Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Київська міська олімпіада з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

LXXVI Київська міська олімпіада юних математиків

Обласні олімпіади юних математиків

Умови та до розв’язання задач

2 тур

Київ, 07 лютого 2021 року

«Наприкінці все обов'язково має бути добре.
Якщо щось погано, то ще не кінець.»
Пауло Коельо

7 клас

1. Чотири команди зіграли у декілька кіл турнір, тобто кожна команда з кожною іншою зіграли однакову кількість зустрічей. За перемогу нараховувалося 3 очки, за нічию кожна команда отримувала 1 очко, за поразку очок не нараховувалося. Разом усі команди набрали 46 очок. Чи можна з'ясувати, скільки ігор завершилися внічию?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 8.

Розв'язання. Нехай було зігране k кіл у цьому змаганні, тоді ігор усього було зігране $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3k = 6k$. Команд 4, у кожному колі вона грає 3 гри, при додаванні кожна гра рахується 2 рази. Якщо нічиїх не було б, то набрано було усіма разом командами $6k \cdot 3 = 18k$ очок, тобто найбільша можлива сумарна кількість. Якби усі ігри зіграні внічию, було б набране найменша кількість очок – $6k \cdot 2 = 12k$. Таким чином сумарна кількість очок має бути між цими двома виразами. При $k = 1$ воно було б в межах від 12 до 18, при $k = 2$ воно було б в межах від 24 до 36, при $k = 3$ воно було б в межах від 36 до 54 (можливий варіант), при $k = 4$ воно було б в межах від 48 до 72. Таким чином кількість кіл в турнірі – 3. Залишається зрозуміти, що на кожній нічиї втрачається рівно 1 від максимально можливої кількості. Таким чином $54 - 46 = 8$ ігор завершилися нічиєю.

2. Для яких натуральних n вираз $S_n = (1^2)! + (2^2)! + (3^2)! + \ldots + (n^2)!$ є точним квадратом?
Для натурального числа k значення $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

(Андрій Уразовський)

Відповідь: $n = 1,\ 2$.

Розв'язання. Для $n = 1$ та $n = 2$ все перевіряється безпосередньо. Для $n \geq 3$ маємо, що

$$S_n = (1^2)! + (2^2)! + (3^2)! + \ldots + (n^2)! = 25 + 9! + 16! + \ldots + (n^2)!.$$

У цій рівності усі доданки окрім 9! діляться на 25, а 9! – ділиться на 5, але не ділиться на 25. Тому й S_n має таку саме властивість, що для квадратів цілих чисел не можливо.

3. Відомо, що числа a, b задовольняють умови: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{11}{2}$ та $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{101}{10}$. Чому може дорівнювати значення суми $a + b$?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $a + b = \frac{11}{5}$.

Розв'язання. Розглянемо такий добуток:

$$\frac{11}{2}(a + b) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) = 1 + \frac{b}{a} + 1 + \frac{a}{b} = 2 + \frac{101}{10} = \frac{121}{10} \Rightarrow a + b = \frac{121}{10} \cdot \frac{2}{11} = \frac{11}{5}.$$

4. Сторони трикутника ABC продовжені в обидві сторони і на цих продовженнях у зовнішній бік відкладені 6 однакових відрізків AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 (рис. 1). Виявилося, що усі 6 точок A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежать на одному колі. Чи обов'язково ΔABC є рівностороннім?

(Богдан Рубльов)

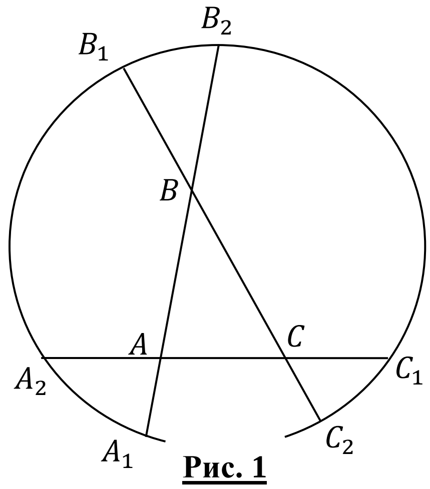

Рис. 1

Відповідь: так.

Розв'язання. Позначимо через O – центр кола, на якому лежать побудовані 6 точок A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 (рис. 2). Тоді ΔA_1OB_2 – рівнобедрений з основою A_1B_2, позначимо через M – середину відрізку A_1B_2. Тоді серединний перпендикуляр до основи A_1B_2, проходить через точки M та O. Оскільки $AA_1 = BB_2$, то M також і середина сторони AB. Тому серединний перпендикуляр до AB співпадає з серединним перпендикуляром до відрізку A_1B_2, тому ΔAOB також рівнобедрений, тому $AO = BO$. З аналогічних міркувань маємо, що $AO = BO = CO$.

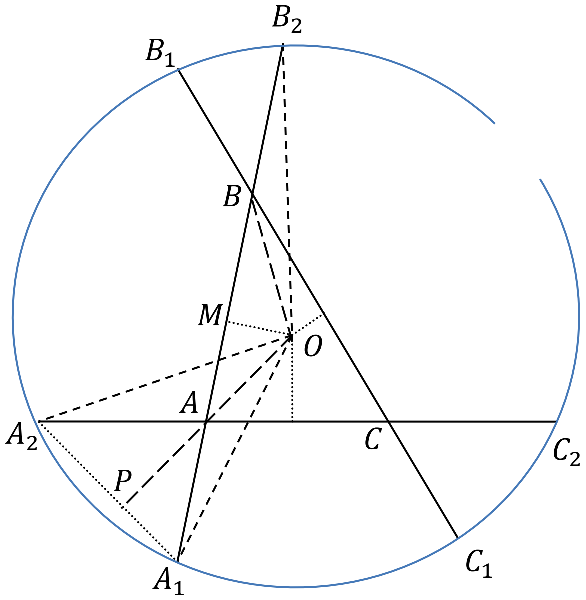

Рис. 2

Розглянемо ΔAA_1O та ΔAA_2O – вони рівні за трьома сторонами. Тоді $\angle AOA_1 = \angle AOA_2$, тобто в рівнобедреному ΔA_1OA_2 бісектриса OP $\angle A_1OA_2$ проходить через точку A і є медіаною, тому $PA_1 = PA_2$. Тоді в рівнобедреному ΔA_1AA_2 відрізок AP є медіаною, а тому й бісектрисою, звідки на прямій AO розташована бісектриса $\angle A_1AA_2$, а також вертикального до нього $\angle BAC$. З аналогічних міркувань бісектриси усіх кутів ΔABC проходять через точку O. Але оскільки ΔAOB рівнобедрений, то $\angle BAO = \angle ABO \Rightarrow \angle BAC = \angle ABC$, оскільки AO та BO є бісектрисами відповідних кутів. З аналогічних міркувань маємо, що усі кути ΔABC рівні між собою, а тому він рівносторонній.

