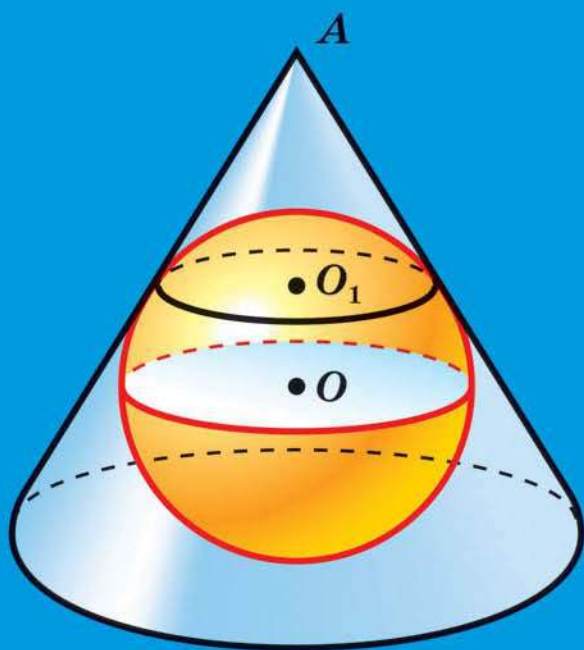


# ГЕОМЕТРІЯ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



УДК [373.5 : 372.851] : 514.1  
М52

*Рекомендовано*  
*Міністерством освіти і науки України*  
(наказ Міністерства освіти і науки України  
від 12.04.2019 № 472)

**Видано за рахунок державних коштів.**  
**Продаж заборонено**

*Авторський колектив:*

Аркадій МЕРЗЛЯК,  
Дмитро НОМІРОВСЬКИЙ,  
Віталій ПОЛОНСЬКИЙ,  
Михайло ЯКІР

**Мерзляк А. Г.**

**М52** Геометрія : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 204 с. : іл.

ISBN 978-966-474-325-6.

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1

© А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський,  
В. Б. Полонський, М. С. Якір, 2019  
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет,  
художнє оформлення, 2019

ISBN 978-966-474-325-6

## ВІД АВТОРІВ

### Любі одинадцятикласники та одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви завершуєте вивчення шкільного курсу стереометрії. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу й красиву науку, а отже, з інтересом оволодіватимете новими знаннями, і цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал підручника, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, *жирним курсивом* і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.




Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (\*).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

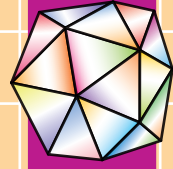
Дерзайте! Бажаємо успіху!

## УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

- $n^{\circ}$  завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
- $n$  завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- $n^{\bullet\bullet}$  завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- $n^*$  задачі для математичних гуртків і факультативів;
-  ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв'язування інших задач;
-  закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;
-  рубрика «Коли зроблено уроки».

**Зеленим** кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи

**Синім** кольором позначено номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.



## § 1. МНОГОГРАННИКИ

1. Призма
2. Паралелепіпед
3. Піраміда
4. Площі поверхонь подібних многогранників.  
Зрізана піраміда

- У цьому параграфі ви уточните й розширите свої знання про многогранники.
- Отримаєте нові відомості про призму, піраміду та їхні окремі види.
- Ознайомитеся з новим для вас многогранником — зрізаною пірамідою.

## 1. Призма

На рисунку 1.1 зображено відомі вам просторові фігури. Кожна із цих фігур має скінченні розміри та складається з поверхні (межі фігури) та частини простору, обмеженої цією поверхнею.

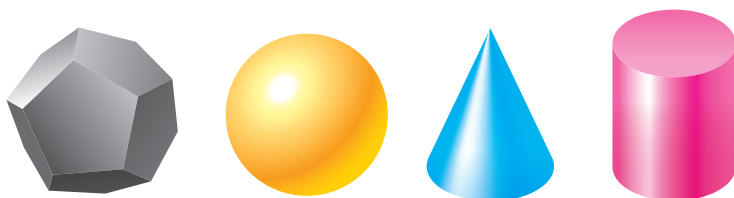


Рис. 1.1

Многогранник, кулю, конус, циліндр відносять до фігур, які називають **геометричними тілами** або просто **тілами**.

Не будь-яка фігура в просторі є тілом. Наприклад, пряма, площина, двогранний кут не є тілами. Ці фігури необмежені. Тіло ж — обмежена фігура. Проте й не кожна обмежена фігура є тілом. На рисунку 1.2 зображено приклади обмежених фігур  $F$  і  $G$ , які не є тілами. Строге означення тіла виходить за рамки розглядуваного курсу.

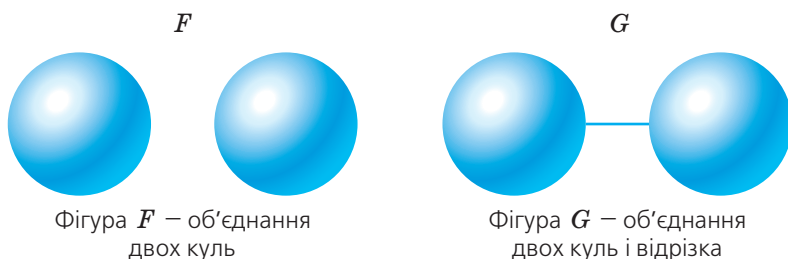


Рис. 1.2

Докладніше про тіло ви зможете прочитати в оповіданні на с. 37–43.

**Означення.** **Многогранником** називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

Такі елементи многогранника, як грані, ребра та вершини, вам уже відомі.

Дві грані многогранника називають **сусідніми**, якщо вони мають спільне ребро. Наприклад, грані  $A_1B_1C_1D_1$  і  $A_1B_1BA$  куба

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 1.3) є сусідніми, оскільки ребро  $A_1 B_1$  у них спільне.

Нехай точка  $M$  — вершина многогранника. Кут з вершиною  $M$  грані многогранника називають **плоским кутом многогранника при вершині  $M$** . Наприклад, на рисунку 1.3 кут  $DAB$  є плоским кутом куба при вершині  $A$ .

Плоскі кути многогранника, що мають спільну вершину  $M$ , обмежують частину простору, яку називають **многогранним кутом** (рис. 1.4). Точку  $M$  називають **вершиною многогранного кута**. Промені  $MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, MA_5$  називають **ребрами многогранного кута**, а плоскі кути даного многогранника, що мають спільну вершину  $M$ , — **гранями многогранного кута**. Залежно від кількості граней многогранні кути називають тригранними, чотиригранними тощо. Наприклад, на рисунку 1.4 зображено п'ятигранний кут.

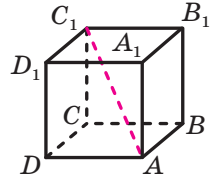


Рис. 1.3

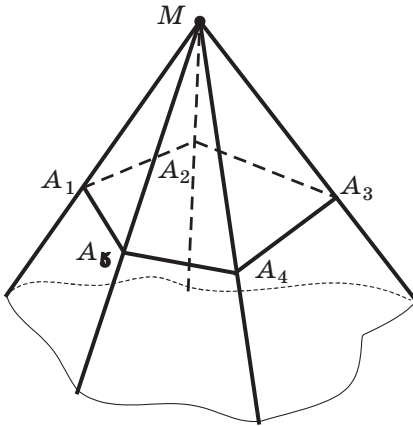


Рис. 1.4

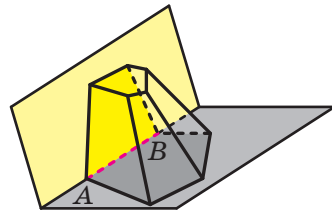


Рис. 1.5

**Двогранним кутом многогранника при ребрі  $AB$**  називають двогранний кут з ребром  $AB$ , грані якого містять сусідні грані многогранника, для яких ребро  $AB$  є спільним (рис. 1.5).

Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, називають **діагоналлю многогранника**. Наприклад, відрізок  $AC_1$  — діагональ куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 1.3).

Многогранники бувають опуклими та неопуклими.

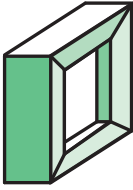


Рис. 1.6

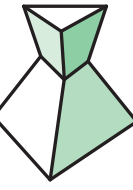
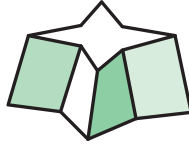


Рис. 1.7

**Означення.** Многогранник називають **опуклим**, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Куб і тетраедр — приклади опуклих многогранників. На рисунку 1.6 зображено неопуклі многогранники.

Усі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками. Проте навіть якщо кожна грань многогранника — опуклий многокутник, то цей многогранник не обов'язково є опуклим (рис. 1.7).

**Площею поверхні многогранника** називають суму площ усіх його граней.

Нехай у просторі задано многогранник і площину, що перетинається. Якщо спільні точки многогранника та площини утворюють многокутник, то цей многокутник називають **перерізом многогранника** площиною, а саму площину — **січною площиною** (рис. 1.8).

Зупинимось докладніше на вже знайомому вам виді многогранника — призмі.

**Означення.** Многогранник, дві грані якого — рівні  $n$ -кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта  $n$  граней — паралелограми, називають  **$n$ -кутною призмою**.

Нагадаємо, що паралелограми, про які йдеться в означенні, називають бічними гранями призми; рівні  $n$ -кутники — основами призми; сторони основ — ребрами основ призми; ребра, які не належать основам, — бічними ребрами призми (рис. 1.9).

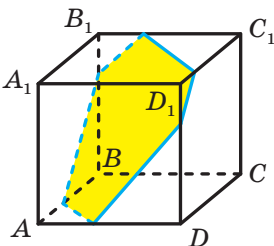


Рис. 1.8

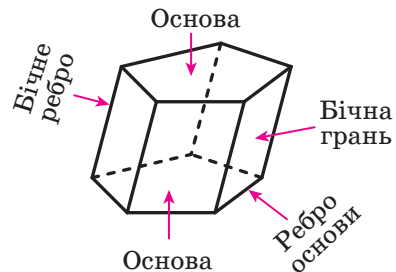


Рис. 1.9



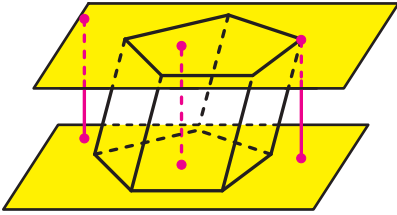


Рис. 1.10

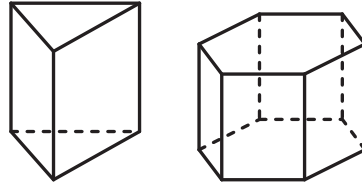


Рис. 1.11

Оскільки сусідні бічні грані призми — паралелограми, що мають спільну сторону — бічне ребро, то *всі бічні ребра призми є рівними та паралельними*.

**Висотою призми** називають перпендикуляр, опущений з якої-небудь точки площини однієї основи на площину другої основи (рис. 1.10). Довжина висоти призми дорівнює відстані між площинами її основ.

**Означення.** Призму називають **прямою**, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Наприклад, прямокутний паралелепіпед є окремим видом прямої призми.

Кожне бічне ребро прямої призми є її висотою. Усі бічні грані прямої призми — прямокутники.

Якщо призма не є прямою, то її називають **похилою**.

**Означення.** Призму називають **правильною**, якщо вона є прямою, а її основа — правильний многокутник.

Наприклад, куб є окремим видом правильної чотирикутної призми.

На рисунку 1.11 зображено правильні трикутну та шестикутну призми.

Розглянемо опуклу  $n$ -кутну призму ( $n > 3$ ). Переріз призми площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає основи призми по діагоналях (рис. 1.12). Такий переріз називають **діагональним перерізом призми**.

Діагональним перерізом будь-якої призми є паралелограм, а діагональним перерізом прямої призми — прямокутник (доведіть це самостійно).

**Площею бічної поверхні призми** називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні призми** (ще говорять: «**площа повної поверхні призми**») називають суму площ усіх її граней.

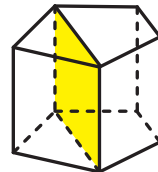


Рис. 1.12

Очевидно, що виконується така рівність:

$$S_{\Pi} = S_6 + 2S_{\text{осн}},$$

де  $S_{\Pi}$  — площа поверхні призми,  $S_6$  — площа бічної поверхні призми,  $S_{\text{осн}}$  — площа основи призми.

**Теорема 1.1.** *Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.*

*Доведення.* Кожна бічна грань прямої призми — прямокутник, одна сторона якого — ребро основи, а друга — бічне ребро. Нехай  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — довжини ребер основи призми,  $b$  — довжина бічного ребра. Тоді  $S_6 = a_1b + a_2b + \dots + a_nb = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) b$ . Оскільки сума, записана в дужках, дорівнює периметру основи призми, то теорему доведено. ◀

Твердження теореми 1.1 зручно подати у вигляді однієї з формул:

$$\begin{aligned} S_6 &= P_{\text{осн}} \cdot b, \\ S_6 &= P_{\text{осн}} \cdot h, \end{aligned}$$

де  $P_{\text{осн}}$  — периметр основи прямої призми,  $b$  — довжина бічного ребра,  $h$  — довжина висоти призми.

**Задача.** У похилій призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Доведіть, що площа бічної поверхні призми дорівнює добутку периметра перерізу та бічного ребра.

