, \\ 3x - 3y = 60; \end{cases}$

B) $\begin{cases} 30x + 30y = 60, \\ 3y - 3x = 60; \end{cases}$ D) $\begin{cases} 0,5x + 0,5y = 60, \\ 3x - 3y = 60. \end{cases}$

11. A csillár és az asztali lámpa összesen 2000 hrivnyába kerül. Miután a csillár 10%-kal megdrágult, az asztali lámpát pedig 10%-kal leértékelték, együtt 2020 hrivnyába kerültek.

Legyen a csillár eredeti ára x hrn, az asztali lámpáé pedig y hrn. Az alábbi egyenletrendszerek közül melyik a feladat matematikai modellje?

A) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 110x + 90y = 2020; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 0,1x + 0,1y = 2020; \end{cases}$

B) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 1,1x + 0,9y = 2020; \end{cases}$ D) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 0,9x + 1,1y = 2020. \end{cases}$

12. Oldjátok meg az $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 37 = 0$ egyenletet.
A) (6; 1); B) (–6; 1) C) (–6; –1) D) nincs megoldása.

A 4. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

A kétváltozós egyenlet megoldása

Az egyenletet igaz egyenlőséggé alakító változók értékpárját, a kétváltozós egyenlet megoldásának nevezzük.

Megoldani a kétváltozós egyenletet

A kétváltozós egyenletet megoldani annyit jelent, mint megtalálni a megoldásait, vagy bebizonyítani, hogy azok nem léteznek.

A kétváltozós egyenletek tulajdonságai

- Ha az egyenlet jobb és bal oldalához hozzáadjuk (vagy mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot, akkor a kapott egyenletnek is ugyanazok lesznek a megoldásai, mint az eredeti egyenleté.
- Ha valamelyik összeadandót az egyenlet egyik oldaláról átvisszük ellenkező előjellel a másik oldalra, az egyenlet megoldásai nem változnak.
- Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (elosztjuk) ugyanazon számmal, az egyenlet megoldásai nem változnak.

A kétváltozós egyenlet grafikonja

A kétváltozós egyenlet grafikonjának azt a mértani alakzatot nevezzük, amelyik a koordinátasík azon, és csakis azon pontjaiból áll, melyek koordinátái (számpárok) az egyenlet megoldásai.

Kétváltozós lineáris egyenlet

Kétváltozós lineáris egyenletnek nevezzük az $ax + by = c$ alakban felírható egyenletet, ahol x és y változók, a, b és c pedig tetszőleges számok.

A kétváltozós lineáris egyenlet grafikonja

Amennyiben: 1) $b \neq 0$; 2) $b = 0$ és $a \neq 0$ – az $ax + by = c$ egyenlet grafikonja egyenes.

A $0x + 0y = 0$ egyenlet grafikonja a teljes koordinátasík.

A kétváltozós egyenletrendszer megoldása

A kétváltozós egyenletrendszer megoldásának azt a számpárt nevezzük, amelyik mindegyik egyenletet igaz egyenlőséggé alakítja.

Egyenletrendszerek megoldása behelyettesítő módszerrel

1) Az egyik egyenletből kifejezzük az egyik változót a másikon keresztül;
2) a kifejezett változó helyett kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenletbe;
3) megoldjuk a második lépésben kapott egyváltozós egyenletet;
4) a változó megkapott értékét behelyettesítjük az első lépésben kapott kifejezésbe;
5) kiszámítjuk a másik változó értékét.

Egyenletrendszerek megoldása egyenlő együtthatók módszerével

1) Kiválasztva a megfelelő együtthatókat, átalakítjuk az egyik, esetleg mindkét egyenletet úgy, hogy az azonos változók melletti együtthatók ellenkező előjelűek legyenek;
2) tagonként összeadjuk az első lépésben kapott egyenletek jobb és bal oldalát;
3) megoldjuk a második lépésben kapott egyváltozós egyenletet;
4) a harmadik lépésben kapott értéket behelyettesítjük az eredeti rendszer bármelyik egyenletébe;
5) kiszámítjuk a másik változó értékét.

A 7. OSZTÁLYOS ALGEBRA ISMÉTLÉSI FELADATAI

1139. Töltsétek ki a táblázatot:

a	–2	–1	–0,5	0	0,5	1	2
$a^3 - a^2$							
$a^4 + a^2$							

1140. Adjátok meg hatványként.

1) $(a^8)^4$; 4) $(a^5)^5$; 7) $a^6a^6a^6$; 10) $(a^4)^5 : a^7$;

2) a^8a^4; 5) $a^2a^3a^4$; 8) $(a^6a^6)^6$; 11) $(a^2)^9 : (a^6)^3$;

3) a^5a^5; 6) $(a^2)^3\, a^4$; 9) $(a^6)^6\, a^6$; 12) $(a^8a^7) : a^{14}$.

1141. Az x milyen értékénél igaz az egyenlőség:

1) $5^x \cdot 5^6 = 5^{24}$; 2) $(3^m)^x = 3^{5m}$; 3) $2^x \cdot 2^m = 2^{6m}$; 4) $(4^x)^{3m} = 4^{6m^2}$,

ahol m természetes szám?

1142. Azonosságok-e a kifejezések:

1) $-a^2$ és $(-a)^2$; 4) $9a \cdot a^2$ és $(3a)^2 \cdot a$;

2) $-a^3$ és $(-a)^3$; 5) $(a^4)^3$ és $(a^2)^6$;

3) $(a^3)^2$ és a^5; 6) $(2a)^3 \cdot (0{,}5a)^2$ és $2a^4a$?

1143. Adjátok meg hatványként, és számítsátok ki:

1) $81 \cdot 3^2$; 2) $4^3 \cdot 8^2$; 3) $100^2 \cdot 1000^3$.

1144. Hasonlítsátok össze:

1) $15^5 \cdot 2^6$ és $2^5 \cdot 15^6$; 2) $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4$ és $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3$.

1145. Hasonlítsátok össze:

1) 10^{20} és 101^{10}; 2) 10^{15} és 9990^5.

1146. Egyszerűsítsétek le:

1) $4a \cdot (-3ab)$; 5) $-14b^2c^2d^4 \cdot 1\frac{2}{7}b^6d^3$;

2) $-2m^2 \cdot 0{,}1m^4n \cdot (-5n^3)$; 6) $\frac{4}{9}a^4c \cdot (-12a^2c^3) \cdot 1{,}8a^4b^6$;

3) $0{,}3a^2b^4 \cdot 1{,}2a^4b$; 7) $3x^6 \cdot (-4x^2y)^2$;

4) $-6x^3y^6 \cdot 1{,}5xy$; 8) $(-xy)^3 \cdot (-2x^2y^2)^4$.

1147. Adjátok meg az A egytagot B^n alakban, ahol B egytagú kifejezés, ha:

1) $A = a^6b^9$, $n = 3$; 3) $A = 81a^2b^4c^8$, $n = 2$;

2) $A = 32a^{10}$, $n = 5$; 4) $A = -8a^{12}b^{18}$, $n = 3$.

1148. Egyszerűsítsétek le:

1) $4a^3ab - 6a^2b^3b^3 - 5ab \cdot 3a + 7a^3b \cdot 0{,}2b^4$;

2) $11m^2 \cdot 2mn - 9mn \cdot 6mn^3 + 10mnm$;

3) $8xx^4x \cdot \left(-\frac{1}{4}xy\right) + 18xy \cdot \frac{7}{9}yx^5$;

4) $9x^3xy^2 - 8xy^2y^8 + 12x^2y \cdot 4y - 0{,}4xy^3 \cdot 6x^3y^2$.

1149. Határozzátok meg a többtagok összegét és különbségét:

1) $2{,}8b - 0{,}75b^2$ és $\frac{1}{4}b^2 - 1\frac{4}{5}b$; 2) $1\frac{2}{7}x^2 + 2\frac{4}{9}y$ és $2\frac{3}{14}x^2 - 1\frac{1}{6}y$.

1150. Bizonyítsátok be, hogy a $3x^2 - 9x - (8 - 5x^2 - (9x - 8x^2))$ kifejezés értéke független a változótól.

1151. Milyen többtagot kell az $a^4 - b^4 + a^3 - b^3 - 3ab$ többtaghoz hozzáadni, hogy összegük $b^4 + 2ab$ -val legyen egyenlő?

1152. Milyen többtagot kell kivonni a $3c^5 - 2c^4 + 14c^3 - 4c^2 + c$ többtagból, hogy különbségük $5c^3 + c^2 - 7c$ -vel legyen egyenlő?

1153. Milyen többtagot kell hozzáadni az $m^3 - m^2n + mn^2 - n^4$ többtaghoz, hogy összegük 5 legyen?

1154. Létezik-e az x-nek és y-nak olyan értéke, melyeknél a $-4x^2 - 12xy + 7y^2$ és $6x^2 + 12xy - 5y^2$ többtagok egyszerre negatív értéket vesznek fel?

1155. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $2a(3a - 5) - 4a(4a - 5)$, ha $a = -0{,}2$;

2) $7ab(2a - 3b) + 2a(3ab + 10b^2)$, ha $a = -3$, $b = 5$;

3) $2a^4(3a^2 + a - 8) - 6a^6$, ha $a = -1$.

1156. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $\frac{3x-1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{5-2x}{9}$;

2) $\frac{3x+1}{2} - \frac{5x}{4} = \frac{3-2x}{3}$;

3) $\frac{x+5}{8} - \frac{1+x}{2} = \frac{2x+1}{3}$;

4) $\frac{2x}{3} - \frac{2x+1}{6} = \frac{3x-9}{4}$;

5) $\frac{9x-7}{4} - \frac{9x+13}{8} = \frac{3-x}{2}$;

6) $\frac{6x+7}{6} + \frac{5x-8}{9} = 3$.

1157. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $3x(4x - 1) - 6x(1{,}5 + 2x) = 4{,}8$;

2) $0{,}2x(5x - 8) + 3{,}6 = x(x - 0{,}7)$;

3) $x(9x - 4) - 3x(3x - 1) = 8 - x$;

4) $18x^2 - 6x(3x + 2) = -12x$.

1158. Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $-0{,}2x^3(2{,}5x - 4)(6 - x^2) = 0{,}5x^6 - 0{,}8x^5 - 3x^4 + 4{,}8x^3$;

2) $(a - 2)(a^2 + 3a - 18) = (a - 3)(a^2 + 4a - 12)$.

1159. Az a milyen értéke mellett lesz az

$$(5x + a)(x - 2) = 5x^2 - 7x - 2a$$

egyenlőség azonosság?

1160. Milyen értéket kell behelyettesíteni a b helyett, hogy a

$$(3x + b)(x + 3) = 3x^2 + 5x + 3b$$

egyenlőség azonosság legyen?

1161. Adjátok meg szorzat alakjában:

1) $\frac{1}{2}a^6 - \frac{1}{4}a^4b$;

2) $5m^2n^3k^4 + 35m^4n^3k^2$;

3) $x^3y^2z^5 - 2xy^5z^3 + 3x^2y^3z$;

4) $a^{2n}b^{3n} - a^nb^{4n}$,

ahol n természetes szám.

1162. Számítsátok ki a többtagú kifejezés értékét a közös tényező kiemelésével:

1) $a^2 + 4{,}72a - 32{,}8$, ha $a = 5{,}28$;

2) $12{,}3x - 12{,}3y + 4{,}7$, ha $x = 8{,}14$, $y = 8{,}04$.

1163. Számítsátok ki a többtagú kifejezés értékét a közös tényező kiemelésével:

1) $2{,}49 \cdot 1{,}35 - 1{,}35 \cdot 1{,}84 + 1{,}35^2$;

2) $0{,}25^2 \cdot 1{,}6 + 0{,}25 \cdot 1{,}6^2 - 0{,}25 \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}85$;

3) $3{,}24 \cdot 18{,}7 - 3{,}24 \cdot 16{,}4 + 2{,}3 \cdot 6{,}76$;

4) $5{,}12 \cdot 9{,}76 + 5{,}12 \cdot 5{,}36 - 5{,}12^2$.

1164. Bizonyítsátok be, hogy:

1) $17^3 + 17^2 - 17$ osztható 61-gyel;

2) $25^4 - 125^2$ osztható 40-nel;

3) $6^6 - 18^3$ osztható 42-vel;

4) $5 \cdot 2^{962} - 3 \cdot 2^{961} + 2^{960}$ osztható 60-nal.

1165. Bizonyítsátok be, hogy:

1) $\overline{abba}$ maradék nélkül osztható 11-gyel;

2) $\overline{aaabbb}$ maradék nélkül osztható 37-tel;

3) $\overline{ababab}$ maradék nélkül osztható 7-tel;

4) $\overline{abab} - \overline{baba}$ maradék nélkül osztható 9-cel és 10-zel.

