Міністерство освіти і науки України
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LXXV Київська міська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв’язань задач

1 тур

19 січня 2020 року

*"Різниця між невдачею та успіхом є у тому,
щоб зробити щось "майже вірно" та "абсолютно вірною"
Едвард Сіммонз*

7 клас

1. Знайдіть усі пари (m, n) натуральних чисел, які задовольняють рівність
$$m^{10} + 23mn + n! = 2020,$$
де через $n\,!$ позначений добуток усіх натуральних чисел від 1 до n.

Відповідь: $(2, 6)$.

Розв'язання. При $m \ge 3$ $m^{10} \ge 3^{10} > 3^7 = 2187 > 2020$ і задана рівність не справджується. Тому для m є два можливі значення: $m = 1$ або $m = 2$.
Якщо $m = 1$, то рівність набуває вигляду $23n + n! = 2019$. Оскільки $7! = 5040 > 2019$, то $n \le 6$. Для $n \le 6$ $23n + n! \le 138 + 720 < 2019$, і в цьому випадку шуканих пар чисел не існує.
Якщо $m = 2$, то рівність набуває вигляду $46n + n! = 996$. Знову маємо, що $n \le 6$. Для $n = 6$ $46n + n! = 276 + 720 = 996$, умову задовольняє. Зрозуміло, що при менших значеннях n ліва частина приймає менші значення і більше шуканих пар не існує.

2. Віка загадала слово з 20 букв, кожна з яких є A чи B. Олексій намагається його визначити. За одне запитання він може дізнатися таку інформацію про декілька літер (можливо про одну), що йдуть поспіль: яких серед них більше – A чи B, якщо їх порівну, то Віка може назвати будь-яку з двох літер. За яку найменшу кількість запитань Олексій гарантовано зможе повністю визначити слово, що задумала Віка?

Відповідь: за 20.
Розв'язання. Як вгадати слово за 20 ходів – очевидно, достатньо просто перепитати про кожну букву окремо.
Покажемо, що меншою кількістю запитань обійтися не можна. Припустимо, що він упорався не більше ніж за 19 запитань. Нехай, наприклад, Віка загадала слово, що складається з 20 літер A. Зрозуміло тоді, що Віка кожного разу відповідала, що букв A більше. Оскільки питань менше 20, то існує позиція, про яку окремо Олексій не перепитував. Нехай це позиція t. Тоді розглянемо ще й слово, в якому усі літери A, а на позиції t стоятиме B. Неважко зрозуміти, що Віка на кожне запитання для обох цих слів могла відповідати однаково. Отже, Олексій не зможе вказати, яке з цих двох слів загадала Віка

3. Відомо, що команда після x ігор в чемпіонаті мала рівно $n\%$ перемог, де x, n – натуральні числа. При якому найменшому x могло так статися, що після $x+1$ гри в неї стало рівно $(n+1)\%$ перемог?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $x = 24$.
Розв'язання. З умов задачі випливає, що на момент після x ігор команда мала y перемог, при цьому $\frac{y}{x} = \frac{n}{100}$. Тоді має виконуватися таке співвідношення: $\frac{y+1}{x+1} = \frac{n+1}{100}$.
З першої пропорції маємо, що $100y = nx$, при цьому nx має ділитися націло на 100.
З другої пропорції матимемо, що $100y + 100 = nx + x + n + 1 \Rightarrow$
$$100 = x + n + 1.$$
Звідси зрозуміло, що $x = 100 - n - 1 \le 98$. Крім того, $n = 100 - x - 1 \Rightarrow xn = 100x - x^2 - x$. Звідси випливає, що на 100 має ділитися вираз $x^2 + x$. Оскільки $x^2 + x = x(x+1)$ та числа x і

$x+1$ взаємно прості і менші за 100, то одне з цих чисел має ділитися на 4, а інше – на 25. Очевидно, що найменше з цих чисел – це $x=24$. Тоді послідовно знаходимо, що $n=75$ та $y=18$. Неважко перевірити, що $\frac{y}{x}=\frac{18}{24}=75\%$ та $\frac{y+1}{x+1}=\frac{19}{25}=76\%$.

4. Заданий квадрат $ABCD$ зі стороною 10. На сторонах BC та AD цього квадрату вибрані відповідно точки E та F таким чином, що утворився прямокутник $ABEF$. Прямокутник $KLMN$ розташований таким чином, що його вершини K, L, M та N лежать по одній на відрізках CD, DF, FE та EC відповідно. Виявилося, що прямокутники $ABEF$ та $KLMN$ рівні, при цьому $AB=MN$. Знайдіть довжину відрізку AL.

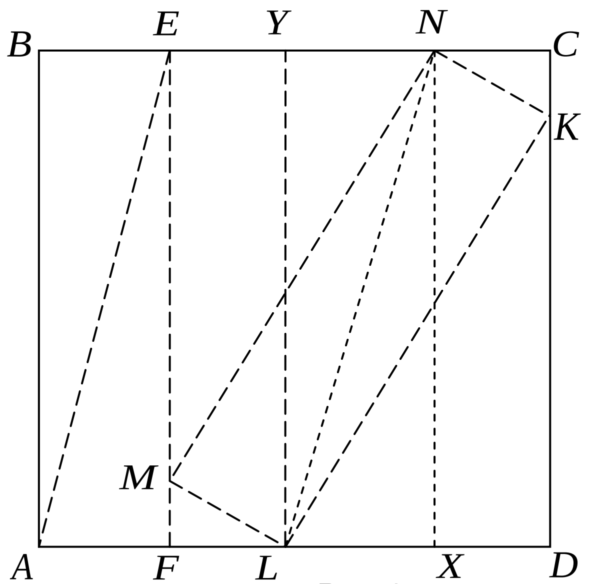


Рис. 1

Відповідь: 5.

Розв'язання. Проведемо діагоналі AE та LN рівних прямокутників $ABEF$ та $KLMN$. Зрозуміло, що $AE=LN$. Опустимо перпендикуляр NX на сторону AD (рис. 1). Тоді зрозуміло, що $NX=AB=10$. Тоді $\Delta AEF=\Delta NXL$, як прямокутні з однаковими гіпотенузами та катетами. Тому $AF=LX$. Тепер проведемо $LY\perp BC$, тоді прямокутник $LXNY$ рівний прямокутникам $ABEF$ та $KLMN$. Тоді $\Delta LNY=\Delta NXL$ як прямокутні з рівними гіпотенузами та катетами. Звідси

$$\angle MNE=\angle LNY-\angle LNM=\angle NLX-\angle NLK=\angle KLD,$$

тоді $\Delta MNE=\Delta KLD$ як прямокутні з рівними гіпотенузами та гострими кутами.
Тепер отримали, що $LD=NE=BY=AL$, звідки L – середина відрізку AD, тому $AL=5$.

3.1. Скільки різних простих дільників має число 11^8+11^7-132?

Відповідь: 7 різних простих дільників.

Розв'язання. Зробимо такі перетворення:

$$11^8+11^7-132=11^6\cdot(11^2+11)-132=11^6\cdot 132-132=132\cdot(11^6-1).$$

Оскільки $132=11\cdot 12=2^2\cdot 3\cdot 11$, то воно має три прості дільники $2, 3, 11$.

$$11^6-1=(11^3-1)(11^3-1)=(11-1)(11^2+11+1)(11+1)(11^2-11+1)=$$
$$=10\cdot 133\cdot 12\cdot 111=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 19\cdot 37$$

Тут маємо ще такі прості дільники 5, 7, 19, 37.

4.1. У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і BC рівні. Точка E на прямій AB така, що $BD=BE$ та $AD\perp DE$. Доведіть, що серединні перпендикуляри до відрізків AD, CD та CE перетинаються в одній точці.

