Розв'язання завдань II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики у місті Києві (2018–2019 навчальний рік)

«Де помирає надія, там утворюється порожнеча».
Леонардо да Вінчі

6 клас

1. Підберіть замість літер $A, Б, В, Г, Д, Е$ цифри $1, 2, 3, 4, 5, 6$ таким чином, щоб утворилася правильна рівність: $\frac{A}{Б}+\frac{В}{Г}=\frac{Д}{Е}$. Тут різним буквам мають відповідати різні цифри. Достатньо знайти одну відповідь.

Відповідь: $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{4}{3}$.

2. Відмінниця одного з київських ліцеїв Оксана у 2018 році мала вік, який дорівнював потроєній сумі цифр її року народження. Скільки років Оксані у 2018 році?

Відповідь: 15 років.
Розв'язання. Оскільки Оксана навчається в школі, то вона народилася не пізніше 2000 року. Нехай рік її народження $\overline{20xy}$. Тоді має справджуватися така рівність:

$$2018-\overline{20xy}=3(2+0+x+y)\Rightarrow 18-10x-y=6+3x+3y\Rightarrow 12=13x+4y.$$

Оскільки x, y – цифри, то з останньої рівності зрозуміло, що $x=0$ та $y=3$, тобто Оксана народилася у 2003 році і зараз їй 15 років.

3. За столом зібралися 4 жителя країни "У", кожен з яких був брехуном або лицарем. Брехуни при відповіді на запитання завжди брешуть, а лицарі навпаки – завжди кажуть правду. Кожен з чотирьох жителів у відповідь на запитання, хто сидить за столом, сказав: "З трьох, що сидять разом зі мною за столом, рівно два брехуни". Скільки може насправді сидіти за столом лицарів та брехунів? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 2 брехуни та 2 лицарі, або 4 брехуни.
Розв'язання. Якщо там є принаймні 1 лицар, то він каже правду. Тоді за столом має бути рівно 2 брехуни та рівно 2 лицарі. За таких умов обидва лицарі сказали правду, а обидва брехуни – збрехали.
Якщо там не було жодного лицаря, то там сиділи 4 брехуни, що також можливо. Бо тоді кожен з чотирьох збрехав.

4. Рівносторонній трикутник зі стороною довжини 36 покривається трьома рівними рівносторонніми трикутниками зі стороною довжини 21, як це показано на рис. 1. Визначте довжину сторони рівностороннього трикутника, який залишився непокритим.

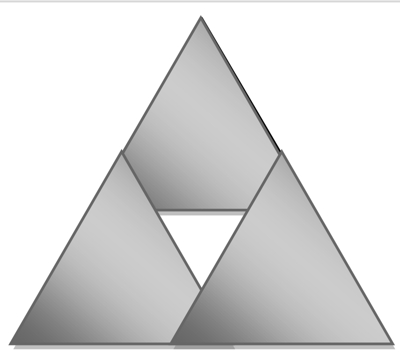


Рис. 1

Відповідь: 9.

Розв'язання. Нехай x – довжина перекриття менших трикутників по стороні більшого трикутника, тоді маємо таке рівняння: $21+(21-x)=36$, звідси $x=6$. А довжину сторони трикутника, що залишився непокритим в середині великого трикутника, знаходимо так: $21-6\cdot 2=9$.

7 клас

1. Дволітрова пляшка оранжу містить 80% води та 20% апельсинового соку. Марічка хоче вилити частину цього оранжу та долити чистий апельсиновий сік, щоб отримати напій об'ємом 2 літри, що містить у рівних долях воду та апельсиновий сік. Скільки вона має вилити оранжу?

Відповідь: 750 мл.
Розв'язання. З самого початку води було 1600 мл, а наприкінці її має стати 1000 мл. Таким чином треба відлити стільки оранжу, щоб в ній було 600 мл води. Складемо пропорцію, в 100 мл – 80 мл води, а в x мл – 600 мл. Таким чином $x=750$ мл.

2. Шість півкіл з радіусом довжиною 1 розташовані як це показано на рис. 2. Знайдіть площу фігури, що обмежена цими півколами та відрізком AB.