1166. Az a milyen értékénél lesz az

$$(x + 2)(x - 4) - (x - 2)(x + 4) = ax$$

egyenletnek végtelen számú gyöke?

1167. Az a milyen értékénél nincs megoldása a

$$(3x - 1)(x + a) = (3x - 2)(x + 1)$$

egyenletnek.

1168. Adjátok meg szorzat alakjában:

1) $xm - xn + ym - yn$;

2) $3a - 3b + ac - bc$;

3) $9a - ab - 9 + b$;

4) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;

5) $6ab^2 - 3b^2 + 2a^2b - ab$;

6) $2c^3 - 5c^2d - 4c + 10d$;

7) $x^3y^2 - x + x^2y^3 - y$;

8) $ax^2 - ay - cy + bx^2 + cx^2 - by$.

1169. Számítsátok ki:

1) $1{,}66^2 + 1{,}66 \cdot 4{,}68 + 2{,}34^2$; 2) $1{,}04^2 - 1{,}04 \cdot 1{,}28 + 0{,}64^2$.

1170.* Az a, b, c és d milyen értékénél igaz az $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ad} \cdot \overline{cb}$ egyenlőség?

1171. Hozzuk egyszerűbb alakra:

1) $6x^2 + (2y - 3x)(2y + 3x)$;

2) $(a + 2)(a - 3) - (4 - a)(a + 4)$;

3) $(5 - 2x)(5 + 2x) - (3 - 2x)(4 - 2x)$;

4) $(2ab + 1)(2ab - 1)(16a^4b^4 + 1)(4a^2b^2 + 1)$.

1172. Számítsátok ki az $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ képlet felhasználásával:

1) $19 \cdot 21$; 2) $98 \cdot 102$; 3) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{3}$; 4) $7{,}9 \cdot 8{,}1$.

1173. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $4x(7 + 9x) - (6x + 5)(6x - 5) = 39$;

2) $(x - 8)(x + 10) - (x + 7)(x - 7) = 5x - 31$.

1174. Bizonyítsátok be, hogy az

$$(a + b - c)(a - b) + (b + c - a)(b - c) + (c + a - b)(c - a)$$

kifejezés értéke azonosan egyenlő 0-val.

1175. Számítsátok ki:

1) $43^2 - 23^2$; 2) $256^2 - 244^2$; 3) $7{,}2^2 - 2{,}8^2$.

1176. Számítsátok ki:

1) $\dfrac{39^2 - 33^2}{24^2 - 12^2}$; 2) $\dfrac{5{,}3^2 - 1{,}7^2}{2{,}65^2 - 0{,}85^2}$.

1177. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $36x^2 - (3x - 27)^2 = 0$; 2) $(4x - 7)^2 - (2x + 17)^2 = 0$.

1178. Bizonyítsátok be, hogy bármilyen természetes n esetén a kifejezés értéke:

1) $(4n + 19)^2 - (3n - 5)^2$ maradék nélkül osztható 7-tel;

2) $(2n + 5)^2 - (2n - 3)^2$ maradék nélkül osztható 16-tal.

1179. Bizonyítsátok be, hogy bármilyen természetes n esetén az $(n^2 - 3n + 1)^2 - n^4 - 8n^2 + 3n + 5$ kifejezés értéke osztható 6-tal.

1180. Bizonyítsátok be, hogy bármilyen természetes n esetén a $16n^4 - (4n^2 - 2n - 1)^2 + 8n + 1$ kifejezés értéke osztható 4-gyel.

1181. Az a milyen értékénél lesz az $(a - 3)(a + 5)x = a^2 - 9$ egyenletnek:

1) végtelen számú gyöke; 2) nem lesz gyöke; 3) egy gyöke?

1182. Számítsátok ki az összeg vagy a különbség négyzetének képlete segítségével:

1) 69^2; 3) 52^2; 5) 299^2;

2) 91^2; 4) 97^2; 6) $10{,}2^2$.

1183. Mennyivel nagyobb a $(3a^2 - 2)^2 - (3a^2 - 1)(3a^2 + 1) + 12a^2$ kifejezés értéke 2-nél?

1184. Bizonyítsátok be, hogy nem létezik olyan természetes n szám, amellyel a $(8n + 5)(2n + 1) - (4n + 1)^2$ kifejezés értéke maradék nélkül osztható 5-tel.

1185. Létezik-e olyan természetes n szám, amellyel a $(2n - 3) \times$ $\times (2n + 3) - (n + 3)^2$ kifejezés nem osztható maradék nélkül 3-mal?

1186. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $3(x-7)^2 - 2(x+7)(x-2) = (x+11)(x-4) + 101$;

2) $2x(x+3)^2 - 3x(x-1)(x+8) = x^2(-x-9) + 21$;

3) $y(2y-5)(2y+5) - 4y(y+6)^2 = 13 - 48y^2$.

1187. Adjátok meg kéttag négyzeteként:

1) $(a + 4)^2 - 2(a + 4) + 1$; 3) $(3y + 8)^2 + (4y + 6)^2 + 4y$;

2) $(3b + 2)^2 + 4(3b + 2) + 4$; 4) $(x - 5y)^2 + (x + 12y)^2 - x(x - 12y)$.

1188. A $4a^2 - 6ab + 9b^2$ háromtagú kifejezéshez milyen egytagú kifejezést kell hozzáadni, hogy az összeg felbontható legyen a kéttag négyzetének képlete alapján? Találjatok három ilyen egytagú kifejezést.

1189. Bizonyítsátok be, hogy az egyenletnek nincs gyöke:

1) $x^2 - 8x + 18 = 0$; 2) $x^2 + x + 1 = 0$.

1190. Adjátok meg szorzat alakjában:

1) $\frac{1}{64}a^3 - b^6$; 3) $x^{21}y^{24} - m^{12}n^{15}$;

2) $a^3b^6c^9 + 8$; 4) $a^6b^6 + 1$.

1191. Mennyivel kisebb a $27a^3 + 4 - (9a^2 - 3a + 1)(3a + 1)$ kifejezés értéke 10-nél?

1192. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 24x$;

2) $(3 - 2x)(9 + 6x + 4x^2) - 2x(5 - 2x)(5 + 2x) = 7$.

1193. Osztható-e maradék nélkül a $37^3 + 23^3$ kifejezés értéke 60-nal?

1194. Osztható-e maradék nélkül a $654^3 - 554^3$ kifejezés értéke 200-zal?

1195. Adjátok meg szorzat alakjában:

1) $(a - b)(a + b) - c(c - 2b)$; 2) $(b - c)(b + c) - a(a + 2c)$.

1196. Az adott négy kifejezésből csak három adható meg szorzat alakjában. Keressétek meg ezeket a kifejezéseket, és adjátok meg szorzat alakjában.

1) $9mx - 6nx + 6my - 4ny$; 3) $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 5$;

2) $36x^2 - 24x + 4 - y^2$; 4) $4a + 3 + a^2 + 2b - b^2$.

1197. Adjátok meg négy tényező szorzataként:

1) $a^5 - a^4 - 16a + 16$;

2) $a^{2n}b^{2n} - b^{2n} - a^{2n} + 1$, ahol n – természetes szám.

1198. Számítsátok ki:

1) $1{,}87^2 - 1{,}13^2 + 6 \cdot 1{,}13$; 3) $0{,}79^3 + 3 \cdot 0{,}79 \cdot 0{,}21 + 0{,}21^3$.

2) $1{,}628^3 - 1{,}2 \cdot 1{,}628 \cdot 1{,}228 - 1{,}228^3$;

1199. Bizonyítsátok be, hogy a $17^{10} - 3 \cdot 7^{24} + 3 \cdot 7^{25} + 17^9$ kifejezés értéke maradék nélkül osztható: 1) 18-cal; 2) 36-tal.

1200. Bizonyítsátok be, hogy egy természetes szám köbének és magának a számnak a különbsége a 6 többszöröse.

1201. Bizonyítsátok be, hogy három egymást követő természetes szám szorzatának és a középső számnak az összege a középső szám köbével egyenlő.

1202. Legyen $x + y = a$, $xy = b$. Bizonyítsátok be az egyenlőségeket:

1) $x^2 + y^2 = a^2 - 2b$;

2) $x^3 + y^3 = a^3 - 3ab$;

3) $x^4 + y^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$.

1203.* Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges természetes n szám esetén az $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ kifejezés értéke egy természetes szám négyzetével egyenlő.

1204.* Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges természetes n szám esetén az $n(n + 2)(n + 4)(n + 6) + 16$ kifejezés értéke egy természetes szám négyzetével egyenlő.

1205.* Bizonyítsátok be, hogy a 3-mal nem osztható természetes szám négyzete és az 1 közötti különbség a 3 többszöröse.

1206.* Bizonyítsátok be, hogy bármilyen természetes, 5-tel nem osztódó n szám esetén az $n^4 - 1$ kifejezés maradék nélkül osztható 5-tel.

1207.* Igaz-e az állítás, miszerint az $n^3 + 2n$ kifejezés értéke tetszőleges természetes n szám esetén a 3 többszöröse?

1208.* Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges n természetes szám esetén az $n^7 - n$ kifejezés értéke a 42 többszöröse.

1209. Adott az $f(x) = x^2 - 2x$ és $g(x) = \frac{x-2}{x}$ függvény. Hasonlítsátok össze:

1) $f(2)$ és $g(-1)$; 2) $f(0)$ és $g(2)$; 3) $f(1)$ és $g(1)$.

1210. A függvényt táblázat segítségével adták meg.

x	5	3	1	–1	–3
y	3	1	–1	–3	–5

Írjátok le a függvényt utasítással és képlettel.

1211. Minden pozitív argumentum esetén az f függvény értéke –1, minden negatív argumentum esetén pedig 1, $f(0) = 0$. Ábrázoljátok az f függvény grafikonját.

1212. Határozzátok meg az $y = 6x - 5$ függvény grafikonjának azon pontjait, melyeknek:
1) azonos az abszcisszája és ordinátája;
2) koordinátáinak összege 30.

1213. Az a milyen értékénél megy át a függvény grafikonja az M (3; –2) ponton:
1) $y = ax - 8$; 2) $y = \frac{1}{3}x - a$?

1214. Melyik függvény lineáris:
1) $f(x) = (x - 1)(x + 1) - x(x - 3)$;
2) $f(x) = (2x - 3)^2 - (x + 4)(x - 2)$;
3) $f(x) = (x + 3)^2 - x(x + 6)$?
Ábrázoljátok a lineáris függvény grafikonját.

1215. Az $y = (5 - a)x + a$ és $y = ax + 2$ függvények grafikonjai metszéspontjának abszcisszája –3. Határozzátok meg a metszéspont ordinátáját.

1216. Ábrázoljátok az $y = 2x + 3$ függvény grafikonját, majd a függvény segítségével határozzátok meg az argumentum azon értékét, amelynél a függvény:
1) egyenlő 5-tel; 3) kisebb 5-nél;
2) nagyobb 5-nél; 4) nagyobb –3-nál, de kisebb 7-nél.

1217. Az $y = 12x - 6$ grafikon megrajzolása nélkül határozzátok meg a koordinátáit:
1) a grafikon és a koordinátatengelyek metszéspontjainak;
2) az adott függvény és az $y = 6x + 24$ függvény grafikonja metszéspontjának.

1218. Ábrázoljátok a függvény grafikonját:
1) $y = |x| - 3$; 2) $y = |x - 3|$.

1219. Az a milyen értékénél lesz az (a; $-a$) számpár az egyenletek megoldása:
1) $6x + 5y = 7$; 3) $x^2 - 3y = 0$;
2) $8x - 2y = 4$; 4) $x + |y| = -2$?

1220. Ábrázoljátok az $y + 1{,}5x = c$ egyenlet grafikonját, ha ismeretes, hogy áthalad az A (–2; 1) ponton.

1221. Állítsatok fel olyan két lineáris kétváltozós egyenletből álló egyenletrendszert, melynek megoldása a következő számpár: 1) (1; 1); 2) (–3; 5).

1222. Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} 3x + 7y = 1, \\ 6y - 5x = 16; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3(2a - 1) + 6(7 - b) = 51, \\ 2(a + 6) - 7(1 + 6b) = 49; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 5y = 19, \\ 2x + 3y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{3x - 2y}{4} - \dfrac{4x + 5}{3} = -5, \\ \dfrac{6x - 5y}{2} + \dfrac{2x + y}{5} = 9. \end{cases}$

1223.* Az a milyen értékénél lesz az $x + y$ kifejezés értéke a legkisebb, ha:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8, \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$$

1224.* Az a milyen értékénél lesz az $x - y$ kifejezés értéke a legkisebb, ha:

$$\begin{cases} x - 5y = a^2 + 10a + 1, \\ 4x + y = 4a^2 - 2a + 4? \end{cases}$$

1225. A 7. osztály tanulói kirándulásra készülődtek. Ha minden tanuló 12 hrn 50 kop-t ad be, akkor 100 hrn még hiányzik a kiránduláshoz szükséges összegből; ha mindenki 16 hrivnyát fizet be, akkor 12 hrn többlet keletkezik. Hány tanuló van az osztályban?