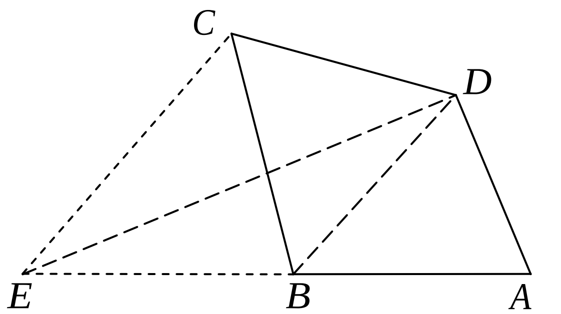


Рис. 2

Розв'язання. Оскільки ΔBDE – рівнобедрений з основою DE, то $\angle BDE=\angle BED<90°$. Оскільки $\angle AED<90°$, то точки B та E лежать по один бік від точки E. Крім того $\angle BED < 90° = \angle ADE$, то точка B лежить на відрізку AE (рис. 2). Далі маємо, що

$$\angle BAD = \angle EAD = 180° - \angle ADE - \angle AED =$$
$$= 90° - \angle BED = 90° - \angle BDE = \angle ADE - \angle BDE = \angle BDA.$$

Таким чином ΔBAD – рівнобедрений з основою AD. Тоді $BA = BD$. Але тоді з умов задачі $BC = BA = BD = BE$. Звідси з властивості серединного перпендикуляра до основи рівнобедреного трикутника, відрізки AD, CD та CE проходять через точку B, що й треба було довести.

8 клас

1. Знайдіть усі можливі натуральні числа n такі, що менші ніж 1% від числа 2020, а число $n+1$ більше ніж 1% від числа 2019.

Відповідь: 20.

Розв'язання. Запишемо умову задачі таким чином: $\frac{n}{2020} < \frac{1}{100} < \frac{n+1}{2019}$.

З лівої нерівності матимемо, що $\frac{10n}{20200} < \frac{202}{20200}$, звідки $n \le 20$. Тепер якщо підставити в праву нерівність $n = 20$, то матимемо що вона справджується: $\frac{21}{2019} > \frac{1}{100} \Leftrightarrow 2100 > 2019$, а для $n \le 19$ – ні, оскільки $\frac{n+1}{2019} \le \frac{20}{2019} < \frac{20}{2000} = \frac{1}{100}$. Таким чином єдине шукане число $n = 20$.

2. Вася виписав всі семицифрові числа, що містять кожну цифру від 1 до 7 рівно один раз. Доведіть, що жодне з виписаних чисел не ділиться на жодне інше з цих чисел.

(Тригуб Антон)

Розв'язання. Припустимо, що одне з цих чисел a ділиться націло на інше, наприклад, b, тобто, для деякого натурального $n > 1$ маємо $a = nb$. Оскільки числа a та b мають остачу 1 при діленні 9, то число n також має остачу 1 при діленні 9. Оскільки $n \ne 1$, то $n \ge 10$, тому в числі a принаймні на одну цифру більше, ніж в b, що неможливо.

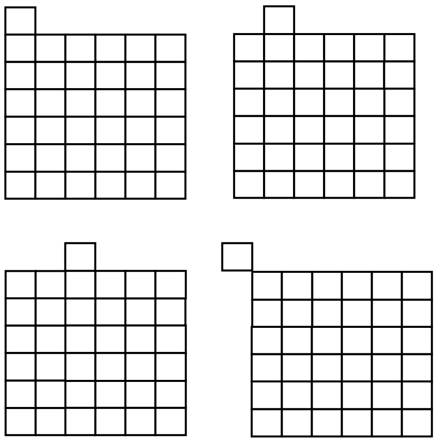


Рис. 3

3. Назвемо *квазіквадратом* фігуру, що складається з квадрату $n \times n$, до якої зовні приєднано ще один квадратик 1×1, що має спільну сторону з одним з квадратиків квадрату $n \times n$, а також спільну вершину з одним з кутових квадратиків квадрату $n \times n$. Так на рис. 3 дві верхні фігурки є квазіквадратами, а дві нижні – ні. Для яких $n \ge 3$ можна однаковими квазіквадратами заповнити усю площину? Квазіквадрати не мають накладатися один на інший, але їх можна повертати та перегортати.

(Ніколаєв Арсеній)

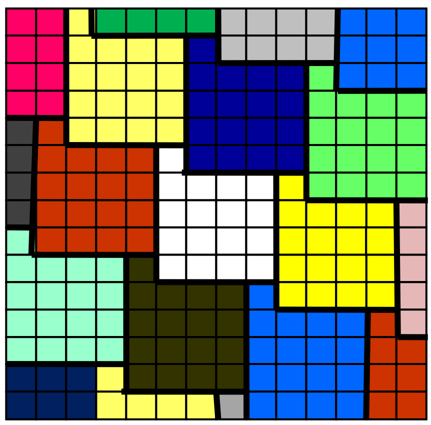


Рис. 4

Відповідь: для усіх $n \ge 3$.

Розв'язання. Приклад заповнення площини показаний на рис. 4, для випадку якщо квадратик 1×1 має спільну сторону з кутовим квадратом. На рис. 5, якщо він має спільну вершину, але не сторону, з кутовим квадратиком квадрату $n\times n$.

4. Є n вибрані попарно різні додатні числа. Вася виписав на дошку всі можливі числа вигляду $a+\frac{b}{c}$, де a, b, c – різні числа з вибраних. Чи завжди серед виписаних чисел знайдуться два, що відрізняються не більше, ніж у 2 рази, якщо

а) $n=4$? ***б)*** $n=3$?

(Тригуб Антон)

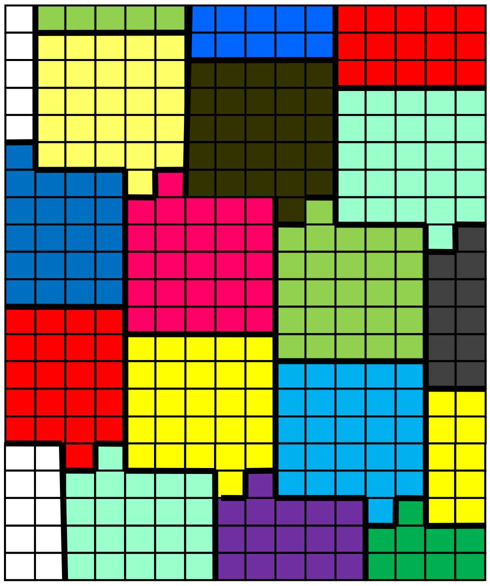


Рис. 5

Відповідь: ***а)*** завжди, ***б)*** не завжди.

Розв'язання*.** ***а) Покажемо, що для чотирьох чисел завжди знайдуться два виписані числа, що відрізняються не більше, ніж в 2 рази. Від супротивного, припустимо, що це не так. Позначимо наші числа через $a<b<c<d$. Тоді $d+\frac{b}{a}>c+\frac{b}{a} \Rightarrow d+\frac{b}{a}>2(c+\frac{b}{a}) \Rightarrow d>\frac{b}{a}>1$.

З іншого боку, $d+\frac{b}{c}>d+\frac{a}{c} \Rightarrow d+\frac{b}{c}>2(d+\frac{a}{c}) \Rightarrow d<\frac{b}{c}<1$. Одержана суперечність завершує доведення.

б) Наведемо тепер приклад для трьох чисел: $a=10^{-1}$, $b=10^{-3}$ та $c=10^{-9}$. Тоді на дошці виписані такі числа:

$$10^{-1}+10^{6},\ 10^{-1}+10^{-6},\ 10^{-3}+10^{8},\ 10^{-3}+10^{-8},\ 10^{-9}+10^{2},\ 10^{-9}+10^{-2}.$$

5. Дано трикутник ABC, O – центр описаного кола, M – середина BC, W – точка другого перетину бісектриси кута C з цим колом. Пряма, що паралельна BC і проходить через W, перетинає AB в точці K так, що $BK=BO$. Знайдіть величину кута WMB.

(Тригуб Антон)

Відповідь: 45°.

***Розв'язання*.** Нехай пряма, що проходить через точку W паралельно AB, перетинає пряму BC в точці T (рис. 6). Тоді, $KWTB$ – паралелограм і:

$$WT=BK=BO=WO.$$

Помітимо також, що $WO\perp AB$, бо ΔABO рівнобедрений, а CW – бісектриса $\angle BCA$, тому $\angle OWT=90^\circ$. Також, очевидно, $\angle OMT=90^\circ$, тому $OWTM$ – вписаний з діаметром OT. Тоді, оскільки $WT=WO$, то MW – бісектриса $\angle OMT$, звідки $\angle WMT=45^\circ$.