3.1. Знайдіть хоча б одну трійку натуральних чисел a, b, c, що задовольняють умову:
$$a^2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 = 2020.$$

Відповідь: $a = 1, b = 3, c = 10$.
Розв'язання. Розкладемо ліву та праву частину на множники таким чином:
$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101.$$
Далі просто подивимося, які з добутків, що можна утворити з множників правої частини, можуть бути поданими у вигляді $n^2 + 1$, де n – натуральне число.
$$2 = 1^2 + 1, 5 = 2^2 + 1, 10 = 3^2 + 1, 101 = 10^2 + 1.$$
Звідси бачимо, як можна знайти єдиний можливий розв'язок задачі з точністю до порядку множників:
$$(1^2 + 1)(3^2 + 1)(10^2 + 1) = 2 \cdot 10 \cdot 101.$$

4.1. Точка C лежить всередині прямого кута AOB. Доведіть, що периметр трикутника ABC більший ніж $2 \cdot OC$.

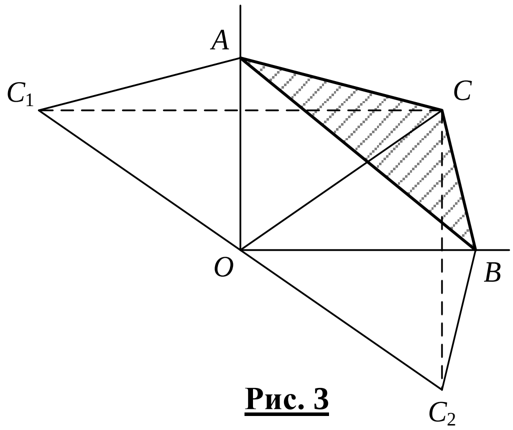

Рис. 3

Розв'язання. Нехай C_1 – точка, що симетрична точці C відносно прямої OA (рис. 3), а C_2 симетрична C відносно прямої OB. Це означає, що $CC_1 \perp OA$ та $OC = OC_1$. Тоді
$$\angle C_1OC_2 = \angle C_1OC + \angle COC_2 = 2(\angle AOC + \angle COB) = 180°.$$
Звідси точки C_1, O та C_2 лежать на одній прямій. Далі з нерівності трикутника маємо, що
$$P_{\Delta ABC} = AC + BC + AB = AC_1 + BC_2 + AB > C_1C_2 = 2OC,$$
що й треба було довести.

8 клас

1. На дошці записане число $2021! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2021$. Олеся та Андрій грають у гру, роблячи ходи по черзі (розпочинає Олеся). Хід складається в тому, що гравець повинен поділити записане на дошці число на довільне число вигляду $P = p_1 p_2 \ldots p_k$, яке складається з добутку декількох (не менше ніж одного) попарно різних простих чисел, і записати одержане число на дошку замість попереднього. Програє той, після чийого ходу на дошці буде записане не ціле число. Хто виграє в цій грі, якщо кожний хоче перемогти?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: Перемагає Олеся.

Розв'язання. Розкладемо на прості множники число $2021! = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots q_m^{k_m}$, і першим ходом Олеся поділить записане число на добуток усіх простих чисел, для яких $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – непарні. Такі прості числа існують, наприклад, усі прості числа більші 1010, наприклад, 2017, 2011 та інші. Після такого ходу, записане число стає квадратом цілого числа. Далі ходи Олесі просто дублюють ходи Андрія. Якщо Андрій ділить записане число на $P = p_1 p_2 \ldots p_l$, і число лишиться цілим, то Олеся так само ділить нове записане число на $P = p_1 p_2 \ldots p_l$ і записане число знову стане квадратом. Таким чином Олеся перемагає.

2. У трикутнику ABC $\angle B = 90°$ та $\angle A = 60°$, I – точка перетину його бісектрис. Пряма, що проходить через точку I паралельно прямій AC, перетинає сторони AB та BC у точках P та T відповідно. Доведіть, що $3PI + IT = AC$.

(Антон Тригуб)

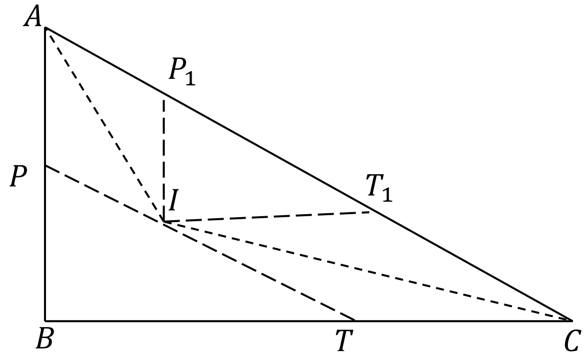

Рис. 4

Розв'язання. Позначимо на гіпотенузі AC точки P_1 та T_1 такі, що $AP_1 = AP$ та $CT_1 = CT$ (рис. 4). Тоді $\Delta AP_1I = \Delta API$ за двома сторонами і кутом між ними, і аналогічно $\Delta CT_1I = \Delta CTI$ також. Отже, $\angle PAI = \angle P_1AI = \angle AIP$. Тобто $APIP_1$ – ромб. Аналогічно $CTIT_1$ – ромб. Враховуючи це помітимо, що $\angle IP_1T_1 = \angle IPB = \angle A = 60°$, $\angle IT_1P_1 = \angle ITB = \angle C = 30°$. Таким чином, ΔIP_1T_1 – прямокутний з кутом $60°$, отже, $P_1T_1 = 2IP_1$, $IP_1 = P_1A = AP = PI$. Аналогічно, $IT_1 = T_1C = CT = TI$. Таким чином,

$$AC = AP_1 + P_1T_1 + CT_1 = PI + IT + 2IP_1 = 3IP + IT,$$

що й треба було довести.

3. У країні деякі пари міст з'єднані односторонніми залізницями, по яких потяги можуть рухатися лише в одному напрямі. Виявилося, що для будь-яких двох міст A та B існує принаймні два різних маршрути залізницею, в кожному з яких одне з міст, наприклад, A – є початком, а B – кінцем маршруту. Доведіть, що існує місто з якого можна виїхати та повернутися в нього залізницею.

(Арсеній Ніколаєв)

Розв'язання. Зрозуміло, що мова йде про орієнтований граф, де між деякими з вершин є направлені ребра, які ми будемо позначати як XY, тобто ребро йде від X до Y. Методом від супротивного, припустимо, що орієнтованого циклу немає. Розглянемо найдовший маршрут T, що складається з послідовного проходження вершин $P_1 P_2 \ldots P_k$. Нехай $A = P_1$, $B = P_2$. Зрозуміло, що T себе не перетинає, бо інакше утворюється цикл і задача розв'язана. За умовою існує інший маршрут S від A до B, що оминає ребро AB. Якщо S не проходить через жодну з вершин T, то замінимо в маршруті T ребро AB на маршрут S і отримаємо довший від T маршрут – суперечність. Тоді S містить якусь вершину $C = P_k$, $k > 2$. Але тоді є частина маршруту T, що з'єднує B та C, а також частина маршруту S, що з'єднує C та B. Таким чином отримали шуканий цикл, що суперечить припущенню. Одержана суперечність завершує доведення.

4. Про дійсні числа a, b, c відомо, що вони задовольняють такі умови:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-7, \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{11}{8}, \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\frac{75}{8}.$$

Чому може дорівнювати значення такого виразу:

а) $a+b+c$; ***б)*** abc?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: ***а)*** $a+b+c=9$; ***б)*** $abc=-1$.