*Розв'язання.* Доведення проведемо для трикутної призми. Для інших  $n$ -кутних призм, де  $n > 3$ , доведення буде аналогічним.

Нехай трикутник  $MNP$  — переріз, про який ідеться в умові задачі (рис. 1.13). Доведемо, що  $S_6 = P_{MNP} \cdot AA_1$ . Маємо:  $AA_1 \perp MPN$ . Отже,  $AA_1 \perp MP$ . Тоді відрізок  $MP$  — висота паралелограма  $AA_1B_1B$ .

Аналогічно можна довести, що відрізки  $PN$  і  $NM$  — відповідно висоти паралелограмів  $CC_1B_1B$  і  $CC_1A_1A$ .

Оскільки площа паралелограма дорівнює добутку висоти та сторони паралелограма, до якої проведено висоту, то можна записати:

$$S_6 = MP \cdot AA_1 + PN \cdot BB_1 + NM \cdot CC_1.$$

$$\begin{aligned} \text{Оскільки } AA_1 &= BB_1 = CC_1, \text{ то} \\ S_6 &= MP \cdot AA_1 + PN \cdot AA_1 + NM \cdot AA_1 = \\ &= (MP + PN + NM) \cdot AA_1 = P_{MNP} \cdot AA_1. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

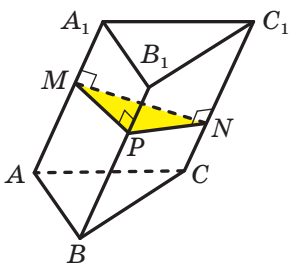


Рис. 1.13

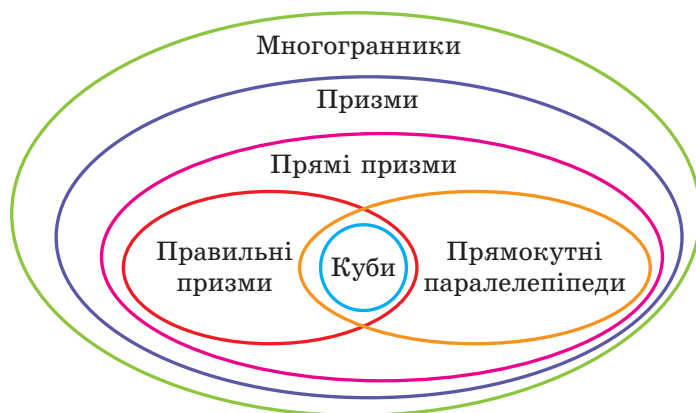


Рис. 1.14

Зв'язок між многогранниками, вивченими в цьому пункті, ілюструє схема, зображена на рисунку 1.14.

Вивчаючи многогранники, неможливо не згадати прізвище видатного українського математика Георгія Феодосійовича Вороного. Досягнення Г. Ф. Вороного знайшли широке застосування практично в усіх природничих науках: фізиці, хімії, біології тощо. Наприклад, поліедри<sup>1</sup> Вороного—Діріхле (рис. 1.15) використовують для аналізу структури кристалів.

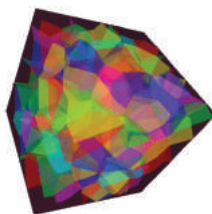


Рис. 1.15



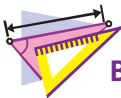
### Георгій Феодосійович Вороний (1868–1908)

Народився в с. Журавка (нині Чернігівська область). Закінчив Петербурзький університет, був професором Варшавського університету. Г. Ф. Вороний зробив важливі відкриття в геометрії многогранників. Термін «діаграма Вороного» став настільки поширеним у дослідженнях у галузі геометричних алгоритмів, що деякі фахівці пов'язують народження обчислювальної геометрії саме із цим об'єктом.

<sup>1</sup> Поліедром називають об'єднання многогранників.



1. Що називають многогранником?
2. Які грані многогранника називають сусідніми?
3. Опишіть фігуру, яку називають многогранним кутом.
4. Що називають двограним кутом многогранника?
5. Який многогранник називають опуклим?
6. Що називають призмою?
7. Що називають висотою призми?
8. Яку призму називають прямою? похилою?
9. Яку призму називають правильною?
10. Що називають діагональним перерізом призми?
11. Що називають площею поверхні призми? бічної поверхні призми?
12. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми?



## ВПРАВИ

- 1.1.° Яку найменшу кількість граней може мати призма? Скільки ця призма має:
  - 1) вершин;
  - 2) ребер;
  - 3) бічних ребер?
- 1.2.° Призма має 12 граней. Який многокутник лежить в її основі?
- 1.3.° У якій призмі бічні ребра паралельні її висоті?
- 1.4.° Доведіть твердження: якщо дві сусідні грані призми перпендикулярні до площини її основи, то дана призма є прямою. Чи буде дане твердження правильним, якщо з його формулювання вилучити слово «сусідні»?
- 1.5.° Чи є правильним твердження:
  - 1) бічне ребро прямої призми перпендикулярне до будь-якої діагоналі її основи;
  - 2) якщо всі ребра призми рівні, то вона є правильною;
  - 3) якщо всі ребра прямої призми рівні, то вона є правильною?
- 1.6.° Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, один із кутів якої дорівнює  $110^\circ$  (рис. 1.16). Знайдіть двогранні кути при бічних ребрах призми.
- 1.7.° Доведіть, що в будь-якій призмі кількість вершин є парним числом, а кількість ребер — числом, кратним 3.

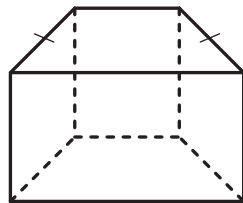


Рис. 1.16

- 1.8.° Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а висота —  $3\sqrt{6}$  см. Знайдіть діагональ призми.
- 1.9.° Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 13 см. Знайдіть висоту призми.
- 1.10.° Точки  $D$  і  $E$  — середини ребер  $AC$  і  $BC$  правильної призми  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 1.17). Площина, яка проходить через пряму  $DE$  та утворює з площиною  $ABC$  кут  $30^\circ$ , перетинає ребро  $CC_1$  у точці  $F$ . Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 12 см.

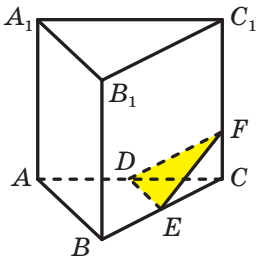


Рис. 1.17

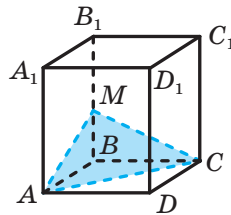


Рис. 1.18

- 1.11.° Через діагональ  $AC$  основи правильної призми  $ABCA_1B_1C_1D_1$  проведено площину, яка утворює з площиною  $ABC$  кут  $45^\circ$  і перетинає ребро  $BB_1$  у точці  $M$  (рис. 1.18). Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 8 см.
- 1.12.° Знайдіть площу бічної поверхні прямої призми, висота якої дорівнює 6 см, а основою є паралелограм зі сторонами 2 см і 3 см.
- 1.13.° Знайдіть сторону основи правильної семикутної призми, висота якої дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні —  $420 \text{ см}^2$ .
- 1.14.° Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює  $a$ , а висота дорівнює  $H$ .
- 1.15.° Знайдіть площу повної поверхні правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює  $a$ , а висота дорівнює  $H$ .
- 1.16.° Кут між бічним ребром і площиною основи похилої призми дорівнює  $30^\circ$ , висота призми — 10 см. Знайдіть бічне ребро призми.
- 1.17.° У похилій чотирикутній призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо даний переріз є ромбом зі стороною 5 см, а бічне ребро призми дорівнює 8 см.

- 1.18.° У похилій трикутній призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Знайдіть бічне ребро призми, якщо даний переріз є прямокутним трикутником з катетами 9 см і 12 см, а площа бічної поверхні призми дорівнює  $288 \text{ см}^2$ .
- 1.19.° Точка  $C_1(2; -3; 4)$  — вершина призми  $ABCA_1B_1C_1$ , основа  $ABC$  якої належить площині  $z = 7$ . Запишіть рівняння площини, якій належить основа  $A_1B_1C_1$ .
- 1.20.° Точка  $A(4; -1; 6)$  — вершина призми  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ , основа  $A_1B_1C_1D_1$  якої належить площині  $x = 0$ . Запишіть рівняння площини  $ABCD$ .
- 1.21.° Основа призми належить площині  $2x + y - z - 7 = 0$ . Запишіть рівняння площини, якій належить друга основа призми, якщо в цій площині лежить точка  $X(1; 5; -3)$ .
- 1.22.° Основа призми належить площині  $-x + 3y + 2z = 0$ . Запишіть рівняння площини, якій належить друга основа призми, якщо в цій площині лежить точка  $M(6; -3; 1)$ .
- 1.23.° Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює  $a$ , а кут між діагоналлю призми та бічною гранню становить  $30^\circ$ . Знайдіть:  
1) висоту призми;  
2) кут між діагоналлю призми та площиною основи.
- 1.24.° Знайдіть діагоналі правильної шестикутної призми, кожне ребро якої дорівнює  $a$ .
- 1.25.° Основа прямої призми — ромб зі стороною  $a$  та гострим кутом  $\alpha$ . Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Знайдіть діагоналі призми.
- 1.26.° Основою прямої призми, діагоналі якої дорівнюють 10 см і 16 см, є ромб. Знайдіть сторону основи призми, якщо її висота дорівнює 4 см.
- 1.27.° Прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) є основою прямої призми  $ABCA_1B_1C_1$ . Через пряму  $CC_1$  проведено площину, яка перпендикулярна до прямої  $AB$  і перетинає ребро  $AB$  у точці  $D$ . Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо  $AD = 18$  см,  $BD = 2$  см, а висота призми дорівнює 8 см.
- 1.28.° Прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) є основою прямої призми  $ABCA_1B_1C_1$ , відрізок  $CM$  — медіана трикутника  $ABC$ . Висота призми дорівнює гіпотенузі її основи. Знайдіть площу перерізу призми площиною, яка проходить через прямі  $CC_1$  і  $CM$ , якщо  $AC = 30$  см,  $BC = 40$  см.

- 1.29.\* Кожне ребро правильної призми  $ABCA_1B_1C_1$  дорівнює  $a$ . Знайдіть:
- 1) площу перерізу призми, який проходить через точки  $A$ ,  $B$  і  $C_1$ ;
  - 2) кут між площиною даного перерізу та площиною основи призми.
- 1.30.\* Прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) є основою прямої призми  $ABCA_1B_1C_1$ . Площина, яка проходить через пряму  $AC$ , утворює з площиною основи призми кут  $\beta$  і перетинає ребро  $BB_1$  у точці  $D$ . Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо  $\angle BAC = \alpha$ ,  $BD = a$ .
- 1.31.\* Основою прямої призми є ромб з гострим кутом  $\alpha$ , більша діагональ ромба дорівнює  $d$ . Через меншу діагональ нижньої основи та вершину гострого кута верхньої основи провели площину, яка утворює з площиною нижньої основи призми кут  $\beta$ . Знайдіть:
- 1) висоту призми;
  - 2) площу утвореного перерізу призми.
- 1.32.\* Сторона основи правильної призми  $ABCA_1B_1C_1$  дорівнює 2 см, а бічне ребро — 6 см. Діагоналі бічної грані  $AA_1B_1B$  перетинаються в точці  $D$ . Знайдіть кут між прямою  $CD$  і площиною  $ABC$ .
- 1.33.\* Сторона основи правильної призми  $ABCA_1B_1C_1D_1$  дорівнює 1 см, а бічне ребро —  $\sqrt{5}$  см. Діагоналі бічної грані  $CC_1D_1D$  перетинаються в точці  $M$ . Знайдіть кут між прямою  $AM$  і площиною  $ABC$ .
- 1.34.\* Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 5 см, 12 см і 13 см, а площа повної поверхні —  $270 \text{ см}^2$ . Знайдіть висоту призми.
- 1.35.\* Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює  $96 \text{ см}^2$ , а площа повної поверхні —  $128 \text{ см}^2$ . Знайдіть висоту призми.
- 1.36.\* Обчисліть площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом  $30^\circ$ .
- 1.37.\* Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної призми дорівнює  $S$ . Чому дорівнює площа бічної поверхні призми?
- 1.38.\* Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 4 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

- 1.39.\* Основою прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є рівнобічна трапеція  $ABCD$ , основи якої  $BC$  і  $AD$  відповідно дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона — 13 см. Площа діагонального перерізу призми дорівнює  $180 \text{ см}^2$ . Знайдіть:
- 1) площу бічної поверхні призми;
  - 2) площу перерізу призми, який проходить через ребра  $AD$  і  $B_1 C_1$ .
- 1.40.\* Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні —  $288 \text{ см}^2$ . Знайдіть сторону основи та висоту призми.
- 1.41.\* Площини граней  $AA_1 B_1 B$  і  $AA_1 C_1 C$  похилої призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  перпендикулярні,  $AA_1 = 9$  см. Відстань між прямими  $AA_1$  і  $BB_1$  дорівнює 8 см, а між прямими  $AA_1$  і  $CC_1$  — 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.42.\* Двогранний кут при одному з бічних ребер похилої трикутної призми дорівнює  $120^\circ$ . Відстань від даного ребра до одного з решти бічних ребер дорівнює 16 см, а до другого — 14 см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює  $840 \text{ см}^2$ .
- 1.43.\*\* Висота правильної призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  дорівнює 6 см. Точки  $D$  і  $E$  — середини ребер  $A_1 C_1$  і  $B_1 C_1$  відповідно. Площина, яка проходить через прямі  $AB$  і  $DE$ , утворює кут  $60^\circ$  із площиною  $ABC$ . Знайдіть площу перерізу призми цією площиною.
- 1.44.\*\* Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює  $4\sqrt{2}$  см, а висота призми — 6 см. Через діагональ основи проведено переріз призми, паралельний діагоналі призми. Знайдіть площу перерізу.
- 1.45.\*\* Висота правильної чотирикутної призми дорівнює  $h$ . У двох сусідніх бічних гранях проведено дві діагоналі, які мають спільний кінець. Знайдіть площу перерізу, який проходить через дані діагоналі, якщо кут між ними дорівнює  $\alpha$ .
- 1.46.\*\* Висота правильної трикутної призми дорівнює  $h$ . Кут між діагоналями двох бічних граней, які мають спільний кінець, дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу перерізу, який проходить через дані діагоналі.
- 1.47.\*\* Кожне ребро похилої призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  дорівнює  $a$ . Ребро  $AA_1$  утворює з кожним із ребер  $AB$  і  $AC$  кут  $45^\circ$ .
- 1) Доведіть, що  $AA_1 \perp BC$ .
  - 2) Знайдіть площу бічної поверхні призми.