1226. A 100 m hosszú körvonalon két test mozog. Ha egy irányban mozognak, 20 mp-ként találkoznak, ha ellentétes irányban, akkor 4 mp-ként. Mennyi a testek sebessége?

1227. Összeolvasztottak két tömböt. Az egyiknek a tömege 105 g volt és 40% rezet tartalmazott. A másik tömege 75 g. Határozzátok meg a másik tömb réztartalmát, ha a kapott ötvözet 50% rezet tartalmaz.

1228. Hány gramm 4%-os és hány gramm 10%-os sóoldatra van szükség 180 g 6%-os sóoldat előállításához?

1229. Az egyik kannában 3%-os zsírtartalmú tej, a másikban 18%-os zsírtartalmú tejszín van. Hány liter tejre és tejszínre van szükség 10 liter 6%-os tej előállításához?

1230. Az egyik mezőről 40 q árpát takarítottak be hektáronként, a másikról pedig 35 q-t. Összesen 2600 q árpát takarítottak be. A következő évben az első mező terméshozama 10%-kal, a másodiké pedig 20%-kal növekedett. Ennek köszönhetően a két mezőről 400 q-val több árpát sikerült begyűjteni, mint az elmúlt évben. Határozzátok meg a mezők területét.

1231. Az egyik mezőről 45 q búzát takarítottak be hektáronként, a másikról pedig 40 q-t. Összesen 1900 q búzát takarítottak be. A következő évben a szárazság következtében csökkent a mezők terméshozama: az elsőé 20%-kal, a másodiké pedig 15%-kal. Ennek köszönhetően a két mezőről 330 q-val kevesebb búzát sikerült begyűjteni, mint az elmúlt évben. Határozzátok meg a mezők területét.

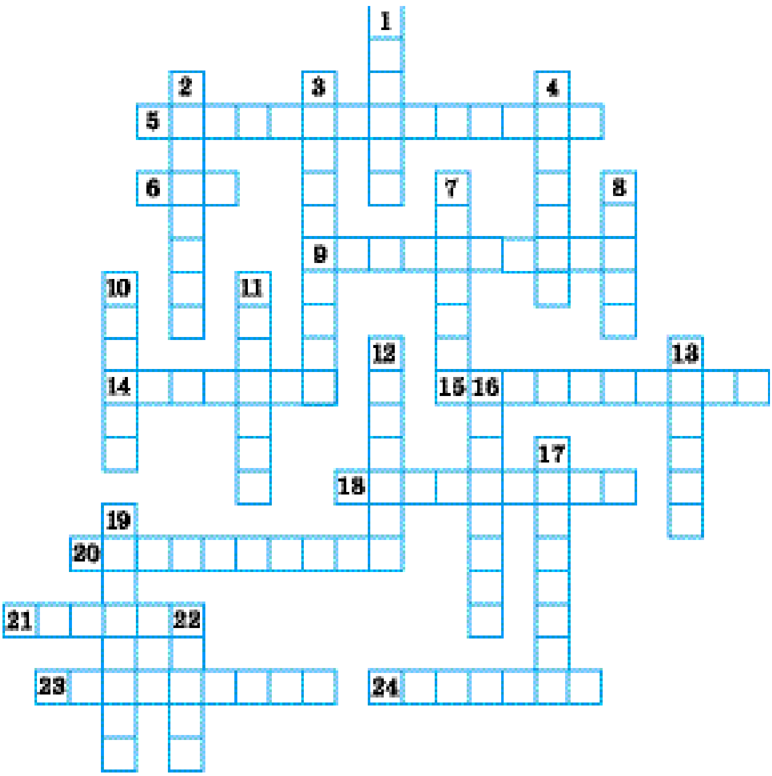
1232. A cukorkák felét 500 g-os csomagokba mérték szét, a másik felét pedig 300 g-osokba. Így 32 csomagot kaptak. Mennyi cukorka volt összesen?

1233. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 11. Ha a számhoz hozzáadunk 63-at, akkor ugyanolyan számjegyekből álló számot kapunk, csak fordított sorrendben. Határozzátok meg az eredeti kétjegyű számot.

1234. Egy kétjegyű számhoz balról és jobbról is 1-est írtak. Az így kapott szám 21-szer lett nagyobb az eredetinél. Határozzátok meg az eredeti kétjegyű számot.

1235. Két szám összege 28, négyzetük különbsége pedig 112. Határozzátok meg a számokat.

1236. Fejtsétek meg a keresztrejtvényt:



По горизонталі: **5.** Функція пряма ... . **6.** Третій степінь числа. **9.** Усі значення, яких набуває аргумент функції, утворюють область ... . **14.** Правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної. **15.** Рівність, правильна при будь-яких значеннях змінних. **18.** Вираз, який є сумою кількох одночленів.

20. Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді. **21.** Французький математик, на честь якого названо сучасну систему координат. **23.** Речення, яке розкриває сутність нового терміна. **24.** Мухаммед ібн Муса аль-... .

По вертикалі: **1.** Розв'язок рівняння. **2.** Незалежна змінна. **3.** Розкладання многочлена на множники методом ... . **4.** Добуток рівних множників. **7.** Другий степінь числа. **8.** Графік лінійної функції. **10.** Геометрична фігура, яка складається з усіх тих és тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу функції, а ординати — відповідним значенням функції. **11.** Одна з координат точки на площині. **12.** Вісь ... . **13.** У виразі 7^4 число 7 — ... степеня. **16.** Вираз, який є добутком чисел, змінних та їхніх степенів. **17.** Термін, яким позначають процес, що дозволяє за скінченну кількість кроків отримати розв'язок задачі. **19.** У виразі a^n змінна n — ... степеня. **22.** Геометрична фігура, яка є графіком рівняння $x^2+(y-1)^2=0$.

BARÁTKOZUNK A SZÁMÍTÓGÉPPEL

Olyan informatikai elemeket tartalmazó feladatokat ajánlunk a figyelmetekbe, amelyeket a témák elsajátítása közben számítógéppel is meg tudtok oldani. Egyes feladatok a könyvben található gyakorlatok folytatásai (azokat a tankönyvben ikonnal jelöltük).

Az informatikaórákon megismerkedtetek a programozás alapjaival. A programozásban a fő mozzanat – összeállítani a feladatok megoldásának algoritmusát, vagyis a műveletek sorrendjét, aminek a segítségével a bemenő adatokból kimenő adatok lesznek, vagyis megszületik a *Megoldás*. Több feladatot fogalmaztunk meg az algoritmusok összeállítására. Ezeket nem kötelező mindenkinek megoldani, elsősorban azoknak szól, akik érdeklődnek az informatika iránt. Ha megtanultok egy programozási nyelvet, akkor nemcsak algoritmust tudtok majd összeállítani, hanem a megoldás meghatározására szolgáló programot is meg tudjátok írni. Ha érdeklődtök a programozás iránt, igyekezzetek megoldani a felkínált feladatokat, noha vannak közöttük eléggé nehezek is, amelyeket csillaggal jelöltünk. Azokat elvégezhetitek a szünidőben is.

1. pont. ***Bevezetés az algebrába***

Hogyan használják a változókat a programozás során? Miért lehetséges a változók használatával nemcsak egyetlen feladat, hanem hasonló feladatok teljes sorának a megoldása?

Tudjátok meg, milyen programozási nyelvet fogtok tanulni. Hogyan használhatók fel ebben a nyelvben a változók? Hogyan állíthatók össze számkifejezések?

Tudunk-e minden esetben változóval osztani? Hogyan kell ezt szem előtt tartani a program írásakor?

2. pont. ***Egyváltozós lineáris egyenlet***

Írjatok olyan algoritmust, amelyben az a és b értéke a bemeneti adat, a kimeneti pedig az $ax = b$ lineáris egyenlet megoldása. Milyen lehetőségeket kell szem előtt tartani, hogy az algoritmus helyes választ eredményezzen tetszőleges a és b esetén?

3. pont. ***Feladatok megoldása egyenletek segítségével***

Az itt szereplő feladatok némelyike hasonló. Ez azt jelenti, hogy a matematikai modelljük azonos.

Keressetek ilyen feladatokat. Állítsátok fel a matematikai modelljüket, és írjátok le a megoldás algoritmusát. Milyen mennyiségek lesznek a bemeneti és milyenek a kimeneti adatok?

4. pont. ***Azonos kifejezések. Azonosság***

Bebizonyítható-e számítógéppel az azonosság, végigpróbálva a változó összes lehetséges értékét, és kiszámítva külön a bal és jobb oldali kifejezés értékét?

5. pont. ***Természetes kitevőjű hatvány***

Írjatok olyan algoritmust, melyben a bemeneti adat a hatvány a alapja és n kitevője, a kimeneti pedig az a alap n kitevőjű hatványa. A kitevő milyen értékére kell különös figyelmet fordítani?

6. pont. ***A természetes kitevőjű hatvány tulajdonságai***

Írjatok a hatvány egyik tulajdonságát bemutató programot.

7. pont. ***Egytagú kifejezések***

Az általatok tanult programozási nyelvben hogyan írják le az egytagú kifejezéseket? Számokon és változókon kívül mire van még szükség? Mi az alapvető különbség az egytagok felírásában a matematikában és az informatikában?

Gondoljatok ki valamilyen egytagú kifejezést. Írjatok programot az értékének kiszámítására. Melyek lesznek a bemeneti, és melyek a kimeneti adatok?

8. pont. ***Többtagú kifejezések***

Az általatok tanult programozási nyelvben hogyan írják fel a többtagú kifejezést?

Gondoljatok ki valamilyen többtagot. Írjatok programot az értékének kiszámítására.

A többtag kifejezés. A matematikában milyen sorrendben végezzük a műveleteket a többtag értékének meghatározásakor? Az általatok kiválasztott programozási nyelvben?

9. pont. ***Többtagú kifejezések összeadása és kivonása***

Az általatok választott programozási nyelvben hogyan használják a zárójeleket? Hogyan hatnak az értékek meghatározásának sorrendjére?

343. Ebben a feladatban a számot $\overline{abc}$ alakban adtuk meg. Írjatok olyan programot, ahol a bemeneti adatok az a, b és c változók értékei lesznek, a kimenetiek pedig az $\overline{abc}$ értéke. Tudtok-e írni olyan programot, amelyben a kifejezésekben lévő számjegyek száma változó?

10. pont. ***Egytagú kifejezés szorzása többtagú kifejezéssel***

Az általatok választott programozási nyelvben hogyan történik az egytagú kifejezés többtagúval való szorzása?

11. pont. ***Többtagú kifejezések szorzása***

Az általatok választott programozási nyelvben hogyan történik a többtagok szorzása?

426. Fogalmazzátok meg a feladatot általános alakban. Melyek a bemeneti, és melyek a kimeneti adatok? Állítsátok fel a feladat matematikai modelljét. Írjátok le a megoldás algoritmusát általános alakban.

12. pont. ***Többtagú kifejezések tényezőkre bontása. Közös szorzótényező kiemelése***

460. Egyszerűsítsétek le a feladatban lévő kifejezést. Válasszatok a változóknak értékeket. Zsebszámológéppel számítsátok ki a kezdeti, majd a leegyszerűsített kifejezés értékét is. Mennyiben könynyítette meg a számítást az egyszerűsített kifejezés használata?

469. Készítsétek el a megoldás algoritmusát az összes kétjegyű szám leellenőrzésével. Mennyi ideig tartott volna számítógép vagy számológép nélkül megoldani a feladatot?

474. Írjatok algoritmust az összes kétjegyű szám leellenőrzésére.

13. pont. ***Többtagú kifejezések tényezőkre bontása. Csoportosítási módszer***

494. Fogalmazzátok meg a feladatot általános alakban. Melyek a bemeneti, és melyek a kimeneti adatok? Állítsátok fel a feladat matematikai modelljét. Írjátok le a megoldás algoritmusát az általános alakra.

497. Az általatok tanult programozási nyelv segítségével írjátok le a feladatban található kifejezéseket.

14. pont. ***Két kifejezés különbségének és összegének szorzata***

518. Írjatok programot a feladatban található kifejezés értékének a kiszámítására. Bebizonyítható-e a program segítségével a feladat állítása?

