Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LXXVII Київська міська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв’язань задач

1 тур

Київ, 23 січня 2022 року

«Не важливо з якою швидкістю ти рухаєшся до своєї мети,
головне – не зупинятися»
Конфуцій

7 клас

1. Подайте дріб $\frac{1}{2022}$ у вигляді різниці двох правильних дробів з меншими знаменниками.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $\frac{1}{674}-\frac{1}{1011}$.

Розв'язання. Один з можливих варіантів подання такий:

$$\frac{1}{2022}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 337}=\frac{3-2}{2\cdot 3\cdot 337}=\frac{3}{2\cdot 3\cdot 337}-\frac{2}{2\cdot 3\cdot 337}=\frac{1}{2\cdot 337}-\frac{1}{3\cdot 237}=\frac{1}{674}-\frac{1}{1011}.$$

2. Є $n\geq 3$ попарно різних відрізків, кожний з яких має довжину, що в сантиметрах задається натуральним числом. Відомо, що з будь-яких трьох з цих n відрізків можна утворити трикутник. Серед цих відрізків є такі, що мають довжини 5 см та 12 см. Яке найбільше значення може приймати n?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 6.

Розв'язання. Упорядкуємо усі відрізки за довжиною таким чином: $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Зрозуміло, що щоб з трьох відрізків можна було скласти трикутник необхідно й достатньо, щоб сума довжин двох найкоротших була більша за довжину третього відрізка. Тому, якщо не враховувати два заданих відрізки, то найменший відрізок не може мати довжину, меншу від 8, бо інакше з відрізків довжинами 5, $a\leq 7$ та 12 не можна скласти трикутник, оскільки $5+7\leq 12$.

Таким чином $a_1=5$ та $a_2\geq 8$. Зрозуміло, що $a_2\leq 12$ та кількість відрізків не може перевищувати кількість елементів множини $\{5,a_2,a_2+1,a_2+2,a_2+3,a_2+4\}$, тобто $n\leq 6$.

Одразу зазначимо, що множина відрізків з довжинами $\{5,8,9,10,11,12\}$ умову задовольняють. Таким чином шукане $n=6$.

3. Задана множина з n не обов'язково різних чисел $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, тобто деякі елементи множини можуть співпадати. Розглянемо усі 2^n-1 непорожні підмножини цієї множини, для кожної такої підмножини обчислимо суму її елементів. Яка найбільша кількість з обчислених сум могла виявитись рівною 1? Наприклад, для множини $\{-1;2;2\}$ маємо такі 7 непорожніх підмножин: $\{-1\}$, $\{2\}$, $\{2\}$, $\{-1;2\}$, $\{-1;2\}$, $\{2;2\}$ та $\{-1;2;2\}$, з яких суму елементів, що дорівнює 1, мають рівно дві.

(Антон Тригуб)

Відповідь: 2^{n-1}.

Розв'язання. Приклад, що така кількість досягається такий: $(1,0,0,\ldots,0)$.

Припустимо, що принаймні у $2^{n-1}+1$ підмножини сума 1. Очевидно, що не всі елементи дорівнюють 0: тоді б всі суми були рівні 0. Без обмеження загальності, $a_1\neq 0$. Тоді поділимо всі множини на 2^{n-1} пар так, що в кожній парі підмножини відрізняються лише наявністю a_1. В кожній парі суми різні, бо відрізняються на a_1, а тому всього одиниць не більше за 2^{n-1}.

4. У деякій чарівній країні використовуються лише купюри номіналом у 3, 25 і 80 гривень. Бізнесмен Віктор 2024 дні поспіль харчувався в ресторані цієї країни, причому кожного наступного дня він платив (без решти) на 1 гривню більше ніж попереднього. Чи міг він сумарно виплатити за харчування рівно мільйон купюр?

(Олексій Масалітін)

Відповідь: ні.
Розв'язання. Нехай суму S грн він заплатив k купюрами серед яких a по 33 грн, b по 25 грн і c по 80 грн. Тоді

$$S = 3a + 25b + 80c \equiv 3a + 3b + 3c = 3k \ (\mathrm{mod}\ 11).$$

Якщо $n + 1$ – сума, яку він сплатив у перший день, тоді у i-ий день Віктор сплатив суму $n + i$ рівно k_i купюрами. З наведеної вище формули випливає, що

$$3(k_1 + k_2 + \cdots + k_{2024}) \equiv (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+2024) = 2024n + 1012 \cdot 2025 \ (\mathrm{mod}\ 11).$$

Оскільки $1012 \ \vdots\ 11$, то права частина кратна 11, а тому й ліва частина, що дорівнює загальній кількості сплачених купюр, також має ділитися на 11. Але число 1000000 на 11 не ділиться, а тому рівно стільки купюр Віктор використати не міг.

3.1. Сума взаємно простих натуральних чисел m та n дорівнює 90. Яке найбільше значення може приймати добуток mn цих чисел?

Відповідь: 2021.
Розв'язання. Зробимо такі перетворення для добутку цих чисел:

$$mn = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = 45^2 - \left(\frac{m-(90-m)}{2}\right)^2 = 2025 - (m-45)^2 \to \max.$$

Таким чином той максимум буде, коли найменшим є значення виразу $(m-45)^2$, але тут треба не забути про взаємну простоту чисел m, n.
$m = 45$, тоді $n = 45$ та числа m, n не взаємно прості.
$m = 46$, тоді $n = 44$ та числа m, n не взаємно прості.
$m = 47$, тоді $n = 43$ та числа m, n взаємно прості, тобто шукані. Звідси найбільше значення добутку дорівнює $2025 - (47-45)^2 = 2021$.

4.1. При діленні з остачею чотирьох послідовних натуральних чисел на деяке трицифрове число виявилося, що сума чотирьох остач дорівнює 983. Знайдіть остачу при діленні найменшого з цих чотирьох чисел на 109.

Відповідь: 108.
Розв'язання. Позначимо ці чотири послідовних числа через n, $n+1$, $n+2$ та $n+3$. Трицифрове число, на яке ділять ці числа позначимо через b. Нехай $n = bq + r$. Тепер розглянемо можливі значення остачі r.
Якщо $r \le b - 4$, то остачі вказаних чисел дорівнюють $r, r+1, r+2$ та $r+3 \Rightarrow$

$$r + r + 1 + r + 2 + r + 3 = 983 \ \Rightarrow 4r = 973,$$

отримали суперечність.
Якщо $r = b - 3$, то остачі вказаних чисел дорівнюють $r, r+1, r+2$ та $0 \Rightarrow$

$$r + r + 1 + r + 2 + 0 = 983 \ \Rightarrow 3r = 980,$$

отримали суперечність.
Якщо $r = b - 2$, то остачі вказаних чисел дорівнюють $r, r+1$, 0 та $1 \Rightarrow$

$$r + r + 1 + 0 + 1 = 983 \ \Rightarrow 2r = 981,$$

отримали суперечність.
Якщо $r = b - 1$, то остачі вказаних чисел дорівнюють r, 0, 1 та $2 \Rightarrow$

$$r + 0 + 1 + 2 = 983 \ \Rightarrow r = 980 \ \Rightarrow b = r + 1 = 981.$$

Залишається знайти шукану остачу:

$$n = bq + r = 981q + 980 = 109(9q + 8) + 108.$$

<u>8 клас</u>

1. Задані 5 попарно різних натуральних чисел. Чи може їхнє середнє арифметичне бути:

а) у 3 рази більшим за найбільший спільний дільник;

б) у 2 рази більшим за найбільший спільний дільник?

<u>Відповідь</u>: ***а)*** так, ***б)*** ні.