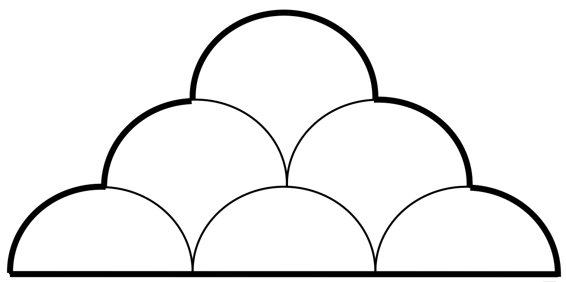


Рис.2

Відповідь: $6+\frac{3}{2}\pi$.
Розв'язання. Розріжемо цю фігуру на частини: прямокутники $CDEF$, $XYZT$, півкруг V та чотири чверть кола $I-IV$ (рис. 3). Залишається додати їхні площі за відомими формулами: $S_{CDEF}=1\cdot 4=4$, $S_{XYZT}=1\cdot 2=2$, $S_I+...+S_V=\frac{3}{2}\pi$. Разом маємо $6+\frac{3}{2}\pi$.

3. Відмінниця одного з київських ліцеїв Оксана у 2018 році мала вік, який дорівнював потроєній сумі цифр її року народження. Точно таку властивість щодо віку має й її дідусь Остап – у 2018 році його вік дорівнює потроєній сумі цифр року його народження. Скільки років мав дідусь Оксанки, коли вона народилася?

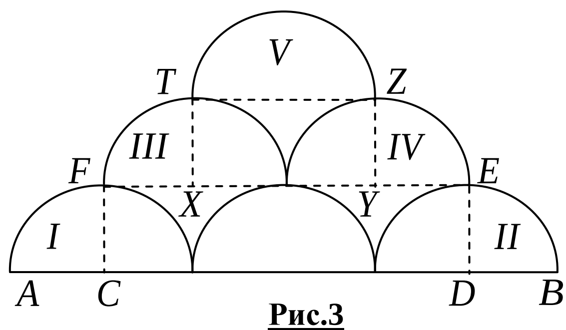


Рис.3

Відповідь: 54 роки.
Розв'язання. Оскільки Оксана навчається в школі, то вона народилася не пізніше 2000 року. Нехай рік її народження $\overline{20xy}$. Тоді має справджуватися така рівність:

$$2018-\overline{20xy}=3(2+0+x+y)\Rightarrow 18-10x-y=6+3x+3y\Rightarrow 12=13x+4y.$$

Оскільки x, y – цифри, то з останньої рівності зрозуміло, що $x=0$ та $y=3$, тобто Оксана народилася у 2003 році і зараз їй 15 років.
Зробимо аналогічні підрахунки для віку дідуся Остапа, але врахуємо, що він, напевно, народився після 1900 року. Позначимо його рік народження $\overline{19ab}$, тоді отримаємо таку рівність:

$$2018-\overline{19ab}=3(1+9+a+b)\Rightarrow 118-10a-b=30+3a+3b\Rightarrow 88=13a+4b.$$

Зрозуміло, що цифра a має бути кратною 4. При $a=0$ $b=22$ – суперечність, бо a, b – цифри.

При $a=8$ $b<0$. Таким чином залишається шуканий варіант: $a=4$, тоді $b=9$. Таким чином рік народження дідуся Остапа 1949.
І нарешті, $2003-1949=54$ роки було дідусю, коли народилася Оксана.

4. За столом зібралися 2019 жителів країни "У", кожен з яких був брехуном або лицарем. Брехуни при відповіді на запитання завжди брешуть, а лицарі навпаки – завжди кажуть правду. Кожен з 2019 жителів у відповідь на запитання, хто сидить за столом, сказав: "З 2018 жителів, що сидять разом зі мною за столом, не менше ніж 1009брехунів". Скільки може насправді сидіти за столом лицарів та брехунів? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 1009 брехунів та 1010 лицарів.
Розв'язання. Якщо там є принаймні 1 лицар, то він каже правду. Тоді за столом має бути як мінімум $n\geq 1009$ брехунів та $2019-n$ лицарів. Припустимо, що брехунів там щонайменше 1010. Тоді кожен брехун сказав правду, що суперечить умові. Таким чином за столом має бути рівно 1009 брехунів та 1010 лицарів.
Якщо там не було жодного лицаря, то там сиділи 2019 брехунів, що не можливо, бо тоді кожен з брехунів сказав правду.

