III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії
Київ, 31.01.2020
10 клас
Перед тим, як приступити до роботи уважно ознайомтеся з рекомендаціями щодо її виконання (на зворотньому боці завдання)!

1. Дві зорі. Дві зорі мають температури $T_A = 10000\ K$ та $T_B = 5700\ K$. Радіуси зір відносятся як $R_A/R_B = 3/2$. Знайдіть різницю їх абсолютних зоряних величин.

Розв'язок

За законом Стефана-Больцмана, світність зорі пропорційна до квадрату радіуса та до четвертої степені температури: $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$. Тоді для відношення світностей матимемо:

$$\frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^4$$

Далі, за формулою Погсона, знаходимо різницю абсолютних зоряних величин. Абсолютна зоряна величина — значення видимої зоряної величини, яку б побачив спостерігач, якби знаходився на відстані 10 пк від спостережуваної зорі. Тоді відношення освітленостей, які створюватимуть зорі, дорівнюватиме відношенню світностей:

$$\Delta M = M_1 - M_2 = -2.5 \lg \frac{E_1}{E_2} = -2.5 \lg \frac{L_1}{L_2} = -5 \lg \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = -5 \lg \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{10000K}{5700K}\right)^2 = -3.32^m$$

2. Швидкий супутник. Розрахуйте максимальну кутову швидкість, із якою може рухатися штучний супутник Землі із вимкненими двигунами відносно зірок при спостереженнях із поверхні планети. Вважайте, що висота атмосфери дорівнює $H = 100$ км.

Розв'язок

Найбільшим значення кутової швидкості буде, якщо швидкість відносного руху земного спостерігача та супутника буде максимальною, а відстань між ними — мінімальною. Цього можна досягти, якщо супутник рухатиметься витягнутою еліптичною орбітою з великим ексцентриситетом, яка лежить у площині екватора, а спостерігач знаходитиметься на екваторі. Тоді у момент проходження перигею, швидкість космічного апарата наближатиметься до другої космічної швидкості — $v_{II} = 11.2$ км/с, а швидкість земного спостерігача, за рахунок обертання Землі, складатиме $v_{\oplus} = \dfrac{2\pi R_{\oplus}}{T} = 0.46$ км/с. Найменша відстань, яка може бути між супутником та спостерігачем становить близько 100 - 150 км. Для оцінки приймемо $r = 100$ км. Тоді кутова швидкість буде рівною $\omega = \dfrac{v_{II} + v_{\oplus}}{r} = \dfrac{(0.46 + 11.2)\text{ км/с}}{100\text{ км}} = 0.117$ рад/с $= 6,65\ ^\circ$/с

3. Близнюки Землі. Щоб задетектувати планету, схожу за характеристиками на нашу Землю, необхідні досить точні спектрографічні виміри доплерівських зсувів спектру материнської зорі. Оцініть максимальну амплітуду періодичної зміни радіальної швидкості, у м/с, з якою буде рухатися материнська зоря з масою, рівною масі Сонця, за наявності у неї планети типу Землі. Розрахуйте величину доплерівського зсуву лінії H_α (довжина 656,28 нм) у спектрі такої зорі. Вважайте орбіту планети коловою. Маса Землі складає $5,97 \cdot 10^{24}$ кг, а маса Сонця — $1,99 \cdot 10^{30}$ кг.

Розв'язок

Розглянемо систему, що складається із зорі з масою $M_\odot$ та планети масою $M_\oplus$, що знаходяться на відстані $r = 1$ а.о. одна від одної. Два тіла обертатимуться навколо спільного центра мас. Визначаємо тепер швидкість руху зорі за законом тяжіння, визначенням центру мас та другим законом Ньютона.

З визначення центру мас:

$$M_\odot r_\odot = M_\oplus (r - r_\odot)$$

$$r_\odot = \frac{M_\oplus}{M_\oplus + M_\odot} r$$

Де $r_\odot$ — відстань від центру Сонця до центру мас.

За другим законом Ньютона:

$$F = ma$$

$$G\frac{M_\oplus M_\odot}{r^2} = M_\odot \frac{v_\odot^2}{r_\odot}$$

$$v_\odot^2 = G\frac{M_\oplus r_\odot}{r^2} = \frac{GM_\oplus^2}{(M_\odot + M_\oplus)r}$$

Взявши корінь з обох сторін рівності та підставивши числові значення отримаємо $v_\odot = 0,089$ м/с. Розрахуємо тепер величину доплерівського зсуву, вважаючи, що вектори швидкості та напрямку на спостерігача коллінеарні.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_\odot}{c}$$

$$\Delta\lambda = \frac{v_\odot \cdot \lambda}{c} = 1,95 \cdot 10^{-7} \text{ нм}$$

4. Сонце та Місяць. Сонце та Місяць у фазі першої чверті одночасно заходять за горизонт. Визначте можливу широту місця спостереження. Нахил орбіти Місяця відносно екліптики складає $5,15°$. Рефракцію та паралакс Місяця не враховуйте. Розрахунок вести для центрів дисків.

Розв'язок

Оскільки в умові задачі сказано, що Місяць знаходився у фазі першої чверті, то кут між напрямками на Місяць та Сонце становив $90°$, причому Місяць знаходився на схід від Сонця. Сонце завжди знаходиться на екліптиці, а Місяць може відходити від неї лише на величину нахилу своєї орбіти — $i = 5,15°$. Тому можна сказати, що спостереження проводилися у місцевості, де площина екліптики може співпасти з площиною математичного горизонту спостерігача у межах кута нахилу орбіти Місяця. Екліптика може співпасти з математичним горизонтом на широтах $\varphi = \pm(90° - \varepsilon) = \pm(90 - 23.45°) = \pm 66.55°$. Отже, можливі місця для спостережнь мають широту у межах $\varphi = \pm(90° - \varepsilon) \pm i \Rightarrow [61,4°; 71,7°]$ та $[-71,7°; -61,4°]$.

5. Зоряний танок. Три зорі з масами M знаходяться на одній прямій та обертаються навколо середньої. Відстані від крайніх зір до центральної однакові. Визначте період обертання системи.

Розв'язок

Нехай відстань між крайніми зорями рівна $2r$. Знайдемо силу, із якою крайня зоря притягується до центру. Вона складатиметься із суми сил тяжіння центральної зорі та іншої крайньої:

$$F = \frac{GM^2}{r^2} + \frac{GM^2}{(2r)^2} = \frac{5GM^2}{4r^2}$$

Використовуємо другий закон Ньютона:

$$F = M\omega^2 r = M\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\frac{5}{4}\frac{GM^2}{r^2} = M\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

Звідси отримаємо вираз, схожий на третій закон Кеплера, але з множником $\frac{4}{5}$

$$T^2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

Остаточно

$$T = \left(\frac{16\pi^2}{5}\frac{r^3}{GM}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Слід зазначити, що така система не є стійкою та завершить своє існування через певну кількість обертів.