Розв'язання. ***а)*** Зробимо такі перетворення:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=\frac{(a+b)+c}{a+b}+\frac{(b+c)+a}{b+c}+\frac{(c+a)+b}{c+a}=$$
$$3+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a} \Rightarrow (a+b+c)\cdot\frac{11}{8}=3+\frac{75}{8} \Rightarrow (a+b+c)=\frac{8}{11}\cdot\frac{99}{8}=9.$$

б) З іншого боку, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-7 \Rightarrow ab+bc+ca=-7abc \Rightarrow$

$$81=(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)=(a^2+b^2+c^2)-14abc \Rightarrow$$
$$a^2+b^2+c^2=81+14abc.$$

Крім того

$$(b+c)(c+a)+(a+b)(c+a)+(a+b)(b+c)=(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)=$$
$$=81+14abc-21abc=81-7abc.$$

Тоді з рівності $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{11}{8}$ маємо, що

$$8\big((b+c)(c+a)+(a+b)(c+a)+(a+b)(b+c)\big)=11(a+b)(b+c)(c+a) \Rightarrow$$
$$8\cdot(81-7abc)=11\cdot(9-c)(9-b)(9-a)=11\cdot(729-81(a+b+c)+9(ab+bc+ca)-abc)$$
$$\Rightarrow 648-56abc=11\cdot(729-729+9\cdot(-7abc)-abc) \Rightarrow 648abc=-648 \Rightarrow abc=-1.$$

3.1. Яку найбільшу довжину може мати замкнена ламана без самоперетинів, ланки якої розташовані по лініях сітки квадрату 8×8 (в тому разі і по краю)?

Відповідь: 80.

Розв'язання. Усього вузлів в цьому квадраті $9\cdot 9=81$. Позначимо вертикалі та горизонталі квадрату 8×8 числами від 0 до 8, тоді кожний вузол має дві координати (x, y) – горизонталь та вертикаль. Назвемо вузол *парним* (*непарним*), якщо сума його координат парна (непарна). Розглянемо усі шматочки цієї ламаної довжини 1, що з'єднує сусідні вузли, які назвемо *відрізками*. Тоді кожний відрізок з'єднує парний та непарний вузол. З 81 вузла 41 парний і 40 непарних, тому найдовша ділянка може проходити через 80 вузлів, бо парні та непарні вузли в такій ламаній чергуються. Крім того в такий ламаній кожний вузол, через який вона проходить, має два відрізки. Якщо на ламаній поставити напрямок обходу, то один відрізок входить у вузом, іншим – виходить. Таким чином максимальна довжина ламаної 80, тому що відрізків в цій ламаній так само не більше 80. Залишається показати, як та ламана має йти, щоб обійти 80 вузлів, що показане на рис. 5.

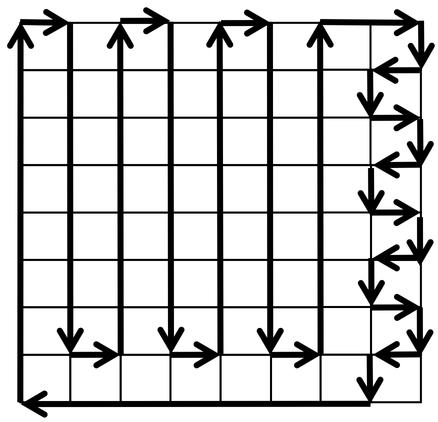

Рис. 5

4.1. Задача **4 *а)***.

9 клас

1. На острові живе 2021 людина, кожна з яких є математиком або гуманітарієм. Деякі мешканці острова знайомі один з одним, при цьому кожний має принаймні одного знайомого. Відомо, що той, в кого серед знайомих математиків менше ніж гуманітаріїв, завжди бреше, а усі інші завжди кажуть правду. Кожний мешканець острова стверджує, що серед його знайомих рівно два гуманітарії. Доведіть, що хоча б одна людина має принаймні 4-х знайомих.

(Олексій Масалітін)

Розв'язання. Методом від супротивного, тобто припустимо, що кожний мешканець острова має не більше 3-х знайомих. Оскільки усіх мешканців – непарна кількість, то хоча б у одного кількість знайомих – парна. Тобто за припущенням та умовою в нього рівно 2 знайомих. Якщо серед них є математики, то він збрехав, що серед його знайомих рівно 2 гуманітарія, хоча за умовою він повинен говорити правду. Якщо ж вони обидва гуманітарії, то він сказав правду, а мав збрехати. Одержана суперечність завершує доведення задачі.

2. В гострокутному трикутнику ABC висоти BE і CF перетинаються в ортоцентрі H, а M – середина BC. Пряма EF перетинає прямі MH і BC в точках P і T відповідно. AP вдруге перетинає описане коло ΔABC в точці Q. Доведіть, що $\angle AQT = 90°$.

(Федір Юдін)