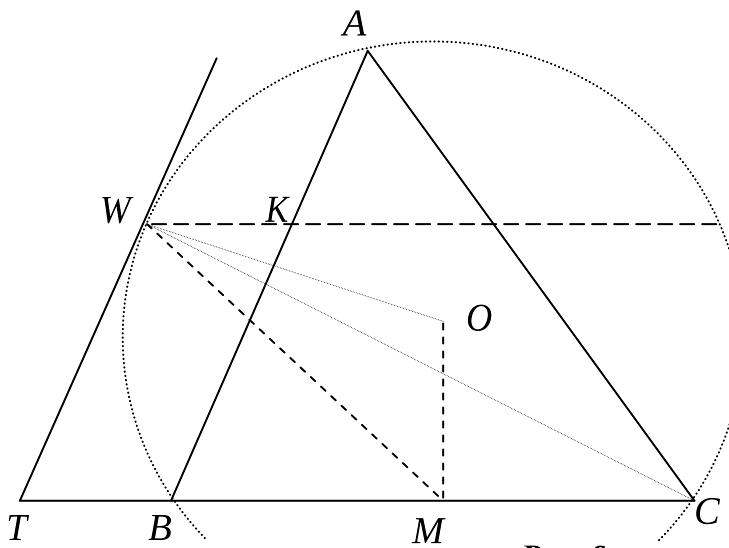


Рис. 6

4.1. Знайдіть усі натуральні числа m та n, які задовольняють рівність:

$$(m+n)!=2m!\cdot n!,$$

де через $k!$ для натурального числа k позначений добуток $1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$.

Відповідь: $m = n = 1$.

Розв'язання. Без обмеження загальності вважатимемо, що $m \geq n$. Тоді при $n > 1$ скоротимо задану рівність таким чином:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots \cdot (m+n) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \Rightarrow$$

$$(m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots \cdot (m+n) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

У лівій частині усі множники не менше ніж у правій, якщо їх записати таким чином:

$$m+1 > 1,\ m+2 > 2,\ \ldots,\ m+n-1 > n-1,\ m+n \geq 2n.$$

Оскільки множник $m+1$ завжди існує та $m+1>1$, то рівність не виконується. При $n = 1$ рівність $(m+1)! = 2m!$ виконується лише при $m+1=2$. Отже єдиний розв'язок $m = n = 1$.

5.1. Нехай $ABCDEF$ – вписаний у коло шестикутник, у якого $AB = BC$, $CD = DE$ та $EF = FA$. Доведіть, що прямі AD, BE та CF перетинаються в одній точці.

Розв'язання. З рівності $AB = BC$ маємо, що $\angle AEB = \angle BEC$, то EB – бісектриса ΔACE, те саме можна сказати про AD та CF (рис. 7). Звідси випливає, що вони перетинаються в одній точці.

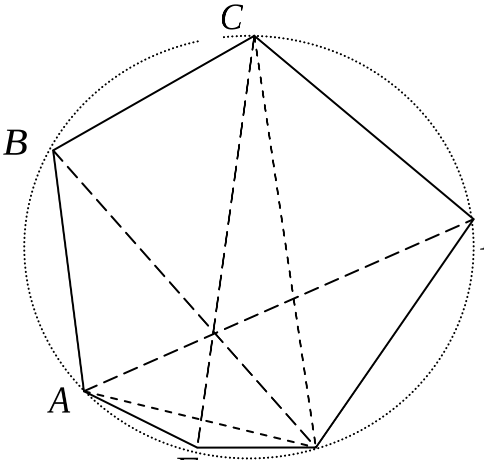


Рис. 7

9 клас

1. Доведіть, що не існує різних натуральних чисел a і b, для яких $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}+\left\{\frac{b}{a}\right\}\right\}=0$.

Тут через $\{x\}$ позначена різниця між числом x та найбільшим цілим числом, що не перевищує x, наприклад, $\left\{\frac{7}{5}\right\}=\frac{2}{5}$, $\left\{\frac{2019}{3}\right\}=0$ та $\left\{\frac{2020}{3}\right\}=\frac{1}{3}$.

Розв'язання. Припустимо, що такі числа a та b існують. Без обмеження загальності розгляду можна вважати, що вони взаємно прості. З умови задачі випливає, що число $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$ – ціле. Але тоді число a^2+b^2 має ділитися і на a, і на b. Але тоді $b^2 \vdots a$ та $a^2 \vdots b$, що суперечить взаємній простоті чисел a та b.

2. Задане деяке просте число $p > 2$. По колу стоять N людей, кожний з яких задумав деяке натуральне число, а далі на своєму папірці написав остачу від ділення свого числа на p. Далі кожний подивився на записане на папірці число сусіда справа, розглянув добуток свого записаного числа та підглянутого числа сусіда та на своєму папірці написав друге число, що дорівнює остачі від ділення обчисленого добутку на p. Яке максимальне значення може приймати N, якщо усі перші числа в усіх людей різні, а крім того у кожного на папірці записані два різних числа?

(Терьошин Олександр)

Відповідь: $N = p-2$.

Розв'язання. Зрозуміло, що усього різних чисел може бути записане не більше p. Виходячи з умов задачі, не може бути записаним на першому кроці число 0, бо інакше ця людина знову його запише,

а також число 1, бо тоді сусід зліва повторить своє число. Покажемо, що для $N = p-2$ числа можуть бути записаними.
Дійсно нехай по колу зліва направо записують послідовні числа $2, 3, 4, \ldots, p-1$. Усі вони різні. Тепер припустимо, що співпали два числа у однієї людини. Якщо це людина серед перших $N-1$, то Це означає, що добуток $k(k+1)$, де $2 \le k \le p-2$, двох сусідніх чисел має ту саму остачу при діленні на p, що й число k. Але тоді їхня різниця ділиться на p, тобто $k(k+1)-k = k^2$, ділиться націло на просте число p, тому $k \vdots p$, що не можливо. Якщо це людина з номером N, то число $p-1$ має множитися на 2, але знову числа будуть різними, бо $2(p-1)-(p-1) = p-1$ не ділиться на p.

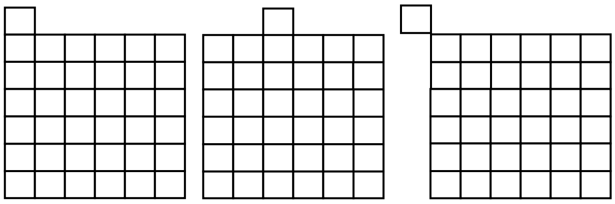


Рис. 8

3. Назвемо *квазіквадратом* фігуру, що складається з квадрату $n \times n$, $n \ge 4$, до якої зовні приєднано ще один квадратик 1×1, що має спільну сторону з одним з квадратів квадрату $n \times n$. Так на рис. 8 дві перші фігурки є квазіквадратами, третя – ні. Чи завжди можна такими однаковими квазіквадратами покрити усю площину? Квазіквадрати не мають накладатися один на інший, але їх можна повертати та перегортати.

(Ніколаєв Арсеній)

Відповідь: так, якщо квадратик 1×1 має спільний кут з кутовим квадратиком, ні – інакше.
Розв'язання. Приклад заповнення площини у **задачі 8.3**.
Покажемо, що при приєднанні квадрату 1×1 в інше місце всю площину покрити неможливо. Розглянемо одну таку фігуру (рис. 9). Тоді жовту клітину можна покрити одним з двох способів. Якщо її закриває додана до квадрату $n \times n$ клітинка (рис. 10), то покрити чорну клітинку вже неможливо. Якщо жовту клітинку закриває одна з клітин квадрату $n \times n$, то це може бути лише одна з кутових клітин цього квадрату. Але тоді покрити одночасно обидві чорні клітинки вже не можливо (рис. 11).