5. Скільки існує четвірок натуральних чисел (a, b, x, y), які задовольняють умови: $a+b=xy$ та $ab=x+y$?

Відповідь: 9 четвірок.
Розв'язання. Спочатку розглянемо випадок $a+b=ab$, звідси зрозуміло, що й $x+y=xy$. Тоді маємо, що $ab-a-b+1=1 \Rightarrow (a-1)(b-1)=1 \Rightarrow a=2, b=2 \Rightarrow x=2, y=2$. Таким чином маємо першу четвірку, що задовольняє умову: $(2, 2, 2, 2)$.
Нехай тепер, наприклад, $a+b<ab$, але тоді $x+y>xy \Rightarrow (x-1)(y-1)<1$. Оскільки числа $x-1$ та $y-1$ – цілі невід'ємні, то ця нерівність можлива лише за умов, що принаймні один з цих множників є нульовим. Без обмеження загальності вважатимемо, що $x=1$. Тоді $a+b=y$ та $ab=y+1 \Rightarrow y=a+b=ab-1 \Rightarrow (a-1)(b-1)=2$. Тут без обмеження загальності розуміємо, що $a-1=1$ та $b-1=2 \Rightarrow a=2$, $b=3$ та $y=5$. Таким чином внаслідок симетрії умови ми маємо ще такі розв'язки задачі: $(1, 5, 2, 3)$, $(1, 5, 3, 2)$, $(5, 1, 2, 3)$, $(5, 1, 3, 2)$, $(3, 2, 1, 5)$, $(5, 1, 3, 2)$, $(2, 3, 5, 1)$ та $(3, 2, 5, 1)$.

<u>8 клас</u>

1. При тестуванні учням було запропоновано 30 запитань тестового характеру, де треба було вписати правильну відповідь. За кожну правильну відповідь учень отримував "+5"балів, а за кожну невірну або при відсутності відповіді – отримував "–1"бал. Яку найменшу додатну кількість балів міг отримати учень?

Відповідь: 6 балів.
Розв'язання. Нехай учень вірно записав відповідь на k запитань та на n – не вірно. Тоді $k+n=30$, або $n=30-k$. Можлива кількість балів, яку міг набрати учень дорівнює

$$N=5k-n=5k-30+k=6k-30=6(k-5).$$

Тобто кількість набраних балів завжди має бути кратною 6, тому найменша можлива кількість – це 6. Тоді $k-5=1 \Rightarrow k=6,\ n=24$ і набрані бали: $N=5\cdot 6-24=6$.

2. У землю посадили рослину з 4 листочками без жодної квіточки. Кожного нового дня на ній виростає або 3 нові квіточки та 7 листочків, або 4 нові квіточки та 9 листочків. По завершенні певного часу на рослині було 50 листочків. Скільки на той момент на рослині було квіточок?

Відповідь: 20 квіточок.
Розв'язання. Нехай днів, коли проростали по 7 листочків, було x, а днів, коли по 9 листочків, – y. Тоді маємо рівність: $50 = 4 + 7x + 9y$ або $46 - 7x = 9y$. Підбором знаходимо єдиний можливий розв'язок в натуральних числах: $x = 4$ та $y = 2$. Таким чином, квіточок на цій рослині стало $3x + 4y = 20$.

3. Чи завжди можна побудувати трикутник, сторонами якого є висоти деякого іншого трикутника?

Відповідь: не завжди.
Розв'язання. Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC, з вершиною у точці B. Нехай його основа $AC = 1$, а висота $BD = 2$ (рис. 4). Тоді зрозуміло, що дві його інші висоти $AE = CF < AC = 1$, оскільки перпендикуляр менший від похилої. Але тоді порушується умова існування трикутника, що сума двох сторін має бути меншою за третю: $AE + CF < 2 = BD$.