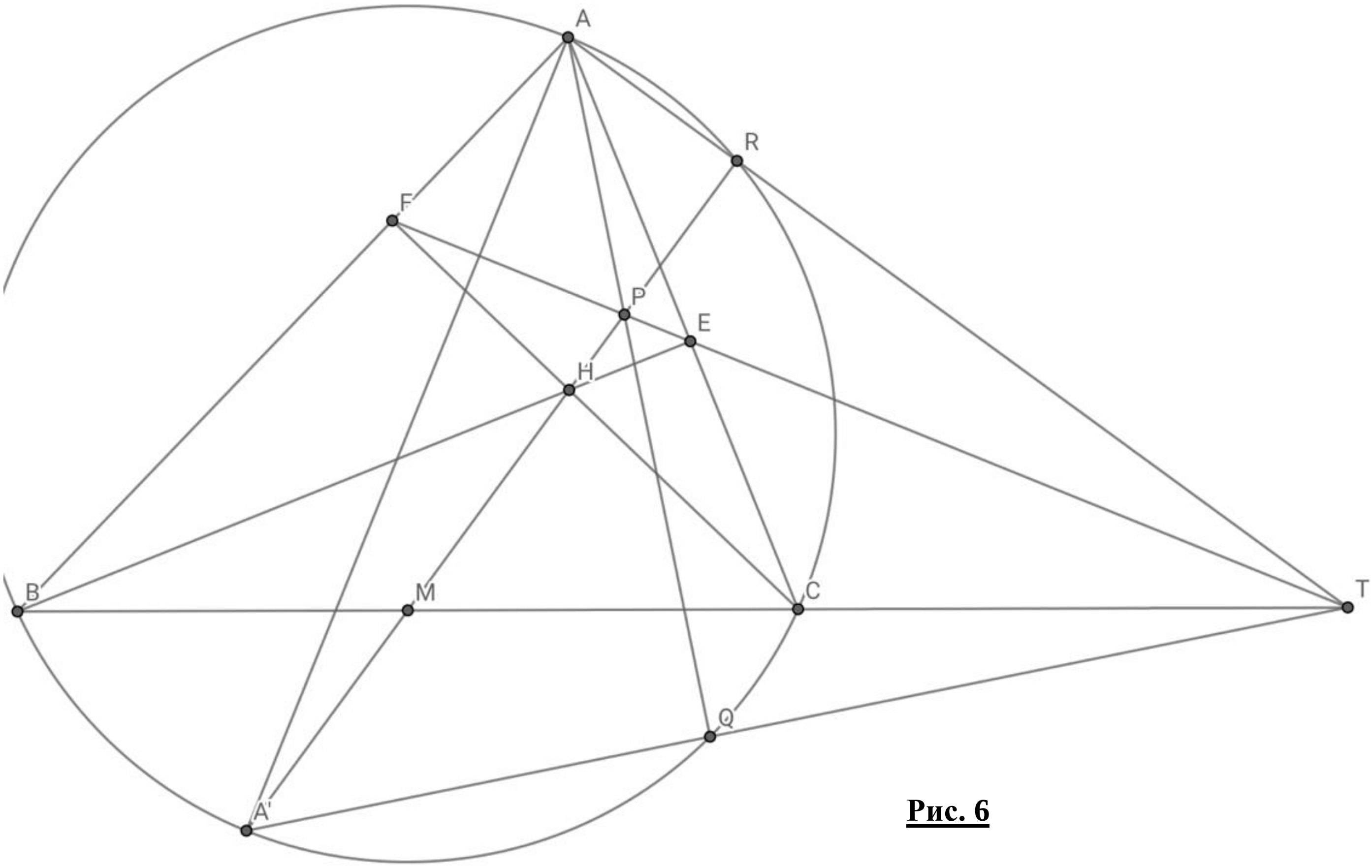

Рис. 6

Розв'язання. Нехай AA' – діаметр описаного кола трикутника ABC (рис. 6) Тоді $BHCA'$ – паралелограм, отже HM проходить через A'. Нехай R – друга точка перетину HM з описаним колом ABC. Тоді $\angle ARH = \angle ARA' = 90°$, тому R лежить на колі з діаметром AH. Прямі AR, EF і BC — радикальні осі кіл $(ABCR)$ і $(AFER)$, $(AFER)$ і $(BFEC)$, $(BFEC)$ і $(ABCR)$ відповідно. За теоремою про радикальний центр для кіл $(ABCR)$, $(AEFR)$, $(BEFC)$, прямі AR, EF і BC перетинаються в одній точці, тому AR проходить через T. Оскільки $AA' \perp EF$ і $A'R \perp AT$, то P – ортоцентр трикутника $AA'T$. Оскільки $\angle AQA' = 90°$, то Q – основа висоти з A в цьому трикутнику, звідки і випливає твердження задачі.

3. Нехай $a,\ b,\ c$ – попарно взаємно прості натуральні числа з сумою 200, при цьому число $(a+bc)(b+ca)$ ділиться націло на $c+ab$. Доведіть, що тоді принаймні одне з чисел $a,\ b,\ c$ дорівнює 1.

(Сердюк Назар)

Розв'язання. Помітимо, що сума $a+b+c=200$ – парна, тому з взаємної простоти випливає, що одне з цих чисел парне, два інших непарні. Тому кожне з чисел $a+bc$, $b+ca$ та $c+ab$ – непарне.
Нехай $a,b,c>1$ і $d=(a+bc,\ c+ab)$. Доведемо, що $d\mid(b+1)$. Припустимо, що це не так. Числа $a+bc+c+ab=(a+c)(b+1)$ та $a+bc-(c+ab)=(a-c)(b-1)$ діляться на d. Тоді існує просте число p, таке, що $p\mid(a+c)$ і $p\mid(a-c)(b-1)$. Врахувавши, що p не ділить $(a-c)$, одержимо, що $p\mid(b-1)$. Маємо, що p ділить $(a+b+c-1)=199$. Звідки $p=199$ і $b\ge200$, що неможливо. Аналогічно, $d\mid(a+1)$.
Таким чином $c+ab\ \mid(a+1)(b+1)$. Припустимо, що $c+ab<(a+1)(b+1)$. Тоді з доведеної подільності

$$(a+1)(b+1)\ge 2(c+ab)\Rightarrow(a+1)(b+1)\ge 2(1+ab)\Leftrightarrow(a-1)(b-1)\le 0,$$

одержали суперечність. Таким чином

$$c+ab=(a+1)(b+1)\Rightarrow c=a+b+1 \text{ або } 2c=a+b+c+1=201,$$

також суперечність, що й завершує доведення.

4. Знайдіть всі трійки додатних чисел a,b,c, для яких справджуються такі умови:

$$abc=1 \text{ та } (a^2+b^2+c^2)^3=(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1).$$

(Масалітін Олексій)

Відповідь: $a=b=c=1$.
Розв'язання. Зробимо такі перетворення в правій частині:

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)=\frac{1}{abc}(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)=$$
$$=\left(a+1+\frac{1}{a}\right)\left(b+1+\frac{1}{b}\right)\left(c+1+\frac{1}{c}\right)=(a+bc+1)(b+ac+1)(c+ab+1).$$

Тепер помітимо, що за нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним виконуються такі нерівності:

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3\ge a^2b^2c^2=1\ \Rightarrow\ a^2+b^2+c^2\ge 3,$$
$$a^2+1\ge 2a,\ b^2+c^2\ge 2bc.$$

Якщо їх додати, матимемо, що

$$(a^2+b^2+c^2)+(a^2+1)+(b^2+c^2)\ge 3+2a+2bc\ \Rightarrow$$

$a^2+b^2+c^2\ge a+bc+1$, звідки аналогічними діями випливає нерівність

$$(a^2+b^2+c^2)^3\ge(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1).$$

Рівність можлива лише за умов, що усі нерівності перетворюються в рівності, тобто $a=b=c=1$.

3.1. На дошку виписали усі власні дільники деякого складеного натурального числа n, збільшенні на 1. Знайдіть усі такі числа n, для яких числа на дошці будуть усіма власними дільниками деякого складеного натурального числа m.
Дільник натурального числа називається *власним*, якщо він відмінний від 1 та самого числа.

Відповідь: 4 та 8.
Розв'язання. Очевидно, що m – непарне, оскільки на дошці не може з'явитися число 2, бо 1 не є власним дільником числа n. Тому усі виписані дільники числа m непарні, а тому усі дільники числа n – парні. Тобто n не ділиться на жодне непарне просте число, тобто n – степінь двійки (і усі дільники n – також). Якщо $n\ \vdots\ 16$, то 4 та 8 – його власні дільники, тому на дошку виписані числа 5

та 9. Тому $m \vdots 45 \Rightarrow m \vdots 15$, звідки 15 його власний дільник. Але 15 не могло бути виписаним, бо 14 не є степенем двійки. Таким чином n не може ділитися на 16. Число, що лишилися, тобто $n = 4$ та $n = 8$ задовольняють умови, достатньо покласти відповідно $m = 9$ та $m = 15$.

4.1. Додатні числа a, b, c задовольняють умові $ab + bc + ca \geq 1$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{abc}.$$

Розв'язання. Нерівність, що треба довести, перепишемо таким чином: $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq \sqrt{3}$. Далі робимо такі перетворення, що використовують нерівність між середніми (та нерівність трьох квадратів):

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) + \left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right) + \left(\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(c \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + a \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) + b \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \right) \geq \frac{1}{2} \cdot (2c + 2a + 2b) =$$

$$= c + a + b = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)} \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} \geq \sqrt{3},$$

що й треба було довести.

10 клас

1. Знайдіть усі четвірки попарно різних простих чисел p, q, r, s, що задовольняють рівності: $p + qrs = 315$.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $p = 29$, $q,\ r,\ s$ – довільна перестановка чисел $2,\ 11,\ 13$.

Розв'язання. З умов задачі зрозуміло, що одне з простих чисел має бути 2, бо інакше сума двох непарних чисел стане рівним парному числу. З того, що $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ випливає, що жодне з цих чисел не дорівнює 3, 5 та 7. Якщо взяти три найменших непарних простих числа з тих, що лишилися, то це 11, 13 та 17, чий добуток, очевидно, більший за 315. Тому без обмеження загальності вважатимемо, що $s = 2$. Тоді подивимося на можливі варіанти вибору q, r. Будемо вважати, що $q < r$.