<u>Розв'язання</u>. ***а)*** Достатньо навести приклад шуканих 5 чисел, наприклад, то може бути набір $1, 2, 3, 4, 5$, у якого середні арифметичне дорівнює 3, а найбільший спільний дільник 1

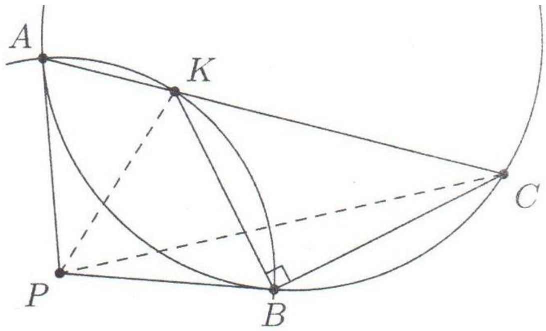
б) Припустим вказана п'ятірка чисел a_1, a_2, a_3, a_4 та a_5 існує, нехай d – їх НСД, тоді ці 5 чисел можна переписати таким чином: $a_i = db_i$, $i = \overline{1,5}$ і задана в умові рівність переписується таким чином:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_5}{5} = 2d \Leftrightarrow d(b_1 + \cdots + b_5) = 10d \Leftrightarrow b_1 + \cdots + b_5 = 10.$$

Зрозуміло, що числа $b_1, \ldots, b_5$ попарно різні, а тому найменшою їхня сума може бути $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 > 10$, одержана суперечність завершує доведення.

2. Задача **7.3.**

3. Навколо тупокутного трикутника ABC з тупим кутом при вершині B описане коло. Дотичні до цього кола у точках A і B перетинаються в точці P, а перпендикуляр до прямої BC, що проведений через точку B, перетинає AC у точці K. Доведіть, що $PA = PK$.



<u>Рис. 1</u>

(Данило Хілько)

<u>Розв'язання</u>. Зауважимо спочатку, що оскільки $\angle ABC > 90°$, то точка K лежить всередині відрізку AC (рис. 1). Також, зрозуміло, що $PA = PB$. Будемо доводити, що K лежить на колі ω з центром P і радіусом PA. Достатньо довести, що $\angle APB = 2(180° - \angle AKB)$. Справді, візьмемо на більшій дузі кола ω точку X. Тоді $\angle AXB = \frac{1}{2}\angle APB$. Якщо виконується попередня умова, то $\angle AKB + \angle AXB = 180°$, звідки точки A, K, B та X лежать на колі ω. Центр цього кола – точка P, тож $PK = PA$.

Отже, доведемо, що $\angle APB = 2(180° - \angle AKB)$. Оскільки $PA = PB$, а також враховуючи теорему про кут між дотичною і хордою

$$\angle APB = 180° - 2\angle ABP = 180° - 2\angle ACB = 180° - 2(90° - \angle CKB) = 2\angle CKB = 2(180° - \angle AKB).$$

4. Серед натуральних чисел 1, 2, …, 2022 обрали декілька. Виявилося, що сума будь-яких двох із цих обраних чисел не ділиться націло на жодну з різниць будь-яких двох з цих чисел. Знайдіть найбільшу можливу кількість обраних чисел.

(Олексій Масалітін)

<u>Відповідь</u>: 674.

<u>Розв'язання</u>. Припустимо, що обрано більше ніж 674 числа. Тоді знайдеться трійка чисел $3n + 1$, $3n + 2$, $3n + 3$, серед яких обрано більше одного, а тому різниця між деякими з обраних чисел за модулем не перевищує 2. Очевидно, що знайдеться пара обраних чисел однієї парності, тоді їх сума буде ділитися на ту різницю між обраними числами, що за модулем не перевищує 2. Таким чином, було обрано не більш ніж 674 числа.

Покажемо, що зазначену кількість чисел обрати можна. Розглянемо набір чисел $\{1, 4, 7, \ldots, 2020\}$, що складається з 674 чисел. Оскільки різниця будь-яких двох чисел цієї множини ділиться на 3, а сума будь-яких двох чисел цієї множини не ділиться на 3, можемо стверджувати, що ця множина задовольняє умові задачі.

5. У турнірі з підводного поло взяли участь 2022 команди, і кожні дві команди зіграли між собою рівно один матч. Кожній команді за перемогу, нічию та поразку нараховували відповідно 2, 1 та 0 очок. Виявилось, що жодні дві команди не набрали однакову кількість очок. У підсумковій таблиці команди розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Під час перегляду регламенту виявилось, що кожний матч, в якому був переможець, мав закінчитись унічию, і навпаки, у кожному матчі, що закінчився внічию, мав бути переможець. При цьому виявилось, що знову жодні дві команди не набрали однакову кількість очок, і у підсумковій таблиці їх знову розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Чи могло статися так, що новий порядок команд у підсумковій таблиці протилежний початковому?

(Федір Юдін)

Відповідь: ні.
Розв'язання. Дивись розв'язання задачі 9.5 для парного n.

4.1. Чи існує квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами, для якого число a не ділиться націло на 2022 та усі числа $f(1)$, $f(2)$, …, $f(2022)$ мають різні остачі при ділення на 2022?

Відповідь: так.
Розв'язання. Розглянемо такий тричлен:

$$f(x) = 1011x^2 + 1012x = 1011x(x+1) + x.$$

Як бачимо, перший доданок завжди кратний 2022, тому $f(x)$ має остачу, що дорівнює x. Твердження доведене.

5.1. У турнірі з підводного поло взяли участь 11 команд, і кожні дві команди зіграли між собою рівно один матч. Кожній команді за перемогу, нічию та поразку нараховували відповідно 2, 1 та 0 очок. Виявилось, що жодні дві команди не набрали однакову кількість очок. У підсумковій таблиці команди розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Під час перегляду регламенту виявилось, що кожний матч, в якому був переможець, мав закінчитись унічию, і навпаки, у кожному матчі, що закінчився внічию, мав бути переможець. При цьому виявилось, що знову жодні дві команди не набрали однакову кількість очок, і у підсумковій таблиці їх знову розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Чи могло статися так, що новий порядок команд у підсумковій таблиці протилежний початковому?

(Федір Юдін)

Відповідь: так.
Розв'язання. Дивись розв'язання задачі 9.5 для непарного n.

9 клас

1. Яке найменше значення може приймати вираз

$$\frac{(x+y+|x-y|)^2}{xy}$$

для додатних змінних x, y?

Відповідь: 4.

Розв'язання. Без обмеження загальності вважатимемо, що $x \geq y$, тоді можемо зробити такі спрощення:

$$\frac{(x+y+|x-y|)^2}{xy} = \frac{(x+y+x-y)^2}{xy} = \frac{(2x)^2}{xy} = \frac{4x^2}{xy} = \frac{4x}{y} \geq 4.$$

Якщо покласти $x = y$, то це значення досягається.

2. Для довільних чисел x, y доведіть нерівність

$$\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2} + \sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2} + \sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2} + 20.$$

(Богдан Рубльов)

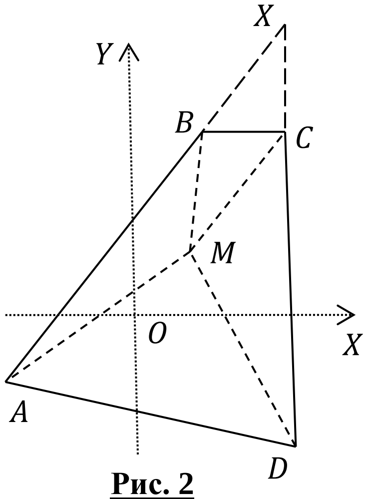


Рис. 2

Розв'язання. Розглянемо на координатній площині точки $A(-4,-2)$, $B(2,6)$, $C(5,6)$ та $D(5,-4)$ (рис. 2). Для довільної точки $M(x,y)$ на площині задана нерівність переписується таким чином: $MA + MD - MB - MC \leq 20$. Знайдемо найбільше можливе значення виразу

$$S(M) = MA + MD - MB - MC.$$

Для довільної точки M на площині з нерівності трикутника справджується нерівність:

$$S(M) = (MA - MB) + (MD - MC) \leq AB + CD.$$

При цьому для точки $X = AB \cap CD$ справджується така рівність

$$S(X) = (XA - XB) + (XD - XC) = AB + CD = 10 + 10 = 20.$$

Таким чином максимальне значення досягається для точки X, а для усіх інших – справджується строга нерівність, бо принаймні одна з нерівностей не перетворюється в рівність.