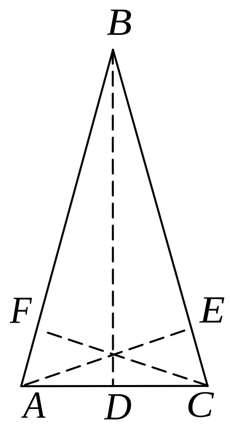


Рис.4

4. Знайдіть цифру сотень числа 5^{2018}.

Відповідь: 6.
Розв'язання. Неважко обчислити, що $5^4 = 625$. Зрозуміло, що на цифру сотень впливають лише останні три цифри кожного з множників. Далі обчислимо, що $625 \cdot 625 = 390625$. Тому останні три цифри не будуть змінюватися при таких множеннях. Таким чином останні три цифри числа $5^{2016} = 5^{4 \cdot 504}$ – це 625. Тому останні три цифри шуканого числа можна знайти таким чином: $5^{2018} = 5^{2016} \cdot 5^2 \to 625 \cdot 25 \to 625$, таким чином цифра сотень – це 6..

5. Математичні клуби є надзвичайно популярними в деякому місті. Будь-які два з них мають принаймні одного спільного члена. Доведіть, що мер міста може розподілити лінійки та циркулі між усіма мешканцями міста таким чином, що рівно один мешканець отримає і лінійку, і циркуль, а кожний інший мешканець отримає або лінійку, або циркуль, при цьому кожний математичний клуб матиме члена з лінійкою та члена з циркулем.

Розв'язання. Розглянемо клуб K, що має найменшу кількість членів, якщо таких клубів декілька, то виберемо довільний. Ми дамо одному з його членів, наприклад, Якобу, і лінійку, і циркуль. Усім іншим членам цього клубу дамо циркуль. Усім іншим мешканцям міста – лінійку. Покажемо, що такий розподіл повністю задовольняє умови задачі. Усі клуби, які мають Якоба в якості члена, мають людину з лінійкою та циркулем, тобто обидва інструменти.
Якщо клуб не містить Якоба в якості члена, то в них є принаймні один спільний член, то він містить мешканця з циркулем. Але там є обов'язково людина, що не є членом клуба K, бо інакше в ньому членів клуба стане менше ніж в клубі K (бо там є ще Якоб). Таким чином знайдеться мешканець міста, що має лінійку. Твердження доведене.

9 клас

1. Знайдіть найменше число, яке ділиться на 44 та утворене певною перестановкою цифр $1, 2, ..., k$, де $k \le 9$.

Відповідь: 132.
Розв'язання. Для того, щоб число було найменшим воно має мати найменшу можливу кількість цифр. З ознаки подільності на 11 випливає, що набір цифр $1, 2, ..., k$ має розбитися на дві групи з різницею, що кратна 11. Зрозуміло, що найменше k, що задовольняє умову – це $k = 3$ і цифри $1, 2, 3$. Перевіримо, чи існує таке число. Варіантів усього два: 132 та 231. Очевидно, що перше число і менше, і умови задовольняє, а тому є шуканим.

2. Скільки різних пар натуральних чисел (m, n) задовольняють рівності $m^n = 2^{100}$? Нагадаємо що пари (m, n) та (a, b) називаються різними, якщо $m \ne a$, або $n \ne b$, або одночасно $m \ne a$ та $n \ne b$.

Відповідь: 9 пар.
Розв'язання. Зрозуміло, що $m = 2^k$, де k – ціле невід'ємне число, що є дільником числа 100. Подивимося скільки різних дільників має число $100 = 2^2 \cdot 5^2$. З відомої формули їхня кількість $(2+1)^2 = 9$ (або можна їх виписати безпосередньо). Тоді для кожного з дев'яти дільників k числа 100 маємо свою пару, що задовольняє рівності. Наприклад, якщо $100 = k \cdot l$, то шукана пара знаходиться таким чином: $2^{100} = (2^k)^l = m^n$, тобто $m = 2^k$, $n = l$. Усі пари попарно різні, оскільки перша компонента в усіх різна. Таким чином усього маємо 9 таких пар.