1.48.\* Кожне ребро похилої призми  $ABCA_1B_1C_1$  дорівнює  $a$ , проекцією точки  $A_1$  на площину  $ABC$  є центр трикутника  $ABC$ .

- 1) Доведіть, що грань  $BB_1C_1C$  є прямокутником.
- 2) Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.49.\* Основою призми  $ABCA_1B_1C_1$  є рівнобедрений прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ), бічні грані призми — квадрати. Знайдіть кут між прямими  $AC_1$  і  $CB_1$ .



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.50. Через точку перетину діагоналей паралелограма  $ABCD$  проведено пряму, яка перетинає сторони  $BC$  і  $AD$  у точках  $E$  і  $F$  відповідно. Доведіть, що чотирикутник  $BEDF$  — паралелограм.

1.51. Більша діагональ ромба дорівнює  $d$ , а його гострий кут дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть:

- 1) сторону ромба;
- 2) меншу діагональ ромба;
- 3) площу ромба;
- 4) радіус кола, вписаного в ромб.

## 2. Паралелепіпед

**Означення.** Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограмами.

На рисунку 2.1 зображено паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Будь-яка грань паралелепіпеда є паралелограмом.

Дві несусідні грані паралелепіпеда називають **протилежними гранями паралелепіпеда**. Наприклад, на рисунку 2.1 грані  $AA_1B_1B$  і  $DD_1C_1C$  є протилежними.

Оскільки  $AA_1 \parallel DD_1$  і  $A_1B_1 \parallel D_1C_1$  (рис. 2.1), то за ознакою паралельності площин  $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$ . Міркуючи аналогічно, можна довести, що *будь-які дві протилежні грані паралелепіпеда лежать у паралельних площинах*.

Паралелепіпед називають **прямим**, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи. У прямого паралелепіпеда всі бічні грані є прямокутниками, а основи — паралелограмами.

Прямий паралелепіпед називають **прямокутним**, якщо його основами є прямокутники.

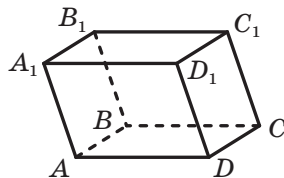


Рис. 2.1

На рисунку 2.2 зображено прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками.

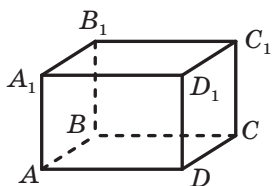


Рис. 2.2

Правильна чотирикутна призма є окремим видом прямокутного паралелепіпеда.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають **вимірами прямокутного паралелепіпеда**. На рисунку 2.2 довжини ребер  $AB$ ,  $AD$  і  $AA_1$  є вимірами прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Прямокутний паралелепіпед називають **кубом**, якщо його виміри є рівними. Усі грані куба є квадратами.

Зв'язок між паралелепіпедами та їхніми окремими видами ілюструє схема, зображена на рисунку 2.3.

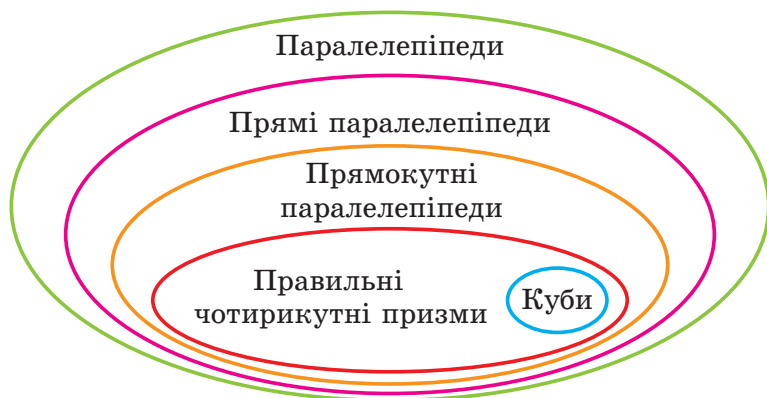


Рис. 2.3

Розглянемо деякі властивості паралелепіпеда.

**Теорема 2.1.** *Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці та діляться цією точкою навпіл.*

**Доведення.** Розглянемо діагональний переріз  $AA_1 C_1 C$  паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 2.4). У паралелограмі  $AA_1 C_1 C$  проведемо діагоналі  $AC_1$  і  $A_1 C$ . Ці відрізки також є діагоналями даного паралелепіпеда. Нехай проведені діагоналі перетинаються в точці  $O$ . Ця точка є серединою кожної з діагоналей  $AC_1$  і  $A_1 C$ .

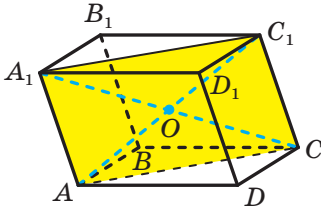


Рис. 2.4

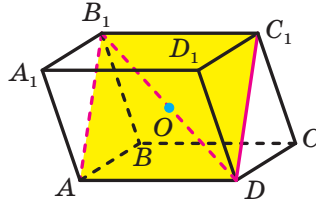


Рис. 2.5

Доведемо, що точка  $O$  є також серединою кожної з двох інших діагоналей  $BD_1$  і  $B_1D$  даного паралелепіпеда.

Розглянемо чотирикутник  $AB_1C_1D$  (рис. 2.5). Він є паралелограмом (доведіть це самостійно) з діагоналями  $AC_1$  і  $B_1D$ . Тоді точка  $O$  є серединою відрізка  $B_1D$ .

Розглянувши діагональний переріз  $BB_1D_1D$ , можна аналогічно довести, що точка  $O$  є серединою діагоналі  $BD_1$ . ◀

**Теорема 2.2.** *Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.*

*Доведення.* Розглянемо діагональ  $AC_1$  прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 2.6). Доведемо, що

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Оскільки трикутник  $ABC$  прямокутний ( $\angle ABC = 90^\circ$ ), то  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ . Оскільки  $BC = AD$ , то

$$AC^2 = AB^2 + AD^2. \quad (1)$$

Даний паралелепіпед є прямокутним, тому  $C_1C \perp ABC$ . Отже, трикутник  $ACC_1$  прямокутний ( $\angle ACC_1 = 90^\circ$ ). Тоді

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

Оскільки  $CC_1 = AA_1$ , то

$$AC_1^2 = AC^2 + AA_1^2.$$

Ураховуючи рівність (1), можна записати:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Для решти трьох діагоналей доведення є аналогічними. ◀

Із теореми 2.2 випливає, що діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

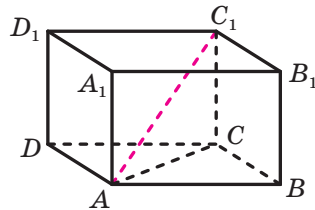
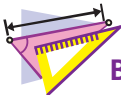


Рис. 2.6



1. Що називають паралелепіпедом?
2. Які грані паралелепіпеда називають протилежними?
3. Який паралелепіпед називають прямим?
4. Який паралелепіпед називають прямокутним?
5. Що називають вимірами прямокутного паралелепіпеда?
6. Яку властивість мають діагоналі паралелепіпеда?
7. Сформулюйте теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда.



### ВПРАВИ

- 2.1.° Чи можна вважати правильним таке означення куба: «Кубом називають правильну чотирикутну призму, висота якої дорівнює стороні основи»?
- 2.2.° Доведіть, що в прямому паралелепіпеді площина діагонального перерізу перпендикулярна до площини основи.
- 2.3.° Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть висоту паралелепіпеда.
- 2.4.° Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 см і 24 см, а висота — 4 см. Знайдіть площу діагонального перерізу паралелепіпеда.
- 2.5.° Дано прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 2.7),  $AB = 5$  см,  $AD = 7$  см,  $AA_1 = 12$  см. Знайдіть кут:
  - 1) між прямою  $DC_1$  і площиною  $BCC_1$ ;
  - 2) між прямою  $B_1 D$  і площиною  $ABB_1$ .
- 2.6.° Дано прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 2.7),  $AB = 5$  см,  $AD = 7$  см,  $AA_1 = 12$  см. Знайдіть кут:
  - 1) між прямою  $DC_1$  і площиною  $A_1 B_1 C_1$ ;
  - 2) між прямою  $B_1 D$  і площиною  $ABC$ .
- 2.7.° Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.
- 2.8.° Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо вони відносяться як  $1 : 2 : 2$ , а діагональ паралелепіпеда дорівнює 6 см.

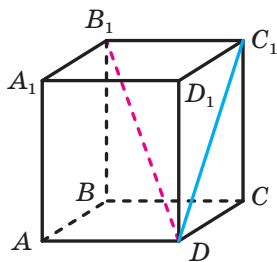


Рис. 2.7

- 2.9.° Ребро куба дорівнює  $a$ . Чому дорівнює діагональ куба?
- 2.10.° Площа поверхні куба дорівнює  $216 \text{ см}^2$ . Знайдіть площу його діагонального перерізу.
- 2.11.\* Точки  $A_1(-4; 0; 1)$ ,  $B_1(-4; 0; 6)$ ,  $C_1(2; 0; 6)$ ,  $C(2; -3; 6)$  є вершинами прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть координати вершин  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $D_1$ .
- 2.12.\* Точки  $A(3; 2; 0)$ ,  $B(6; 2; 0)$ ,  $D(3; 5; 0)$ ,  $A_1(3; 2; -1)$  є вершинами прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть координати вершин  $C$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ .
- 2.13.\* Точки  $A(1; -2; 0)$ ,  $B(-2; 3; 0)$ ,  $C(3; 2; 0)$ ,  $C_1(6; 3; -2)$  є вершинами паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть:
- 1) координати вершин  $A_1$ ,  $B_1$  і  $D_1$ ;
  - 2) довжину бічного ребра паралелепіпеда.
- 2.14.\* Точки  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(4; 6; 0)$ ,  $D(-3; 5; 0)$  є вершинами прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , висота якого дорівнює 5. Знайдіть:
- 1) координати вершини  $C_1$ ;
  - 2) довжину діагоналі паралелепіпеда.
- 2.15.\* Із чотирьох рівних кубів, ребро яких дорівнює 1 см, склали прямокутний паралелепіпед. Чому дорівнює площа повної поверхні цього паралелепіпеда?
- 2.16.\* Основа прямого паралелепіпеда — ромб з гострим кутом  $\alpha$  і меншою діагоналлю  $d$ . Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 2.17.\* Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною 6 см і кутом  $60^\circ$ . Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі його основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 2.18.\* Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють  $2\sqrt{2}$  см і 4 см, а один із кутів основи дорівнює  $45^\circ$ . Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 2.19.\* Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 2 см і  $2\sqrt{3}$  см, а один із кутів основи дорівнює  $30^\circ$ . Площа діагонального перерізу паралелепіпеда, який проходить через меншу діагональ основи, дорівнює  $8 \text{ см}^2$ . Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

- 2.20.\*** Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 11 см, 19 см і 20 см. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.
- 2.21.\*** Діагональ прямокутного паралелепіпеда більша за його виміри відповідно на 9 см, на 8 см і на 5 см. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.
- 2.22.\*** Доведіть, що коли діагоналі прямого паралелепіпеда рівні, то даний паралелепіпед є прямокутним.
- 2.23.\*** Основою прямого паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є ромб  $ABCD$  зі стороною 6 см,  $\angle BAD = 45^\circ$ . Через пряму  $AD$  і вершину  $B_1$  проведено площину, яка утворює з площиною  $ABC$  кут  $60^\circ$ . Знайдіть:
- 1) бічне ребро паралелепіпеда;
  - 2) площу перерізу паралелепіпеда площиною  $AB_1 D$ .
- 2.24.\*** Основою прямого паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є паралелограм  $ABCD$ ,  $AD = 8$  см,  $\angle BAD = 30^\circ$ . Кут між площинами  $ABC$  і  $A_1 CD$  дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда.
- 2.25.\*\*** Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\alpha$ , а з однією з бічних граней — кут  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 2.26.\*\*** Одна зі сторін основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює  $a$ . Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут  $\alpha$ , а з даною стороною основи — кут  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 2.27.\*\*** Основою прямого паралелепіпеда є ромб, а площі діагональних перерізів дорівнюють  $S_1$  і  $S_2$ . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 2.28.\*\*** Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює  $S$ . Площі діагональних перерізів дорівнюють  $S_1$  і  $S_2$ . Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда.
- 2.29.\*\*** Через діагональ  $BD$  основи  $ABCD$  і вершину  $C_1$  прямого паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  проведено площину, яка утворює кут  $30^\circ$  із площиною основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо  $BC = 8$  см,  $CD = 4$  см,  $\angle BCD = 60^\circ$ .
- 2.30.\*\*** Основа  $ABCD$  паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є квадратом. Вершина  $A_1$  рівновіддалена від усіх вершин основи  $ABCD$ . Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо сторона основи дорівнює 8 см, а бічне ребро паралелепіпеда — 6 см.