$2 \cdot 11 \cdot 13 = 286 < 315$. Тоді $p = 315 - 286 = 29$ – просте число.

$2 \cdot 11 \cdot 17 = 374 > 315$. Тому інших розв'язків не існує.

2. Доведіть, що числа x, y, z мають однаковий знак тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються такі умови: $xy + yz + zx > 0$ та $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} > 0$.

Розв'язання. Необхідність очевидна. Покажемо достатність. Позначимо $a = x + y + z,\ b = xy + yz + zx,\ c = xyz$. Тоді числа x, y, z є коренями кубічного рівняння

$$t^3 - at^2 + bt - c = 0.$$

За умовою $b = xy + yz + zx > 0$ та $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{a}{c} > 0$. Таким чином, a та c одного знаку. Якщо вони обидва додатні, то кубічне рівняння має усі корені додатні (очевидно, що не може мати від'ємних коренів), якщо вони обидва від'ємні, то кубічне рівняння має усі корені від'ємні. Твердження доведене.

3. Нехай A – множина з n різних чисел, B – множина з n різних чисел, C – множина з $(n-1)$ різних чисел. Доведіть, що можна розбити числа з A та B на n пар (в кожній з яких одне число з A та одне число з B) таким чином, що сума чисел в кожної пари не належить множині C.

(Тригуб Антон)

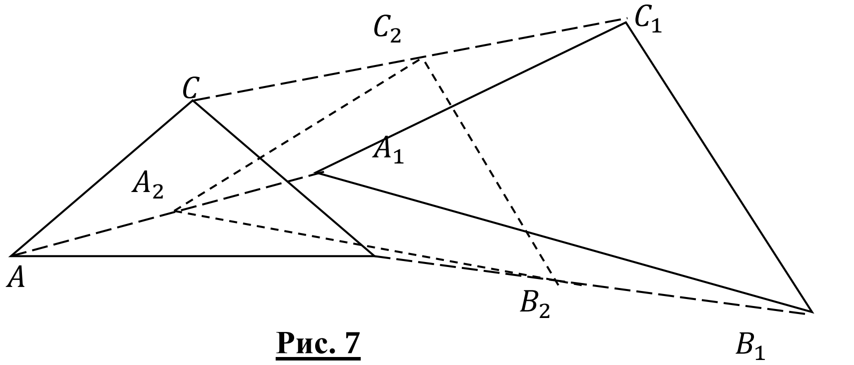

Рис. 7

Розв'язання. Побудуємо дводольний граф, вершини першої долі якого - елементи множини A, другої – елементи множини B. Проводитимемо ребро між вершинами $a \in A$ та $b \in B$ лише якщо $a + b \notin C$. Ми хочемо показати, що в даному двочастковому графі є досконале парування. За Лемою Холла, воно існує лише тоді, коли для довільної підмножини $A_1 \subset A$, у якої $|A_1| = k$, вершини A_1 з'єднані принаймні з k вершинами B. Припустимо, що для деякої підмножини A_1 це не так. Тоді існують принаймні $n - k + 1$ вершина B такі, що жодна з них не з'єднана з жодною з вершин A_1. Позначимо їх $b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-k+1}$, а елементи A_1 як $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Тоді всі k сум $a_1 + b_1$, $a_1 + b_2$, …, $a_1 + b_{n-k+1}$, $a_2 + b_{n-k+1}$, …, $a_k + b_{n-k+1}$ належать множині C. Але ці суми утворюють зростаючу послідовність і їх там рівно n, а тому вони всі різні і принаймні одна з них не належить C – суперечність, що завершує доведення.

4. Всередині чотирикутника $ABCD$ відмітили точку O таку, що $\angle OAD + \angle OBC = \angle ODA + \angle OCB = 90°$. Доведіть, що центри описаних навколо трикутників OAD та OBC кіл, а також середини сторін AB та CD лежать на одному колі.

(Антон Тригуб)

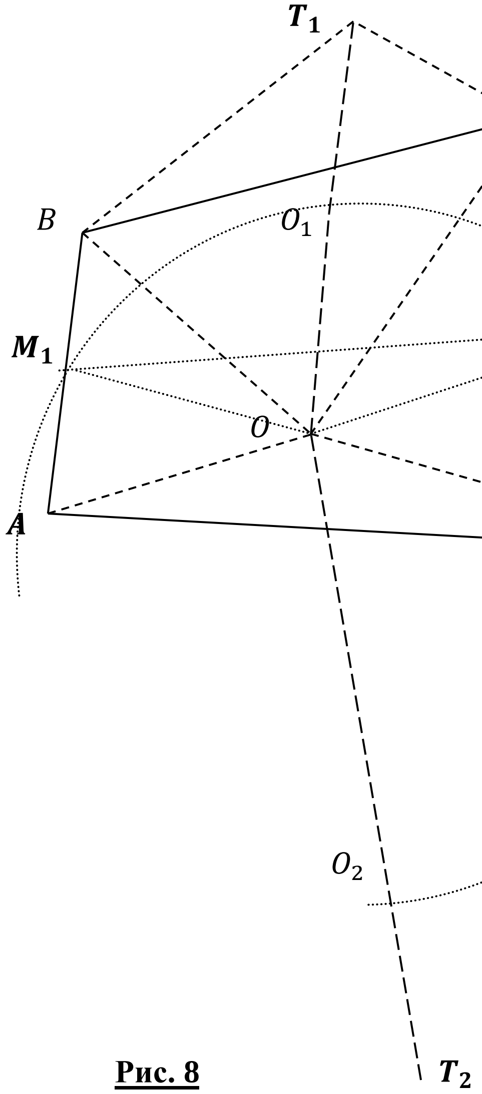

Рис. 8

Розв'язання. Спершу доведемо відоме допоміжне твердження:

Лема. Нехай ABC та $A_1B_1C_1$ – два подібні однаково орієнтовані трикутники, точки A_2, B_2, C_2 – середини відрізків AA_1, BB_1 та CC_1 відповідно. Тоді $\Delta A_2B_2C_2$ подібний до двох початкових трикутників.

Доведення. Нагадаємо, що однакова орієнтованість трикутників означає, що промінь AB для збігу з променем AC повертається проти руху годинникової стрілки на кут, що дорівнює аналогічному куту повороту проти руху годинникової стрілки для променів A_1B_1 та A_1C_1 (рис. 7). Це рівносильне тому, що існує поворотна гомотетія з центром у деякій точці P, що переводить ΔABC у $\Delta A_1B_1C_1$. Розглянемо також поворотну гомотетію з центром в P, яка переводить точку A у точку A_2.

Оскільки A_2 – середина AA_1, то отримаємо, що образ точки B при цій гомотетії також перейде в середину відрізку BB_1, аналогічно з точкою C, тобто трикутник $\Delta A_2B_2C_2$ – образ ΔABC при деякій поворотній гомотетії.
Лема доведена.