3. Знайдіть усі пари дійсних чисел (x, y), які задовольняють умови:
$$x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3.$$

Відповідь: $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$ та $(1; 1)$.
Розв'язання. Якщо $x + y = 0$, то $x^2 + y^2 = x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$ – перший розв'язок.
Нехай тепер $x + y \ne 0$, тоді $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = x + y \Rightarrow x^2 - xy + y^2 = 1 \Rightarrow$ $x + y - xy - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) = 0$.
Без обмеження загальності вважатимемо, що $x = 1$, але тоді $y = y^2$ і маємо розв'язки $y = 1$ та $y = 0$. Звідси й знаходимо усі розв'язки з симетричності умов відносно x, y.

4. Скільки існує варіантів заповнення комірок таблиці 2018×2018 натуральними числами таким чином, щоб сума будь-яких трьох сусідніх чисел в одному рядку чи стовпчику дорівнювала 4?

Відповідь: 6 варіантів.

Розв'язання. Заповнимо верхній лівий квадрат 2×2 натуральними числами $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$, які задовольняють умови $a + b < 4$, $c + d < 4$, $a + c < 4$, $b + d < 4$. Покажемо, що далі таблиця заповнюється за правилом однозначно. Спочатку заповнимо квадрат 3×3, що робиться однозначно: $\begin{matrix} a & b & 4-a-b \\ c & d & 4-c-d \\ 4-a-c & 4-b-d & a+b+c+d-4 \end{matrix}$. Далі ці квадрати 3×3 продовжуються в усіх напрямах.

Таким чином нам залишається порахувати кількість варіантів заповнення початкового квадрату 2×2.

Якщо $a=2$, то $b=c=1$ і для d маємо два варіанти: $d\in\{1,\ 2\}$.

Якщо $a=1$, то

1) $b=c=1$ і для d маємо лише варіант: $d=2$.
2) $b=c=2$, або $b=2,\ c=1$, або $b=1,\ c=2$ і для d маємо єдиний варіант $d=1$.

Разом маємо 6 варіантів.

5. Заданий відрізок AB, знайдіть ГМТ (геометричне місце точок) Z, для яких існує прямокутний трикутник з вершиною прямого кута в точці Z, та вершинами X, Y, що лежать на відрізку AB і задовольняють умови: $AX=XZ$ та $YB=YZ$.

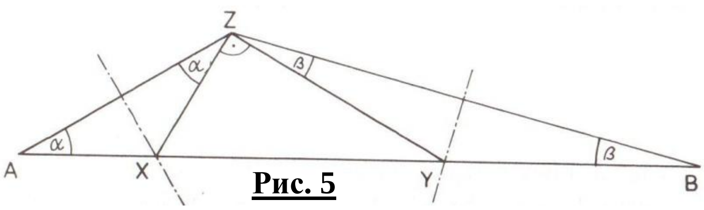


Рис. 5

Розв'язання. Припустимо, що ΔXYZ задовольняє умови, тоді ΔAXZ та ΔBYZ – рівнобедрені (рис. 5). Позначимо $\angle XAZ=\angle XZA=\alpha$, $\angle YBZ=\angle YZB=\beta$. Тоді $2\alpha+2\beta+90°=180°$. Тоді $\alpha+\beta=45°$ та $\angle AZB=135°$. Таким чином точка Z лежить на дузі кола з хордою AB, що стягує на цьому колі кут $135°$.

Далі легко зрозуміти процес побудови: вибираємо довільну точку Z на цій дузі. Далі проводимо відрізки AZ та ZB, серединні перпендикуляри до цих відрізків, які перетнуть заданий відрізок AB в точках X, Y відповідно.

10 клас

1. Знайдіть найменше число, яке ділиться на 36 та утворене певною перестановкою цифр $1,\ 2,\ \ldots,\ k$, де $k\le 9$.

Відповідь: 12345768.