**2.31.** Основа  $ABCD$  похилого паралелепіпеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  є квадратом, а площини граней  $AA_1B_1B$  і  $CC_1D_1D$  перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу грані  $AA_1D_1D$ , якщо кожне ребро паралелепіпеда дорівнює 8 см.



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 2.32.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AC = BC$ ,  $AB = 2\sqrt{2}$  см,  $\angle BAC = 30^\circ$ , відрізок  $AD$  — бісектриса трикутника  $ABC$ . Знайдіть відрізок  $AD$ .
- 2.33.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а бічна сторона — 30 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при основі.

## 3. Піраміда

**Означення.** Многогранник, одна грань якого —  $n$ -кутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину, називають  **$n$ -кутною пірамідою** (рис. 3.1).

Нагадаємо, що трикутники, які мають спільну вершину, називають бічними гранями піраміди, а саму спільну вершину — вершиною піраміди;  $n$ -кутник, про який ідеться в означенні, називають основою піраміди, а його сторони — ребрами основи піраміди; ребра, які не належать основі, називають бічними ребрами піраміди (рис. 3.1).

**Висотою піраміди** називають перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину основи (рис. 3.2).

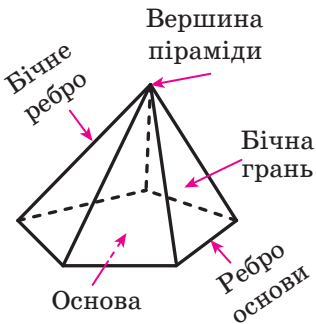


Рис. 3.1

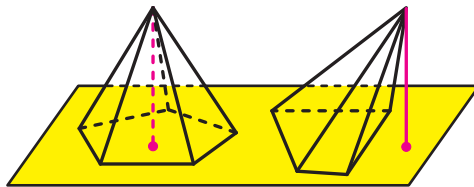


Рис. 3.2

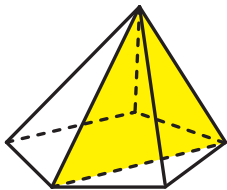


Рис. 3.3

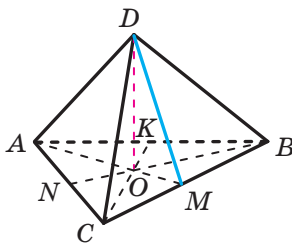


Рис. 3.4

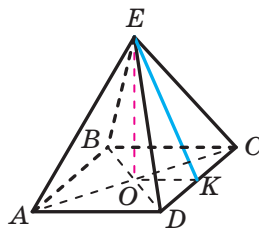


Рис. 3.5

Розглянемо опуклу  $n$ -кутну піраміду ( $n > 3$ ). Переріз піраміди площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає площину основи піраміди по діагоналі (рис. 3.3). Такий переріз називають **діагональним перерізом піраміди**.

Діагональним перерізом піраміди є трикутник.

**Означення.** Піраміду називають **правильною**, якщо її основа — правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника.

На рисунку 3.4 зображено правильну трикутну піраміду  $DABC$  з основою  $ABC$ . Трикутник  $ABC$  є рівностороннім. Проєкцією вершини  $D$  на площину  $ABC$  є центр трикутника — точка  $O$ .

Щоб знайти зображення точки  $O$ , треба побудувати точку перетину медіан  $AM$ ,  $BN$  і  $CK$  трикутника  $ABC$ .

На рисунку 3.5 зображено правильну чотирикутну піраміду  $EABCD$ . Чотирикутник  $ABCD$  є квадратом, точка  $O$  — його центр, відрізок  $EO$  — висота піраміди. Оскільки центр квадрата збігається з точкою перетину його діагоналей, то можна зробити такий висновок: проєкцією вершини правильної чотирикутної піраміди на площину основи є точка перетину діагоналей квадрата, який є основою піраміди.

Правильну трикутну піраміду, у якої всі грані рівні, називають **правильним тетраедром**.

Зазначимо деякі властивості правильної піраміди.

*Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники (доведіть це самостійно).*

**Апофемою правильної піраміди** називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди.

На рисунку 3.4 проведено відрізок  $DM$ , де  $M$  — середина ребра  $BC$ . Оскільки трикутник  $BDC$  — рівнобедрений з основою  $BC$ ,



то відрізок  $DM$  є його висотою. Отже, відрізок  $DM$  — апофема правильної трикутної піраміди  $DABC$ .

На рисунку 3.5 відрізок  $EK$ , де точка  $K$  — середина ребра  $DC$ , є апофемою правильної чотирикутної піраміди  $EABCD$ .

*Усі апофемі правильної піраміди рівні (доведіть це самостійно).*

**Площею бічної поверхні піраміди** називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні піраміди** (ще говорять: «**площа повної поверхні піраміди**») називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + S_{\text{осн}},$$

де  $S_{\text{п}}$  — площа поверхні піраміди,  $S_{\text{б}}$  — площа бічної поверхні піраміди,  $S_{\text{осн}}$  — площа основи піраміди.

**Теорема 3.1.** *Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофемі.*

*Доведення.* Розглянемо правильну  $n$ -кутну піраміду з ребром основи, що дорівнює  $a$ , та апофемою, що дорівнює  $d$ . Тоді площа бічної грані дорівнює  $\frac{1}{2}ad$ . Оскільки всі  $n$  бічних граней правильної  $n$ -кутної піраміди — рівні трикутники, то площа бічної поверхні дорівнює  $\left(\frac{1}{2}ad\right) \cdot n$ , тобто  $S_{\text{б}} = \left(\frac{1}{2}ad\right) \cdot n = \frac{1}{2}(an) \cdot d$ . Оскільки добуток  $an$  дорівнює периметру основи, то теорему доведено. ◀

Твердження теореми 3.1 зручно подати у вигляді формули

$$S_{\text{б}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot d,$$

де  $P_{\text{осн}}$  — периметр основи піраміди,  $d$  — довжина апофемі правильної піраміди.

Із доведеного в ключових задачах пп. 11–12 підручника «Геометрія. 10 клас»<sup>1</sup> випливають такі властивості:

- 1) якщо бічні ребра піраміди є рівними або бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр описаного кола многокутника, який є основою піраміди;
- 2) якщо всі двогранні кути опуклої піраміди при ребрах основи рівні, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр вписаного кола многокутника, який є основою піраміди.

Доведіть ці властивості самостійно.

<sup>1</sup> Підручник «А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. — Х. : Гімназія, 2018».

**Задача.** Доведіть, що коли кожний із двограних кутів опуклої піраміди при ребрах основи дорівнює  $\alpha$ , то площу бічної поверхні піраміди можна обчислити за формулою  $S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$ .

*Розв'язання*

Доведення проведемо для трикутної піраміди. Для інших  $n$ -кутних пірамід доведення буде аналогічним.

На рисунку 3.6 відрізок  $DO$  — висота піраміди  $DABC$ . Трикутники  $AOB$ ,  $BOC$  і  $COA$  є відповідно ортогональними проекціями на площину основи піраміди трикутників  $ADB$ ,  $BDC$  і  $CDA$ .

Скориставшись теоремою про площу ортогональної проекції многокутника, можна записати:

$$S_{AOB} = S_{ADB} \cos \alpha,$$

$$S_{BOC} = S_{BDC} \cos \alpha,$$

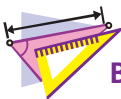
$$S_{COA} = S_{CDA} \cos \alpha.$$

Додавши почленно ліві та праві частини записаних рівностей,

отримаємо:  $S_6 = S_{\text{осн}} \cos \alpha$ . Звідси  $S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$ . ◀



1. Що називають пірамідою?
2. Що називають висотою піраміди?
3. Який переріз називають діагональним перерізом піраміди?
4. Яку піраміду називають правильною?
5. Що називають апофемою правильної піраміди?
6. Що називають площею поверхні піраміди? бічної поверхні піраміди?
7. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної піраміди?



## ВПРАВИ

**3.1.°** Скільки  $n$ -кутна піраміда має:

- 1) вершин;                      2) граней;                      3) ребер?

**3.2.°** Яку найменшу кількість граней може мати піраміда?

**3.3.°** Доведіть, що кількість ребер будь-якої піраміди є парним числом.

3.4.° На рисунку 3.7 зображено правильну трикутну піраміду  $SABC$ . Перерисуйте рисунок у зошит і зобразіть:

- 1) висоту піраміди;
- 2) кут нахилу ребра  $SA$  до площини основи;
- 3) лінійний кут двогранного кута піраміди при ребрі  $BC$ .

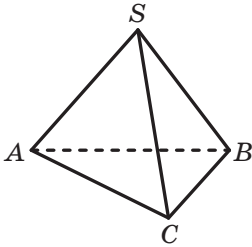


Рис. 3.7

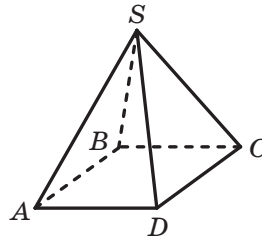


Рис. 3.8

3.5.° На рисунку 3.8 зображено правильну чотирикутну піраміду  $SABCD$ . Перерисуйте рисунок у зошит і зобразіть:

- 1) висоту піраміди;
- 2) кут нахилу ребра  $SC$  до площини основи;
- 3) лінійний кут двогранного кута піраміди при ребрі  $AD$ .

3.6.° Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть висоту піраміди.

3.7.° Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а бічне ребро нахилено до площини основи під кутом  $45^\circ$ . Знайдіть сторону основи піраміди.

3.8.° Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота піраміди — 4 см. Знайдіть:

- 1) апофему піраміди;
- 2) двогранний кут піраміди при ребрі основи.

3.9.° Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 2 см, а сторона основи — 6 см. Знайдіть:

- 1) висоту піраміди;
- 2) двогранний кут піраміди при ребрі основи.

3.10.° Сторона основи правильної семикутної піраміди дорівнює 10 см, а її апофема — 20 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

- 3.11.**° Площиний кут при вершині правильної восьмикутної піраміди дорівнює  $30^\circ$ , а бічне ребро — 2 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.12.**° Площа бічної поверхні правильної п'ятикутної піраміди дорівнює  $300 \text{ см}^2$ , а її апофема — 15 см. Знайдіть сторону основи піраміди.
- 3.13.**° Кожне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
- 3.14.**° Кожне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
- 3.15.**° Основою піраміди  $MABCD$  є паралелограм  $ABCD$ , діагональ  $BD$  якого дорівнює 4 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи, а бічне ребро  $MA$ , що дорівнює 8 см, утворює з площиною основи кут  $45^\circ$ . Знайдіть ребро  $MD$ .
- 3.16.**° Основою піраміди є ромб, сторона якого дорівнює 13 см, а одна з діагоналей — 24 см. Основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей основи піраміди. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо її висота дорівнює 16 см.
- 3.17.**• Точки  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(-2; 7; 0)$  і  $C(-1; -1; 0)$  — вершини основи піраміди  $SABC$ . Знайдіть висоту цієї піраміди, якщо точка  $S$  має координати  $S(5; 2; -3)$ .
- 3.18.**• Вершини  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  піраміди  $MABCD$  лежать у площині  $z = 2$ . Знайдіть висоту цієї піраміди, якщо точка  $M$  має координати  $M(3; 6; -4)$ .
- 3.19.**• Точки  $A(2; 1; 0)$ ,  $B(5; 1; 0)$  і  $D(2; -2; 0)$  — вершини правильної піраміди  $MABCD$ , висота якої дорівнює 4. Знайдіть:
- 1) координати вершин  $M$  і  $C$ ;
  - 2) довжину бічного ребра піраміди.
- 3.20.**• Точки  $A(0; 5; 4)$  і  $B(0; 3; 2)$  — вершини правильної піраміди  $SABCD$ , висота якої дорівнює 3. Точка  $O(0; 3; 4)$  — центр основи цієї піраміди. Знайдіть:
- 1) координати вершин  $S$ ,  $C$  і  $D$ ;
  - 2) довжину бічного ребра піраміди.
- 3.21.**• Бічне ребро правильної шестикутної піраміди, що дорівнює  $b$ , утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди, який проходить через більшу діагональ основи.

**3.22.\*** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $a$ , а бічне ребро утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди.

**3.23.\*** Доведіть, що в правильній піраміді:

- 1) бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи;
- 2) двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними.

**3.24.\*** Бічне ребро правильної трикутної піраміди утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайдіть двогранний кут піраміди при ребрі основи.