3. Нехай AL – бісектриса трикутника ABC. Коло з центром в точці B та радіусом BL перетинає промінь AL в точці E, а коло з центром в точці C та радіусом CL перетинає промінь AL в точці D (точки E та D відмінні від точки L). Доведіть, що $AL^2 = AE \cdot AD$.

(Микола Мороз)

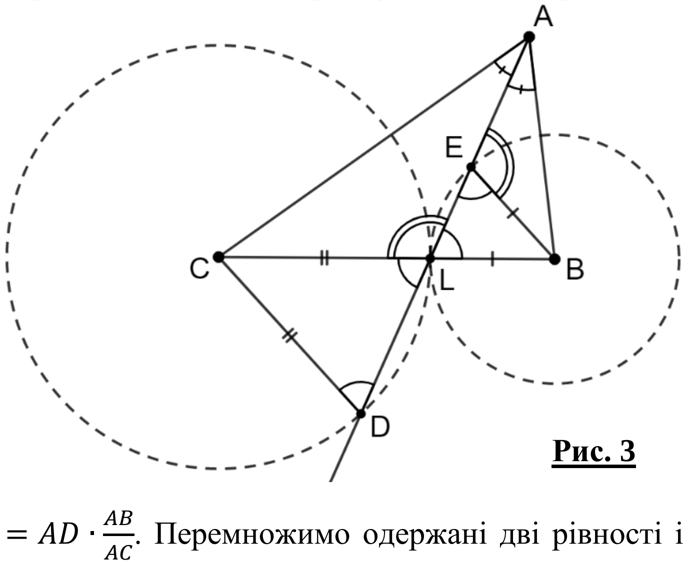


Рис. 3

Розв'язання. Очевидно, що трикутники BEL та CDL – рівнобедрені, а кути $\angle CLD$ та $\angle BLE$ вертикальні (рис. 3). Тому $\angle BEL = \angle BLE = \angle CLD = \angle CDL$. Звідси кути $\angle AEB = \angle ALC$як суміжні до рівних кутів. Також $\angle CAL = \angle BAL$, оскільки AL – бісектриса.

Помітимо, що трикутники CLA та BEA подібні за двома кутами. Тому $\frac{AL}{AE} = \frac{AC}{AB}$, звідки $AL = AE \cdot \frac{AC}{AB}$. Також помітимо, що подібними є трикутники BLA та ACD за двома кутами. Тому $\frac{AL}{AD} = \frac{AB}{AC}$, звідки $AL = AD \cdot \frac{AB}{AC}$. Перемножимо одержані дві рівності і отримаємо, що $AL^2 = AE \cdot AD$.

4. Назвемо натуральне число вільним від квадратів, якщо воно не ділиться на p^2 для жодного простого числа p. Дано число $n > 1$, що вільне від квадратів і має d натуральних дільників. Яку найбільшу кількість дільників цього числа можна обрати так, щоб для будь-яких двох з цих обраних, наприклад, a і b, число $a^2 + ab - n$ не було квадратом цілого числа?

(Олексій Масалітін)

Відповідь: $\frac{d}{2}$.

Розв'язання: Оскільки $n > 1$ вільне від квадратів, воно не може бути квадратом. Тоді всі дільники числа n можна розбити на пари $(t_1, t_2), (t_3, t_4), \ldots, (t_{d-1}, t_d)$ так, щоб добуток дільників в кожній парі дорівнював n. Якщо ми обрали два числа (a, b) з однієї пари, то $a^2 + ab - n = a^2$, що суперечить умові. Таким чином, з кожної пари було обрано не більше одного числа, тому всього їх було обрано не більше ніж $\frac{d}{2}$. Покажемо, що завжди можна обрати $\frac{d}{2}$ чисел. Зафіксуємо довільний простий дільник p числа n і оберемо всі дільники числа n, що діляться на p. Нескладно показати, що їх буде рівно $d/2$. Покажемо, що такий набір дільників задовольняє умові задачі. Нехай $a = kp, b = lp$ – довільні дільники з обраної групи, а $n = pt$. Зазначимо, що тоді l, k, t не діляться на p. Тоді $a^2 + ab - n = p(pk^2 + pkl - t)$ і число в дужках не ділиться на p , адже t не ділиться на p. Таким чином, $a^2 + ab - n$ ділиться на p, але не ділиться на p^2, а отже, не може бути квадратом жодного цілого числа.

5. У турнірі з підводного поло взяли участь $n \geq 2$ команди, і кожні дві команди зіграли між собою рівно один матч. Кожній команді за перемогу, нічию та поразку нараховували відповідно 2, 1 та 0 очок. Виявилось, що жодні дві команди не набрали однакову кількість очок. У підсумковій таблиці команди розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Під час перегляду регламенту виявилось, що кожний матч, в якому був переможець, мав закінчитись унічию, і навпаки, у кожному матчі, що закінчився внічию, мав бути переможець. При цьому виявилось, що знову жодні дві команди не набрали однакову кількість очок, і у підсумковій таблиці їх знову розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Для яких n могло статися так, що новий порядок команд протилежний початковому?

(Федір Юдін)

Відповідь: для непарних n.

Розв'язання. Нехай $n = 2k + 1$ – непарне. Покажемо, що описана ситуація можлива. Розглянемо $2k + 1$ команд $T_1, T_2, \ldots, T_{2k+1}$. Визначимо результат матчу між T_i та T_j для $i < j$ як перемогу T_i якщо $j \leq i + k$ та нічию інакше. Маємо, що для всіх $1 \leq i \leq k + 1$ команда T_i має k перемог та $k + 1 - i$ нічиїх, а для $k + 2 \leq i \leq 2k + 1$ команда T_i має $2k + 1 - i$ перемог та $i - k - 1$ нічиїх. У обох випадках, T_i має $3k + 1 - i$ очок, тобто порядок розташування команд такий: $T_1, T_2, \ldots, T_{2k+1}$. Також, визначимо результат матчу між T_i та T_j для $i < j$ після перегляду як нічию, якщо $j \leq i + k$, та як поразку T_i інакше. Після перегляду, T_i має $k - 1 + i$ очок, отже порядок команд: $T_{2k+1}, T_{2k}, \ldots, T_1$. На рис. 4 показаний випадок для $n = 7$.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Оч**
1	X	2	2	2	1	1	1	9
2	0	X	2	2	2	1	1	8
3	0	0	X	2	2	2	1	7
4	0	0	0	X	2	2	2	6
5	1	0	0	0	X	2	2	5
6	1	1	0	0	0	X	2	4
7	1	1	1	0	0	0	X	3

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Оч**
1	X	1	1	1	0	0	0	3
2	1	X	1	1	1	0	0	4
3	1	1	X	1	1	1	0	5
4	1	1	1	X	1	1	1	6
5	2	1	1	1	X	1	1	7
6	2	2	1	1	1	X	1	8
7	2	2	2	1	1	1	X	9

Рис. 4

Нехай $n = 2k$ – парне. Кожен матч додає 2 до сумарної кількості очок, тому сумарна кількість очок дорівнює $2k(2k - 1)$. Нехай команда T була першою, а після перегляду стала останньою. Помітимо, що або після, або до перегляду T має хоча б k нічиїх. Якщо T має хоча б k нічиїх до перегляду, то ця команда мала щонайбільше $3k - 2$ очок, тобто загальна кількість очок не перевищує

$$(3k - 2) + (3k - 3) + \cdots + (k - 1) = 2k(3k - 2) - \frac{2k(2k - 1)}{2} = 4k^2 - 3k < 2k(2k - 1),$$

одержали суперечність. Якщо T має хоча б k нічиїх після перегляду, то ця команда має хоча б k очок, тобто загальна кількість очок не менша

$$k + (k+1) + \dots + (3k-1) = 2k^2 + \frac{2k(2k-1)}{2} = 4k^2 - k > 2k(2k-1),$$

Знову отримали суперечність, що завершує доведення.