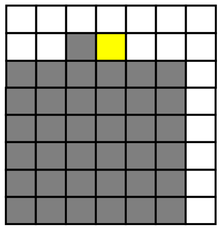


Рис. 9

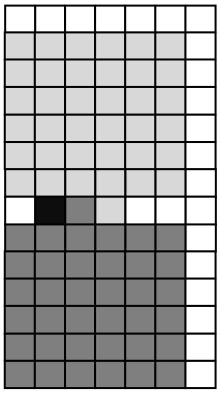


Рис. 10

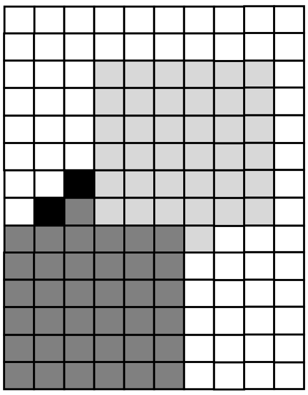


Рис. 11

4. Нехай точка D лежить на дузі AC описаного кола трикутника ABC ($AB < BC$), що не містить точку B. На стороні AC вибрані довільна точка X та точка X', для якої $\angle ABX = \angle CBX'$. Доведіть, що незалежно від вибору точки X, коло, яке описане навколо $\Delta DXX'$, проходить через фіксовану точку, що відмінна від точки D.

(Ніколаєв Арсеній)

Розв'язання. Нехай W – описане коло ΔABC, w – коло описане навколо $\Delta BXX'$ та v – коло описане навколо $\Delta DXX'$. Проведемо дотичну TB до кола W, де точка T на прямій AC. Тоді $TB^2 = TA \cdot TC$, також (рис. 12)

$$\angle TBX = \angle TBA + \angle ABX = \angle ACB + \angle CBX' = \angle BX'X.$$

Тому пряма TB водночас є дотичною до кола w, тому $TB^2 = TX \cdot TX'$. Нехай $w \cap TD = F \ne D$. Тоді $TX \cdot TX' = TF \cdot TD = TB^2$. Тому точки X, X', D, F лежать на одному колі v (за достатньою умовою вписаності чотирикутника). Оскільки T, B та D – фіксовані точки, то і точка $W \cap TD = F$ – фіксована.

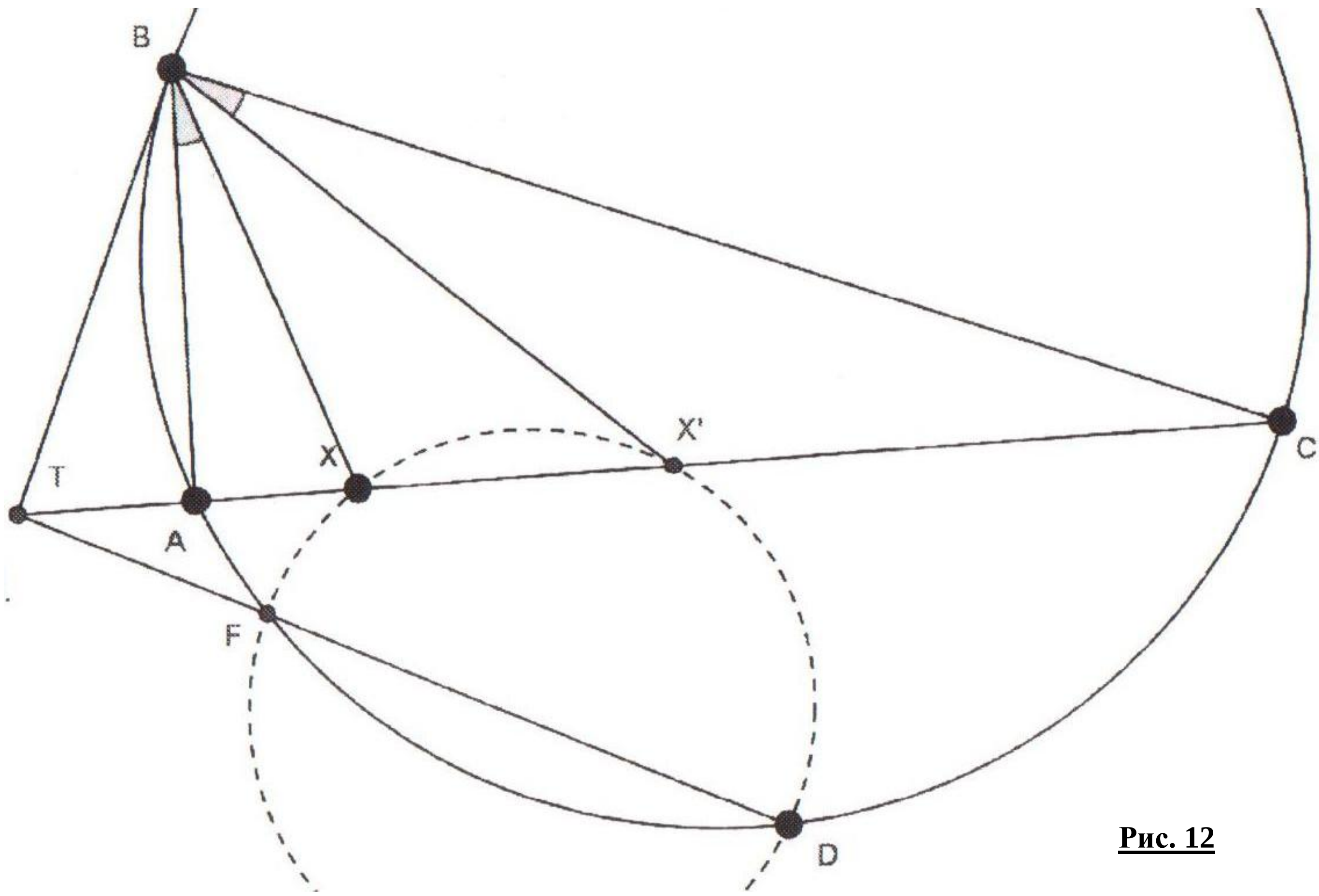


Рис. 12

5. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+6 \ge 9\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

(Митрофанов Вадим)

Розв'язання. Віднімемо 9 від обох сторін початкової нерівності та скористаємося відомою тотожністю

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Далі зробимо такі рівносильні перетворення:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}-3 \ge 9\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}-9 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}-3 \ge 9\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}-9 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc-3abc}{abc} \ge \frac{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{ab+bc+ca} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{abc} \ge \frac{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{ab+bc+ca} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\big((a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc\big)}{abc\big(ab+bc+ca\big)} \ge 0.$$

Остання нерівність справджується, оскільки

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \ge 0 \text{ та } (a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc \ge 0.$$

З нерівності трьох квадратів:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0 \iff a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \iff$$
$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \Rightarrow (a+b+c)^6 \ge 3^3(ab+bc+ca)^3 \ge 27\cdot 27(abc)^2 \Rightarrow$$
$$(a+b+c)^3 \ge 27abc.$$

А також $\left(\frac{1}{3}(x+y+z)\right)^3 \ge xyz \Rightarrow (ab+bc+ca)^3 \ge 27a^2b^2c^2$.

Тобто $(a+b+c)^3(ab+bc+ca)^3 \ge (9abc)^3$.

4.1. На колі вибрані точки A, B, C, D таким чином, що $AB = BC = CD$. Бісектриси $\angle ABD$ та $\angle ACD$ перетинаються у точці E. Знайдіть $\angle ABC$, якщо відомо, що $AE \parallel CD$.

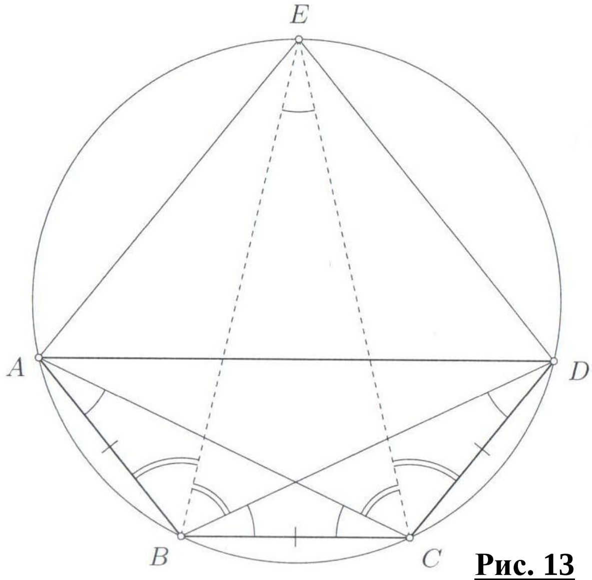


Рис. 13

Відповідь: $\angle ABC = \frac{5}{7}\cdot 180°$.