15. pont. ***Két kifejezés négyzetének különbsége***

535. Meg tudjátok-e fogalmazni a feladat megoldásakor használt algoritmust?

544. A feladat megoldására állítsatok fel algoritmust.

545. A megoldáshoz állítsatok fel algoritmust. Hogyan adjátok meg a π számot?

16. pont. ***Két kifejezés összegének és különbségének négyzete***

588., 589. Összeállítható-e az 588. és 589. feladatok megoldásához közös matematikai modell? Írjátok le a feladatok megoldásának közös algoritmusát.

17. pont. ***Többtagú kifejezés átalakítása két kifejezés összegének vagy különbségének négyzetévé***

626.° Meg tudjátok-e fogalmazni a feladat megoldásakor használt algoritmust?

671. Az általatok tanult programozási nyelv segítségével írjátok le a feladatban lévő kifejezéseket.

18. pont. ***Két kifejezés köbének összege és különbsége***

677.° Írjátok le azt az algoritmust, amelynek segítségével az összeg, illetve a különbség köbe képletének a felhasználásával tényezőkre bontható két egytag összege vagy különbsége. Milyen bemeneti adatokra van szükség, hogy az algoritmus bármilyen egytagú kifejezés esetén működjön?

20. pont. ***A mennyiségek közötti összefüggések. Függvények***

Írjatok programot a 2. példa megoldására. Milyen bemeneti adatokra van szükség ahhoz, hogy a programotok minél rugalmasabb legyen (több lehetséges változat megoldására alkalmas)?

Ebben a pontban sokféle olyan feladat található, amelyek mennyiségek közötti függvényszerű kapcsolatot írnak le. Válasszatok ki néhányat, és állítsatok össze algoritmusokat, melynek a bemeneti adatai a független változó értékei, a kimeneti adatai pedig a függvény értéke.

Hogyan ábrázolható a számítógép képernyőjén a koordinátasík? Találjátok meg a grafikus szerkesztőben az ehhez szükséges eszközöket. Az általatok tanult programozási nyelvben milyen eszközökre van szükség valamilyen ábrázolás elhelyezéséhez a képernyő meghatározott részén?

756.° Írjátok le a V térfogat és a t idő közötti összefüggés kiszámítására szolgáló algoritmust. Ne feledjétek, hogy a víz a tartályból előbb-utóbb elfogy. Milyen választ kell adnia az algoritmusnak, ha az összes víz kifolyik a tartályból? Hogyan kell figyelembe venni a függvény értelmezési tartományát?

21. pont. ***A függvény megadásának módjai***

Készítsetek a szövegszerkesztő segítségével olyan táblázatot, amely valamilyen függvényt ad meg.

Ismerjétek meg a szerkesztő eszközeit, amelyek lehetőséget adnak a függvényt megadó képlet segítségével kitölteni a táblázatot. Az eszközök segítségével oldjátok meg az egyik feladatot.

22. pont. ***A függvények grafikonja***

Ismerjétek meg a szövegszerkesztő és/vagy táblázatkezelő eszközeit, amelyekkel ábrázolhatjátok a függvények grafikonjait. Milyen elemek segítségével formálhatjuk a grafikont látványosabbá?

Ismertek-e grafikonszerkesztő programokat?

*Megírhatjátok a saját grafikonszerkesztő programotokat. A programozás milyen eszközeit kell felhasználnotok? Mit kell tudni a függvényekről, hogy a grafikon minél érthetőbb és szemléletesebb legyen?

23. pont. ***Lineáris függvény. A lineáris függvény grafikonja és tulajdonságai***

Írjatok olyan algoritmust, amellyel a k és b bemeneti adatok alapján megállapítható, hogy az $y = kx + b$ függvény grafikonjául szolgáló egyenes: függőleges vagy nem függőleges; áthalad az origón vagy nem.

Szövegszerkesztő és/vagy táblázatkezelő segítségével állítsatok össze tetszőleges lineáris függvényt megadó táblázatot. A szerkesztőprogram eszközeivel ábrázoljátok a grafikont.

24. pont. ***Kétváltozós egyenletek***

Tételezzük fel, hogy rendelkeztek olyan segédprogrammal, amelynek a bemeneti adata számpár, a kimeneti adata pedig válasz arra a kérdésre, hogy az adott számpár megoldása-e valamilyen kétváltozós egyenletnek. A segédprogram felhasználásával, hogyan állítható össze a grafikon ábrázolását biztosító program? Mit kell még tudni ahhoz, hogy a kapott grafikon minél több információt tartalmazzon?

*Írjatok egy ilyen programot.

25. pont. ***A kétváltozós lineáris egyenlet és grafikonja***

Állítsatok össze olyan algoritmust, amely az a, b és c bemeneti adatok alapján megállapítja, milyen alakzat lesz az $ax + by + c = 0$ függvény grafikonja.

*Írjatok olyan programot, amely az a, b és c bemeneti adatok alapján ábrázolja a képernyőn az $ax + by + c = 0$ függvény grafikonját.

26. pont. ***Kétváltozós egyenletrendszerek. A kétváltozós egyenletrendszerek megoldásának grafikus módszere***

Ismerjétek meg a grafikus szerkesztőben azokat az eszközöket, amelyek segítségével adott koordináták alapján feltüntethetitek a pontot a képernyőn. Tanuljatok meg egyenest rajzolni két adott ponton keresztül. Válasszatok ki egy egyenletrendszert, és mutassátok be a megoldását grafikus módszer segítségével.

27. pont. ***Lineáris egyenletrendszerek megoldása behelyettesítő módszerrel***

*A pontban leírt algoritmus alapján állítsatok össze programot a két lineáris kétváltozós egyenletet tartalmazó rendszer megoldására behelyettesítő módszerrel. Hogyan kell felkészíteni a programot arra az esetre, amikor a rendszernek nincs megoldása? Ha végtelen számú megoldása van?

28. pont. ***Lineáris egyenletrendszerek megoldása egyenlő együtthatók módszerével***

* A pontban leírt algoritmus alapján állítsatok össze programot a két lineáris kétváltozós egyenletet tartalmazó rendszer megoldására egyenlő együtthatók módszerével. Hogyan kell felkészíteni a programot arra az esetre, amikor a rendszernek nincs megoldása? Ha végtelen számú megoldása van?

29. pont. ***Feladatok megoldása lineáris egyenletrendszerek segítségével***

*Feltételezzük, hogy ismert az A és B pontok koordinátája, és rájuk egy egyenes illeszkedik. Megadják a szintén az egyeneshez tartozó C pont abszcisszáját. Állítsátok össze az ordináta meghatározására szolgáló algoritmust. Az algoritmus minden esetben „működik”? Milyen lehetőséget kell külön megvizsgálni, és milyen ellenőrzést kell ehhez elvégezni? Milyen kimeneti adatokat ad meg az algoritmus?

5 – 6. OSZTÁLYOS MATEMATIKAI ISMERETEK

SZÁMOKKAL VÉGZETT MŰVELETEK

1. A törtek alaptulajdonsága

Ha a tört számlálóját és nevezőjét megszorozzuk ugyanazzal a természetes számmal, a tört értéke nem változik:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}.$$

Ha a tört számlálóját és nevezőjét elosztjuk a közös osztójukkal, a tört értéke nem változik:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}.$$

2. Törtek egyszerűsítése

A tört számlálójának és nevezőjének közös, 1-től eltérő, osztójával való elosztását egyszerűsítésnek nevezzük.

Ha a tört számlálója és nevezője relatív prímszám, a tört egyszerűsíthetetlen.

Ha a törtet leegyszerűsítettük a számláló és a nevező legnagyobb közös osztójával, akkor az így kapott tört egyszerűsíthetetlen.

3. Közös nevezőre hozás

A törtet a legkisebb közös nevezőre hozásának sorrendje:

1) meghatározzuk a törtek legkisebb közös nevezőjét;

2) elosztva a közös nevezőt a törtek nevezőjével, meghatározzuk a pótszorzókat;

3) a törtek nevezőjét és számlálóját beszorozzuk a pótszorzóval.

4. Egész számok. Racionális számok

A természetes számokat, a velük ellentétes előjelű számokat és a 0-t egész számoknak nevezzük.

A természetes számokat pozitív egész számoknak nevezzük. A –1, –2, –3, ... – egész negatív számok.

A természetes számok, a nulla és a negatív egész számok adják az egész számokat:

Egész számok		
Negatív egész számok	**0**	**Természetes számok**

Az egész és törtszámokat együttesen racionális számoknak nevezzük:

Racionális számok	
Egész számok	**Törtszámok**

5. A szám modulusa

A koordinátatengely kezdőpontja és a számot ábrázoló pont közötti távolságot az a szám modulusának nevezzük.

A modulus jelölése: $|a|$ (olvassuk: az a szám modulusa).

A pozitív szám modulusa maga a szám; a negatív szám modulusa egyenlő a vele ellentétes előjelű számmal; $|0| = 0$.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a > 0; \\ -a, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

A modulus értéke nem negatív.

Az ellentett számok modulusa egyenlő: $|a| = |-a|$.

6. Összeadás. Az összeadás tulajdonságai

Az összeadásnál a számokat összeadandóknak, az eredményt öszszegnek nevezzük.

Az összeadandók felcserélésével az összeg nem változik: $a + b = b + a$ – felcserélhetőségi tulajdonság.

Hogy két szám összegéhez hozzáadhassunk egy harmadikat, az első számhoz hozzáadhatjuk a második és harmadik összegét:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ – az összeadás felcserélhetőségi tulajdonsága.

7. Kivonás. A kivonás tulajdonságai

Az a számból kivonni a b számot annyit jelent, mint találni olyan c számot, amely a b-vel összeadva a-t eredményez.

Az $a - b = c$ egyenlőség igaz, ha $b + c = a$.

Az $a - b = c$ egyenlőségben a – kisebbítendő, b – kivonandó, c – különbség.

Az $a - b$ különbség azt mutatja, mennyivel nagyobb az a a b-nél, illetve mennyivel kisebb a b az a-nál.

Tetszőleges a szám esetén igazak az egyenlőségek:

$$a - 0 = a, \text{ mivel } 0 + a = a;$$
$$a - a = 0, \text{ mivel } a + 0 = a.$$

8. Törtek összeadása és kivonása

Azonos nevezőjű törtek összeadásakor a számlálókat összeadjuk, a nevezőt pedig változatlanul hagyjuk.

Azonos nevezőjű törtek kivonásakor a kisebbítendő számlálójából kivonjuk a kivonandó számlálóját, a nevezőt pedig változatlanul leírjuk.

A különböző nevezőjű törteket összeadás (kivonás) előtt közös nevezőre hozzuk, majd az azonos nevezőjű törtek összeadásának (kivonásának) szabálya szerint végezzük el a műveletet.

9. Racionális számok összeadása

Két ellenkező előjelű számot a következő szabály szerint adunk össze:

1) meghatározzuk az összeadandók modulusait;
2) a nagyobb modulusú számból kivonjuk a kisebb modulusút;
3) a kapott szám elé a nagyobb modulusú szám előjelét tesszük.

Két negatív számot a következő szabály szerint adunk össze:

1) meghatározzuk a számok modulusát;
2) összeadjuk a modulusokat;
3) a kapott összeg elé „–" jelet teszünk.

Az ellentett számok összege mindig nulla.

Tetszőleges racionális a szám esetén:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

10. Racionális számok kivonása

Két szám különbségének a meghatározásához a kisebbítendőhöz hozzáadjuk a kivonandóval ellentétes előjelű számot.

11. Szorzás. A szorzás tulajdonságai

Az a és b, 1-től eltérő természetes számok szorzatának a b számú a összeadandót tartalmazó összeget nevezzük:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ összeadandó}}.$$

Ha a tényezők egyike 1, akkor a szorzat a másik tényezővel egyenlő:

$$m \cdot 1 = 1 \cdot m = m.$$

Ha az egyik tényező nulla, akkor a szorzat is nullával egyenlő:

$$m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0.$$

Ha a szorzat nulla, akkor legalább az egyik tényező nulla.

A tényezők felcserélésével a szorzat értéke nem változik:

$ab = ba$ – a szorzás felcserélhetőségi tulajdonsága.

Két szám szorzatát úgy is megszorozhatjuk egy harmadikkal, hogy az első számot szorozzuk a másik kettő szorzatával:

$(ab)c = a\,(bc)$ – a szorzás csoportosítási tulajdonsága.

Egy számot úgy is megszorozhatunk másik két szám összegével, hogy először megszorozzuk az összeadandókkal, majd a szorzatokat összeadjuk:

$a\,(b + c) = ab + ac$ – az szorzás széttagolási tulajdonsága.