<u>Альтернативне розв’язання парного випадку</u>. Помітимо, що кількість очок кожної команди може змінитись на не більше ніж $n-1$. Якщо в першої команди було x очок, а в останньої y, а стало x_1, y_1 відповідно, то маємо:

$$y_1 \geq x_1 + (n-1), x \geq y + (n-1), x_1 \geq x - (n-1), y_1 \leq y + (n-1),$$

звідки $y_1 = x = x_1 + (n-1) = y + (n-1)$, звідки кількості очок команд – n послідовних чисел. Але тоді маємо

$$y + (y+1) + \ldots + (y+n-1) = n(n-1) \Rightarrow ny = \frac{n(n-1)}{2}, y = \frac{n-1}{2},$$

не ціле число. Одержана суперечність завершує доведення.

4.1. Знайдіть усі такі натуральні числа $a \leq b \leq c$, для яких вираз $2^a + 2^b + 2^c + 3$ є точним квадратом цілого числа.

<u>Відповідь:</u> $a = b = c = 1$ та $a = 1, b = 2, c = 4$.
<u>Розв’язання</u>. Якщо $a \geq 2$, то $2^a + 2^b + 2^c + 3 \equiv 3 \pmod 4$, тобто квадратом цілого числа бути не може, таким чином $a = 1$. Надалі розглядаємо вираз $2^b + 2^c + 5$, який має бути точним квадратом.
Якщо $b \geq 3$, то $2^b + 2^c + 5 \equiv 5 \pmod 8$, тобто квадратом цілого числа бути не може, таким чином $b \leq 2$.
Якщо $b = 1$, то квадратом має бути вираз $2^c + 7$. При $c \geq 2$ $2^c + 7 \equiv 3 \pmod 4$, тобто квадратом цілого числа бути не може, таким чином $c = 1$. Таким чином маємо перший розв’язок $a = b = c = 1$, для якого $2^a + 2^b + 2^c + 3 = 9$.
Якщо $b = 2$, то квадратом має бути вираз $2^c + 9$. Якщо $2^c + 9 = k^2 \Rightarrow 2^c = (k-3)(k+3)$. Таким чином $k - 3 = 2^m$ та $k + 3 = 2^n$, звідки $2^n - 2^m = 2^m(2^{n-m} - 1) = 6 = 2 \cdot 3$, звідки $m = 1, n - m = 2$, а тому $n = 3 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow c = 4$. Таким чином знайшли ще один розв’язок $a = 1, b = 2, c = 4$.

5.1. Петрик та Василь грають у гру на дошці $m \times n$. Вони роблять ходи по черзі і розпочинає Петрик. Петрик на своєму ході ставить пішака в довільну вільну клітинку дошки. Василь на своєму ході має поставити пішака на вільну клітинку, яка є сусідньою по стороні з клітинкою, у яку поставив свого пішака Петрик останнім своїм ходом. Василь виграє, якщо уся дошка буде заповнена пішаками. Петрик виграє, якщо після його ходу Василь не зможе зробити хід за зазначеними правилами та на дошці ще будуть вільні клітинки. Якщо кожний прагне перемогти, то хто має виграшну стратегію в залежності від значень m, n.

4	2	
	1	
	3	

<u>Рис. 5</u>

<u>Відповідь:</u> Петрик перемагає коли $m = n = 3$, а також m, n – непарні і $\max\{m, n\} \geq 5$, в усіх інших випадках перемагає Василь.
<u>Розв’язання</u>. Нехай m – кількість рядків дошки, а n – кількість стовпчиків. , що й треба було довести. Якщо m – парне, то розіб’ємо усі поля на пари сусідніх по стороні. Тоді при будь-якому ході Петрика Василь матиме можливість зробити і свій хід і переможе у грі. Повністю аналогічно, якщо парним є n, то переможе Василь. Для 1×1, 3×1 та 1×3так само очевидно, що переможе Василь.
Нехай тепер $m = n = 3$, тоді перемагає Петрик завдяки такій стратегії, перший хід робить в центр (1), Василь без обмеження загальності ходить над коміркою Петрика (2), а далі Петрик ходить під своїм першим ходом (3) (рис. 5). Після цього без обмеження загальності Василь ходить у лівий верхній кут (4). Далі Петрик ходить у правий стовпчик, після чого Василь відповідає в ньому і Петрик робить останній хід так само у правий стовпчик і перемагає.

Останній випадок коли m, n – непарні та принаймні одне з них не менше за 5. Будемо вважати, що кількість стовпчиків $n \geq 5$. Петрик буде кожним своїм ходом ставити своїх пішаків в центральний стовпчик, доки це можливо. По завершенні таких ходів, ми маємо ситуацію перед ходом Петрика. На дошці усі пішаки стоять у трьох центральних стовпчиках, тобто два крайні точно порожні. Крім того на дошці виставлена парна кількість пішаків. Загальна кількість полів на дошці непарна, тому або область праворуч від центрального стовпчика, або ліворуч Петрик надалі. від нього містить непарну кількість порожніх полів (наприклад, праворуч). Саме в цю частину дошки і ходитиме Петрик надалі. Василь має відповідати так само в цій частині дошки, бо центральний стовпчик вже заповнений, тому сусідні поля з полем, куди сходив Петрик, розташовані праворуч від центрального стовпчика. Оскільки праворуч непарна кількість порожніх полів перед ходом Петрика, то останнього пішака поставить туди саме він, і на цей хід Василь не матиме відповіді і програє, бо ще буде купа вільних полів ліворуч від центрального стовпчика.

<u>10 клас</u>

1. Чи існує квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ з цілими непарними коефіцієнтами a, b, c, який має одним з коренів число $\frac{1}{2022}$?

<u>Відповідь:</u> не існує.

<u>Розв'язання</u>. Припустимо, що така парабола $ax^2 + bx + c$ існує і має коренем число $\frac{1}{2022}$, тоді

$$\frac{a}{2022^2} + \frac{b}{2022} + c = 0 \Leftrightarrow a + 2022b + 2022^2c = 0\,.$$

Звідси число a має бути парним, одержана суперечність завершує доведення.

2. Задані $2n$ попарно різних натуральних чисел. Яку найбільшу кількість пар з цих чисел можна гарантовано вибрати так, щоб кожне число було не більше ніж в одній парі, і в кожній парі сума чисел була складеним числом?

(Антон Тригуб)

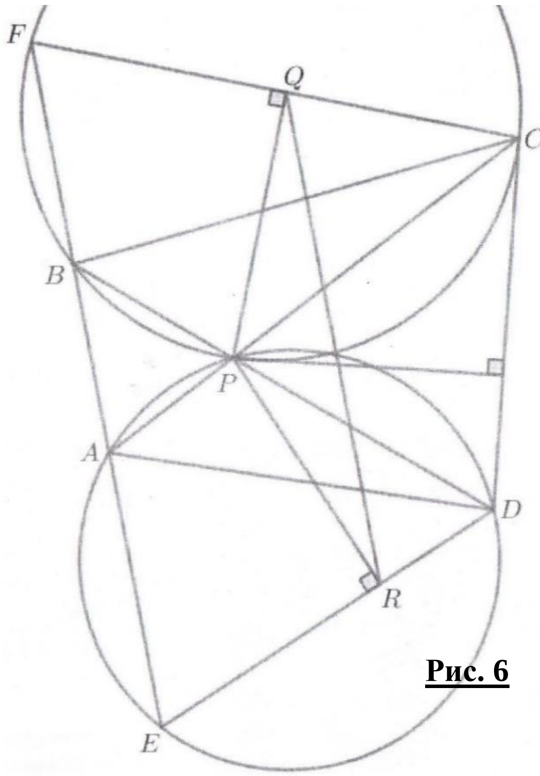
<u>Відповідь:</u> $n - 1$.