**3.25.\*** Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть кут між бічним ребром піраміди та площиною її основи.

**3.26.\*** Точки  $D$ ,  $E$  і  $F$  — середини ребер  $AB$ ,  $AM$  і  $MC$  правильної піраміди  $MABC$  відповідно,  $AB = 8$  см,  $AM = 12$  см.

- 1) Побудуйте переріз піраміди, який проходить через точки  $D$ ,  $E$  і  $F$ .
- 2) Доведіть, що побудований переріз є прямокутником.
- 3) Знайдіть площу перерізу.

**3.27.\*** Побудуйте переріз правильної трикутної піраміди площиною, яка проходить через основу її висоти паралельно мимобіжним ребрам піраміди. Знайдіть периметр цього перерізу, якщо сторона основи піраміди дорівнює 9 см, а бічне ребро — 12 см.

**3.28.\*** Кут між двома апофемами правильної трикутної піраміди дорівнює  $60^\circ$ . Доведіть, що бічні грані піраміди є рівнобедреними прямокутними трикутниками.

**3.29.\*** Кожне ребро правильної піраміди  $MABCD$  дорівнює  $a$ , точка  $E$  — середина ребра  $MC$ . Знайдіть:

- 1) площу перерізу піраміди площиною  $BED$ ;
- 2) кут між площиною  $BED$  і площиною основи піраміди.

**3.30.\*** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює  $a$ , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

**3.31.\*** Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $d$ , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

**3.32.\*** Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см та утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

- 3.33.** Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.34.** Паралелограм якого виду може бути основою піраміди, бічні ребра якої утворюють рівні кути з площиною основи?
- 3.35.** Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 32 см. Висота піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо вони утворюють рівні кути з площиною основи.
- 3.36.** Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см, а кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть висоту піраміди.
- 3.37.** Основою піраміди  $DABC$  є трикутник  $ABC$  такий, що  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AB = BC$ . Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут  $45^\circ$  і дорівнює 8 см. Знайдіть площу основи піраміди.
- 3.38.** Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює  $3\sqrt{10}$  см, а основа — 6 см. Висота піраміди дорівнює 5 см, а її бічні ребра є рівними. Знайдіть бічне ребро піраміди.
- 3.39.** Паралелограм якого виду може бути основою піраміди, якщо двогранні кути при ребрах основи є рівними?
- 3.40.** Основою піраміди є ромб зі стороною 8 см і кутом  $30^\circ$ . Кожний із двограних кутів піраміди при ребрах основи дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть:
- 1) площу бічної поверхні піраміди;
  - 2) висоту піраміди.
- 3.41.** Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $30^\circ$ . Знайдіть:
- 1) площу бічної поверхні піраміди;
  - 2) висоту піраміди.
- 3.42.** Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 4 см і 16 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $60^\circ$ . Знайдіть:
- 1) площу бічної поверхні піраміди;
  - 2) висоту піраміди.

- 3.43.\*** Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 4 см і 12 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи. Площина ще однієї грані, яка проходить через більшу сторону основи, утворює кут  $45^\circ$  із площиною основи. Знайдіть:
- 1) висоту піраміди;
  - 2) площу бічної поверхні піраміди.
- 3.44.\*** Основою піраміди є квадрат зі стороною 12 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см.
- 3.45.\*** Площини бічних граней  $ABM$  і  $CBM$  піраміди  $MABC$  перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо  $AB = BC = 17$  см,  $AC = 16$  см,  $MB = 20$  см.
- 3.46.\*** Площини бічних граней  $MAB$  і  $MAC$  піраміди  $MABC$  перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу грані  $MBC$ , якщо  $AB = 13$  см,  $BC = 14$  см,  $AC = 15$  см,  $MA = 9$  см.
- 3.47.\*\*** Доведіть, що коли двогранні кути піраміди при ребрах її основи рівні, то кожна точка висоти піраміди рівновіддалена від площин її бічних граней.
- 3.48.\*\*** Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть двогранний кут піраміди при бічному ребрі.
- 3.49.\*\*** Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при бічному ребрі дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.
- 3.50.\*\*** Відстань від центра основи правильної трикутної піраміди до площини її бічної грані дорівнює  $d$ , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.51.\*\*** Відстань від центра основи правильної чотирикутної піраміди до площини бічної грані дорівнює  $m$ , а кут між висотою піраміди та площиною бічної грані становить  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.52.\*\*** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди  $MABCD$  дорівнює 8 см, а висота піраміди — 12 см.
- 1) Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через середини бічних ребер  $MA$  і  $MD$  паралельно висоті піраміди.
  - 2) Знайдіть площу перерізу.

- 3.53.\*\*** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $60^\circ$ .
- 1) Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через центр основи паралельно бічній грані піраміди.
  - 2) Знайдіть площу перерізу.
- 3.54.\*\*** Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 2 см і 18 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними, а висота однієї з бічних граней, проведена до ребра основи піраміди, — 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.55.\*\*** Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 8 см і 15 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними, а висота піраміди дорівнює  $3\sqrt{15}$  см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.56.\*\*** Основою піраміди  $MABC$  є трикутник  $ABC$  такий, що  $AB = BC = 2$  см,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Площини бічних граней  $MAB$  і  $MAC$  перпендикулярні до площини основи, а кут між площиною  $MBC$  і площиною основи дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.57.\*\*** Основою піраміди  $MABCD$  є ромб зі стороною  $a$ . Площини бічних граней  $ABM$  і  $CBM$  перпендикулярні до площини основи, а двогранний кут при ребрі  $MB$  є тупим і дорівнює  $\alpha$ . Кут між площиною  $AMD$  і площиною основи дорівнює  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.58.\*\*** Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 6 см. Площина однієї бічної грані перпендикулярна до площини основи, а площини двох інших граней утворюють із площиною основи кут  $45^\circ$ . Знайдіть висоту піраміди.
- 3.59.\*** Основою піраміди  $MABC$  є трикутник  $ABC$  такий, що  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $AC = 4\sqrt{3}$  см. Площина грані  $BMC$  перпендикулярна до площини основи, а площини двох інших граней нахилені до площини основи під кутом  $30^\circ$ . Знайдіть ребро  $MC$ .
- 3.60.\*** Кожне ребро тетраедра дорівнює 1 см. Знайдіть найбільше значення площі перерізу даного тетраедра площиною, паралельною двом його мимобіжним ребрам.
- 3.61.\*** Чи існує чотирикутна піраміда, дві несусідні бічні грані якої перпендикулярні до площини основи?





## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.62. Діагоналі трапеції  $ABCD$  з основами  $BC$  і  $AD$  перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть відношення площ трикутників  $BOC$  і  $AOD$ , якщо  $BC = 3$  см,  $AD = 9$  см.

3.63. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC = 25$  см,  $AC = 14$  см. До кола, вписаного в даний трикутник, проведено дотичну, яка паралельна основі  $AC$  і перетинає сторони  $AB$  і  $BC$  у точках  $M$  і  $K$  відповідно. Знайдіть площу трикутника  $MBK$ .

## 4. Площі поверхонь подібних многогранників. Зрізана піраміда

Перетнемо довільну піраміду площиною, паралельною основі піраміди (рис. 4.1). Ця площина розбиває дану піраміду на два многогранники: один многогранник є пірамідою, другий називають **зрізаною пірамідою**.

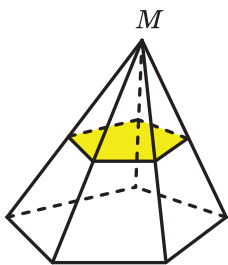


Рис. 4.1

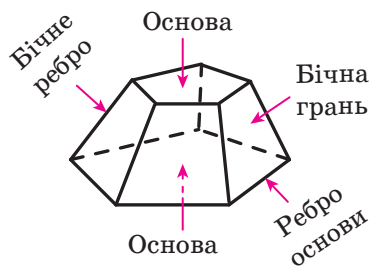


Рис. 4.2

У зрізаній піраміді (рис. 4.2) дві грані —  $n$ -кутники, що лежать у паралельних площинах. Їх називають **основами зрізаної піраміди**. Решта  $n$  граней зрізаної піраміди — трапеції. Їх називають **бічними гранями зрізаної піраміди**. Сторони основ називають **ребрами основ зрізаної піраміди**. Ребра, які не належать основам, називають **бічними ребрами зрізаної піраміди**.

Зауважимо, що основи зрізаної піраміди є подібними фігурами. Цей факт було доведено в курсі геометрії 10 класу.

**Висотою зрізаної піраміди** називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки площини однієї основи на площину другої основи. Довжина висоти зрізаної піраміди дорівнює відстані між площинами її основ.

Якщо правильну  $n$ -кутну піраміду перетнути площиною, паралельною основі, то утворену зрізану піраміду називають **правильною  $n$ -кутною зрізаною пірамідою**.

Основами правильної зрізаної  $n$ -кутної піраміди є правильні  $n$ -кутники, а бічними гранями — рівнобічні трапеції.

**Апофемою правильної зрізаної піраміди** називають відрізок, який сполучає середини ребер основ, що належать одній бічній грані.

Усі апофемі правильної зрізаної піраміди є рівними (доведіть це самостійно).

На рисунку 4.3 зображено правильну чотирикутну зрізану піраміду  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Її основами є квадрати  $ABCD$  і  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точки  $O$  і  $O_1$  — їхні центри. Відрізок  $OO_1$  — висота зрізаної піраміди.

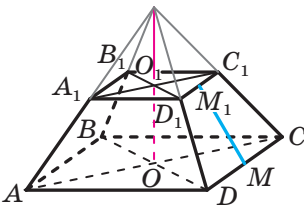


Рис. 4.3

Сполучимо середини  $M$  і  $M_1$  ребер  $CD$  і  $C_1 D_1$  відповідно. Оскільки чотирикутник  $CC_1 D_1 D$  — рівнобічна трапеція, то відрізок  $MM_1$  — її висота, а отже, й апофема правильної чотирикутної зрізаної піраміди.

**Площею бічної поверхні зрізаної піраміди** називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні зрізаної піраміди** (ще говорять: «площа повної поверхні зрізаної піраміди») називають суму площ усіх її граней.

**Теорема 4.1.** *Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ і апофемі.*

Доведіть цю теорему самостійно.

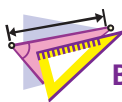
Твердження теореми 4.1 зручно подати у вигляді формули

$$S_6 = \frac{1}{2}(P_{\text{осн}} + p_{\text{осн}}) \cdot d,$$

де  $P_{\text{осн}}$  і  $p_{\text{осн}}$  — периметри основ,  $d$  — довжина апофемі правильної зрізаної піраміди.



1. Опишіть, який многогранник називають зрізаною пірамідою.
2. Опишіть елементи зрізаної піраміди.
3. Яку зрізану піраміду називають правильною?
4. Що називають апофемою правильної зрізаної піраміди?
5. Що називають площею поверхні зрізаної піраміди? бічної поверхні зрізаної піраміди?
6. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди?



### ВПРАВИ

- 4.1.<sup>°</sup> Площа бічної поверхні правильної зрізаної шестикутної піраміди дорівнює  $540 \text{ см}^2$ . Знайдіть сторони основ піраміди, якщо вони відносяться як  $2 : 3$ , а апофема дорівнює  $9 \text{ см}$ .
- 4.2.<sup>°</sup> Знайдіть апофему правильної зрізаної п'ятикутної піраміди, сторони основ якої дорівнюють  $6 \text{ см}$  і  $10 \text{ см}$ , а площа бічної поверхні —  $280 \text{ см}^2$ .
- 4.3.<sup>°</sup> Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють  $12 \text{ см}$  і  $18 \text{ см}$ , а двогранний кут піраміди при ребрі більшої основи дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
- 4.4.<sup>°</sup> Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють  $6 \text{ см}$  і  $9 \text{ см}$ , а двогранний кут піраміди при ребрі більшої основи дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
- 4.5.<sup>°</sup> Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють  $6 \text{ см}$  і  $10 \text{ см}$ , а висота піраміди —  $4 \text{ см}$ . Знайдіть:
  - 1) діагональ зрізаної піраміди;
  - 2) площу перерізу, який проходить через бічні ребра, що не належать одній грані;
  - 3) площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
- 4.6.<sup>°</sup> Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють  $15 \text{ см}$  і  $27 \text{ см}$ , а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут  $30^\circ$ . Знайдіть:
  - 1) висоту піраміди;
  - 2) площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

- 4.7.\* Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 24 см і 30 см, а бічні ребра — 4 см. Знайдіть висоту піраміди.
- 4.8.\* Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 12 см, а площа бічної поверхні —  $54 \text{ см}^2$ . Знайдіть висоту піраміди.
- 4.9.\*\* Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди  $ABCA_1B_1C_1$  дорівнюють 8 см і 5 см, а висота піраміди — 3 см. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через пряму  $AB$  і точку  $C_1$ .
- 4.10.\*\* Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнюють 8 см і 6 см, а висота піраміди —  $3\sqrt{3}$  см. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через пряму  $AC$  і точку  $B_1$ .
- 4.11.\*\* Бічне ребро  $BB_1$  зрізаної піраміди  $ABCA_1B_1C_1$  перпендикулярне до площини основи,  $BB_1 = 4$  см,  $AB = BC = 16$  см,  $A_1B_1 = B_1C_1 = 10$  см,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 4.12.\*\* Основи зрізаної піраміди  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є квадратами,  $AD = 4$  см,  $A_1D_1 = 2$  см. Грань  $AA_1B_1B$  є рівнобічною трапецією, а її площина перпендикулярна до площини основи. Кут між площиною грані  $CC_1D_1D$  і площиною основи дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 4.13.\*\* Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює  $H$ . Бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут  $\alpha$ , а діагональ піраміди — кут  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 4.14.\*\* Сторона більшої основи правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює  $a$ , а сторона меншої основи —  $b$ . Знайдіть висоту зрізаної піраміди, якщо гострий кут її бічної грані дорівнює  $\alpha$ .