Розв'язання. Для того, щоб число було найменшим воно має мати найменшу можливу кількість цифр. З ознаки подільності на 9 випливає, що $1+2+\ldots+k$ має ділитися націло на 9, але найменше k, для якого це відбувається – є $k=8$. Залишається зрозуміти, що це число утворене перестановкою цифр $1,\ 2,\ \ldots,\ 8$ і при будь-якій перестановці воно кратне 9. Тепер треба, щоб воно було найменшим з тих, що ділиться на 4. Тобто дві останні цифри мають утворювати число, що кратне 4. Оскільки числа 12345678 та 12345687 умову не задовольняють, то цифра сотень не менша за 7. Серед двох можливих 12345768 та 12345786 – перше є шуканим.

2. На дошці зліва направо у вказаному порядку записані усі натуральні числа $1,\ 2$, …, 1000. Петрик робить таку операцію – він витирає усі числа через одне поки не дійде до кінця рядка чисел, причому найпершу цифру 1 він за правилами витерти не може. Далі повертається до лівого краю і повторює цю операцію доти, доки не будуть витерті усі записані на дошці числа через одне. Продовжуючи діяти аналогічно, яке число витре Петрик останнім?

Відповідь: 513.

Розв'язання. Неважко збагнути, що на першому кроці він витирає усі парні числа, тобто на дошці залишилися усі числа вигляду $2k+1$. Після другого кроку – залишаться усі числа вигляду $4k+1$, далі – усі числа $8k+1\ldots$, таким чином останніми будуть витиратися числа $512k+1$, тобто останнім буде витерте число 513.

3. Коефіцієнти a, b, c, d, e, f многочлена $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ дорівнюють ± 1. Відомо, що $p(2) = 11$. Які значення може приймати $p(3)$?

<u>Відповідь:</u> 142.
<u>Розв'язання.</u> Запишемо умову таким чином $p(2) = 32a + 16b + 8c + 4d + 2e + f = 11$. Оскільки $p(2) > 0$, то $a = 1$, бо інакше матимемо від'ємне значення, оскільки сума модулів усіх інших доданків менша за модуль першого. Тому $32 + 16b + 8c + 4d + 2e + f = 11$ або $16b + 8c + 4d + 2e + f = -21 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow -16 + 8c + 4d + 2e + f = -21$або
$8c + 4d + 2e + f = -5 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow -8 + 4d + 2e + f = -5 \Rightarrow 4d + 2e + f = 3 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow$
$2e + f = -1 \Rightarrow e = -1 \Rightarrow f = 1$.
Таким чином знайдені усі коефіцієнти многочлена. Звідси

$$p(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \Rightarrow p(3) = 243 - 81 - 27 + 9 - 3 + 1 = 142.$$

4. Є 2018 кімнат, що розташовані в рядок та занумеровані зліва направо числами 1, 2, …, 2018. У початковий момент часу в кімнаті за номером 1 знаходиться 2018 людей, а в інших кімнатах людей немає. Кожної секунди, якщо в кімнаті більше однієї людини, рівно одна з них переходить в сусідню кімнату з більшим на 1 номером. Скільки кімнат будуть вільними через 2018 секунд після 2018 таких переміщень?

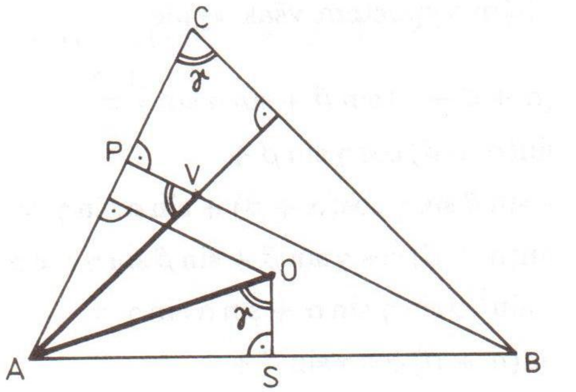
Сек./кім.	0	1	2	3	4	5	…
0	2018	0	0	0	0	0	…
1	2017	1	0	0	0	0	…
2	2016	2	0	0	0	0	…
3	2015	2	1	0	0	0	…
4	2014	2	2	0	0	0	…
5	2013	2	2	1	0	0	…
6	2012	2	2	2	0	0	…
…							