Тепер позначимо OT_1 – діаметр описаного кола ΔBOC, і OT_2 – діаметр описаного кола трикутника ΔAOD, а також O_1 та O_2 – центри описаних кіл ΔBOC та ΔAOD і водночас середини OT_1 та OT_2 (рис, 8). Легко бачити, що за відношень кутів з умови трикутники $\Delta BT_1C \sim \Delta AOD$ і аналогічно $\Delta BOC \sim \Delta AT_2D$. Нехай M_1 та M_2 – середини сторін AB та CD відповідно, тоді за лемою $\Delta M_1O_1M_2 \sim \Delta BT_1C$, а $\Delta M_1O_2M_2 \sim \Delta BOC$, звідки

$$\angle M_1O_2M_2 + \angle M_1O_1M_2 = \angle BOC + \angle BT_1C = 180°,$$

що й доводить твердження.

3.1. Скількома способами можна розфарбувати клітинки дошки 2021×2021 у жовтий та синій колір таким чином, щоб справджувалася умова: кожні два рядки мають різну кількість синіх клітинок, а кожні два стовпчики мають різну кількість жовтих клітинок?

Відповідь: $2 \cdot (2021!)^2$.

***Розв'язання*.** Розв'язуємо задачу для дошки $n \times n$, нехай r_i, $i = \overline{1,n}$ – кількість синіх комірок в i -му рядку, аналогічно c_j, $j = \overline{1,n}$ – кількість жовтих комірок в j -му стовпчику. Оскільки усі r_i – попарно різні, то $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} = \{0,1,\ldots,n\} \setminus \{a\}$ для деякого числа a. Аналогічно $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} = \{0,1,\ldots,n\} \setminus \{b\}$. Оскільки

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{n(n+1)}{2} - a, \qquad \sum_{j=1}^{n} c_j = \frac{n(n+1)}{2} - b, \qquad \sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{j=1}^{n} c_j = n^2,$$

то $a + b = n$. Зауважимо, якщо $r_i = 0$ для деякого i, то усі $c_j \geq 1 \Rightarrow b = 0$ і $a = n$. Якщо такого i не існує, то обов'язково існує $r_i = n \Rightarrow c_j \leq n - 1 \Rightarrow b = n$ і $a = 0$. Таким чином $a = 0$ або $a = n$.
Якщо $a = 0$, то для деяких i, j: $r_i = n$, $c_j = 0$, тобто i-ий рядок та j-ий стовпчик складаються з синіх комірок. Викреслюючи їх з дошки, ми маємо випадок квадрату $(n-1) \times (n-1)$ і $a = n - 1$. Аналогічно, при $a = n$, є $r_i = 0$, $c_j = n$, та після їхнього викреслення отримуємо дошку $(n-1) \times (n-1)$ з $a = 0$.
Таким чином, ми вибираємо одне з двох чисел, що відсутні 0 чи n, а далі кожного разу вибираємо рядок та стовпчик які пофарбовані одним кольором і так на кожному кроці, звідки й маємо шукану кількість розфарбувань: $2 \cdot (n!)^2$.

4.1. Нехай $ABCD -$ рівнобічна трапеція, $AD = BC, AB \parallel CD$. Діагоналі трапеції перетинаються у точці O, а точка M є серединою сторони AD. Коло, описане навколо трикутника BCM, вдруге перетинає сторону AD у точці K. Доведіть, що $OK \parallel AB$.

***Розв'язання*.** Нехай точка N є серединою сторони CB, а прямі AB та CK перетинаються у точці E (рис. 9). Оскільки чотирикутник $MBCK -$ вписаний, то $\angle AMB = \angle BCE$, а оскільки $ABCD$ рівнобічна трапеція, то $\angle AMB = \angle ANB$. За теоремою Фалеса, $\frac{BN}{NC} = \frac{BA}{AE} = 1$, звідси $BA = AE$. Оскільки $\Delta CDK \sim \Delta EAK$ та $\Delta COD \sim \Delta AOB$ маємо, що $\frac{DK}{KA} = \frac{CD}{AE} = \frac{CD}{AB} = \frac{DO}{OB}$. Звідси маємо, що $OK \parallel AB$.

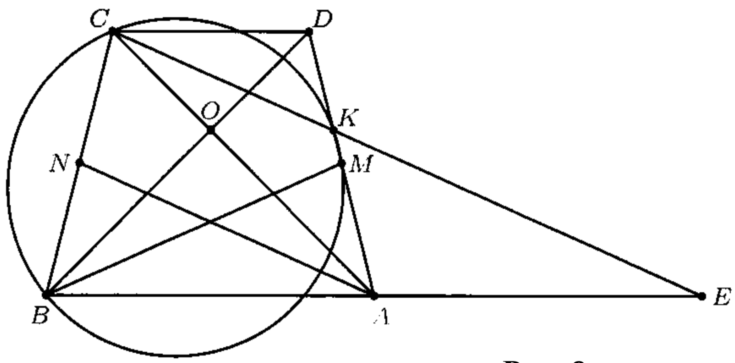

Рис. 9

11 клас

1. Доведіть, що при кожному натуральному n число $\frac{18^{4n+2}+1}{325}$ є складеним натуральним числом.

(Олександр Кукуш)

Розв'язання. Нехай $a = 18$ і розглянемо таке число: $k = \frac{a^{4n+2}+1}{a^2+1}$. Тоді

$$k = \frac{a^{4n+2}+1}{a^2+1} = \frac{(a^2)^{2n+1}+1}{a^2+1} = \frac{(a^2+1)((a^2)^{2n} - (a^2)^{2n-1} + (a^2)^{2n-2} - \ldots +1)}{a^2+1} \in \mathrm{N}.$$

З іншого боку

$$a^{4n+2} + 1 = a^{4n+2} + 2a^{2n+1} + 1 - 2a^{2n+1} = 18^{4n+2} + 2 \cdot 18^{2n+1} + 1 - 36 \cdot 18^{2n} =$$
$$= (18^{2n+1}+1)^2 - (6 \cdot 18^n)^2 = (18^{2n+1} - 6 \cdot 18^n + 1)(18^{2n+1} + 6 \cdot 18^n + 1).$$

Доведемо, що $18^{2n+1} - 6 \cdot 18^n + 1 > 325$. Це випливає з таких нерівностей:

$$18^{2n+1} - 6 \cdot 18^n + 1 \geq 18^{n+3} - 6 \cdot 18^n + 1 > 30 \cdot 18^n - 12 \cdot 18^n + 1 > 18 \cdot 18 + 1 = 18^2 + 1.$$

Таким чином, після скорочення на $a^2 + 1 = 325$ число не може бути простим, бо має принаймні два множники.

2. Знайдіть усі такі функції $f: R \to R$, що для довільних дійсних x, y справджується рівність:

$$f^{([x]^2+[y]^2+1)}(x) + f^{([x]^2+[y]^2+1)}(y) = x + y.$$

Тут через $f^{(k)}(x)$ позначена кількість композицій функції f, тобто це $\underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(x)\ldots))$.

(Вадим Коваль)

Відповідь: $f(x) = x$.

Розв'язання. Позначимо задану рівність через (1). Тоді робимо підстановки в рівність (1):

$x = y = 0 \Rightarrow f(0) + f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$

$y = 0 \Rightarrow f^{([x]^2+1)}(x) + f(0) = x \Rightarrow$

$$f^{([x]^2+1)}(x) = x. \qquad \textbf{(2)}$$

$y = x \Rightarrow f^{(2[x]^2+1)}(x) = x \Rightarrow x = f^{(2[x]^2+1)}(x) = f^{[x]^2}(f^{([x]^2+1)}(x)) \overset{(2)}{=} f^{[x]^2}(x)$, тобто

$$f^{[x]^2}(x) = x. \qquad \textbf{(3)}$$

Тепер остаточно маємо, що

$$x = f^{(2[x]^2+1)}(x) = f(f^{[x]^2}(f^{[x]^2}(x))) \overset{(3)}{=} f(f^{[x]^2}(x)) \overset{(3)}{=} f(x).$$

Таким чином єдиним можливим розв'язком є функція $f(x) = x$. Перевіркою переконуємося, що вона задовольняє умови, а тому є шуканим.