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 4.15. У круг вписано правильний трикутник зі стороною 15 см. Знайдіть площу сектора цього круга, який відповідає центральному куту правильного трикутника.
- 4.16. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 6\sqrt{3}$  см,  $BC = 6\sqrt{2}$  см і  $\angle A = 45^\circ$ . Знайдіть невідомі кути трикутника.



## ПЛАТОНОВІ ТІЛА

Вивчаючи навколишній світ, ви, напевно, звертали увагу, що деяким просторовим тілам притаманна природна краса та навіть досконалість. Наприклад, із двох многогранників, зображених на рисунку 4.4, перший (*A*) ви, скоріш за все, назвете красивим і гармонійним, а другий (*B*) — ні. Що ж змушує нас сприймати многогранник *A* «з більшою симпатією», ніж многогранник *B*? Які геометричні властивості многогранників формують у нас таке ставлення? Звернемо увагу, що всі грані опуклого многогранника *A* є *рівними правильними* многокутниками (п'ятикутниками) і в кожній вершині сходиться *однакова* кількість ребер (по три ребра). Многогранники з такими властивостями виокремлюють у спеціальний клас — клас правильних многогранників.

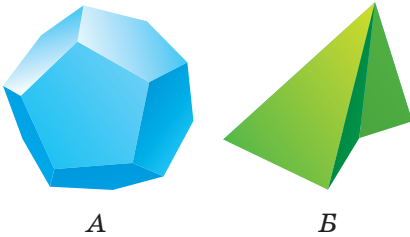


Рис. 4.4



Рис. 4.5

**Означення.** Опуклий многогранник називають **правильним**, якщо всі його грані — рівні правильні многокутники і в кожній вершині сходиться одна й та сама кількість ребер.

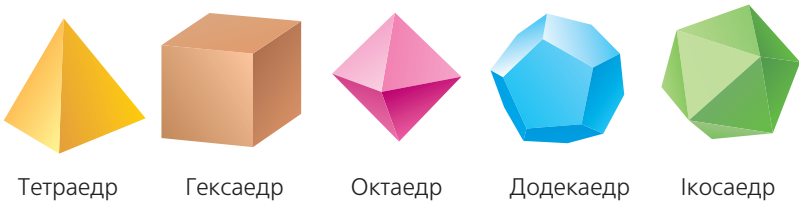
Многогранник *A*, зображений на рисунку 4.4, — правильний многогранник, який має 12 граней. Його називають **додекаедром**, що в перекладі з грецької означає «дванадцятигранник». Многогранник *B* не є правильним.

З дитинства кожному людину оточували правильні многогранники. Кубики та пірамідки — одні з перших наших іграшок (рис. 4.5). Справді, куб — правильний многогранник, адже всі шість граней куба — рівні квадрати (правильні чотирикутники) і в кожній вершині сходиться однакова кількість ребер (по три ребра). Куб також називають **гексаедром** (від грец. «шестигранник»). Трикутна

піраміда (тетраедр, від грец. «чотиригранник»), усі грані якої — правильні трикутники, також є правильним многогранником (подумайте чому).

Правильні многогранники в стереометрії є в деякому роді аналогами правильних багатокутників у планіметрії. Як ви знаєте, на площині існують правильні трикутники, чотирикутники, п'ятикутники тощо. Узагалі, для кожного натурального значення  $n$  ( $n \geq 3$ ) існує правильний  $n$ -кутник. З правильними многогранниками справа інакша.

Окрім правильного тетраедра, куба й додекаедра, із часів Стародавньої Греції відомо ще два правильних многогранники: **октаедр** (від грец. «восьмигранник») та **ікосаедр** (від грец. «двадцятигранник») (рис. 4.6). Усі вісім граней октаедра є правильними трикутниками, і в кожній вершині сходиться чотири ребра. Октаедр зручно уявляти як об'єднання двох чотирикутних пірамід, склеєних своїми основами. Якщо бічні грані цих пірамід — рівні правильні трикутники, то отриманий після склеювання многогранник є октаедром (рис. 4.7). Гранями ікосаедра є рівні правильні трикутники, і в кожній вершині ікосаедра сходиться п'ять ребер.



Тетраедр

Гексаедр

Октаедр

Додекаедр

Ікосаедр

Рис. 4.6

Вивчення правильних многогранників було однією з основних задач геометрів Стародавньої Греції. Багато грецьких філософів того часу вважали, що правильні многогранники лежать в основі всієї світобудови. Наприклад, Платон (427–347 рр. до н. е.) вважав, що правильні многогранники символізують природні стихії. Правильні многогранники іноді ще називають платоновими тілами.

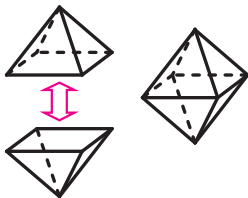


Рис. 4.7

Геометрам Стародавньої Греції вдалося описати всі можливі правильні многогранники. Виявилось, що існує тільки п'ять правильних многогранників (тетраедр, куб, додекаедр, октаедр та ікосаедр). Цей факт можна довести, спираючись на таку власти-

вість довільного опуклого многогранника: сума всіх плоских кутів, що прилягають до довільної вершини многогранника, менша від  $360^\circ$  (рис. 4.8).

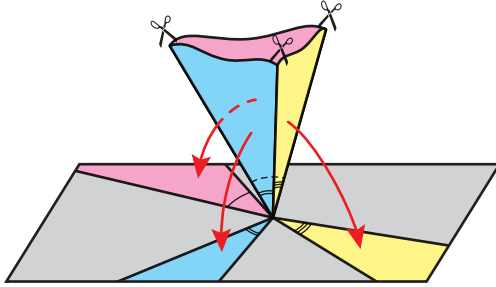


Рис. 4.8

У правильному многограннику кожна грань є правильним  $n$ -кутником. Оскільки сума всіх кутів  $n$ -кутника дорівнює  $180^\circ(n-2)$ , то кожний плоский кут такого  $n$ -кутника дорівнює  $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ . Якщо до вершини правильного многогранника прилягає  $k$  таких плоских кутів, то їхня сума дорівнює  $k \cdot \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ , тому

$$k \cdot \frac{180^\circ(n-2)}{n} < 360^\circ;$$

$$k < \frac{2n}{n-2}.$$

Останню нерівність перепишемо так:

$$k < 2 + \frac{4}{n-2}. \quad (1)$$

З одного боку, оскільки кожна грань многогранника містить не менше ніж три ребра, то  $n \geq 3$ . З другого боку, якщо  $n \geq 6$ , то з нерівності (1) випливає, що  $k < 3$ . Проте до вершини многогранника не може прилягати менше ніж три плоских кути, тому при  $n \geq 6$  правильних многогранників не існує. Залишається розглянути такі можливості:  $n = 3$ ,  $n = 4$ ,  $n = 5$ .

Якщо  $n = 3$ , то гранями правильного многогранника будуть правильні трикутники. З нерівності (1) випливає, що  $k < 6$ . Цьому випадку відповідають: тетраедр ( $k = 3$ ), октаедр ( $k = 4$ ) та ікосаедр ( $k = 5$ ).

Якщо  $n = 4$ , то гранями правильного многогранника будуть квадрати. З нерівності (1) випливає, що  $k < 4$ . Цьому випадку відповідає куб ( $k = 3$ ).

Якщо  $n = 5$ , то гранями правильного многогранника будуть правильні п'ятикутники. З нерівності (1) випливає, що  $k < 3\frac{1}{3}$ . Цьому випадку відповідає додекаедр ( $k = 3$ ).

Об'єкти, які за формою нагадують правильні многогранники, нерідко трапляються в природі. Наприклад, форму куба мають кристали кам'яної солі (рис. 4.9); кристали алмазів мають форму октаедра (рис. 4.10); кристали піриту нагадують додекаедр (рис. 4.11). Біологи виявили, що частини деяких вірусів мають форму ікосаедра. Елементи багатьох архітектурних об'єктів сконструйовані у вигляді правильних многогранників (рис. 4.12).



Кам'яна сіль

Рис. 4.9



Алмаз

Рис. 4.10



Пірит

Рис. 4.11



Рис. 4.12





## ГЕОМЕТРИЧНЕ ТІЛО

У п. 1 ви ознайомилися з поняттям геометричного тіла (або просто тіла). Нагадаємо, що многогранник, куля, конус є тілами, а, наприклад, площина, двогранний кут або фігури, зображені на рисунку 1.2, не є тілами. У цьому оповіданні ми глибше ознайомимося із цим непротим поняттям.

Опишемо властивості, які виокремлюють тіла з усіх геометричних фігур.

**Означення.** Фігуру (множину точок простору) називають **відкритою**, якщо кожна її точка належить фігурі разом з деякою кулею із центром у цій точці.

Прикладом відкритої множини може слугувати весь простір.

Ще один приклад відкритої множини можна отримати, розглянувши «кулю без своєї сфери», тобто множину  $B$  точок, відстань від яких до центра  $O$  менша від радіуса  $R$ . Справді, виберемо в цій множині  $B$  довільну точку  $X$ . Тоді  $OX < R$  (рис. 4.13). Якщо розглянути маленьку кулю радіуса  $r = \frac{R - OX}{2}$  із центром у точці  $X$ , то вона повністю належить даній множині  $B$ , а тому  $B$  — відкрита множина.

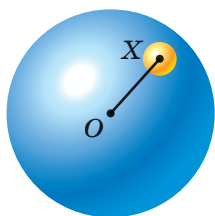


Рис. 4.13



Рис. 4.14

Наприклад, пряма  $AB$  не є відкритою множиною, оскільки куля із центром у будь-якій її точці не належить цій прямій (рис. 4.14). Узагалі, будь-яка плоска фігура не є відкритою.

**Означення.** Фігуру називають **обмеженою**, якщо вона повністю міститься в деякій кулі.

Наприклад, відрізок, піраміда, куля — обмежені фігури, а пряма, площина, двогранний кут — необмежені фігури.

**Означення.** Точку називають **точкою дотикання фігури**, якщо будь-яка куля із центром у цій точці містить щонайменше одну точку цієї фігури.

Наприклад, кожна точка кулі є точкою дотикання цієї кулі, кожна точка відрізка є точкою дотикання цього відрізка. Узагалі, кожна точка фігури є її точкою дотикання. Однак не треба думати, що точка дотикання обов'язково належить фігурі. Приміром, розглянемо відрізок  $AB$ , з якого видалили його кінці — точки  $A$  і  $B$ . Окрім точок, що лежать між  $A$  і  $B$ , точками дотикання цієї фігури будуть також точки  $A$  і  $B$ . Справді, довільна куля із центром у будь-якій із цих точок міститиме внутрішні точки відрізка  $AB$ .

Наведемо приклад точки, яка не є точкою дотикання. Розглянемо кулю із центром у точці  $O$  радіуса  $R$  і точку  $A$ , яка не належить даній кулі. Це означає, що довжина відрізка  $OA$  більша за радіус  $R$  кулі. Тоді точка  $A$  не є точкою дотикання цієї кулі. Справді, якщо розглянути ще одну кулю із центром у точці  $A$  і радіусом  $r = \frac{OA - R}{2}$ , то ця куля не перетинатиметься з даною кулею (рис. 4.15).

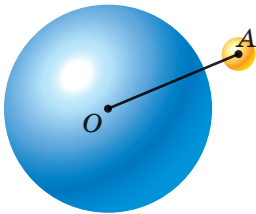


Рис. 4.15

**Означення.** Фігуру називають **зв'язною**, якщо при будь-якому її розбитті на дві частини хоча б одна із цих частин містить точки дотикання другої частини.

Розглянемо, наприклад, фігуру  $F$  на рисунку 1.2. Фігура  $F$  — це об'єднання двох куль. Зрозуміло, що фігура  $F$  не є зв'язною, оскільки її можна розбити на дві частини (дві кулі, з яких вона складається), причому кожна з них не містить точок дотикання другої частини. Тоді як пряма, площина, конус — приклади зв'язних фігур.

**Означення.** **Поверхнею** фігури  $\Phi$  називають множину точок, що є точками дотикання як для самої фігури, так і для фігури, яка складається з точок простору, що не належать фігурі  $\Phi$ .

Наприклад, поверхнею кулі є її сфера. Об'єднання всіх граней многогранника є поверхнею многогранника.

Тепер ми можемо дати означення тіла.

**Означення.** **Тілом** називають обмежену фігуру, яка є об'єднанням непорожньої зв'язної відкритої фігури та її поверхні.

Після наведеного означення ви можете самі обґрунтувати, чому пряма, площина, двогранний кут, а також фігури, зображені на рисунку 1.2, не є тілами.

Поняття відкритої множини, точки дотикання, зв'язності є одними з фундаментальних у *топології* — важливому розділі сучасної математики.