<u>Рис. 6</u>

<u>Відповідь:</u> 1008 вільних кімнат.
<u>Розв'язання.</u> Для зручності перенумеруємо кімнати зліва направо цілими числами від 0 до 2017. Можемо описати динаміку переходів з початку в таблиці (рис. 1). З першої кімнати кожної секунди буде переходити рівно 1 людина. Тому по завершенні 2017 секунд там залишиться рівно 1 людина і в останню секунду ніхто вже не переходитиме. Про інші кімнати динаміка така – спочатку вони порожні. Якщо далі в неї потрапляє 1 людина, то наступної секунди туди потрапляє друга людина. І з наступної секунди в неї прибуває 1 людина і так само 1 людина переходить з цієї кімнати. Таким чином після $2k$ секунд, $k < 1009$ в нульовій кімнаті буде $2018 - 2k$ людей, в кімнатах з 1 по k буде по 2 людини. Після $2k + 1$ секунди додасться 1 людина в кімнату з номером $k + 1$ і зменшиться на 1 людину кімната 0. Таким чином після $2017 = 2 \cdot 1008 + 1$ маємо по одній людині в кімнатах 0 та 1009 і по 2 людини в кімнатах $1 - 1008$. Тобто після останньої 2018-ї секунди нова вільна кімната зайнятою не буде. Отож будуть зайняті кімнати з номерами від 0 до 1009, тобто 1010 кімнат, а вільними 1008.

5. У гострокутному трикутнику ABC вершина A знаходиться на рівних відстанях від центру описаного кола O та ортоцентру V. Знайдіть кут при вершині A цього трикутника.

<u>Відповідь:</u> $\angle CAB = 60°$.
<u>Розв'язання</u>. Нехай точка V – ортоцентр трикутника, PB – висота ΔABC, O – центр описаного кола, S – середина сторони AB (рис. 7). ΔAPV – прямокутний, $\angle AVP = \gamma$, тоді $\angle ACB = \gamma$, тоді $\angle AOB = 2\gamma$ і відповідно $\angle AOS = \gamma$. Тому $\Delta APV = \Delta ASO$. Звідси



$AP = AS = \frac{1}{2}AB$, тому $\angle CAB = 60°$

11 клас

1. Скільки розв'язків має рівняння: $\sqrt{|x|} = \frac{1}{1+x}$?

Відповідь: 1 розв'язок.

Розв'язання. Нарисуємо ескіз графіків функцій, що записані в лівій та правій частинах рівняння (рис. 1). Пунктиром зображений графік функції $f(x) = \sqrt{|x|}$, інший графік **Рис. 7** $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Зрозуміло, що $x \neq -1$.

На проміжку $(-\infty, -1)$ коренів немає, оскільки $g(x) < 0 < f(x)$.

На проміжку $(-1, 0)$ коренів немає, оскільки $f(x) \le 1 < g(x)$.

На проміжку $[0, +\infty)$ є рівно один корінь, оскільки $f(x)$ – зростає, а $g(x)$ – спадає.

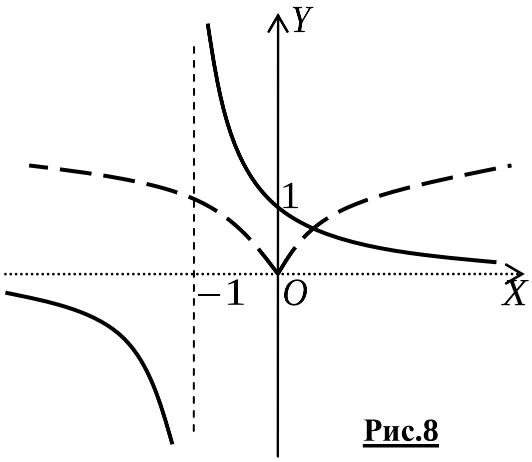


Рис.8

2. Розглянемо усі можливі послідовності, що містять 8 членів, кожний з яких дорівнює 0 або 1. Скільки з них мають поруч деякі два члени, що утворюють пару 01?

Відповідь: 247.