<u>Розв'язання</u>. Нехай $p_1, p_2, \dots, p_{2n-1}$ – довільні попарно різні прості числа більші за 2. Тоді для набору $(1, p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_{2n-1} - 1)$ не можна вибрати n пар, бо жодне число не можна поставити в пару з числом 1.

З іншого боку, ми завжди можемо сформувати принаймні $n - 1$ пару з чисел одної парності. В кожній такій парі сума буде парною і не меншою за 4, а отже складеною.

3. Нехай P – точка перетину діагоналей вписаного чотирикутника $ABCD$. Описані кола ΔAPD та ΔBPC перетинають пряму AB у точках E та F відповідно. Q та R – проекції точки P на прямі FC та DE. Доведіть, що $AB || QR$.

(Михайло Штанденко)



<u>Рис. 6</u>

<u>Розв'язання</u>. Позначимо через $d(Z, XY)$ – відстань від точки Z до прямої X. З рівності вписаних кутів маємо, що (рис. 6)

$$\angle PEB = \angle ADB = \angle ACB = \angle PFA \Rightarrow PE = PF.$$

<u>Рис. 6</u>

Більше того,

$$\angle EDP = \angle BAP = \angle BDC, \qquad \angle FCP = \angle PBA = \angle DCP\,,$$

тому P є точкою перетину бісектрис $\angle EDC$ та $\angle DCF$, звідки $d(P,DE)=d(P,DC)=d(P,CF)$, звідки $PQ=PR$. Тоді $\Delta FPQ=\Delta EPR$ як прямокутні за гіпотенузою та катетом. З рівності $PQ=PR$ випливає, що $\angle PQR=\angle PRQ$, тоді $\angle FQR=\angle QRE$. Аналогічно доводиться, що $\angle QFE=\angle REF$. А це означає, що $EQRF$ – рівнобічна трапеція, а тому й $QR||EF$, що й треба було довести.

4. Для довільних невід'ємних чисел x та y доведіть нерівність:

$$x^2y^2+x^2y+xy^2\le x^4y+x+y^4.$$

Розв'язання. Якщо $x=0$ або $y=0$, то нерівність очевидна. Нехай тепер $x,y>0$. Розділимо ліву і праву частини початкової нерівності на xy. Отримаємо:

$$xy+x+y\le x^3+\frac{1}{y}+\frac{y^3}{x}.$$

Застосуємо відому нерівність, що є наслідком нерівності Коші-Шварца:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}:$$

$$x^3+\frac{1}{y}+\frac{y^3}{x}\ge\frac{(x^2)^2}{x}+\frac{1^2}{y}+\frac{(y^2)^2}{xy}\ge\frac{(x^2+1+y^2)^2}{x+y+xy}\ge\frac{(x+y+xy)^2}{x+y+xy}=xy+x+y,$$

що й завершує доведення.

5. У лівій-нижній кутовій клітинці 1×1 дошки $m\times n$ ($m,n\ge 3$) стоїть чорна фішка, а в лівій-верхній та правій-нижній клітинках стоять білі фішки. Петрик за один хід двічі поспіль пересуває чорну фішку у сусідню по стороні клітинку, а Василь може або одну з білих фішок двічі поспіль пересунути на сусідню по стороні клітинку, або кожну з двох білих фішок окремо пересунути на сусідню за стороною клітинку. Фішки не можна ставити на поля, в яких вже побувала фішка іншого кольору. Василь перемагає, якщо у певний момент через скінченну кількість ходів обидві білі фішки опиняться в одній клітинці. Якщо Василь прагне перемогти, а Петрик прагне не дати йому такої можливості, то за яких умов на m та n перемагає Василь? Першим ходить Петрик.

(Арсеній Ніколаєв)

Відповідь: якщо m та n мають однакову парність, то перемагає Василь, інакше – Петрик.
Розв'язання. Без обмеження загальності вважатимемо, що кількість рядків не більша за кількість стовпчиків, тобто $m\le n$ Занумеруємо рядки знизу догори числами $1,2,\dots,m$, а стовпчики зліва направо – $1,2,\dots,n$, тоді кожна клітинка має дві координати – номер рядка та стовпчика. Фішку, що на початку у лівій-верхній комірці (клітинці) та має координати $(m,1)$ позначимо **А**, другу фішку – з комірки $(1,n)$ – через **Б**.

Покажемо, що якщо m та n мають однакову парність, то Василь має переможну стратегію.

Василь може діяти таким чином: $\frac{1}{2}(n-m)$ разів він ходить фішкою **А** двічі поспіль праворуч. Після цього дві білі фішки будуть розташовані у протилежних кутах квадрату $m\times m$. Після цього він кожним ходом робить 1 хід фішкою **А** праворуч, а фішкою **Б** – 1 крок нагору. Покажемо, що в цьому випадку білі фішки потраплять в одне поле з координатами (m,n), тобто чорна фішка не зможе завадити цьому. Для цього покажемо, що чорна фішка ніколи не зможе дістатися жодної клітини верхнього рядка або правого стовпчика. Методом від супротивного, припустимо, що це не так.

Випадок 1. Чорна фішка дісталася верхнього рядка. Фішка **А** на цей момент зробила x подвійних та y одинарних ходів. Тоді чорна фішка за цей час зробила $(x+y+1)$ хід, кожний з яких – це пересування фішки на 2 сусідні клітинки. Таким чином сума її координат могла б змінитися найбільше на $2(x+y+1)$. Оскільки вона потрапила у верхній рядок, то перша компонента її клітини m, тому вона знаходиться у стовпчику з номером не більше $2+2(x+y+1)-m$. У свою чергу фішка **А** знаходиться також у верхньому рядку у стовпчику з номером $1+2x+y$. За припущенням фішка **А** має стояти лівіше чорної фішки, інакше б чорна фішка порушила б умови задачі. Таким чином мала справджуватися нерівність:

$1+2x+y<2+2(x+y+1)-m \Rightarrow y+3>m \Rightarrow m-2\leq y$

Але це нерівність означає, що біла фішка А вже знаходиться в принаймні в клітині $(m, n-1)$, а біла фішка В принаймні в $(m-1, n)$, а чорна фішка має знаходитись в (m, n). Але тоді маємо, що принаймні на одній з клітин $(m, n-1)$ та $(m-1, n)$ були і чорна і біла фішка. Суперечність.

Одержана суперечність завершує перший випадок.

Випадок 2. Чорна фішка дісталася правого рядка. Нехай на цей момент вона зробила k подвійних ходів. Тоді сума координат чорної фішки стала б максимум $2+2k$, причому, оскільки чорна фішка знаходиться у правому стовпчику, то її перша координата дорівнює n. Тому номер її рядка не більше за $2+2k-n$. Порахуємо в якому рядку знаходиться **Б**. Перші $\frac{1}{2}(n-m)$ ходів фішка **Б** не рухалася, а решту $2k-\frac{1}{2}(n-m)$ ходів вона ходила на одну клітинку нагору. Тобто номер її рядка $1+2k-\frac{1}{2}(n-m)$. За припущенням фішка **Б** має знаходитися у рядку з меншим номером, ніж чорна фішка. Тому має справджуватися така нерівність:

$$2+2k-n>1+2k-\frac{1}{2}(n-m)\Rightarrow 1>\frac{1}{2}(n+m),$$

що неможливо.