12. Közönséges törtek szorzása

Törtet természetes számmal úgy szorzunk, hogy a számlálót megszorozzuk a számmal, a nevezőt pedig változatlanul leírjuk:

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}.$$

Úgy tekintjük, hogy $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$, $0 \cdot \frac{a}{b} = 0$.

Két tört szorzata olyan tört, melynek számlálója a két számláló szorzata, nevezője pedig a nevezők szorzata:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Vegyes törtek szorzásánál először átalakítjuk azokat áltörtekké, majd a már ismert szabály szerint elvégezzük a szorzást.

13. Racionális számok szorzása

Két ellentétes előjelű szám szorzásakor összeszorozzuk azok modulusát, majd az eredmény elé „–” jelet teszünk.

Két negatív szám szorzásakor összeszorozzuk a modulusukat.

Tetszőleges a racionális szám esetén:

$$a \cdot (-1) = -a,$$
$$(-1) \cdot a = -a.$$

Ha az ab szorzat pozitív, akkor az a és b azonos előjelű.

Ha az ab szorzat negatív, akkor a és b ellenkező előjelű.

14. Osztás. Az osztás tulajdonságai

Az a számot elosztani a b számmal annyit jelent, mint találni egy olyan számot, melynek a b számmal való szorzata a-val egyenlő.

Tehát az $a : b = c$ egyenlőség igaz, ha igaz a $b \cdot c = a$ egyenlőség.

Az $a : b = c$ kifejezésben az a – osztandó, b – osztó, c – hányados.

Tetszőleges a esetén:

$$a : 1 = a.$$

Ha $a \neq 0$, akkor igazak az egyenlőségek:

$$0 : a = 0;$$
$$a : a = 1.$$

Nullával nem lehet osztani!

15. Természetes számok oszthatósága

Ha az a természetes szám maradék nélkül osztható a b természetes számmal, akkor az a szám a b többszöröse, b pedig az a osztója.

Tetszőleges a természetes szám esetén az $a \cdot 1$, $a \cdot 2$, $a \cdot 3$, $a \cdot 4$, ... számok az a többszörösei.

Bármely a természetes szám legkisebb osztója 1, a legnagyobb maga az a szám.

Az a többszörösei között legnagyobb nem létezik, a legkisebb többszöröse pedig maga az a.

Ha az a és b is osztható maradék nélkül k-val, akkor az $a + b$ összeg is maradék nélkül osztható vele.

Ha az a maradék nélkül osztható k-val, a b viszont nem, akkor az $a + b$ összeg sem osztható maradék nélkül k-val.

Azokat a természetes számokat, amelyek csak eggyel és önmagával oszthatók, prímszámoknak nevezzük.

A több osztóval rendelkező természetes számot összetett számnak nevezzük.

Bármilyen összetett szám felírható prímszámok szorzataként, vagyis prímszámokból álló tényezőkre bontható.

Ha két természetes szám legnagyobb közös osztója 1, akkor azok relatív prímszámok.

16. Természetes számok oszthatóságának ismertetőjelei

Ha a természetes szám 0-ra végződik, akkor maradék nélkül osztható 10-zel.

Ha a természetes szám tetszőleges, 0-tól eltérő számjegyre végződik, akkor nem osztható maradék nélkül 10-zel.

Ha a természetes számot elosztjuk 10-zel, akkor a maradék a szám utolsó számjegye lesz.

Ha a természetes szám páros számjegyre végződik, akkor maradék nélkül osztható 2-vel.

Ha a természetes szám páratlan számjegyre végződik, akkor nem osztható maradék nélkül 2-vel.

Ha a természetes szám 0-ra vagy 5-re végződik, akkor maradék nélkül osztható 5-tel.

Ha a természetes szám nem 0-ra vagy 5-re végződik, akkor nem osztható maradék nélkül 5-tel.

Ha a természetes szám számjegyeinek összege maradék nélkül osztható 9-cel, akkor maga a szám is osztható maradék nélkül 9-cel.

Ha a természetes szám számjegyeinek összege nem osztható maradék nélkül 9-cel, akkor maga a szám sem osztható maradék nélkül 9-cel.

Ha a természetes szám számjegyeinek összege maradék nélkül osztható 3-mal, akkor maga a szám is osztható maradék nélkül 3-mal.

Ha a természetes szám számjegyeinek összege nem osztható maradék nélkül 3-mal, akkor maga a szám sem osztható maradék nélkül 3-mal.

17. Maradékos osztás

A maradék mindig kisebb az osztónál.

Az osztandó meghatározásához az osztót megszorozzuk a részhányadossal, majd hozzáadjuk a maradékot.

Képlet formájában így néz ki:

$$a = bq + r,$$

ahol a – osztandó, b – osztó, q – részhányados, r – maradék, $r < b$.

18. Közönséges törtek osztása

Egy törtet úgy oszthatunk el egy másikkal, hogy az osztandót megszorozzuk az osztó fordított (reciprok) értékével:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

19. Racionális számok osztása

Két ellentétes előjelű szám hányadosának a meghatározásához az osztandó modulusát elosztjuk az osztó modulusával és a kapott eredmény elé „–” jelet teszünk.

Két negatív szám osztásakor az osztandó modulusát elosztjuk az osztó modulusával.

20. A szám törtrészének meghatározása

Hogy meghatározzuk a szám törtrészét, a számot megszorozzuk az adott törttel.

Hogy meghatározzuk a szám százalékát, a százalékot tört alakban megadva megszorozzuk magával a számmal.

21. Szám meghatározása törtrész alapján

Hogy meghatározhassuk a számot törtrésze alapján, a törtrész értékét elosztjuk a törttel.

Hogy meghatározzuk a számot százalékértéke alapján, a százalékot tört alakjában adjuk meg, és a százalékértéket elosztjuk a törttel.

22. Számok hatványa

Az a szám természetes n ($n > 1$) kitevőjű hatványának az n számú a tényező szorzatát nevezzük:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{tényező}}.$$

Az a – a hatvány alapja.

Az a szám 1 kitevőjű hatványa maga az a szám:

$$a^1 = a.$$

A szám második hatványát négyzetnek nevezzük. Például az a^2 kifejezést így olvassuk: a a négyzeten. A harmadik hatványt köbnek nevezzük, és az a^3 felírást így olvassuk: a a köbön.

Ha a számkifejezésben hatvány található, akkor először a hatványozást végezzük el.

KIFEJEZÉSEK. KÉPLETEK. EGYENLETEK

23. Szám- és betűkifejezések

A számokból, műveleti jelekből és zárójelekből álló kifejezést számkifejezésnek nevezzük.

A számokból, betűkből, műveleti jelekből és zárójelekből álló kifejezést betűkifejezésnek nevezzük.

24. Zárójelek felbontása

Ha zárójel előtt „–" jel áll, a zárójel felbontásakor a jelet elhagyjuk és a benne lévő összeadandók előjele az ellenkezőjére változik.

Ha zárójel előtt „+" áll, a zárójel felbontásakor a jelet elhagyjuk, a benne lévő összeadandók előjele pedig változatlan marad.

25. Egynevű tagok összevonása

Egynevű tagok összevonásakor összeadjuk az együtthatóikat, az eredményt pedig megszorozzuk a közös betűvel.

26. Képletek

Az $y = 3x$, $P = 2\ (a + b)$, $S = a^2$ alakú kifejezéseket képleteknek nevezzük. Az $s = vt$ képletet, ahol s a megtett út, v a sebesség, t az idő, a megtett út képletének nevezzük.

27. Egyenletek

Az egyenlet gyökének a változó azon értékét nevezzük, amely az egyenletet igaz egyenlőséggé változtatja.

Megoldani az egyenletet annyit jelent, mint megtalálni az egyenlet összes gyökét, vagy meggyőződni arról, hogy nincs gyöke. Ezért a gyököt általában az egyenlet megoldásának nevezzük.

Az ismeretlen összeadandó meghatározásához az összegből kivonjuk az ismert összeadandót.

Az ismeretlen kisebbítendő kiszámításához a kivonandót összeadjuk a különbséggel.

Az ismeretlen kivonandó meghatározásához a kisebbítendőből kivonjuk a különbséget.

Hogy meghatározzuk az ismeretlen szorzót, a szorzatot elosztjuk az ismert szorzóval.

Hogy meghatározzuk az ismeretlen osztandót, az osztót megszorozzuk a hányadossal.

Hogy meghatározzuk az ismeretlen osztót, az osztandót elosztjuk a hányadossal.

28. Az egyenletek tulajdonságai

Ha az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk (mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot, akkor a kapott új egyenlet gyökei ugyanazok, mint az eredeti egyenleté.

Ha egy olyan egyenlet, amelynek nincs gyöke, mindkét oldalához ugyanazt a számot adjuk hozzá, akkor az így kapott új egyenletnek sem lesz gyöke.

Ha az egyenlet egyik oldaláról az összeadandót ellenkező előjellel átvisszük a másik oldalára, akkor a kapott új egyenlet gyökei ugyanazok, mint az eredeti egyenleté.

Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (elosztjuk) ugyanazzal a számmal, akkor a kapott új egyenlet gyökei ugyanazok, mint az eredeti egyenleté.

ARÁNY ÉS ARÁNYPÁR

29. Arány

Az a és b szám nullától eltérő hányadosát a két szám arányának is nevezzük, illetve az a szám aránya a b számhoz.

Az a és b számok az arányszámok, a – az arány első tagja, b – a következő tag.

Az a és b pozitív számok aránya azt mutatja, hányszor nagyobb az a a b-től, vagy az a milyen részét alkotja a b-nek.

Ha az arány mindkét tagját megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullától eltérő számmal, a arány értéke változatlan marad.

30. Aránypár

Két arány egyenlőségét aránypárnak nevezzük.

Képlet alakjában így írhatjuk fel:

$$a : b = c : d \text{ vagy } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Az a és d számok az arányosság kültagjai, a b és c számok pedig beltagok.

31. Az aránypár alaptulajdonsága

A kültagok szorzata egyenlő a beltagok szorzatával:

$$\text{ha } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ akkor } ad=bc.$$

Ha a, b, c és d nullától eltérő szám és $ad = bc$, akkor az $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ arány egyenlő, és $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ aránypárt alkot.

32. Két szám százalékaránya

Két szám százalékaránya a számok százalékban kifejezett aránya, amely azt mutatja, hogy az egyik szám hány százalékát teszi ki a másiknak.

Hogy meghatározzuk két szám százalékarányát, hányadosukat megszorozzuk 100-zal, és az eredmény mellé százalékjelet teszünk.

33. Egyenes arányosság

Két mennyiség egyenesen arányos, ha az egyik mennyiség valahányszoros növekedése (csökkenése) a másik mennyiség ugyanannyiszoros növekedésével (csökkenésével) jár.

Az egyenesen arányos mennyiségek értékpárjainak aránya állandó.

Ha az x és y mennyiségek egyenesen arányosak, akkor a megfelelő értékpárjai kielégítik az $\frac{y}{x}=k$ egyenlőséget, ahol k az adott mennyiségek esetében állandó.

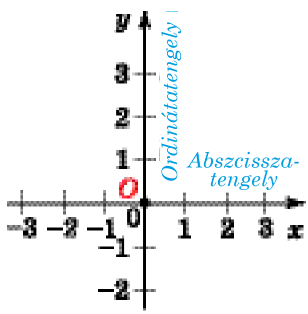
KOORDINÁTASÍK

34. Derékszögű koordináta-rendszer

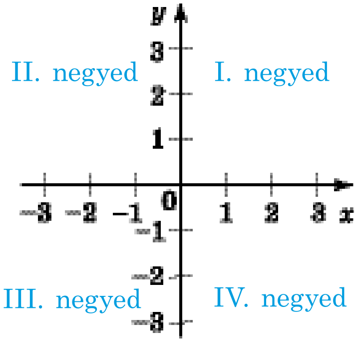
A síkon úgy szerkesztünk meg két egymásra merőleges koordinátatengelyt, hogy kezdőpontjaik egybeessenek (65. ábra). Az egyeneseket koordinátatengelyeknek, metszéspontjukat pedig kezdőpontnak, origónak nevezzük. A vízszintes tengelyt abszcisszatengelynek nevezik, és x-szel jelölik. A függőleges tengelyt ordinátatengelynek nevezik, jelölése pedig y.

Az abszcisszatengelyt x tengelynek, az ordinátatengelyt pedig y tengelynek is nevezik, és együtt alkotják a derékszögű koordináta-rendszert.

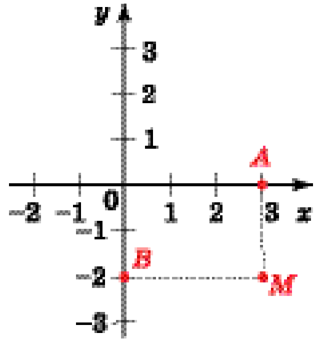
A koordinátatengelyeket tartalmazó síkot koordinátasíknak nevezzük.