3. У трикутнику ABC провели висоту BH та бісектрису BL, вписане коло w дотикається до сторони AC в точці K. Відомо, що $\angle BKA = 45°$. Доведіть, що коло з діаметром HL дотикається до кола w.

(Антон Тригуб)

Розв'язання. Зауважимо, що точка A лежить між H і K, тому $\angle BAC > 90°$. Нехай зовнівписане коло ΔABC проти вершини B має центр у точці I_B та дотикається до сторони AC в точці T, точка I – інцентр ΔABC (рис. 10). Помітимо, що четвірка (B, I, L, I_B) – гармонічна, адже BI та BI_B – внутрішня та зовнішня бісектриси ΔABL відповідно. Оскільки четвірка (H, K, L, T) є проекцією четвірки (B, L, I, I_B) на пряму AC, то вона також є гармонічною.

Нехай P – точка вписаного кола ΔABC, діаметрально протилежна точці K. Тоді, як відомо, точки B, P, T лежать на одній прямій (з міркувань гомотетії). Нехай пряма BP перетинає вписане коло

ΔABC вдруге в точці S. Тоді $\angle KSB = \angle KST = 90°$. Чотирикутник $BHKS$ – вписаний з діаметром BK, звідки $\angle BSH = \angle BKH = 45°$. Тоді HS – зовнішня бісектриса $\angle KST$. Оскільки четвірка (H, L, K, T) є гармонічною, то (K, T, H, L) також гармонічна. Тому отримуємо, що SL є внутрішньою бісектрисою $\angle KST$.

Тепер помітимо, що коло з діаметром HL проходить через точку S. Покажемо, що це коло дотикається до вписаного кола ΔABC в цій точці. Це правда за лемою Архімеда: оскільки SK є внутрішньою бісектрисою $\angle HSL$, а вписане коло трикутника проходить через точку S та дотикається до HL в точці K, воно вписане в дугу HSL, що й вимагалось довести.

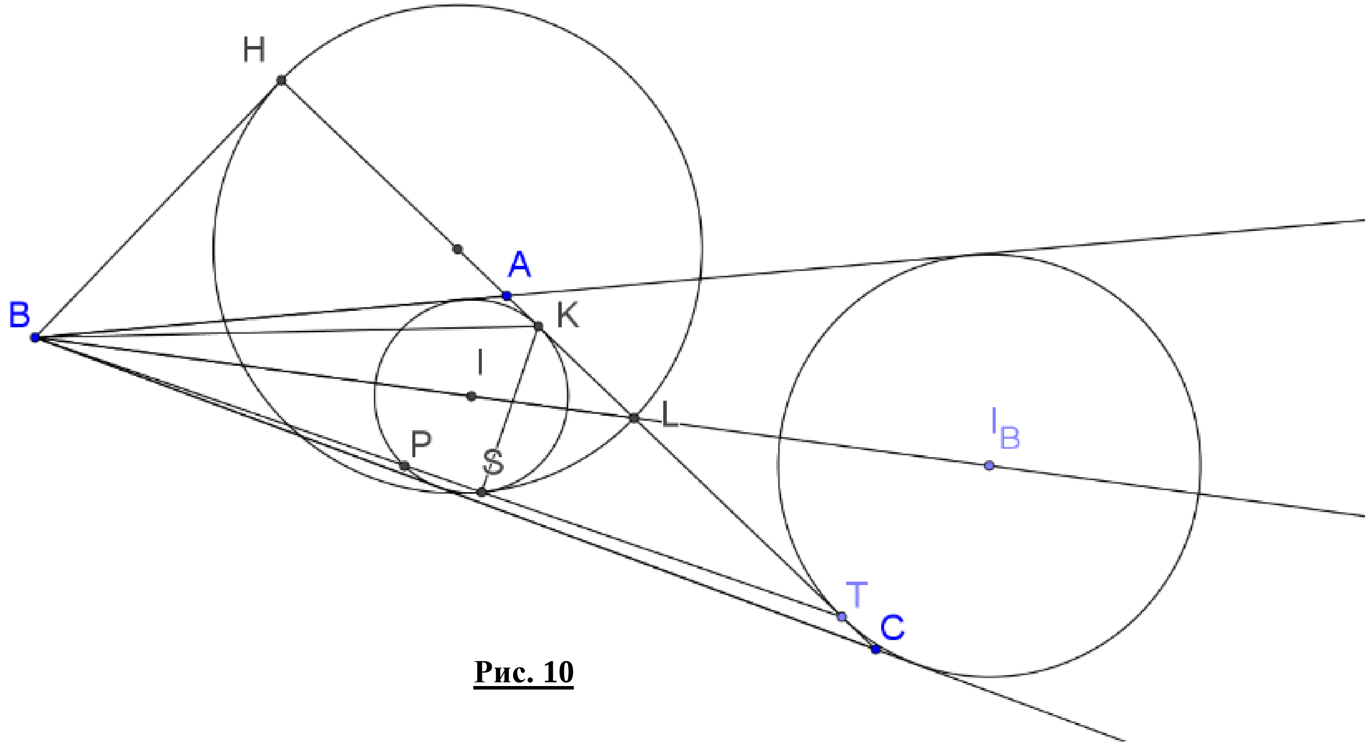

Рис. 10

4. Дано натуральне число N і відсортований масив цілих чисел $A^0 = [a_1, a_2, \ldots, a_N]$, для яких виконується умова: $0 = a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_N \le N$. Масив A^{i+1} отримується з масиву A^i таким чином: для кожного j від 1 до N від j -го елемента A^i віднімається j, отриманий масив сортується знову у порядку неспадання, після чого до всіх чисел додається деяка константа так, щоб мінімальне число в масиві стало рівним 0 – отриманий масив є масивом A^{i+1}. Наприклад,

$$A^0 = [0,0,1,2] \to [-1,-2,-2,-2] \to [-2,-2,-2,-1] \to A^1 = [0,0,0,1] \to$$
$$\to [-1,-2,-3,-3] \to\to [-3,-3,-2,-1] \to A^2 = [0,0,1,2].$$

Доведіть, що для $i \ge N-1$ справджується умова $A^i = A^{i+2}$.

(Антон Тригуб)

***Розв'язання*.** Для зручності введемо такі позначення: через a_j^i позначимо j-те число, $j = \overline{1, N}$, в масиві A^i. Спочатку доведемо такі леми.

Лема 1. Якщо для деякого i для кожного $1 \le j \le N-1$ $a_j^i \ge a_{j+1}^i - 1$, то $A^{i+2} = A^i$.