Щедра на таланти українська земля подарувала світу цілу плеяду видатних топологів — І. М. Гельфанда, О. А. Олійник, П. С. Урисона та багатьох інших.

### **Ізраїль Мойсейович Гельфанд**

(1913–2009)

Народився в с. Окни (нині Одеська область).

Не маючи закінченої середньої освіти й не пройшовши курсу навчання в університеті, завдяки блискучим здібностям і наполегливій праці зумів стати видатним ученим.

Основні результати здобув у таких галузях математики, як функціональний аналіз, математична фізика, прикладна математика, теорія топологічних лінійних просторів.

Опублікував понад 800 наукових праць.

Іноземний член Національної академії наук США, Паризької академії наук, Шведського та Ірландського королівських товариств, почесний доктор Оксфордського, Паризького (Сорбонна), Гарвардського, Упсальського, Ліонського, Пізанського університетів.



### **Ольга Арсенівна Олійник**

(1925–2001)



Народилася в с. Матусів Черкаської області. Перша жінка в СРСР, яка у 29 років стала доктором фізико-математичних наук. Основні досягнення пов'язані з дослідженнями в галузі диференціальних рівнянь і топології. Підготувала 58 кандидатів і 14 докторів фізико-математичних наук. Член Італійської академії наук у Палермо, Саксонської академії наук, Единбурзького королівського товариства. Нагороджена іменною медаллю Коллеж де Франс.



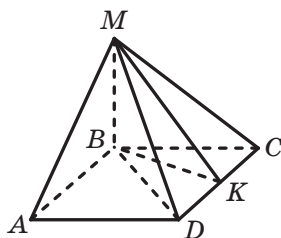
### Павло Самуїлович Урисон

(1898–1924)

Народився в м. Одеса.  
Разом з П. С. Александровим заснував  
всесвітньо відому топологічну школу.  
Створив новий напрямок у топології —  
теорію розмірностей. Основні досягнення  
пов'язані з такими розділами математики,  
як топологія, диференціальні рівняння  
та геометрія.

### ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

- Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 8 см і 22 см, а висота призми дорівнює 15 см.  
А)  $900 \text{ см}^2$ ;    Б)  $450 \text{ см}^2$ ;    В)  $600 \text{ см}^2$ ;    Г)  $2640 \text{ см}^2$ .
- Обчисліть площу бічної поверхні правильної шестикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 8 см, а апофема — 12 см.  
А)  $288 \text{ см}^2$ ;    Б)  $576 \text{ см}^2$ ;    В)  $144 \text{ см}^2$ ;    Г)  $192 \text{ см}^2$ .
- Основою піраміди  $MABCD$ , зображеної на рисунку, є квадрат, бічне ребро  $MB$  перпендикулярне до площини основи піраміди, точка  $K$  — середина відрізка  $CD$ . Укажіть лінійний кут двогранного кута піраміди при ребрі  $CD$ .  
А)  $\angle MAB$ ;    В)  $\angle MKB$ ;  
Б)  $\angle MDB$ ;    Г)  $\angle MCB$ .
- Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною  $a$  та гострим кутом  $\alpha$ . Менша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.  
А)  $8a^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ ;    В)  $8a^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \beta$ ;  
Б)  $8a^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ ;    Г)  $8a^2 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ .



5. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см, а апофема — 15 см. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.  
А)  $540 \text{ см}^2$ ;    Б)  $270 \text{ см}^2$ ;    В)  $1080 \text{ см}^2$ ;    Г)  $720 \text{ см}^2$ .
6. Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 2 см. Чому дорівнює площа трикутника  $ADC_1$ ?  
А)  $4 \text{ см}^2$ ;    Б)  $2 \text{ см}^2$ ;    В)  $4\sqrt{2} \text{ см}^2$ ;    Г)  $2\sqrt{2} \text{ см}^2$ .
7. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота піраміди —  $\sqrt{22}$  см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.  
А)  $90 \text{ см}^2$ ;    Б)  $45 \text{ см}^2$ ;    В)  $60 \text{ см}^2$ ;    Г)  $30 \text{ см}^2$ .
8. Знайдіть сторону основи правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює  $12\sqrt{3}$  см і нахилена до площини основи під кутом  $30^\circ$ .  
А)  $3\sqrt{6}$  см;    Б) 6 см;    В)  $9\sqrt{2}$  см;    Г) 9 см.
9. Основа прямої призми — ромб з гострим кутом  $\alpha$ . Площа діагонального перерізу призми, який проходить через більшу діагональ основи, дорівнює  $S$ . Знайдіть площу бічної поверхні призми.  
А)  $\frac{2S}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ ;    Б)  $\frac{S}{\cos \alpha}$ ;    В)  $\frac{2S}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ ;    Г)  $\frac{S}{\sin \alpha}$ .
10. Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ . Відрізок, який сполучає середину висоти піраміди та середину апофеми, дорівнює  $a$ . Знайдіть висоту піраміди.  
А)  $2a \sin \alpha$ ;    Б)  $2a \cos \alpha$ ;    В)  $2a \operatorname{tg} \alpha$ ;    Г)  $2a \operatorname{ctg} \alpha$ .
11. Основа піраміди — квадрат, сторона якого дорівнює 4 см, а дві сусідні бічні грані перпендикулярні до площини основи. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 3 см.  
А)  $48 \text{ см}^2$ ;    Б)  $64 \text{ см}^2$ ;    В)  $16 \text{ см}^2$ ;    Г)  $32 \text{ см}^2$ .
12. Основа прямої призми — трикутник зі стороною  $c$  і прилеглими до неї кутами  $\alpha$  і  $\beta$ . Діагональ бічної грані, яка проходить через сторону основи, протилежну куту  $\alpha$ , нахилена до площини основи під кутом  $\gamma$ . Знайдіть висоту призми.  
А)  $\frac{c \sin \beta \operatorname{tg} \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$ ;    Б)  $\frac{c \sin(\alpha + \beta) \operatorname{ctg} \gamma}{\sin \alpha}$ ;  
В)  $\frac{c \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$ ;    Г)  $\frac{c \sin(\alpha + \beta) \operatorname{ctg} \gamma}{\sin \beta}$ .

13. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 8 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом  $30^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.  
 А)  $32 \text{ см}^2$ ;      Б)  $64 \text{ см}^2$ ;      В)  $32\sqrt{3} \text{ см}^2$ ;      Г)  $64\sqrt{3} \text{ см}^2$ .
14. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть апофему піраміди.  
 А) 4 см;      Б)  $2\sqrt{14}$  см;      В)  $4\sqrt{7}$  см;      Г)  $4\sqrt{2}$  см.
15. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 3 см і 6 см, а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть висоту зрізаної піраміди.  
 А) 6 см;      Б)  $2\sqrt{3}$  см;      В)  $3\sqrt{3}$  см;      Г) 3 см.
16. У прямокутному паралелепіпеді  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  відомо, що  $AD = 24$  см,  $CD = 5$  см,  $AA_1 = 10$  см. Чому дорівнює площа чотирикутника  $A_1 B_1 CD$ ?  
 А)  $100 \text{ см}^2$ ;      Б)  $120 \text{ см}^2$ ;      В)  $125 \text{ см}^2$ ;      Г)  $130 \text{ см}^2$ .
17. Основа піраміди — ромб з кутом  $\alpha$ . Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $\varphi$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює  $H$ .  
 А)  $\frac{4H^2 \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi}$ ;      В)  $\frac{4H^2 \operatorname{ctg} \varphi}{\sin \alpha \sin \varphi}$ ;  
 Б)  $\frac{4H^2 \sin \alpha \operatorname{ctg} \varphi}{\sin \varphi}$ ;      Г)  $\frac{4H^2 \operatorname{tg} \varphi}{\sin \alpha \cos \varphi}$ .
18. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом  $b$  і протилежним йому кутом  $\beta$ . Бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут  $\gamma$ . Знайдіть висоту піраміди.  
 А)  $\frac{b \operatorname{tg} \gamma}{2 \cos \beta}$ ;      В)  $\frac{1}{2} b \cos \beta \operatorname{tg} \gamma$ ;  
 Б)  $\frac{b \operatorname{tg} \gamma}{2 \sin \beta}$ ;      Г)  $\frac{1}{2} b \sin \beta \operatorname{tg} \gamma$ .



## ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

### Многогранник

Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

### Призма

Многогранник, дві грані якого — рівні  $n$ -кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта  $n$  граней — паралелограми, називають  $n$ -кутною призмою.

Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Призму називають правильною, якщо вона є прямою, а її основа — правильний многокутник.

### Площа бічної поверхні прямої призми

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.

### Паралелепіпед

Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограми.

Паралелепіпед називають прямим, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Прямий паралелепіпед називають прямокутним, якщо його основами є прямокутники.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають вимірами прямокутного паралелепіпеда.

Прямокутний паралелепіпед називають кубом, якщо його виміри є рівними.

### Властивості паралелепіпеда

Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці та діляться цією точкою навпіл.

Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.

### Піраміда

Многогранник, одна грань якого —  $n$ -кутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину, називають  $n$ -кутною пірамідою.

Піраміду називають правильною, якщо її основа — правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника. Усі бічні ребра правильної піраміди є рівними, усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники.

Апофемою правильної піраміди називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди.

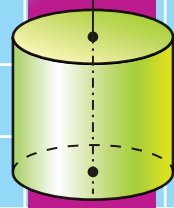
### Площа бічної поверхні піраміди

Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней.

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми.

Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ і апофеми.





## § 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

- 5.** Циліндр
- 6.** Комбінації циліндра та призми
- 7.** Конус
- 8.** Зрізаний конус
- 9.** Комбінації конуса та піраміди
- 10.** Куля. Взаємне розміщення сфери та площини
- 11.** Многогранники, вписані у сферу
- 12.** Многогранники, описані навколо сфери
- 13.** Комбінації циліндра (конуса) та сфери

- У цьому параграфі ви докладніше ознайомитеся з уже відомими вам тілами — циліндром, конусом, кулею, вивчите їхні властивості.
- Дізнаєтеся, яким буває взаємне розміщення цих тіл і многогранників.

## 5. Циліндр

Нехай вектор  $\vec{a}$  перпендикулярний до площини  $\alpha$ . Розглянемо паралельне перенесення на вектор  $\vec{a}$  кола, яке належить площині  $\alpha$ . Образом цього кола є рівне йому коло, яке лежить у площині, паралельній площині  $\alpha$  (рис. 5.1). Нехай  $X$  — довільна точка кола із центром  $O$ , а точка  $X_1$  — образ точки  $X$  при паралельному перенесенні на вектор  $\vec{a}$ . Тоді  $\overline{XX_1} = \vec{a}$  і точка  $X_1$  належить колу із центром  $O_1$ . Отже, усі відрізки, які паралельні вектору  $\vec{a}$  і кінці яких лежать на розглянутих колах, рівні між собою та перпендикулярні до площини  $\alpha$ . Ці відрізки утворюють деяку фігуру  $F$ .

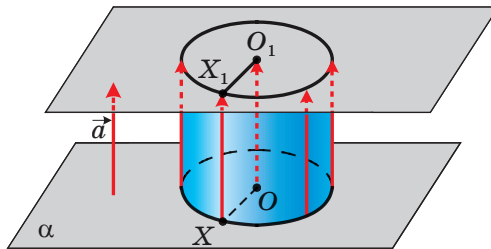


Рис. 5.1

Кола із центрами  $O$  і  $O_1$  обмежують два рівних круги. Тіло, обмежене цими кругами та фігурою  $F$ , називають **циліндром**. Фігуру  $F$  називають **бічною поверхнею циліндра**, круги — **основами циліндра**, відрізки, що утворюють фігуру  $F$ , — **твірними циліндра** (рис. 5.2).

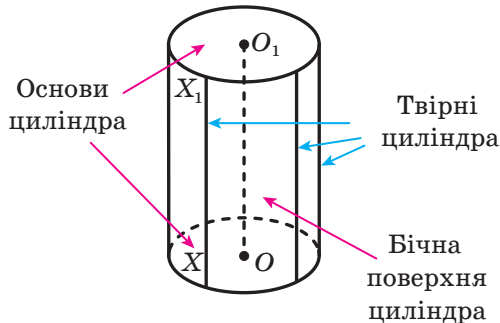


Рис. 5.2

Очевидно, що всі твірні циліндра рівні та перпендикулярні до площини основи.

Пряму, яка проходить через центри основ циліндра, називають **віссю циліндра**. На рисунку 5.1 пряма  $OO_1$  — вісь циліндра. Відрізок осі циліндра, що міститься між його основами, перпендикулярний до основ і дорівнює твірній циліндра. На рисунку 5.1  $OO_1 = XX_1$ .

**Висотою циліндра** називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки площини однієї основи на площину другої основи. Будь-яка твірна циліндра є його висотою. На рисунку 5.2 відрізки  $OO_1$  і  $XX_1$  — висоти циліндра.

**Тілом обертання** називають тіло, отримане в результаті обертання деякої плоскої фігури навколо прямої. Цю пряму називають **віссю обертання**.

Наприклад, якщо обертати навколо осі ординат фігуру, яка лежить у площині  $xy$  та обмежена віссю ординат, прямими  $y = a$  і  $y = -a$  та графіком функції  $y = x^3$  (рис. 5.3, а), то отримуємо тіло, форма якого нагадує пісочний годинник (рис. 5.3, б).