Розв'язання. Оскільки $\Delta ABC = \Delta DCB$ як рівнобедрені з однаковим кутом x при основі та рівними бічними сторонами (рис. 13). $ABCD$ – вписана рівнобічна трапеція. Звідси

$$\angle ABC = \angle BCD = 180° - 2x \Rightarrow$$
$$\angle ABD = \angle ACD = 180° - 3x \Rightarrow$$
$$\angle EBC = \angle ECB = 90° - \tfrac{1}{2}x \text{ та } \angle BEC = x.$$

Таким чином E належить тому самому колу, що й точки A, B, C, D. Крім того

$$\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = \angle ACB + \angle BDC = x + x = 2x \text{ та } \angle ECD = \tfrac{1}{2}\angle ACD = 90° - \tfrac{3}{2}x.$$

Оскільки $AE \parallel CD$, то вписаний чотирикутник $ACDE$ – рівнобічна трапеція, тому $\angle ADC = \angle ECD$ та $7x = 180° \Rightarrow \angle ABC = \frac{5}{7}\cdot 180°$.

5.1. Для довільних дійсних чисел $a, b, c \ge 1$ доведіть нерівність:

$$3abc + a + b + c \ge 2(ab+bc+ca).$$

За яких умов в цій нерівності можлива рівність?

Відповідь: рівність можлива коли принаймні дві з трьох змінних a, b, c дорівнюють 1.

Розв'язання. Визначимо невід'ємні числа $x = a-1,\ y = b-1$ та $z = c-1$. Тоді задана нерівність перепишеться як $3xyz + xy + yz + zx \ge 0$, що справджується, бо усі доданки ліворуч – невід'ємні.

В останньому співвідношенні рівність можлива лише, якщо кожний доданок дорівнює 0, а це можливо тоді і тільки тоді, коли принаймні дві з трьох змінних x, y, z дорівнюють 0.

10 клас

1. Чи існують попарно різні натуральні числа a, b та c, для яких $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}+\left\{\frac{b}{c}\right\}+\left\{\frac{c}{a}\right\}\right\}=0$? Дроби не обов'язково мають бути нескоротними.

Тут через $\{x\}$ позначена різниця між числом x та найбільшим цілим числом, що не перевищує x, наприклад, $\left\{\frac{7}{5}\right\}=\frac{2}{5}$, $\left\{\frac{2019}{3}\right\}=0$ та $\left\{\frac{2020}{3}\right\}=\frac{1}{3}$.

Відповідь: так.

Розв'язання. Джерелом для пошуку прикладу є рівність: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Очевидно, що нескоротними дроби бути не можуть, тому вибираємо $\left\{\frac{2}{12}\right\}=\left\{\frac{1}{6}\right\}=\frac{1}{6}$. Далі $\left\{\frac{12}{9}\right\}=\left\{\frac{4}{3}\right\}=\frac{1}{3}$ та $\left\{\frac{9}{2}\right\}=\frac{1}{2}$. Тоді $\left\{\frac{2}{12}\right\}+\left\{\frac{12}{9}\right\}+\left\{\frac{9}{2}\right\}=1$ та $\{1\}=0$.

Інший приклад базується на рівності $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=1 \Rightarrow \left\{\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{2}{4}\right\}+\left\{\frac{4}{1}\right\}=1$.

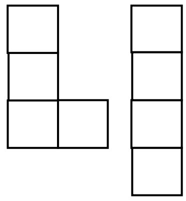


Рис. 14

2. Доведіть, що серед чисел $1, 2, \ldots, 10000$ можна вибрати 7 попарно різних чисел, які не є квадратами натуральних чисел, так, щоб не можна було з цих 7 чисел вибрати декілька, сума яких була б квадратом натурального числа.

(Ніколаєв Арсеній)

Розв'язання. Розглянемо такі 7 чисел 2^1, 2^3, …, $2^{13}=8192<10000$. Зрозуміло, що при виборі будь-якої кількості з цих чисел їхня сума буде ділитися на максимальний степінь числа 2, у якого показник степеня буде непарним числом, а тому квадратом бути не може.

3. Чи можна непарною кількістю L-тетраміно і деякою кількістю прямих тетраміно (рис. 14) замостити деякий прямокутник? Тетраміно не можуть виходити за межі прямокутника, кожна клітинка прямокутника має бути покрита рівно одним тетраміно.

(Туркевич Едвард)

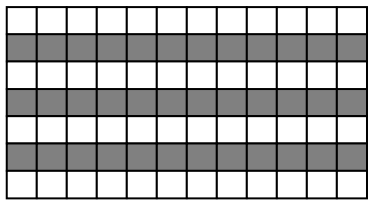


Рис. 15

Відповідь: не можна.

Розв'язання. Площа прямокутника повинна бути кратна чотирьом, тому кількість вертикалей або кількість горизонталей прямокутника має бути парним числом. Нехай це буде кількість вертикалей. Зафарбуємо кожну другу горизонталь (рис. 15). Зафарбованих клітин буде парна кількість. Кожне пряме тетраміно покриває парну кількість зафарбованих клітин, а кожне L тетраміно покриває непарну кількість зафарбованих клітин. Тому кількість L тетраміно повинна бути парною.

4. Задача 5 за 9 клас.

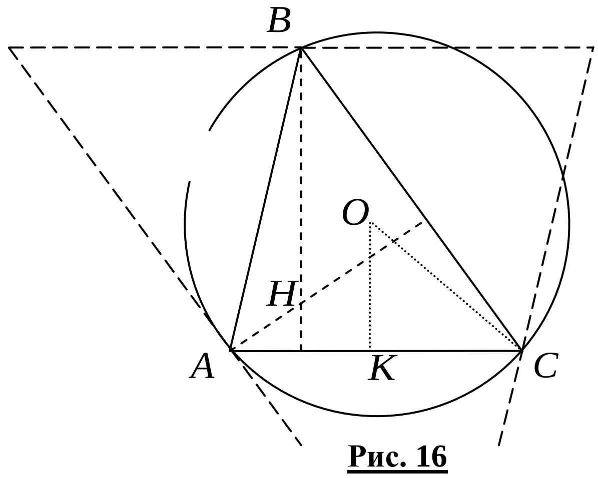


Рис. 16

5. Дано гострокутний нерівнобедрений трикутник ABC, AK та CN – його бісектриси, I – їх точка перетину. Нехай точка X – друга точка перетину кіл, описаних навколо ΔABC та ΔKBN. Нехай M – середина сторони AC. Доведіть, що пряма Ейлера ΔABC перпендикулярна прямій BI тоді і тільки тоді, коли точки X I, та M лежать на одній прямій.

Прямою Ейлера у нерівносторонньому трикутнику називається пряма, що проходить через точку перетину висот, точку перетину медіан та центр описаного кола трикутника.

(Ківва Богдан)

Розв'язання. Спочатку покажемо, що пряма Ейлера трикутника ABC перпендикулярна до прямої BI тоді і тільки тоді, коли $\angle ABC=60°$. Справді, нехай H та O – відповідно ортоцентр та центр описаного кола ΔABC, тоді $\angle HBI=\angle IBO$, та $BI\perp OH \Leftrightarrow BO=BH \Leftrightarrow \sin\angle BAH=\frac{1}{2}$, що з гострокутності ΔABC рівносильне умові $\angle ABC=60°$.

<u>Лема</u>. Якщо в ΔABC O та H – центр описаного кола та ортоцентр відповідно, то $BO = BH$ $\Leftrightarrow$ $\angle ABC = 60^\circ$ або $\sin\angle BAH = \frac{1}{2}$.

Доведення. Побудуємо трикутник, у якого сторони паралельні сторонам ΔABC та проходять через вершини ΔABC (рис. 16), тоді новий трикутник подібний до ΔABC з коефіцієнтом 2. При цьому точка H стає центром описаного кола більшого трикутника, а точка B має відповідною точку K – середину сторони AC. Тоді $BH = 2OK = 2OC\cos\angle COK = 2R\cos\angle ABC$. Звідси з умов задачі випливає, що $BH = BO = R$ і це рівносильне тому, що $\cos\angle ABC = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\angle ABC = 60^\circ$.
Лема доведена.