65. ábra



66. ábra



67. ábra

A koordinátatengelyek a síkot négy részre osztják, melyeket koordinátanegyedeknek nevezünk. Számozásukat a 66. ábrán láthatjátok.

Felvesszük a koordinátasíkon az *M* pontot (67. ábra). Az *M* ponton átmenő és az abszcisszatengelyre merőleges egyenes a tengelyt az *A* pontban metszi, az ordinátatengelyre merőleges egyenes a tengelyt a *B* pontban metszi. Az *A* pont koordinátája az *x* tengelyen 3, a *B* pont koordinátája az *y* tengelyen pedig – 2.

A 3 az *M* pont abszcisszája, a – 2 pedig az ordinátája. A 3 és –2 számok egyértelműen meghatározzák az *M* pont helyzetét a koordinátasíkon, ezért őket az *M* pont koordinátáinak nevezzük. Jelölése: *M* (3; –2).

Egy pont koordinátáinak felírásakor az első helyre az abszcisszát írjuk, a másodikra pedig az ordinátát.

Ha a pont az abszcisszatengelyen fekszik, akkor az ordinátája nulla; ha az ordinátatengelyen, akkor az abszcisszája nulla.

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK MEGOLDÁSA

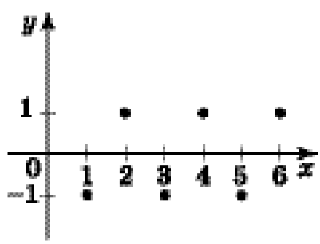
4. 1) $17\frac{4}{27}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) –0,3; 4) $-1\frac{1}{3}$; 5) 1. **5.** 1) $11\frac{3}{5}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) 4,4; 4) $-\frac{7}{10}$. **23.** 110 pud. **37.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$; 3) nincs gyöke; 4) bármilyen szám gyöke az egyenletnek. **38.** 1) 5; 2) 0,8; 3) bármilyen szám gyöke az egyenletnek; 4) nincs gyöke. **39.** 1) 0,6; 2) $\frac{3}{14}$; 3) –10; 4) –0,9. **40.** 1) 44; 2) $\frac{1}{3}$; 3) –5,2. **41.** 1) $-\frac{9}{25}$; 2) bármilyen szám gyöke az egyenletnek. **42.** 1) $-\frac{4}{11}$; 2) nincs gyöke. **43.** 1) 0,4; –8; 2) 0; 25; 3) $\frac{2}{3}$; –12; 4) –0,6; –1; 0,3. **44.** 1) 6; –4,5; 2) –0,8; 3. **45.** 1) 10; 2) –3. **46.** 1) 1; 2) –1,4. **47.** 1) 12; 2) $4\frac{2}{3}$; 3) 2. **48.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2; 3) 4,8. **49.** 1) –10; 2) 3; 3) 1; 4) 0,5. **50.** 1) –12; 2) –0,2. **51.** 7) $-\frac{2}{3}$; –2; 8) 0; –1. **52.** 4) –20; 100; 5) 2,3; –0,9; 6) 0; 4; –4. **53.** 2) 55. **54.** 2) $\frac{1}{3}$. **57.** 2) –53; –11; –5; –3; 3; 45. **58.** 2) 7; 11; 31. **59.** 1) 14; 2) $-\frac{31}{45}$. **60.** 1) –17; 2) 3,5. **61.** 2) 3; 3) 2. **62.** 2) 2; 3) –5. **63.** 1) $a \neq 5$; 2) $a \neq -7$. **64.** 1) Ha $b \neq -1$, akkor $x = \frac{9}{b+1}$; ha $b = -1$, akkor nincs gyöke az egyenletnek; 2) $x = -\frac{4}{b^2+1}$. **65.** Ha $m \neq -8$, akkor $x = 1$; ha $m = -8$, akkor x tetszőleges szám. **68.** 1) 3; 2) –1,8; 3) –1; 2. **69.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) nincs gyöke. **70.** 1) a – páros szám; 2) a – páratlan szám; 3) az a a 4 többszöröse; 4) nincs ilyen érték. **71.** 1) b a 3 többszöröse; 2) 3-mal való osztáskor a maradék 1; 3) nincs ilyen érték. **72.** 1) ha $b > 0$; 2) ha $b < 0$. **73.** 1) ha $d < 0$; 2) ha $d > 0$. **74.** 1) 18 ó; az első a feladat $\frac{2}{5}$-ét végzi el, a második a $\frac{3}{5}$-ét. **75.** 240 oldal. **76.** 1) Páros; 2) páratlan; 3) páros. **77.** 1) Nem, $2a < a$, ha $a < 0$ és $2a = a$, ha $a = 0$; 2) nem, $2\,|\,a\,| = |\,a\,|$, ha $a = 0$. **83.** 2061 m, 2032 m, 2020 m. **84.** 500 m, 400 m, 374 m. **87.** 20 munkás. **88.** 90 km. **89.** 20 kg, 14 kg. **90.** 264 hely, 270 hely. **91.** 12 km/óra, 60 km/óra. **92.** 28 hrn, 16 hrn. **93.** 7,2 hrn. **96.** 4 év. **97.** 7 év. **98.** 30 szótár, 10 szótár. **99.** 1800 hrn, 1200 hrn. **100.** 11 bankjegy, 8 bankjegy. **101.** 800 t. **102.** 60 hrn. **103.** 40 kg, 8 kg. **104.** 600 kg, 200 kg. **105.** 5 nap.

106. 40 l, 80 l. **107.** 4,5 ó, 0,5 ó. **108.** 24 perc. **109.** 50 km/óra, 20 km/óra. **110.** 30,5 km/óra. **111.** 2 km/óra. **112.** 45 kg, 10 kg. **113.** 14 kg, 10 kg. **114.** 60 könyv. **115.** 160 l. **116.** 71 turista. **117.** 109 narancs. **118.** 8 nap. **119.** 100 feladat. **120.** 93. **121.** 24. **122.** 55 km/óra, 65 km/óra vagy 70 km/óra, 80 km/óra. **123.** 100 kg, 200 kg. **124.** 20 kg, 30 kg. **125.** 1) 4,04; 2) –35,16; 3) $1\frac{8}{9}$; 4) $-6\frac{1}{3}$. **128.** 4. **129.** 3) x tetszőleges nem negatív szám; 4) x tetszőleges nem pozitív szám. **146.** 24 ó. **147.** 206 q. **148.** 1) $b < 0$; 2) $|a| < |b|$. **149.** Csökkent 25%-kal. **162.** 3) 16; 4) 115. **163.** 3) 75. **185.** 2; 3; 4. **186.** 1; 2. **191.** 2) $x = 1$ és $y = -2$. **193.** 1) $x = 0$; 2) $x = 1$. **194.** 1) $x = 0$; 2) $x = -3$. **195.** 2) *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés utolsó számjegye 0; 3) *Útmutatás.* A kifejezés értéke olyan szám, melynek az utolsó számjegye 3, a többi pedig 9. **196.** 1) *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy a számjegyek összege 9; 2) *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értékének utolsó számjegye 5. **197.** 3. **198.** 20%. **199.** 60 kg, 20 kg. **200.** 1) 3,8; 2) nincs gyöke. **201.** a – negatív szám, b – pozitív szám, $c = 0$. **227.** 2) 2^5; 3) 2^{2n}; 4) 2^{n+1}. **244.** 1) 36; 2) 125; –125. **247.** 5^{97}. **248.** 1) 6; 2) 1; 3) 4 vagy 6; 4) 1, vagy 3, vagy 7, vagy 9. **249.** 1) 1; 2) 1; 3) 1 vagy 9. **250.** 1) *Útmutatás.* A 17^8 hatvány utolsó számjegye 1; 2) *Útmutatás.* A 64^{64} hatvány utolsó számjegye 6; 3) *Útmutatás.* A $3^{4n} = 81^n$ hatvány utolsó számjegye 1. **251.** 1) *Útmutatás.* A 4^{40} hatvány utolsó számjegye 6; 2) *Útmutatás.* A 2004^{171} hatvány utolsó számjegye 4, a 171^{2004} hatványnak pedig 1. **252.** $48^{25} < 49^{25} = 7^{50} < 7^{51} = (7^3)^{17} = 343^{17} < 344^{17}$. **253.** 12 kacsa. **254.** 3,6 ó. **255.** 9,6 km. **256.** 1) 2; 2) bármilyen szám. **257.** *Útmutatás.* A szám megadható $1000a + a = 1001a$ alakban. **283.** 3) –43,2. **284.** 3) $-\frac{32}{27}$. **285.** 2) 24,5; 3) 30. **286.** 2) 1350; 3) –486. **287.** 600. **288.** 36 liba. **300.** 600 g, 400 g. **301.** 300 változat. **311.** 3) 5; 4) nincs gyöke. **312.** 2) 6; 3) a gyök bármilyen szám. **315.** 1) –45; 2) 24. **316.** 1) 11; 2) $\frac{2}{3}$. **331.** 5. **339.** –9 ha $x = 0$. **340.** 4 ha $y = 0$. **344.** 1) $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=100a+10b+c+100b+10c+a+100c+10a+b=$ $=111a+111b+111c=111(a+b+c)$. **345.** *Útmutatás.* Vizsgáljátok meg a többtagok összegét. **347.** Kisebb 4%-kal. **348.** 4 ó. **349.** 144 fa. **350.** 10 km. **361.** 1) –2; 2) –5; 3) –0,5; 4) bármilyen szám; 5) nincs gyöke; 6) 4. **362.** 1) 2; 2) 0; 3) 6. **374.** 1) $7b^2$; 2) 0. **375.** 1) 45; 2) 0; 3) $\frac{7}{4}$; 4) 2,1; 5) 3; 6) $\frac{3}{20}$; 7) $\frac{19}{34}$; 8) $\frac{44}{9}$. **376.** 1) –1; 2) $-\frac{83}{4}$; 3) –4; 4) 10. **377.** $-\frac{3}{7}$. **378.** 8 cm. **379.** 64 cm. **380.** 36 km, 42 km, 30 km.