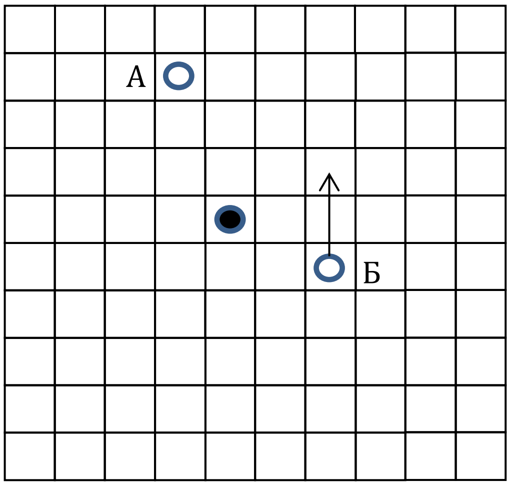


Рис. 7

Таким чином за будь-яких умов білі фішки зустрінуться в кутовій клітині дошки і Василь перемагає.

Тепер покажемо, що якщо m та n мають різну парність, то Петрик має переможну стратегію.

Першим ходом він пересуває чорну фішку на одну клітинку нагору та на одну праворуч. Далі він діє за таким алгоритмом, поки це можливо: якщо Василь ходить двічі поспіль фішкою **А** (**Б**), то Петрик рухає чорну фішку на дві клітинки праворуч (нагору); якщо Василь рухає кожну із своїх фішок, то Петрик робить один хід нагору і один праворуч.

<u>*Лема*</u>. Алгоритм ходів Петрика має такі властивості:

Якщо Петрик може зробити черговий хід, то після цього ходу чорна фішка завжди буде правіше за фішку А по стовпчиках та вище за фішку Б по рядках, при цьому на тій частині дошки (правіше від А та вище за Б) білі фішки ще не робили ходи;

Петрик не може зробити хід у відповідності до алгоритму лише за умов, що чорна фішка досягла краю дошки або білі фішки стоять у сусідніх клітинах над нею та праворуч.

Доведення леми. Проведемо доведення ММІ. Після першого ходу все очевидно. Нехай Петрик зробив k подвійних ходів. Якщо Василь робить однією фішкою подвійний хід (рис. 7), то Петрик може зробити аналогічний хід, при цьому він не перетне траєкторію жодної з білих фішок. Наприклад, був хід фішкою Б на дві клітинки нагору, тоді у Петрика немає перетину з фішкою Б, бо він так само ходить нагору але в іншому стовпчику там, де ще не ходили білі фішки, та не перетне траєкторію фішки А, бо вона лівіше. Якщо кожна з фішок робить по одному ходу, то або вони обидві опиняться в сусідніх з чорною фішкою клітинках, або у принаймні одна буде відстояти від чорної фішки. Тоді Петрик робить хід за алгоритмом (рис. 8). Легко зрозуміти, що після $(k+1)$-го ходу зберігається зазначена в умові ситуація, тому *лема доведена*.

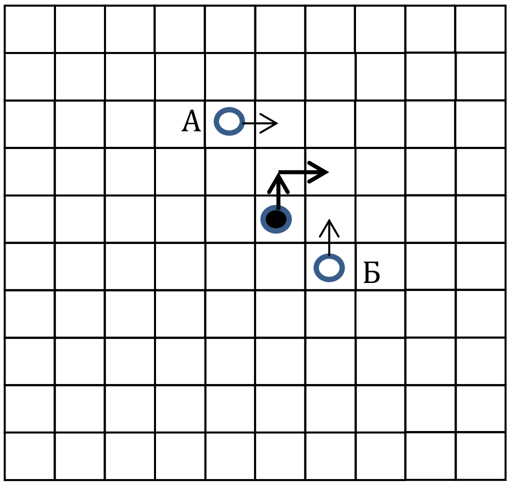


Рис. 8

За цієї леми, якщо Петрик досяг краю дошки, то він розділив траєкторії білих фішок своєю траєкторією, і білі фішки ніколи не опиняться в одній клітинці. Покажемо, що ситуація, коли обидві білі фішки поруч з чорною – не можлива. Парність суми координат білих фішок мінус координати чорної фішки є інваріантом після ходу кожного з гравців. Після ходу або дві координати змінюються на 1, або одна з координат змінюється на 2. На початку гри маємо таке значення відповідного інваріанту:

$$\big((1+n)+(1+m)-(1+1)\big)=(m+n)\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2).$$

У ситуації, коли білі фішки зазначеним чином оточують чорну, тобто чорна має координати (k,l), а білі фішки відповідно $(k,l+1)$ та $(k+1,l)$, і маємо таке значення інваріанту:

$$\big((k+1+l)+(k+l+1)-(k+l)\big)\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Як бачимо ми одержали суперечність, яка показує, що така ситуація при заданих (m,n) не можлива, що й завершує доведення і другого випадку.

4.1. Для додатних чисел a,b,c, що задовольняють умову: $ab+bc+ca=1$, доведіть, що справджується нерівність:

$$\left(\sqrt{bc}+\frac{1}{2a+\sqrt{bc}}\right)\cdot\left(\sqrt{ca}+\frac{1}{2b+\sqrt{ca}}\right)\cdot\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{2c+\sqrt{ab}}\right)\geq 8abc.$$

Розв'язання. З умови задачі випливає, що

$$\frac{1}{2a+\sqrt{bc}}=\frac{ab+bc+ca}{2a+\sqrt{bc}}=\frac{bc+a(b+c)}{2a+\sqrt{bc}}\geq\frac{bc+2a\sqrt{bc}}{2a+\sqrt{bc}}=\sqrt{bc},$$

звідки випливає, що

$$\sqrt{bc}+\frac{1}{2a+\sqrt{bc}}\geq 2\sqrt{bc}.$$

Якщо виписати ще дві аналогічні нерівності

$$\sqrt{ca}+\frac{1}{2b+\sqrt{ca}}\geq 2\sqrt{ca},\sqrt{ab}+\frac{1}{2c+\sqrt{ab}}\geq 2\sqrt{ab},$$

та перемножити їх, то одержимо бажану нерівність.

5.1. У лівій-нижній кутовій клітинці 1×1 дошки 2022×2023 стоїть чорна фішка, а в лівій-верхній та правій-нижній клітинках стоять білі фішки. Петрик за один хід двічі поспіль пересуває чорну фішку у сусідню по стороні клітинку, а Василь може або одну з білих фішок двічі поспіль пересунути на сусідню по стороні клітинку, або кожну з двох білих фішок окремо пересунути на сусідню за стороною клітинку. Фішки не можна ставити на поля, в яких вже побувала фішка іншого кольору. Василь перемагає, якщо у певний момент через скінченну кількість ходів обидві білі фішки опиняться в одній клітинці. Доведіть, що при правильній грі Петрика Василь перемогти не зможе.

(Арсеній Ніколаєв)

Дивись розв'язання задачі 10–5.

11 клас

1. Учитель написав на дошці 5 попарно різних чисел. Після цього Петрик порахував суми кожних двох із цих чисел і виписав їх на лівій половині дошки, Василь зробив те ж саме для сум кожної трійки чисел та записав їх на правій половині дошки (сума Петриком та Василем записується стільки разів, скільки разів вона була отримана). Чи міг вчитель записати такі числа, щоб на лівій та правій половині дошки були записані однакові набори чисел, з урахуванням кількості разів, скільки вони там записані?

Відповідь: так.
Розв'язання. Достатньо, щоб вчитель записав такі числа: $-2, -1, 0, 1, 2$. Далі можна або безпосередньо виписати ті 10 чисел, що мали записати Петрик та Василь. А можна застосувати й такі міркування. Для кожних двох чисел, наприклад, a, b, що обирає Петрик, з одного боку існують два числа $(-a, -b)$, що мають протилежні знаки, а з іншого боку Василь обирав в якості однієї з трійок чисел усі числа окрім a, b. Вони так само мають суму $(-a-b)$, бо сума усіх п'яти чисел дорівнює нулеві. Таким чином встановлена відповідність між числами, що записані на лівій та правій половинах дошки.