Тепер покажемо, що $\angle ABC = 60^\circ$ тоді і тільки тоді, коли точки X I, та M – лежать на одній прямій. Зрозуміло, що це завершить доведення задачі.
Нехай пряма XI перетинає сторону в точці M_0. Тоді з теореми синусів для трикутників AIM_0 та CIM_0 (рис. 17). Отримаємо, що

$$\frac{\sin\angle AIM_0}{\sin\angle M_0IC} = \frac{AM_0}{M_0C}\cdot\frac{M_0I}{\sin\angle ICM_0}\cdot\frac{\sin\angle IAM_0}{M_0I} = \frac{AM_0}{M_0C}\cdot\frac{\sin\angle IAM_0}{\sin\angle ICM_0},$$

звідки матимемо $\frac{\sin\angle AIM_0}{\sin\angle CIM_0} = \frac{\sin\angle KIX}{\sin\angle NIX}$. З теореми синусів для трикутників XIK та XIN маємо, що $\frac{\sin\angle KIX}{\sin\angle NIX} = \frac{XK}{XN}\cdot\frac{NI}{KI}\cdot\frac{\sin\angle KXI}{\sin\angle NXI}$.
Зауважимо, що $\Delta XNA \sim \Delta XKC$. Справді, $\angle XAB = \angle XCB$ та $\angle AXN = \angle CXK$, бо $\angle AXC = \angle ABC = \angle NBK = \angle NXK$. Тому, $\frac{KX}{NX} = \frac{KC}{NA}$. Звідки

$$\frac{\sin\angle AIM_0}{\sin\angle CIM_0} = \frac{\sin\angle KIX}{\sin\angle NIX} = \frac{XK}{XN}\cdot\frac{NI}{KI}\cdot\frac{\sin\angle KXI}{\sin\angle NXI} = \frac{KC}{NA}\cdot\frac{NI}{KI}\cdot\frac{\sin\angle KXI}{\sin\angle NXI}.$$

Підставляючи це в рівність зверху отримуємо $\frac{KC}{NA}\cdot\frac{NI}{KI}\cdot\frac{\sin\angle KXI}{\sin\angle NXI} = \frac{AM_0}{CM_0}\cdot\frac{\sin\angle IAM_0}{\sin\angle ICM_0}$, що рівносильне такій рівності:

$$\frac{AM_0}{CM_0} = \frac{KC}{NA}\cdot\frac{NI}{KI}\cdot\frac{\sin\angle KXI}{\sin\angle NXI}\cdot\frac{\sin\angle ICA}{\sin\angle IAC} =$$
$$= \frac{\sin\angle KXI}{\sin\angle NXI}\cdot\left(\frac{\sin\angle ICB}{KI}\cdot\frac{KC}{\sin\angle KIC}\right)\cdot\left(\frac{\sin\angle KIC}{NA}\cdot\frac{NI}{\sin\angle IAB}\right).$$

Але з теореми синусів для трикутників ANI та KIC маємо:

$$\frac{\sin\angle ICB}{KI}\cdot\frac{KC}{\sin\angle KIC} = 1,\ \frac{\sin\angle KIC}{NA}\cdot\frac{NI}{\sin\angle IAB} = 1 \Rightarrow \frac{AM_0}{CM_0} = \frac{\sin\angle KXI}{\sin\angle NXI}.$$

Таким чином, умова, що точки X I, та M лежать на одній прямій рівносильна тому, що справджується рівність гострих кутів $\angle KXI = \angle NXI$
Нехай Y та Z відповідно – точки перетину XI та BI з описаним колом ΔBNK. Тоді, оскільки BI – бісектриса, то Z – середина дуги NK, тобто для рівності $\angle KXI = \angle NXI$ необхідно, щоб $Y \equiv Z$, але тоді або $X \equiv B$, що суперечить нерівнобедреності ΔABC, або I належить описаному колу ΔKBN.

Таким чином, умова, що точки X I, та M лежать на одній прямій рівносильна тому, що точки B, N, K та I – лежать на одному колі, а це, в свою чергу, рівносильне тому, що $\angle ABC = 60° \Leftrightarrow$ $180° - \angle ABC = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC$.

4.1. Менеджери двох компаній розташовані у двох точках на відстані 1000 км. На відрізку, що їх з'єднує, розташовані n точок, у кожній з яких є математик. Щосекунди кожен з математиків рухається в точку, що є серединою відрізку, який з'єднує точку його розташування з найближчою точкою розташування іншого математика чи менеджера. Якщо таких точок не одна, то він рухається до однієї з них. Якщо два математики прибувають у спільну точку за описаним алгоритмом, то молодший з двох залишає гру. Доведіть, що за скінченну кількість секунд кожен з математиків, що лишився, може потиснути руку одному з менеджерів. Математик може потиснути руку, якщо розташується на відстані не більше 1 м від менеджера.

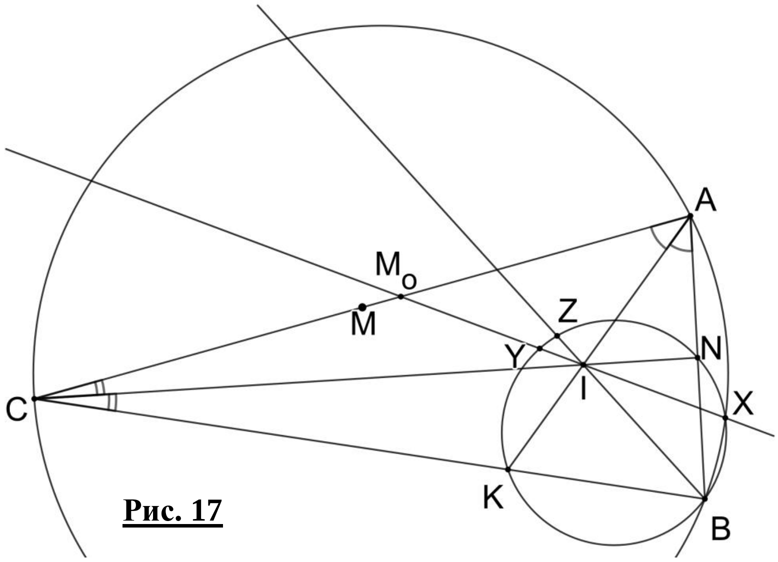


Рис. 17

Розв'язання. Позначимо через $S_0 = \{0, x_1, x_2, ..., x_n, 1000\}$ – початкові позиції розташування математиків та менеджерів, у точках 0 та 1000 розташовані менеджери, у точках $x_1 < x_2 < ... < x_n$ – математики. Через S_i будемо позначати аналогічним чином розташування менеджерів та математиків після i секунд рухів. Зауважимо, що кількість елементів S_i буде зменшуватися, якщо серед двох точок розташування математиків, є дві найближчі друг до друга. Оскільки кількість елементів S_0 – скінченна, то зменшення множини можливе лише скінченну кількість разів, тому існує ціле невід'ємне $N : |S_k| = |S_N|, \ \forall k \geq N$.

Нехай тепер $S_N = \{0, y_1, y_2, ..., y_m, 1000\}$, $0 < y_1 < y_2 < ... < y_m < 1000$, $m \leq n$. Оскільки $|S_{N+1}| = |S_N|$, то

$$y_1 - 0 < y_2 - y_1 < ... < y_t - y_{t-1} < y_{t+1} - y_1 > y_{t+2} - y_{t+1} > ... > y_m - y_{m-1} > 1000 - y_m,$$

тобто для перших t математиків найближчі розташовані лівіше, а для усіх інших – правіше.

Таким чином обидві групи математиків будуть рухатися у своєму напрямі і за скінченну кількість кроків будуть на відстані менше 1 метра від одного з менеджерів, якому й потиснуть руку.

5.1. Нехай Γ – півколо з діаметром AB. На цьому діаметрі вибирається точка C, а на півколі вибираються точки D та E так, що E лежить між B та D. Виявилося, що $\angle ACD = \angle ECB$. Точку перетину дотичних до Γ у точках D та E позначили через F. Доведіть, що $\angle EFD = \angle ACD + \angle ECB$.