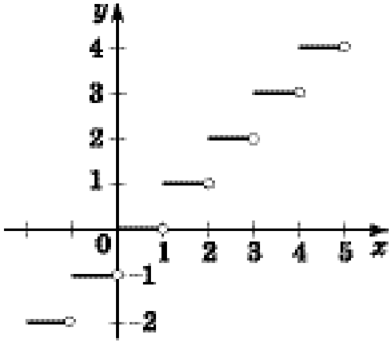
381. 22 alkatrész, 34 alkatrész, 24 alkatrész. **382.** 1) $x^{n+5} - x^{n+1}$; 2) $x^{n+4} - x^{2n+2} + x^n$. **383.** 1) $5x^{n+1}$; 2) $x^{2n+2} - 7x$. **384.** *Útmutatás.* Az adatokból következik, hogy $a = 3n + 1$, $b = 9m + 7$, ahol m és n természetes szám. **386.** 800 km², 360 km², 204,8 km². **387.** 210 oldal. **389.** 90 km. **390.** 8 nap. **398.** 1) –7; 2) –2; 3) 1; 4) –1; 5) nincs gyöke. **399.** 1) 2; 2) $-\frac{2}{27}$; 3) 6; 4) bármilyen tetszőleges szám. **405.** 6; 7; 12; 14. **406.** 8; 12; 18. **407.** 7; 8; 9; 10. **408.** 16; 17; 18. **409.** 15 cm. **410.** 18 cm, 12 cm. **411.** 14 cm, 12 cm. **425.** 15 alkatrész, 11 alkatrész. **426.** 9 %. **427.** 1) 3; 2) 9. **429.** 60 év. **447.** 1) $-a\,(a + b)\,(2a + 3b)$; 2) $3m\,(m - 8)\,(3m - 16)$; 3) $(a + 5)\,(3a + 2)$; 4) $(4y - 1)\,(x - 3)$; 5) $(5m - n)^2\,(m + 8n)^2\,(4m - 9n)$. **448.** 1) $(x - 6)\,(x + 4)$; 2) $(x^2 - 2)\,(2y - 7)$; 3) $(4a - 3b)\,(3a + 7b)$; 4) $(p - 9)^3\,(2p + 1)^3\,(3p - 8)$. **449.** 1) –7; 2) 2; $2\frac{2}{3}$; 3) 5; –40; 4) 7; 14. **450.** 1) –6; 9; 2) 10; –6; 3) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; 4) $1\frac{1}{3}$; 1. **451.** 7) $49a^2\,(1 + 2b)^2$; 8) $81c^{12}\,(c - 2)^4$. **452.** 5) $64x^2y^2\,(2x + 5y)^2$; 6) $32x^{10}\,(11x^2 - 14y^3)^5$. **457.** 1) 0; $\frac{3}{8}$; 2) 0; 0,4; 3) 0; –0,2; 4) 0; 3,6. **458.** 1) 0; 6; 2) 0; $\frac{1}{3}$. **459.** 1) $2a + 4$; 2) $6ab - 4b$; 3) $8ab^2 - 14b^3$. **460.** 1) $2a^2b^2$; 2) $2ab + 2b^2$. **463.** 1) $a^n\,(a + 1)$; 2) $b^{n-3}\,(b^3 - 1)$; 3) $c^{n-4}\,(c^6 + 1)$; 4) $d^n\,(d^n - 1)$; 5) $2^{n+1} \cdot 5$; 6) $3^{n+2}\,(3^n + 1)$. **464.** 1) $a^n\,(a^2 - 1)$; 2) $b^n\,(3b^2 - 2b + 1)$; 3) $2^{5n}\,(1 + 2^{3n+4})$. **465.** 2) 24; 3) 20. **466.** 2) –4; 3) –12. **467.** 1) 1; 2) 0,8; 3) 5. **468.** 1) $a = 3$; 2) $a = -\frac{2}{3}$. **469.** 18. **469.** 18. *Útmutatás.* Legyen az adott szám $\overline{ab}$. Akkor $\overline{ab} = 10a + b = (a + 1)(b + 1)$, ahonnan $9a = ab + 1$, $a\,(9 - b) = 1$. Innen $a = 1$, $b = 8$. **471.** 20 kg. **472.** 28 doboz. **474.** Nem. **482.** 1) 15; 2) 72; 3) 25. **483.** 1) 250; 2) –1. **486.** 1) $(a^n + 1)\,(a + 1)$; 2) $(b + 1)\,(b^{n+1} - 1)$; 3) $(y^{n+1} - 1)\,(3y^2 + 5)$. **487.** 1) $(x + 6)\,(x + 2)$; 2) $(x - 4)\,(x - 1)$; 3) $(x - 1)\,(x + 8)$; 4) $(x + 1)\,(x - 5)$. **488.** 1) $(x + 1)\,(x + 3)$; 2) $(x - 2) \times (x - 8)$; 3) $(x + 6)\,(x - 3)$; 4) $(x - 8)\,(x + 4)$. **489.** *Útmutatás.* $n^3 + 3n^2 + 2n = n\,(n^2 + 3n + 2) = n\,(n^2 + n + 2n + 2) = n\,(n\,(n + 1) + 2\,(n + 1)) = n\,(n + 1)\,(n + 2)$. **490.** $(a + b + c)^2$. *Útmutatás.* Adjátok meg a többtagú kifejezés $2ab$, $2bc$ és $2ac$ tagjait $ab + ab$, $bc + bc$, $ac + ac$ alakban, és alkalmazzátok a csoportosítási módszert. **491.** *Útmutatás.* $3^{m+2} - 2^{m+2} + 3^m - 2^m = 3^m\,(3^2 + 1) - 2^m\,(2^2 + 1) = 3^m \cdot 10 - 2^m \cdot 5 = 3^m \cdot 10 - 2^{m-1} \times 2 \cdot 5 = 3^m \cdot 10 - 2^{m-1} \cdot 10 = 10\,(3^m - 2^{m-1})$. **492.** 2. *Útmutatás.* $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^2\,(x^2 + y^2) + y^2\,(x^2 + y^2) + y^2$. **493.** 4 bárány. **494.** 6 ó. **495.** 40 l, 10 l. **510.** 5) $16a^4 - 1$; 6) $c^{12} - 625$.

511. 4) $a^8 - 1$. **512.** 3) $y^{2n+4} - x^{8n}$; 4) $a^{2n+2} - b^{2n-2}$. **513.** 3) $4x^2 + 3x + 93$; 4) b^2c^5. **514.** 1) $x^2 - 4x + 19$; 2) b^{12}. **515.** 1) –1; 2) nincs gyöke; 3) tetszőleges szám; 4) –25,6. **516.** 1) –40; 2) –3. **521.** 1) 4; 2) 25; 3) 9; 4) –1; 5) –1. **522.** 1) 1; 2) 256. **524.** *Útmutatás.* $253 \cdot 259 = (256 - 3) \times (256 + 3)$, $252 \cdot 260 = (256 - 4)(256 + 4)$. **525.** 14 km/óra, 42 km. **526.** 20 kg, 80 kg. **527.** 4 ó. **528.** $7^5 = 16\ 807$ marék, 1,34 t. **529.** 1) $-1\frac{4}{25}$; 2) $6\frac{1}{6}$. **542.** 1) –150; 2) 12,8. **543.** –40. **547.** 1) $(a - b) \times (a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$; 2) $(a^2 - 2)(a^2 + 2) \times (a^4 + 4)(a^8 + 16)$. **548.** 1) 4; $-\frac{2}{3}$; 2) –1; –7; 3) –10; $-2\frac{2}{3}$; 4) $-1\frac{2}{7}$; $-\frac{1}{23}$. **549.** 1) $\frac{2}{11}$; $\frac{10}{11}$; 2) –16; $-\frac{3}{8}$. **553.** 1) $(2n + 2)^2 - (2n)^2 - (2n + 2 - 2n)(2n + 2 + 2n) = 2(4n + 2)$. **555.** 43 és 34. **557.** 1) $b = 2$; 2) $b = -2$; 3) $b \neq 2$ és $b \neq -2$. **559.** 8 km/óra. **560.** 45 kg. **561.** $a = -3$. **562.** 1) $-\frac{5}{8}$; 2) tetszőleges szám. **563.** 1) $a > 0$; 2) $a \neq 0$; 3) a – tetszőleges szám. **585.** 5. **586.** 1) 9; 2) –0,6; 3) –5. **587.** 1) $-\frac{1}{11}$; 2) 7. **588.** 7 cm. **589.** 26 cm. **590.** 12; 13; 14. **591.** 19; 20; 21; 22. **602.** 1. **603.** 0 vagy 1. **607.** 7. **608.** 3. **611.** $a = 1$. **612.** $a = -\frac{1}{6}$. **615.** Legyen n a harmadik szám, akkor az adott számok rendre $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$, ahol $n > 2$. Bizonyítsátok be, hogy a számok összege $5(n^2 + 2)$. A kapott eredmény csak akkor egy természetes szám négyzete, ha az $n^2 + 2$ kifejezés értéke osztható 5-tel, azaz az utolsó számjegye 0 vagy 5. Mivel az n^2 kifejezés értékének az utolsó számjegye 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9, ezért az $n^2 + 2$ kifejezés értéke nem végződhet 0-ra vagy 5-re. **616.** 5000 t. **617.** 500 kg. **618.** Egyenlő esély. **621.** 2) Nincs ilyen érték; 3) $x = -1$. **634.** 1) $(4a - b)^2$; 2) $(6x + 5y)^2$. **635.** 1) $(2m + 2n)^2$; 2) $(7x + 4y)^2$. **636.** 1) 0,0016; 2) 10 000. **637.** 1) 10 000; 2) 9. **640.** 2) $-\frac{7}{9}$. **641.** 2) $\frac{3}{5}$. **645.** *Útmutatás.* $x^2 - 14x + 52 = x^2 - 14x + 49 + 3 = (x - 7)^2 + 3$. **646.** 1) 1, ha $x = 3$; 2) 16, ha $x = -\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$, ha $x = -\frac{1}{2}$. **648.** 1) –8, ha $x = 2$; 2) –1, ha $x = \frac{1}{11}$; 3) –7, ha $x = -\frac{7}{6}$. **650.** 1) 100, ha $x = -8$; 2) 11, ha $x = \frac{3}{4}$. **651.** 1) 4, ha $x = 14$; 2) –50, ha $x = -\frac{5}{3}$. **653.** $(a - 3b) \times (a - 3b - 4) + 4 = (a - 3b)^2 - 4(a - 3b) + 4 = (a - 3b + 2)^2$. **654.** 6) *Útmutatás.* $2a^2 + 2b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$. **655.** 1) $(a^2 + 1 - a)(a^2 + 1 + a)$; 2) $(x - y)(x + y + 4)$; 3) $(ab - c - 3)(ab + c + 5)$;

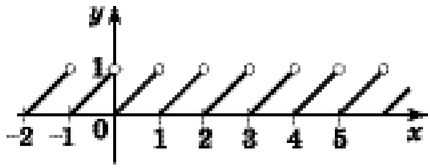
4) $(2a + b - 2)(4a - b - 2)$. **656.** 1) $(a^2 + 4)^2 + (3a)^2$; 2) $(x - 5)^2 + (y + 7)^2$; 3) $(x - 3y)^2 + (x - 3)^2$; 4) $(x - 2)^2 - (y + 1)^2$. **657.** 1) $x = -4$, $y = 5$; 2) $x = -6$, $y = 1$. **658.** 1) $x = -1$, $y = 0{,}5$; 2) nem léteznek ilyen értékek. **659.** 45. **660.** 8. **661.** –10. **662.** 24 = 12 + 12. *Útmutatás.* Legyen az egyik összeadandó x, akkor a másik $24 - x$, a szorzatuk: $x(24 - x) = 24x - x^2 = 12^2 - 12^2 + 2 \cdot 12x - x^2 = 144 - (12 - x)^2$. **663.** 5 cm, 5 cm. **664.** 4. *Útmutatás.* $b^2 + \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} + ab - ab = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 - ab$. **665.** 0. *Útmutatás.* Az egyenlőség mindkét oldalát szorozzátok meg 2-vel, majd írjátok le $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 0$ alakban. **666.** 100 km. **667.** 60 ha, 40 ha. **669.** 13. **670.** 420 nap. *Útmutatás.* Hogy megtudjátok, hány nap múlva mennek a horgászok ki a tóra együtt, meg kell határozni az (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) számok legkisebb közös többszörösét. **685.** 1) 9; 2) $25x - 64$; 3) $-6a^2 + 9a - 27$; 4) $a^{24} - 1$. **686.** 1) –124; 2) $-y^2 + 3y - 36$; 3) $a^6 - b^2$. **688.** 1) 0,5; 2) –1; 3) 8. **689.** 1) 6; 2) –5. **695.** *Útmutatás.* Legyenek az adott számok $2n - 1$ és $2n + 1$. **696.** *Útmutatás.* A számok felírhatók a következő alakban: $3n + 1$ és $3n + 2$, ahol n tetszőleges természetes szám. **697.** 1. *Útmutatás.* $x^6 + 3x^2y^2 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + 3x^2y^2$. **698.** 8. **701.** 18 kg, 6 kg. **702.** 2. **705.** 4) $\frac{1}{3}$; 6) 0; $\frac{1}{6}$. **725.** 6) –2; –3; 3; 7) 5; 8) –1; 1. **726.** 5) –1; 1; 6) –5; 5; 4. **732.** 1) $(x - y + 4)(x + y - 2)$; 2) $(2a - 3b - 3)(2a + 3b + 1)$. **733.** 1) $(5x - y^2 + 4)(5x + y^2 - 10)$; 2) $4(3m - 2n + 3)(3m + 2n - 2)$. **734.** 4) $(2a - 5)(2a - 1)$; 5) $(3x - - 7y)(3x - y)$; 6) $3(2m - n)(6m - 7n)$. **735.** 4) $(x + 3)(x - 2)$; 5) $(c + 3d)(c + 5d)$; 6) $(3x - 8y)(3x - 2y)$. **736.** 1) –40; 2) 74; 3) 84; 4) 632. **737.** 1) 54; 2) 48; 3) 1746. **739.** 1) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$; 2) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; 3) $(2x^2 - 4x + 1)(2x^2 + 4x + 1)$. *Útmutatás.* $4x^4 - 12x^2 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - 16x^2$; 4) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$. *Útmutatás.* $x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$; 5) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$; 6) $(x - 1) \times \times (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 2)$. **740.** 1) $(x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$; 2) $(x^2 - - 2x - 2)(x^2 + 2x - 2)$. **742.** 14, 18, 22. **743.** 13 km. **744.** 2) –2; 2; –18; 18; 3) –18; 2; 4) 4. **786.** $a = 3$. **787.** 420 ember. **815.** 12, 22, 32. **817.** *Útmutatás.* Adjátok össze az egyenlőségek jobb és bal oldalait. **839.** 68. ábra. **840.** 69. ábra. **845.** 15 méh. **873.** $A\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **874.** 1) (–10; –27); 2) (–14; 8). **875.** (3; 5). **879.** 1. **880.** 3.