2. Задача **10.2.**

3. В гострокутному трикутнику ABC точки H і O є точками перетину висот і центром описаного кола відповідно. Пряма HO перетнула сторони AB і AC в точках X і Y відповідно, причому точка H належить відрізку OX. Виявилося, що $XH = HO = OY$. Знайдіть граудусну міру $\angle BAC$.

(Олексій Масалітін)

Відповідь: $\angle BAC = 60°$.
Розв'язання. У розв'язанні цієї задачі будемо користуватись відомим фактом: у довільному трикутнику відстань від вершини до точки перетину висот удвічі більша за відстань від центра описаного кола до протилежної сторони.
Позначимо через O_B та H_B – основи перпендикулярів, що опущені з точок O та H відповідно на пряму AC, точки O_C та H_C визначаються аналогічно (рис. 2). Зі сформульованого факту маємо, що та $BH = 2OO_B$ та $CH = 2OO_C$. Також помітимо, що $OO_B || HH_B$ та $HO = OY$, а тому OO_B – середня лінія ΔYHH_B, звідки $HH_B = 2OO_B = BH$. Аналогічно HH_C є середньою лінією трикутника ΔXOO_C, звідки $HH_C = \frac{1}{2}OO_C = \frac{1}{4}CH$. Оскільки чотирикутник BH_CH_BC є вписаним, то $BH \cdot HH_B = CH \cdot HH_C$, звідки $BH^2 = 4HH_C^2$, звідки $BH = 2HH_C$, а значить $\angle HBH_C = 30°$. Звідси зрозуміло, що $\angle BAC = 60°$, що і треба було знайти.

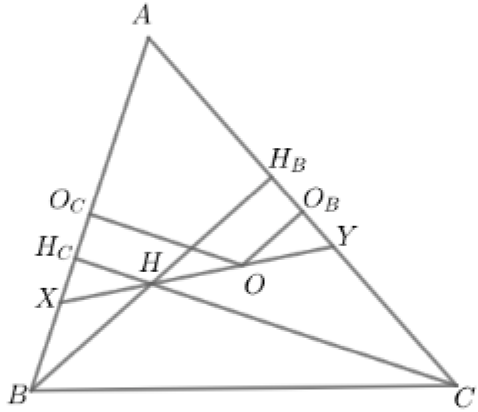


Рис. 9

4. Дано $n \geq 4$ додатних чисел. Виявилось, що $\frac{n(n-1)}{2}$ попарних добутків із цих чисел у якомусь порядку утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що всі числа рівні.

(Антон Тригуб)

Розв'язання: Якщо якісь два добутки рівні, то всі добутки рівні, а тому і всі числа рівні. Якщо якісь два числа рівні, то якісь два добутки рівні, отже і всі числа рівні.
Тепер розглянемо 4 найбільші числа $a < b < c < d$. Найбільші два добутки – це cd, bd. Тоді різниця прогресії – це $cd - bd$. Тоді ми маємо, що $ac - ab = a(c-b) < d(c-b)$, тобто різниця між якимись двома членами прогресії менша за різницю прогресії, що неможливо.

5. Для якого мінімального натурального n квадрат можна розрізати на $2n$ квадратів двох різних розмірів: n квадратів одного розміру та ще n – іншого розміру?

(Богдан Рубльов)

***Відповідь*:** $n = 9$.
***Розв'язання*.** Приклад розбиття на $2n = 18$ шуканих квадратів наведемо на рис. 10.

Припустимо, що існує приклад для $n \leq 8$. Позначимо сторони цих квадратів як a, b, а великого квадрата – N. Доведемо спершу, що N можна представити в вигляді $ka + bl$, де $k, l \leq n$, принаймні двома способами.

Очевидно, що принаймні одне таке представлення має існувати. Нехай $N = k_1 a + l_1 b$, тоді будь-яка вертикальна/горизонтальна пряма, що не проходить по стороні жодного квадрата, перетинає рівно k_1 квадратів зі стороною a та рівно k_2 квадратів зі стороною b.

Виберемо деяке x і проведемо вертикальні прямі на відстані $x, x + a, x + 2a, \ldots$ від лівої сторони великого квадрата (при цьому x має бути таким, що жодна з цих ліній не проходить через жодну зі сторін). Кожна з цих ліній, що перетинають великий квадрат, проходить рівно через k_1 квадратів зі стороною a, а тому квадрат перетинають $\frac{n}{k_1}$ ліній для будь-якого вибору x, але таке можливо лише в тому разі, якщо $N = \frac{n}{k_1} a$. Аналогічно, $N = a\frac{n}{l_1}$. Але ось ми і отримали два різні представлення N, суперечність.

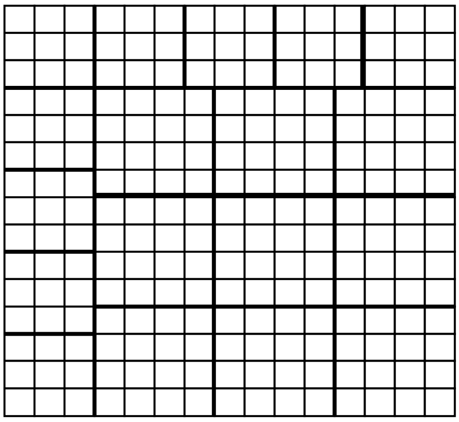


Рис. 10

Тепер, коли ми знаємо, що такі k, l існують, можемо масштабувати картинку і покласти $a = l, b = k$ для деяких $l, k \leq n$. Отож, надалі вважаємо, що $1 \leq a, b \leq n, a \neq b$, a, b, N натуральні, а також $(a, b) = 1$ (НСД).

Запишемо умову на площу: $n(a^2 + b^2) = N^2$.
При $n = 3, 6, 7$ це рівняння не має розв'язку: оскільки у n є простий дільник вигляду $p = 4k - 1$, то $N^2 \vdots p$, тому і $(a^2 + b^2) \vdots p$, звідки й a й b мають ділитись на p, але їх НСД дорівнює 1.
При $n = 1, 2$ можемо просто перебрати всі пари (a, b) що задовольняють всі умови вище і перевірити, що для жодної з них $n(a^2 + b^2)$ не є точним квадратом.
При $n = 4$ єдина така пара – $(a, b) = (3, 4)$. Тоді $N = 10$, але 10 можна представити в вигляді $3a + 4b$ єдиним чином, тому ця пара не підходить.
При $n = 5$ єдина така пара – $(a, b) = (1, 2)$, тоді $N = 5$, але з квадрата 5×5 не можна вирізати 5 квадратів 2×2, бо кожен з них містить принаймні одну з клітин $(2{,}2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)$.
При $n = 8$ єдина така пара – $(1, 7)$, тоді $N = 20$, але з квадрата 20×20 не можна вирізати 8 квадратів 7×7, бо кожен з них містить принаймні одну з клітин $(7, 7), (7, 14), (14, 7), (14, 14)$.

***Альтернативне розв'язання*.** Будемо вважати, що *великий* квадрат розбитий потрібним чином на $2n$, $n \leq 8$ квадратів двох розмірів (розмір – довжина сторони). Позначимо ті розміри через a та b, $a > b$, а сторону великого квадрата позначимо через N. У подальшому, якщо ми кажемо, що пряма перетинає певні квадрати, то це або вертикальна, або горизонтальна пряма.

<u>*Лема*</u>. Будь-які два квадрати зі стороною a принаймні по одному з напрямів – по горизонталі чи по вертикалі – сумарно має довжину не менше ніж $2a$.