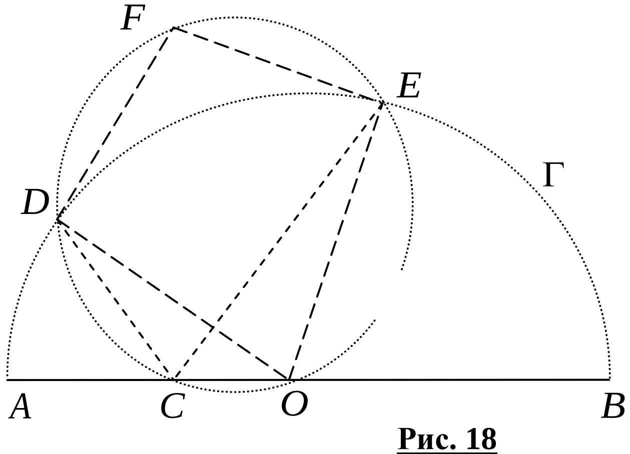


Рис. 18

Розв'язання. Нехай точка O – центр півкола Γ, тоді з властивостей дотичних

$\angle OEF = 90° = \angle FDO$ (рис. 18). Таким чином точки O, E, F, D – циклічні.
Нехай $\angle ACD = \angle ECB = \theta$. З теореми синусів для ΔCOD маємо, що

$$\frac{\sin\angle ODC}{CO} = \frac{\sin\angle DCO}{OD} = \frac{\sin(180° - \theta)}{OD}.$$

Аналогічно для ΔCOE :

$$\frac{\sin\angle OEC}{CO} = \frac{\sin\angle ECO}{OE} = \frac{\sin\theta}{OE}.$$

Оскільки $OD = OE$ як радіуси півкола, то $\sin\angle ODC = \sin\angle OEC$. Оскільки $\angle ODC < \angle BDA = 90°$, то цей кут гострий, так само, як і $\angle OEC$. Тому ці кути рівні і вже п'ять точок O, E, F, D, C – циклічні. Тоді з властивості списаного чотирикутника

$$\angle EFD = 180° - \angle DCE = \angle ACD + \angle ECB.$$

<u>Альтернативне розв'язання</u>. Нехай E' – точка, що симетрична E відносно прямої AB, тоді точка E' лежить на описаному колі ΔAEB і $\angle ACD = \angle BCE = \angle BCE'$ (рис 19), звідки

$$\angle ACD = \angle BCE = \tfrac{1}{2}(\cup AD + \cup BE') = \tfrac{1}{2}(\cup AD + \cup BE) = \tfrac{1}{2}(180° - \cup DE).$$

З іншого боку, DF та FE – дотичні до кола Γ, тому

$$\angle FED = \angle FDE = \tfrac{1}{2}\cup DE \Rightarrow \angle ACD + \angle BCE = 180° - \cup DE =$$
$$= 180° - \angle FED - \angle FDE = \angle DFE,$$

що і треба було довести.

<u>11 клас</u>

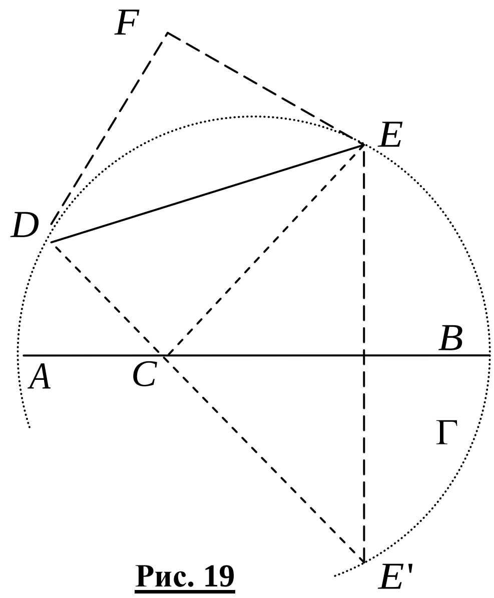
1. З'ясуйте, яке з чисел більше 2 чи $tg1$?

<u>Відповідь</u>: 2.
<u>Розв'язання</u>. Розглянемо такий ланцюжок нерівностей:

$$2 > \sqrt{3} = tg\tfrac{\pi}{3} > tg1.$$

2. Доведіть, що серед чисел $1, 2, \ldots, 10000$ можна вибрати 8 попарно різних чисел, які не є квадратами натуральних чисел, так, щоб не можна було з цих 8 чисел вибрати декілька, сума яких була б квадратом натурального числа.

(Ніколаєв Арсеній)



<u>Рис. 19</u>

<u>Розв'язання</u>. Розглянемо такі 7 чисел 2^1, 2^3, …, $2^{13} = 8192 < 10000$. Зрозуміло, що при виборі будь-якої кількості з цих чисел їхня сума буде ділитися на максимальний степінь числа 2, а у якого показник степеня є непарним числом, а тому квадратом бути не може.
До вибраних раніше чисел приєднаємо число 3. Припустимо, що вдалося вибрати числа, сума яких є квадратом цілого числа. Тоді серед них має бути приєднаним число 3, інакше матимемо суперечність за попередніми міркуваннями. Оскільки квадрат числа при діленні на 8 може давати остачі 0, 1 чи 4 та враховуючи, що сума – непарне число, то єдина можлива одержати остача 1. Але серед обраних восьми чисел при діленні на 8 дають ненульову остачу лише числа 2 та 3, з яких ніяким не можна отримати чином суму з остачею 1 при діленні на 8.

3. Заданий білий квадрат $ABCD$ завбільшки 8×8, що складається з 64 одиничних квадратиків (клітинок) 1×1. За одну дію можна вибрати будь-який

а) квадрат; ***б)*** прямокутник,

що складається з цілої кількості одиничних квадратиків і містить принаймні одну з вершин квадрату $ABCD$, та поміняти в ньому колір кожної клітинки на протилежний (білий замінюється на чорний та навпаки). Чи можна за допомогою таких дій отримати довільне розфарбування клітин квадрату $ABCD$?

(Ніколаєв Арсеній)

Відповідь: ***а)*** ні, ***б)*** так.

Розв'язання. ***а)*** очевидно, що вибрати той самий квадрат та зробити у ньому описану в умові дію двічі рівносильне тому, щоб цю дію взагалі не робити. Тому можна вважати, що кожний з квадратів обирається не більше як 1 раз. Усього різних квадратів, для яких можна виконати вказану дію є 32. Тому різних розфарбувань можна одержати не більше ніж 2^{32}, що менше за 2^{64} – кількість усіх можливих розфарбувань клітинок квадрату у два кольори.

б) Виберемо довільну клітинку дошки (показана чорною) та поміняємо кольори в усіх виділених прямокутниках на протилежні – їх два (рис. 16а), три (рис. 20) або чотири (рис. 16в). Після цього поміняємо колір усього квадрату $ABCD$ на протилежний. Таким чином поміняється колір лише обраної клітини. Таким чином можна отримати довільне розфарбування початкового квадрату у два кольори.

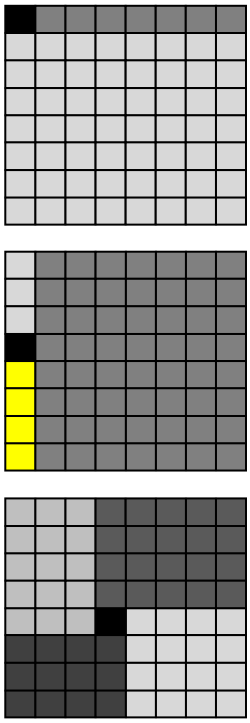


Рис. 20

4. Задача 5 за 10 клас.

5. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a^2+b^2+c^2+abc=4$, доведіть нерівність

$$(4-a^2)(4-b^2)(4-c^2)a^2b^2c^2 \le (2a+bc)(2b+ca)(2c+ab).$$

(Митрофанов Вадим)

Розв'язання. Спочатку доведемо такі леми:

Лема 1. Якщо $\alpha, \beta, \gamma \in (0°, 90°)$ та $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$, то α, β, γ – кути деякого гострокутного трикутника.