Розв'язання. Усього таких послідовностей $2^8 = 256$. Порахуємо кількість послідовностей, що не містять такої пари: це можуть бути лише послідовності, що починаються з одиниць, а закінчуються самими нулями. Бо після 0 не може трапитися 1. Таких послідовностей рівно 9 – вони можуть містити від 0 до 8 нулів. Таким чином шуканих послідовностей усього $256 - 9 = 247$.

3. Діагоналі вписаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці P, промені AD та BC перетинаються в точці Q. Бісектриса $\angle BQA$ перетинає AC у точці R, а бісектриса $\angle APD$ перетинає AD у точці S. Доведіть, що $RS \parallel CD$.

Розв'язання. Нехай $\angle ADB = \angle ACB = \varphi$ та $\angle CBD = \angle CAD = \theta$ (рис. 9). Тоді

$$\frac{AS}{SD} = \frac{AP}{PD} = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \frac{\sin(180° - \varphi)}{\sin\theta} = \frac{QA}{QC} = \frac{AR}{RC}$$

(з властивості бісектрис, теорем синусів для відповідних трикутників). Звідси маємо, що $\Delta ARS \sim \Delta ACD$ та $RS \parallel CD$.

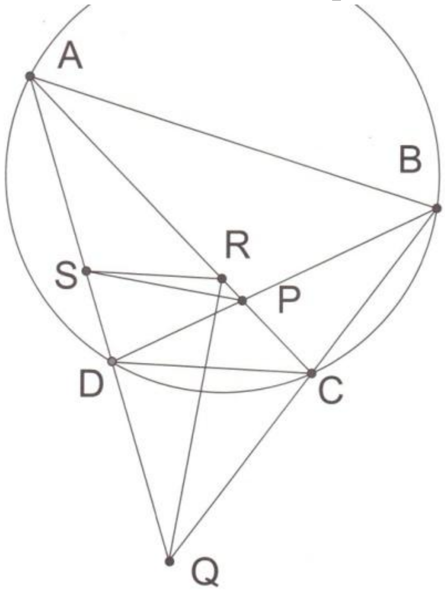


Рис. 9

4. Знайдіть усі пари цілих невід'ємних чисел (a, b), що задовольняють рівності:

$$2017^a = b^6 - 32b + 1.$$

Відповідь: $(0;\ 0),\ (0;\ 2)$.

Розв'язання. Ліва частина завжди непарна, тому b – парне. Нехай $b = 2c \Rightarrow 2017^a = 64(c^6 - c) + 1 \Rightarrow 2017^a \equiv 1 \pmod{64}$.

Оскільки $2017 \equiv 33 \pmod{64}$ та $2017^2 \equiv 1 \pmod{64}$, то $a = 2k$ та ліва частина – точний квадрат. Позначимо через $r(b) = b^6 - 32b + 1$.

Якщо $b > 4$, то $r(b) < b^6 = (b^3)^2$. З іншого боку $r(b) = b^6 - 32b + 1 > b^6 - 2b^3 + 1 = (b^3 - 1)^2$.
Таким чином шукана рівність неможлива, звідси треба перебрати випадки парного $b \le 4$.
При $b = 4$ матимемо, що рівняння за модулем $3: 1 \equiv 1 - 2 + 1 = 0$ – суперечність.
При $b = 2$ $2017^a = b^6 - 32b + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$.
При $b = 0$ $2017^a = 1 \Rightarrow a = 0$.

5. Знайдіть найбільше значення M виразу $x + y + z$, де x, y, z додатні числа, що задовольняють умову: $16xyz = (x+y)^2(x+z)^2$ і доведіть, що це значення досягається на нескінченній кількості трійок чисел.

Відповідь: $M = 4$.
Розв'язання. З нерівності між середніми маємо, що

$$4\sqrt{xyz} = (x+y)(x+z) = x(x+y+z) + yz \ge 2\sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Звідси зрозуміло, що $x + y + z \le 4 = M$.
Рівність може досягатися за виконанням умов: $x + y + z = 4$ та $x(x+y+z) = yz$. Покладемо $y = t$, тоді маємо рівність $4x = t(4 - x - t) \Rightarrow x = \frac{4t - t^2}{4+t} \Rightarrow z = 4 - x - y = \frac{16 - 4t}{4+t}$.