Тепер розглянемо декілька таких випадків.

1 випадок. Якщо $N < 2a$, то покажемо, що $n = 1$. Дійсно, якщо $n \geq 2$ та існує пряма, що перетинає принаймні два такі квадрати, то $N \geq 2a$ – суперечність. Якщо таких прямих не існує, то розглянемо вертикальні проекції усіх таких квадратів на горизонтальну пряму. Кожний квадрат дає довжину проекції не менше a, вони не перетинаються, тому сумарно їхня довжина складає не менше ніж $2a$, звідки знову $N \geq 2a$. Але очевидно, що $n = 1$ неможливий.

2 випадок. Якщо $N < 3a$, то покажемо, що $n \leq 4$. Дійсно, якщо $n \geq 5$ та існує пряма, що перетинає принаймні три такі квадрати, то $N \geq 3a$ – суперечність. Якщо таких прямих не існує, то розглянемо вертикальні проекції усіх таких квадратів на горизонтальну пряму. Усі квадрати або окремо, або розбиваються на пари, що мають довжину проекції не менше a та ці проекції не перетинаються, тому сумарно їхня довжина складає не менше ніж $3a$, бо квадратів не менше 5. Звідки знову $N \geq 3a$.

Розглянемо випадок $2a \leq N < 3a$, та $n \leq 4$. Очевидно, що $N = 2a$ неможливий. Поділимо його на 4 квадрати зі стороною a. Тоді $2 - 4$ квадрати зі стороною a мають зайняти ці квадрати. Решту заповнити такою самою кількістю квадратів зі стороною b, очевидно, що не можливо. При $2a < N < 3a$ існує вертикальна пряма, що перетинає рівно 2 квадрати зі стороною a. Більше не може, а менше – тоді сумарно ці проекції матимуть довжину $5a$. Тоді $N = 2a + kb$, де $k \in N$. Звідси

$$4a^2 + 4b^2 \geq na^2 + nb^2 = N^2 = (2a + kb)^2 = 4a^2 + 4kab + b^2 \Leftrightarrow 3b^2 \geq 4kab \Leftrightarrow 3b \geq 4ka$$

– суперечність.

3 випадок. Нехай тепер $N \geq 3a$. Тоді $n \geq 5$, оскільки $2na^2 \geq na^2 + nb^2 = N^2 \geq (3a) = 9a^2$. Якщо $N = 3a + kb$, де $k \in N$, то

$$8a^2 + 8b^2 \geq na^2 + nb^2 = N^2 = (3a + kb)^2 \geq (3a + b)^2 = 9a^2 + 6ab + b^2 \Leftrightarrow$$
$$7b^2 \geq a^2 + 6ab > 7b^2.$$

Таким чином $N = 3a + \varepsilon$, де $0 \leq \varepsilon < b$. Існує вертикальна пряма, що перетинає рівно 2 квадрати зі стороною a. Інакше тоді таких квадратів не менше 9. Але тоді $N = 2a + kb$.
Якщо існує вертикальна пряма, що перетинає 3 квадрати зі стороною a, то матимемо, що $\varepsilon = 0$. Але тоді

$$N = 3a = 2a + kb \Rightarrow a = kb. \text{ Тоді } 8a^2 + 8b^2 \geq N^2 = (3a)^2 = 9a^2 \Rightarrow 8b^2 \geq a^2 = k^2b^2 \Rightarrow 8b^2 \geq a^2 = k^2b^2 \Rightarrow k^2 \leq 8 \Rightarrow k = 2 \text{ та } a = 2b.$$

Але тоді $na^2 + nb^2 = 5nb^2 = N^2 = 36b^2$ – суперечність, оскільки n не ціле.
Якщо не існує прямої, що перетинає 3 квадрати зі стороною a, то існує пряма, що перетинає рівно 1 квадрат зі стороною a. Але тоді $N = 2a + kb = a + lb = 3a + \varepsilon \Rightarrow a = mb$ та $Kb = Mb + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = Sb$, звідки випливає, що або $\varepsilon = 0$, або $\varepsilon \geq b$. Кожний з них вже розглянутий та приводить до суперечності.

Усі випадки розглянуті, що й завершує доведення.

4.1. Послідовність (a_n) складається з попарно різних натуральних чисел. Доведіть, що для довільного натурального числа $k > 1$ множина $M = \{a_1^k, a_2^k, a_3^k, \dots\}$ не містить жодної нескінченної арифметичної прогресії.

<u>***Розв'язання***</u>**.** Методом від супротивного, припустимо, що серед елементів множини M така прогресія існує. Позначимо її через $\{b_1^k, b_2^k, b_3^k, \dots\}$, де $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots$, тоді d – різниця цієї прогресії, тобто для кожного натурального n справджується рівність: $b_{n+1}^k - b_n^k = r$. Тоді

$$r = b_{n+1}^k - b_n^k = (b_{n+1} - b_n)\left(b_{n+1}^{k-1} + b_{n+1}^{k-2}b_n + \cdots + b_{n+1}b_n^{k-2} + b_n^{k-1}\right).$$

Як легко побачити вираз у правій частині – необмежений, бо $b_{n+1} \geq b_n$, а другий множник не менше b_{n+1}^{k-1}, тобто нескінченно зростає. Одержана суперечність завершує доведення.

5.1. На прямокутну дошку $m \times n$ $(m, n \geq 3)$ поклали декілька фігурок доміно (прямокутники 1×2 або 2×1) таким чином, що фігурки доміно не накладаються одна на іншу, не виходять за межі дошки $m \times n$, принаймні одне кутове поле дошки покрите доміно та більше жодної фігурки доміно не можна докласти на дошку без порушення цих правил. Доведіть, що принаймні $\frac{2}{3}$ від усіх полів дошки заповнені.

Розв'язання. Кожному порожньому квадрату поставимо у відповідність доміно, що розташоване безпосередньо праворуч від цього квадрата (якщо порожній квадрат не знаходиться на правому краю дошки). Припустимо, що два порожні квадрати призначені одному і тому ж доміно, тоді це доміно має бути розміщене вертикально, і обидва квадрати зліва від цього доміно порожні. Тому в них можна помістити ще одне доміно і отримуємо суперечність з умовою.
Отже, кожному порожньому квадрату, що не розташований на краю, відповідає окреме доміно. Порожнім квадратам на правому краю дошки у відповідність доміно не призначене. Якщо нам вдасться так поставити у відповідність не обрані ще доміно, то твердження задачі буде доведене. У кожній парі порожня клітинка та доміно фігурками доміно зайняти 2 клітинки з 3-х, і це не рахуючи доміно, яким не відповідають порожні клітинки, тобто зайнятими доміно не менше $\frac{2}{3}$ від усіх клітин.
Покажемо, що таку відповідність завжди можна здійснити. Нехай k – кількість порожніх квадратів на правому краю та l – аналогічна кількість порожніх квадратів на лівому краю. Порожні квадрати на лівому краю не можуть бути суміжними, отже, на лівому краю є принаймні $l - 1$ доміно, і всі вони не мають порожнього квадрата зліва від них, тобто у відповідність до порожнів квадратиків не поставлені. Якщо $l > k$, то на лівому краю достатньо доміно для бажаної відповідності для усіх порожніх квадратів на правому краю. Якщо $l < k$, то достатньо перегорнути дошку з права наліво і застосувати такі саме міркування.
Залишається розглянути випадок $l = k$, при цьому на лівому та правому краї рівно по $k - 1$ доміно. Менше їх бути не може, бо тоді поруч будуть два порожні квадрати, якщо їх більше, то шукана відповідність легко встановлюється. Якщо ж там рівно $k - 1$ доміно, то вони будуть розташовані між порожніми квадратами, а це означає, що усі кутові квадратики є порожніми. Одержана суперечність завершує доведення.