Доведення. Розглянемо останню рівність як квадратне рівняння відносно $\cos\gamma$. Його дискримінант дорівнює

$$D=4\cos^2\alpha\cos^2\beta-4\cos^2\alpha-4\cos^2\beta+4=4\sin^2\alpha\sin^2\beta.$$

Звідси

$$\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\sin\beta=-\cos(\alpha\pm\beta).$$

Враховуючи, що $|\alpha-\beta|<90°$, маємо $\cos(\alpha-\beta)>0$, тому рівність $\cos\gamma=-\cos(\alpha-\beta)$ неможлива. Отже,

$$\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)=\cos(180°-\alpha-\beta) \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=180°,$$ оскільки $\alpha+\beta<180°$.

Лема доведена.

Лема 2. Якщо α, β, γ – кути гострокутного трикутника, то справджується нерівність:

$$8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le 1.$$

Доведення. Ця лема є загально відомою, але не важко навести одне з її доведень. Розглянемо три вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{CA}$, що йдуть у вказаному напрямі по сторонах трикутника, а також одиничні вектори e_a, e_b та e_c, що відповідно співнаправлені з векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{CA}$. Кути між ними відповідно $180° - \alpha$, $180° - \beta$ та $180° - \gamma$ у певному порядку. Тоді

$$(e_a + e_a + e_a)(e_a + e_a + e_a) \geq 0 \Leftrightarrow e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + 2e_a e_b + 2e_a e_c + 2e_b e_c \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$3 - 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \geq 0 \Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \tfrac{3}{2} \Rightarrow$$
$$\sqrt[3]{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \leq \tfrac{1}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \leq \tfrac{1}{2}.$$

Лема доведена.

Оскільки $a, b, c < 2$, то існують $\alpha, \beta, \gamma \in (0°, 90°)$ такі, що $a = 2\cos\alpha$, $b = 2\cos\beta$ та $c = 2\cos\gamma$. З умови

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4 \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1,$$

а отже за лемою 1 α, β, γ – кути деякого гострокутного трикутника.
Враховуючи, що

$$4 - a^2 = 4(1 - \cos^2\alpha) = 4\sin^2\alpha \text{ та}$$
$$2a + bc = 4(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma) = 4(-\cos(\beta + \gamma) + \cos\beta\cos\gamma) = 4\sin\beta\sin\gamma,$$

і аналогічні до них, матимемо, що нерівність з умови набуває такого вигляду:

$$4^6 \cdot \cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma \leq 4^3 \cdot \sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma \Leftrightarrow$$
$$2^6 \cdot \cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma \leq 1 \Leftrightarrow 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq 1,$$

що вище доведене в лемі 2.

Альтернативне розв'язання. Спочатку доведемо таку лему.
Лема 1. Якщо додатні числа a, b, c задовольняють умову $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$, то змінні x, y та z, що визначаються рівностями: $a = \frac{2}{\sqrt{(3y-1)(3z-1)}}$, $b = \frac{2}{\sqrt{(3z-1)(3x-1)}}$, $c = \frac{2}{\sqrt{(3x-1)(3y-1)}}$ задовольняють умову: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$.

Доведення. З умови леми маємо, що

$$4 = \frac{4}{(3y-1)(3z-1)} + \frac{4}{(3z-1)(3x-1)} + \frac{4}{(3x-1)(3y-1)} + \frac{8}{(3x-1)(3y-1)(3z-1)} \Rightarrow$$
$$(3x-1)(3y-1)(3z-1) = (3x-1) + (3y-1) + (3z-1) + 2 = 3x + 3y + 3z - 1 \Rightarrow$$
$$27xyz - 9xy - 9yz - 9zx + (3x + 3y + 3z - 1) = 3x + 3y + 3z - 1 \Rightarrow 3xyz = xy + yz + zx$$

Звідки очевидно випливає шукана рівність.
Лема доведена.

Оскільки $3xyz = xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \Rightarrow xyz \geq 1 \Rightarrow x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \geq 3$.
Скористаємося лемою 1. Тоді:

$$(4 - a^2)(4 - b^2)(4 - c^2) = \left(4 - \frac{4}{(3y-1)(3z-1)}\right) \cdot \left(4 - \frac{4}{(3z-1)(3x-1)}\right) \cdot \left(4 - \frac{4}{(3x-1)(3y-1)}\right) =$$
$$= 64 \cdot 27 \cdot \frac{(3yz - y - z)(3zx - z - x)(3xy - x - y)}{(3x-1)^2(3y-1)^2(3z-1)^2} \leq$$

(оскільки з леми 1 маємо, що $(3x-1)(3y-1)(3z-1) = 3x + 3y + 3z - 1 \geq 8$)

$$\leq 27 \cdot (3yz - y - z)(3zx - z - x)(3xy - x - y) =$$
$$\leq 27 \cdot (27(xyz)^2 - 9(x^2yz(y+z) + \ldots) + 3(yz(y+x)(z+x) + \ldots) - (x+y)(y+z)(z+x)) =$$

$$\le 27\cdot(27(xyz)^2-18xyz(xy+yz+zx)+9xyz(x+y+x)+$$
$$+3((xy)^2+(yz)^2+(zx)^2)-(xy+yz+zx)(x+y+x)+xyz)=$$

(оскільки $3xyz=xy+yz+zx$)

$$=27\cdot(-27(xyz)^2+6xyz(x+y+x)+3((xy)^2+(yz)^2+(zx)^2)+xyz)=$$

(оскільки $9(xyz)^2=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2$)

$$=27\cdot(3(9(xyz)^2-2xyz(x+y+z))-27(xyz)^2+6xyz(x+y+x)+xyz)=27xyz \Rightarrow$$
$$(4-a^2)(4-b^2)(4-c^2)\le 27xyz\,.$$

<u>*Лема 2*</u>. Якщо додатні числа $x,\ y,\ z$ задовольняють умову $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$, то змінні $a,\ b$ та c що визначаються рівностями: $x=\frac{2a+bc}{3bc}$, $y=\frac{2b+ca}{3ca}$, $y=\frac{2c+ab}{3ab}$, задовольняють умову: $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Доведення. З умови леми маємо, що

$$3=\frac{3bc}{2a+bc}+\frac{3ca}{2b+ca}+\frac{3ab}{2c+ab} \Rightarrow$$
$$(2a+bc)(2b+ca)(2c+ab)=3(abc)^2+4abc(a^2+b^2+c^2)+4a^2b^2+4b^2c^2+4c^2a^2\,.$$

З іншого боку

$$(2a+bc)(2b+ca)(2c+ab)=(abc)^2+2abc(a^2+b^2+c^2)+4a^2b^2+4b^2c^2+4c^2a^2+8abc$$
$$\Rightarrow$$

$a^2+b^2+c^2+abc=4$, що й треба було довести.

Лема доведена.

Тепер з леми 2 маємо, що

$$(4-a^2)(4-b^2)(4-c^2)\le 27xyz=\frac{(2a+bc)(2b+ca)(2c+ab)}{(abc)^2} \Rightarrow$$
$$(4-a^2)(4-b^2)(4-c^2)a^2b^2c^2\le(2a+bc)(2b+ca)(2c+ab)\,.$$

4.1. Задача 5.1 за 10 клас.

5.1. Додатні числа a,b,c задовольняють умову $a^2+b^2+c^2=3$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}+\frac{5}{c}\ge 4a^2+3b^2+2c^2\,.$$

<u>***Розв'язання***</u>. Перепишемо нерівність таким чином:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{b}+b^2+\frac{4}{c}+2c^2\ge 4(a^2+b^2+c^2)=12\,.$$

Оскільки $3=a^2+b^2+c^2\ge 3\cdot\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc\le 1 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\ge 3$.

Для інших доданків маємо так само нерівність між середніми:

$$\frac{2}{b}+b^2=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+b^2\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{b}\frac{1}{b}b^2}=3 \text{ та } \frac{4}{c}+2c^2=\frac{2}{c}+\frac{2}{c}+2c^2\ge 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{c}\frac{1}{c}c^2}=6\,.$$

Додаємо ці нерівності і отримуємо шукане.