Доведення. Якщо $a_j^i \ge a_{j+1}^i - 1$, то $a_j^i - j \ge a_{j+1}^i - (j+1)$. Отже послідовність

$(a_1^i - 1, a_2^i - 2, \ldots, a_N^i - N)$ – не зростаюча, тому

$$A^{i+1} = [a_N^i - N + C, a_{N-1}^i - (N-1) + C, \ldots, a_1^i - 1 + C]$$

для деякого C. Помітимо, що й для цього масиву також справджується умова: для кожного $1 \le j \le N-1$ $a_j^{i+1} \ge a_{j+1}^{i+1} - 1$. Дійсно

$$a_j^{i+1} - a_{j+1}^{i+1} = (a_{N+1-j}^i - (N+1-j) + C) - (a_{N-j}^i - (N-j) + C) = a_{N+1-j}^i - a_{N-j}^i - 1 \geq -1,$$
тому
$$A^{i+2} = [a_N^{i+1} - N + D, a_{N-1}^{i+1} - (N-1) + D, \dots, a_1^{i+1} - 1 + D] =$$
$$= [(a_1^i - 1 + C) - N + D, (a_2^i - 2 + C) - (N-1) + D, \dots, (a_n^i - N + C) - 1 + D] =$$
$$= [a_1^i + C + D - N, a_2^i + C + D - N, \dots, a_N^i + C + D - N].$$
Оскільки мають бути $a_1^i = a_1^{i+2} = 0$, то $C + D - N = 0$, звідки $A^{i+2} = A^i$.
Лема доведена.

Лема 2. Якщо для якихось $i, x \geq 1$ та кожного $1 \leq j \leq N-1$ $a_{j+1}^i - a_j^i \leq x$, то для кожного $1 \leq j \leq N-1$ справджується умова $a_{j+1}^{i+1} - a_j^{i+1} \leq max\{1, x-1\}$.

Доведення. Помітимо, що $|(a_{j+1}^i - (j+1)) - (a_j^i - j)| \leq max\{1, x-1\}$, для кожного $1 \leq j \leq N-1$. Справді:
$$a_{j+1}^i - (j+1)) - (a_j^i - j) = (a_{j+1}^i - a_j^i) - 1 \Rightarrow -1 \leq (a_{j+1}^i - a_j^i) - 1 \leq x - 1.$$
Тоді, якщо виписати числа $a_1^i - 1$, $a_2^i - 2$, …, $a_N^i - N$ у порядку зростання, то не може бути проміжку між двома сусідніми з них довжиною принаймні $1 + max\{1, x-1\}$, адже ми можемо пройти між кожними двома числами $a_1^i - 1$, $a_2^i - 2$, …, $a_N^i - N$ стрибками не більше $max\{1, x-1\}$.
Лема доведена.

Подальше розв'язання очевидне. Для A^0 лема 2 справджується з $x = N$, тому для A^{N-1} лема 2 справджується з $x = 1$, як і для всіх $i \geq N-1$. Подальше випливає з леми 1.

3.1. Два кола k_1 та k_2 з радіусами r_1 та r_2 не мають спільних точок. Пряма AB – спільна внутрішня дотична, а пряма CD – спільна зовнішня дотична до цих кіл, де $A, C \in k_1$ та $B, D \in k_2$. Знаючи, що $AB = 12$ та $CD = 16$, знайдіть значення добутку $r_1 r_2$.

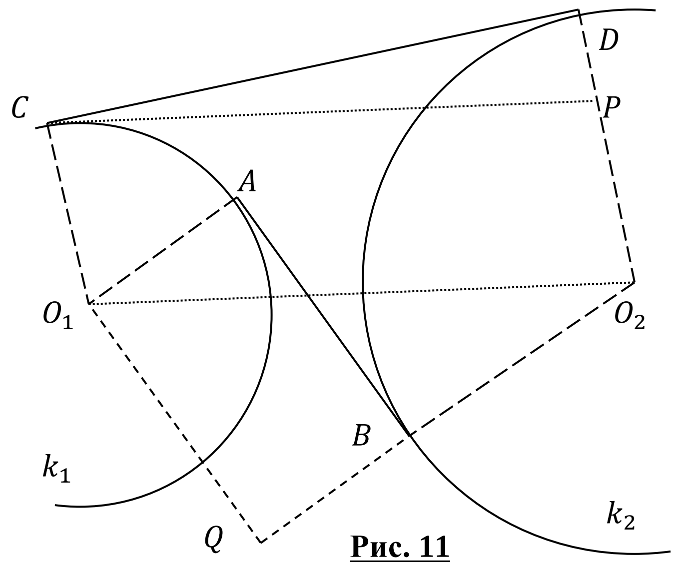

Рис. 11

Відповідь: 28.
Розв'язання. Позначимо через O_1 та O_2 – центри кіл k_1 та k_2 відповідно (рис. 11). Вважатимемо, що $r_1 < r_2$. Зробимо паралельний перенос відрізку O_1O_2 у положення CP, зрозуміло, що оскільки $O_1C || O_2D$, то $P \in O_2D$. Аналогічно перенесемо паралельно відрізок AB у положення O_1Q, зрозуміло з паралельності $O_1A || O_2B$, то B лежить на прямій QO_2. Тоді маємо два прямокутні трикутники CPD та O_1O_2Q, запишемо для них теорему Піфагора:
$$O_1O_2^2 = CD^2 + DP^2 = O_1Q^2 + O_2Q^2 \Rightarrow 16^2 + (r_2 - r_1)^2 = 12^2 + (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow$$
$$4r_1r_2 = 16^2 - 12^2 \Rightarrow r_1r_2 = 28.$$

4.1. Маємо n куп, кожна з яких містить по 2021 камінців. Ваги камінців дорівнюють одному з чисел 1, 2, …, 25 та загальна вага кожної купки різна. Відомо, що якщо взяти дві довільні купки та забрати з кожної з них найважчий та найлегший камінець, то купка, що була перед тим важчою стане легшою. Для якого максимального n це можливо?

Відповідь: $n = 12$.

<u>Розв'язання</u>. Відсортуємо купки у порядку зростання ваги, сумарну вагу i-ї купки позначимо через S_i і відповідно через S_i' – вагу після вилучення найважчого та найлегшого камінців. Тоді маємо такі нерівності: $S_1 < S_2 <\ldots< S_n$ та $S_1' > S_2' >\ldots> S_n'$. Нехай

$$S_1 - S_1' = x \Rightarrow S_2 - S_2' \geq x + 2, \ldots, S_n - S_n' \geq x + 2(n-1).$$

Найважчий камінь першої купки не легший за $\frac{S_1'}{2019}$, тому $S_1 - S_1' = x \geq \frac{S_1'}{2019} + 1$.

Аналогічно найлегший камінь, що вилучили з купки n максимум важить $\frac{S_n'}{2019} \Rightarrow \frac{S_n'}{2019} + 25 \geq S_n - S_n'$.

З одержаних двох нерівностей маємо, що:

$$\frac{S_1'}{2019} + 1 \leq x = S_1 - S_1' \leq S_n - S_n' - 2(n-1) \leq \frac{S_n'}{2019} + 25 - 2(n-1) \ \Rightarrow$$

$$2(n-1) \leq \frac{S_n'}{2019} - \frac{S_1'}{2019} + 24 < 24 \ \Rightarrow \ n < 13.$$

Покажемо, що $n = 12$ – можливо. Купка за номерок $k = \overline{1,\ 12}$ містить 1 камінь вагою $2k$, $(2007 + k)$ камінців вагою 24 та $13 - k$ – вагою 25. Неважко переконатися, що усі умови задачі справджуються.