68. ábra



69. ábra



70. ábra

881. $k = 0{,}5$, $b = 4$. **882.** $k = -\frac{1}{3}$, $b = -1$. **887.** 1) n; 2) k; 3) m; 4) p. **889.** $k = -1$. **890.** $b = 11$. **897.** 1) $y = x + 3$; 2) $y = -0{,}5x - 1$. **898.** 1) $y = -\frac{2}{3}x$; 2) $y = 2x - 4$. **899.** 70. ábra. **900.** 1) –39; 2) –12. **901.** 1) $\frac{5}{8}$; 2) 1,4. **902.** *Útmutatás.* Legyen a második szám n. Akkor az első szám $n - 1$, a harmadik $n + 1$. Az első és harmadik szám köbének az összegét bontsátok tényezőkre. **904.** $a^2 - b^2$. *Útmutatás.* $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$. **905.** A modulus meghatározásából következik, hogy $|x| \geq x$, ezért $|x| - x \geq 0$. Ezzel együtt $2x - x^2 - 2 = -x^2 + 2x - 1 - 1 = -(x - 1)^2 - 1 < 0$. **917.** 2. **918.** 6. **919.** 3) (–3; 0); (3; 0); (0; –3); (0; 3); 4) (5; 0); (–5; 0); (0; –5). **934.** 1) (1; 1); 2) (1; 3); (6; 2); (11; 1). **937.** Háromféleképpen. **938.** 9 algebra és 2 mértan feladat, vagy 6 algebra és 4 mértan, vagy 3 algebra és 6 mértan. **939.** 1) (0; 2); 2) (–1; 3); 3) (–0,5; –0,5); 4) nincs megoldása. **940.** 1) (5; –5); 2) nincs megoldása. **941.** (0; 0); (–1; 0); (1; 0); (0; –2). **942.** (0; 4); (0; –4); (5; 0); (–5; 0). **943.** 5%. **944.** 20 alma. **945.** 1) 6; 2) –5. **946.** 269,5 km. **948.** 1) 12; 2) $-\frac{16}{3}$. **986.** –12. **987.** –4. **988.** $a = -4$, $b = 2$. **991.** 1) d; 2) c; 3) b; 4) a. **994.** 1) $y = 0{,}5x + 2$; 2) $y = 0{,}6x - 3$. **995.** $x + y = 6$. **998.** 1 számpár (3; 2). **1000.** 24 ó. **1002.** 1) 5; 2) 3,5. **1003.** 2) $(x - 3y - 4)(x - 3y + 4)$; 4) $(c - b - 3)(c + b + 1)$. **1014.** 1) $a = 3$, $b = -2{,}5$; 2) $a = 4$, $b = -6$. **1015.** $a = 2$, $b = 5$. **1020.** Ha $a \neq 7$. **1021.** 1) 16; 2) –5. **1022.** 1) Ha $a \neq 14$; 2) ha $a = -10$. **1025.** 1) (–2; 2); 2) (–2; 2); (1; 1); 3) nincs megoldása; 4) (1; –1); (3; 3). **1026.** 1) (1; 1); (–3; 3); 2) (2; 1); (–2; –1); 3) (2; 0); (–2; 0); (0; 2); (0; –2). **1027.** 3 kg. **1028.** 60 km/óra. **1029.** 3; 5; 7; 9. *Útmutatás.* A legkisebb számot jelöljétek meg: $2k - 3$, ahol

$k > 1$ – tetszőleges természetes szám. **1036.** 1) (6; 3); 2) (4; 2); 3) (1; 2); 4) (4; –3); 5) (–5; –7); 6) (1,2; –0,7). **1037.** 1) (–5; 20); 2) (–1; 3); 3) (–2; –1); 4) (–3; 4). **1038.** 1) (0; –6); 2) (8; 6); 3) (–5; –4); 4) (4; –3). **1039.** 1) (1; –1); 2) (–2; 0,5); 3) (14; 2). **1040.** 1) 14; 2) 0,25. **1041.** 7 oroszlán. **1043.** $2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1 = 16^n - 1$. A 16^n hatvány utolsó számjegye 6. Akkor a kifejezés utolsó számjegye 5. **1049.** 1) (8; 1); 2) (1,2; 0); 3) (–1; –2); 4) (7; –1); 5) (4; –1); 6) (6; –2); 7) (2; –2); 8) (5; 6). **1050.** 1) (1; 2); 2) (3; –1); 3) (4; 2); 4) (6; 5); 5) (1,5; 0,5); 6) (1; –1). **1051.** 1) (–3; –4); 2) (1; –0,5); 3) $\left(5\frac{3}{4}; -\frac{3}{8}\right)$; 4) (2; –2). **1052.** 1) (–0,6; –3,2); 2) (1; 3). **1053.** 1) (1; 1); 2) (–3; 3). **1054.** 1) (–20; –0,5); 2) (–2; 3). **1055.** 1) $\left(-\frac{1}{7}; 2\frac{3}{7}\right)$; 2) (–10; 5). **1056.** 1) (–5; –6); 2) (1; –6). **1057.** $a = 5{,}6$, $b = 0{,}8$. **1058.** $m = 9$, $n = -12$. **1059.** 1) $y = -0{,}2x + 1{,}4$; 2) $y = -x + 1$. **1060.** 1) $y = -0{,}5x + 3{,}5$; 2) $y = 3x + 3$. **1062.** 1) (3; –1,6); 2) nincs megoldása. **1065.** –0,8. **1066.** 2. **1067.** 1) (3; –3); 2) (1,5; 0,75); 3) $\left(4; -\frac{2}{3}\right)$; 4) (–5; 6); 5) (–2,4; –4). **1068.** 1) (10; 5); 2) (0,5; 1,5); 3) (–8; –28). **1069.** 1) (0,2; 1); 2) (1; –1). **1070.** 1) $\left(\frac{1}{20}; \frac{1}{2}\right)$; 2) (2; –2). **1071.** 1) 6; 2) –2,5. **1072.** 9 feladatot. **1073.** 2. óra **1075.** 96 fa. **1080.** 63 arsin kék és 75 arsin fekete szövet. **1081.** 7 négyszemélyes és 3 hatszemélyes csónak. **1082.** 9 kg, 7 kg. **1083.** 8 ha, 6 ha. **1084.** 9 alkatrész, 6 alkatrész. **1085.** 4 q, 5 q. **1086.** 14 hrn, 12 hrn. **1087.** 3 hrn, 2 hrn. **1088.** 58 km/óra, 70 km/óra. **1089.** 60 km/óra, 40 km/óra. **1090.** 4 km/óra, 16 km/óra. **1091.** 84 km/óra, 79 km/óra. **1092.** 80 l, 60 l. **1093.** 28 utas, 36 utas. **1094.** 18 km/óra, 2 km/óra. **1095.** 25 km/óra, 2,5 km/óra. **1096.** 5 zsák, 7 zsák. **1097.** 40 rúpia, 170 rúpia. **1098.** 42 év, 15 év. **1099.** 60 év, 12 év. **1100.** 45 öltöny, 30 öltöny. **1101.** 18 hrn, 42 hrn. **1102.** 3 hrn, 4 hrn. **1103.** 20 hrn, 8 hrn. **1104.** 800 hrn, 600 hrn. **1105.** 900 hrn, 300 hrn. **1106.** $a = 120$, $b = 100$. **1107.** 12; 15. **1108.** 100 kg, 200 kg. **1109.** 20 kg, 30 kg. **1110.** 87. **1111.** 6 cm, 8 cm. **1112.** 5 cm, 7 cm. **1113.** 3 km/óra, 12 km/óra. **1114.** 5 km/óra, 4 km/óra. **1115.** 12 km/óra. **1116.** 60 t. **1117.** 50 km/óra, 75 km/óra, 90 km/óra, 450 km. **1118.** 48 km/óra, 60 km/óra. **1119.** 48 km/óra, 16 km/óra. **1120.** 320 g, 480 g. **1121.** 63 kg, 15 kg. **1122.** 72. **1123.** 39. **1124.** 24 l, 40 l. **1125.** 28 l, 42 l. **1126.** 1) Ilyen szám nem létezik; 2) tetszőleges kétjegyű szám, amelyben a tízesek értéke 2-vel nagyobb az egyesekénél, 18-cal nagyobb az azonos számjegyekből álló, de fordítva felírt számnál. **1127.** 8 kaszás. **1133.** 2) $(b^3 - 2b^2 + 3)(b^3 + 2b^2 - 3)$; 4) $(3x - 7) \times (3x + 5)$. **1134.** $a^2 = c + 2b$. **1135.** 7,5. **1137.** 8. **1154.** Nem léteznek.

Útmutatás. Határozzátok meg az adott többtagú kifejezések összegét. **1156.** 1) $1\frac{6}{7}$; 2) $\frac{6}{11}$; 3) –0,2; 4) 5; 5) 3; 6) $\frac{7}{4}$. **1157.** 1) –0,4; 2) 4; 3) nincs megoldása; 4) tetszőleges szám. **1159.** 3. **1160.** –4. **1162.** 1) 20; 2) 5,93. **1163.** 1) 2,7; 2) 0,4; 3) 23; 4) 51,2. **1166.** –4. **1167.** $\frac{2}{3}$. **1169.** 1) 16. *Útmutatás.* Adjátok meg a második összeadandót két összeadandó összegeként: $1{,}66 \cdot 4{,}68 = 1{,}66 \cdot 2{,}34 \cdot 2 = 1{,}66 \cdot 2{,}34 + 1{,}66 \cdot 2{,}34$; 2) 0,16. **1170.** Ha $a = c$ vagy $b = d$. **1173.** 1) 0,5; 2) 0. **1176.** 1) 1; 2) 4. **1186.** 1) 2; 2) 0,5; 3) $-\frac{1}{13}$. **1192.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$. **1198.** 1) 9; 2) 0,064; 3) 1. **1204.** *Útmutatás.* $n(n + 2)(n + 4)(n + 6) + 16 = (n^2 + 6n)(n^2 + 6n + 8) + 16 = (n^2 + 6n + 4 - 4)(n^2 + 6n + 4 + 4) + 16 = (n^2 + 6n + 4)^2 - 4^2 + 16 = (n^2 + 6n + 4)^2$. **1205.** *Útmutatás.* Legyen n az adott természetes szám. Két esetet kell megvizsgálni: $n = 3k + 1$ vagy $n = 3k + 2$, ahol k – egész nem negatív szám. **1206.** *Útmutatás.* Vizsgáljatok meg négy lehetséges esetet: 1) $n = 5k + 1$; 2) $n = 5k + 2$; 3) $n = 5k + 3$; 4) $n = 5k + 4$, ahol k – egész nem negatív szám. **1207.** Lehet. *Útmutatás.* Vizsgáljátok meg azokat az eseteket, amikor $n = 3k$, $n = 3k + 1$ és $n = 3k + 2$, ahol k – egész nem negatív szám. **1215.** $-\frac{37}{7}$. **1222.** 1) (–2; 1); 2) (3; –2); 3) (1; –1); 4) (4; 2). **1223.** 2. **1224.** –1. **1225.** 32 tanuló. **1226.** 15 m/mp, 10 m/mp. **1227.** 64%. **1228.** 120 g, 60 g. **1229.** 8 l, 2 l. **1230.** 30 ha, 40 ha. **1231.** 20 ha, 25 ha. **1232.** 12 kg. **1233.** 29. **1234.** 91. *Útmutatás.* Ha az adott szám x, akkor a kapott szám egyenlő: $10x + 1000 + 1 = 10x + 1001$ vagy $21x$. **1235.** 16; 12.

A TESZTKÉRDÉSEK MEGOLDÁSA

A feladatsor száma	Feladat száma											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	C	A	B	C	C	A	B	C	B	C	B	D
2	D	C	D	D	C	C	B	C	B	A	D	A
3	D	D	A	B	B	C	A	B	C	A	A	C
4	C	B	C	C	C	B	B	D	C	B	A	D
5	C	D	D	B	B	B	A	C	A	C	D	B
6	A	D	B	B	C	B	A	A	C	C	B	A
7	C	D	A	B	C	D	A	B	C	A	B	B

TÁRGYMUTATÓ

TARTALOM

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням
угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Переклад з української мови
Перекладачі *Берегі Ілдико Йосипівна,*
Буркуш Андраш Арпадович

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Художній редактор *І. Б. Шутурма*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцького*
Коректор *Г. М. Тирканич*

Формат 60×90/16.
Ум. друк. арк. 16,00. Обл.-вид. арк. 14,68.
Тираж 900 прим. Зам. № 92П

Державне підприємство
„Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua, e-mail: office@svit.gov.ua, svit_vydav@ukr.net

Друк ТДВ „Патент”, 88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4078 від 31.05.2011