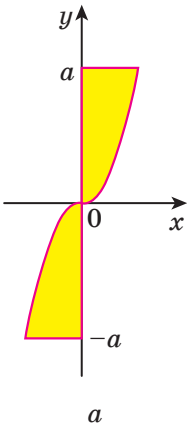


Рис. 5.3



б

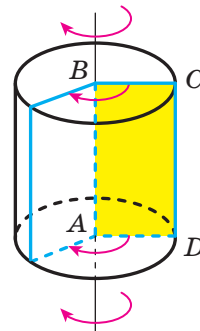


Рис. 5.4

Будь-яке тіло обертання має вісь симетрії. Нею є вісь обертання.

Циліндр можна розглядати як тіло, отримане в результаті обертання прямокутника навколо прямої, що містить його сторону.

На рисунку 5.4 зображено циліндр, отриманий обертанням прямокутника  $ABCD$  навколо прямої  $AB$ . У результаті обертання сторони  $CD$  утворюється бічна поверхня циліндра, а в результаті обертання сторін  $BC$  і  $AD$  — основи циліндра.

Будь-які дві твірні  $AA_1$  і  $BB_1$  циліндра є паралельними. Отже, через прями  $AA_1$  і  $BB_1$  можна провести площину. Розглянемо чотирикутник  $AA_1B_1B$ , який є перерізом циліндра цією площиною (рис. 5.5). Оскільки  $AA_1 \parallel BB_1$  і  $AA_1 = BB_1$ , то чотирикутник  $AA_1B_1B$  — паралелограм. Оскільки твірна циліндра перпендикулярна до площини основи, то  $AA_1 \perp AB$ . Таким чином, перерізом циліндра площиною, яка проходить через дві його твірні, є прямокутник.

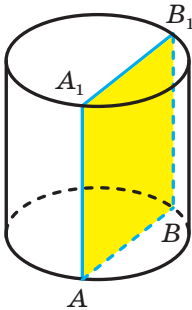


Рис. 5.5

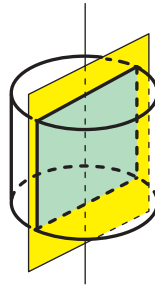


Рис. 5.6

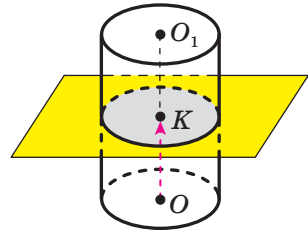


Рис. 5.7

Якщо перетнути циліндр площиною, що проходить через його вісь, то в перерізі утворюється прямокутник, дві сторони якого — діаметри основ циліндра, а дві інші — твірні циліндра (рис. 5.6). Такий переріз називають **осьовим перерізом циліндра**. Площина, яка містить осьовий переріз циліндра, є його площиною симетрії.

Перетнемо циліндр площиною, паралельною основам циліндра. Нехай ця площина перетинає вісь  $OO_1$  циліндра в точці  $K$  (рис. 5.7). Утворена в перерізі фігура — це образ основи із центром  $O$  при паралельному перенесенні на вектор  $\overline{OK}$ . Отже, перерізом циліндра площиною, паралельною основам (або перпендикулярною до осі циліндра), є круг, що дорівнює основі.

Уявимо собі, що поверхню циліндра розрізали по колах основ і деякій твірній (рис. 5.8), а потім розгорнули на площині. Отриману фігуру називають **розгорткою циліндра на площину** або просто **розгорткою циліндра**. Вона складається з двох кругів, що дорівнюють основам циліндра, і прямокутника, який називають розгорткою бічної поверхні циліндра (рис. 5.9).

Якщо твірна циліндра дорівнює  $h$ , а радіус основи циліндра —  $r$ , то сторони розгортки бічної поверхні циліндра дорівнюють  $h$  і  $2\pi r$ .

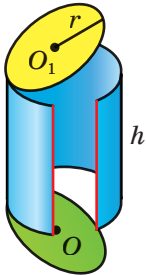


Рис. 5.8

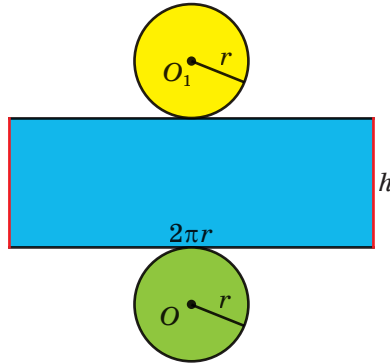


Рис. 5.9

За площу бічної поверхні циліндра приймають площу розгортки його бічної поверхні. Отже,

$$S_6 = 2\pi rh,$$

де  $S_6$  — площа бічної поверхні циліндра,  $r$  — радіус основи циліндра,  $h$  — довжина висоти циліндра.

Площею повної поверхні циліндра називають суму площ бічної поверхні циліндра та двох його основ. Маємо:

$$S_{\Pi} = S_6 + 2S_{\text{осн}},$$

де  $S_{\Pi}$  — площа повної поверхні циліндра,  $S_{\text{осн}}$  — площа основи циліндра.

Площа основи циліндра дорівнює  $\pi r^2$ . Тоді отримуємо формулу

$$S_{\Pi} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Із курсу геометрії 10 класу ви знаєте, що паралельною проекцією кола є фігура, яку називають еліпсом. Тому, зображаючи циліндр, його основи рисують у вигляді еліпсів. На практиці для зображення еліпсів зручно користуватися лекалами (рис. 5.10).



Рис. 5.10

**Задача.** Точки  $A$  і  $B$  лежать на колах різних основ циліндра так, що пряма  $AB$  утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Через точку  $A$  провели осьовий переріз  $AA_1D_1D$  (рис. 5.11). Знайдіть відстань між прямими  $AB$  і  $DD_1$ , якщо радіус основи циліндра дорівнює 5 см і  $AB = 16$  см.

**Розв'язання.** Проведемо твірну  $BK$  циліндра. Оскільки твірні циліндра перпендикулярні до площини основи, то вони паралельні. Отже, точки  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$  і  $K$  належать одній площині.

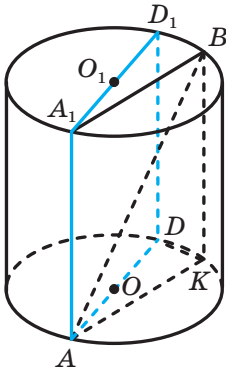


Рис. 5.11

Маємо:  $DD_1 \parallel BK$ , тому  $DD_1 \parallel AA_1B$ . Тоді відстань між мимобіжними прямими  $AB$  і  $DD_1$  дорівнює відстані між прямою  $DD_1$  і площиною  $AA_1B$ . Тому достатньо знайти довжину перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки прямої  $DD_1$  на площину  $AA_1B$ .

Сполучимо точки  $D$  і  $K$ . Вписаний кут  $DKA$  спирається на діаметр  $AD$ , тому  $DK \perp AK$ . Оскільки  $BK \perp ADK$ , то  $BK \perp DK$ . Отримали, що пряма  $DK$  перпендикулярна до двох прямих площини  $AA_1B$ , що перетинаються. Таким чином,  $DK \perp AA_1B$ , тому довжина відрізка  $DK$  — шукана відстань.

Пряма  $AK$  є проекцією прямої  $AB$  на площину основи циліндра. Отже, кут  $BAK$  — кут між прямою  $AB$  і площиною основи. За умовою  $\angle BAK = 60^\circ$ .

Із трикутника  $ABK$  ( $\angle BKA = 90^\circ$ ):  $AK = AB \cos 60^\circ = 8$  (см).

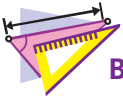
Із трикутника  $ADK$  ( $\angle AKD = 90^\circ$ ):

$$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ (см)}.$$

**Відповідь:** 6 см. ◀



1. Яке тіло називають циліндром?
2. Опишіть, що називають бічною поверхнею циліндра.
3. Що називають основами циліндра? віссю циліндра? висотою циліндра?
4. Яке тіло називають тілом обертання?
5. Яку пряму називають віссю обертання?
6. Що називають осьовим перерізом циліндра?
7. З яких фігур складається розгортка циліндра?
8. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні циліндра?
9. За якою формулою обчислюють площу повної поверхні циліндра?



### ВПРАВИ

- 5.1.° Висота циліндра дорівнює 6 см, а радіус основи — 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.
- 5.2.° Площа осьового перерізу циліндра дорівнює  $128 \text{ см}^2$ . Знайдіть висоту циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 4 см.
- 5.3.° Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи циліндра кут  $\alpha$ . Знайдіть:
- 1) висоту циліндра;
  - 2) площу основи циліндра.
- 5.4.° Площа основи циліндра дорівнює  $49\pi \text{ см}^2$ , а кут між діагоналлю осьового перерізу та твірною циліндра дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть висоту циліндра.
- 5.5.° Чому дорівнює площа бічної поверхні циліндра, радіус основи якого дорівнює 2 см, а висота — 9 см?
- 5.6.° Прямокутник зі сторонами 1 см і 3 см обертають навколо більшої сторони. Знайдіть:
- 1) діагональ осьового перерізу утвореного циліндра;
  - 2) площу повної поверхні цього циліндра.
- 5.7.° Квадрат зі стороною 8 см обертають навколо однієї з його сторін. Знайдіть:
- 1) площу осьового перерізу утвореного циліндра;
  - 2) площу повної поверхні цього циліндра.
- 5.8.° Точки  $O$  і  $O_1$  — центри нижньої та верхньої основ циліндра відповідно (рис. 5.12). Точка  $A$  — довільна точка кола, яке обмежує нижню основу циліндра. Відрізок  $O_1A$  дорівнює 6 см і утворює з площиною основи циліндра кут  $60^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
- 5.9.° Висота циліндра дорівнює 5 см, а діаметр основи — 24 см. Знайдіть відстань від центра однієї основи циліндра до точки кола другої основи.
- 5.10.° Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює  $d$  і утворює з однією зі сторін розгортки кут  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
- 5.11.° Квадрат, діагональ якого дорівнює  $4\pi$  см, є розгорткою бічної поверхні циліндра. Знайдіть площу основи цього циліндра.

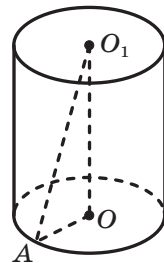


Рис. 5.12

- 5.12.° Як зміниться — збільшиться або зменшиться — та в скільки разів площа бічної поверхні циліндра, якщо:
- 1) радіус його основи збільшити в  $k$  разів;
  - 2) висоту циліндра зменшити в  $k$  разів;
  - 3) висоту циліндра збільшити в  $k$  разів, а радіус основи зменшити в  $k$  разів?
- Якою функцією є залежність площі бічної поверхні циліндра від:
- а) радіуса його основи;
  - б) висоти циліндра?
- 5.13.° Діаметр основи циліндра більший за його висоту, а кут між діагоналями осьового перерізу дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює  $S$ .
- 5.14.° Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо площа його бічної поверхні дорівнює  $S$ .
- 5.15.° У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом  $120^\circ$ , а із центра верхньої основи — під кутом  $60^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо довжина даної хорди дорівнює 6 см.
- 5.16.° У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом  $90^\circ$ , а із центра верхньої основи — під кутом  $60^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 8 см.
- 5.17.° У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом  $\alpha$ . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи з одним із кінців проведеної хорди, утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо відстань від центра нижньої основи до проведеної хорди дорівнює  $a$ .
- 5.18.° У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом  $\beta$ . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи й середину даної хорди, дорівнює  $m$  та утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
- 5.19.° Навколо якої зі сторін прямокутника, більшої чи меншої, треба його обертати, щоб отримати циліндр з більшою площею:
- 1) бічної поверхні;
  - 2) повної поверхні?
- 5.20.° Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює 10 см, а висота — 12 см, проведено переріз, що є квадратом. Знайдіть відстань від осі циліндра до площини перерізу.



**5.21.\*** Паралельно осі циліндра проведено переріз, що відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ). Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут  $\beta$ , а радіус основи дорівнює  $R$ . Знайдіть площу цього перерізу.

**5.22.\*** Паралельно осі циліндра проведено переріз, що віддалений від неї на  $\sqrt{3}$  см і відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює  $120^\circ$ . Знайдіть площу цього перерізу, якщо його діагональ дорівнює 10 см.

**5.23.\*** Точки  $O$  і  $O_1$  — центри відповідно нижньої та верхньої основ циліндра, точка  $A$  належить нижній основі циліндра (рис. 5.13). На відрізку  $OO_1$  позначено точку  $B$  так, що пряма  $AB$  перетинає бічну поверхню циліндра. Побудуйте точку перетину прямої  $AB$  з бічною поверхнею циліндра.

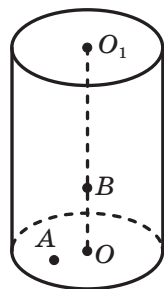


Рис. 5.13

**5.24.\*** Радіус основи циліндра дорівнює 9 см. Із середини відрізка  $OO_1$ , де точки  $O$  і  $O_1$  — центри відповідно нижньої та верхньої основ циліндра, проведено промінь, який перетинає площину нижньої основи в точці, віддаленій від центра цієї основи на 12 см. Цей промінь перетинає твірну циліндра в точці, віддаленій від площини нижньої основи на 2 см. Знайдіть висоту циліндра.

**5.25.\*** Висота циліндра дорівнює 20 см. Через середину твірної циліндра проведено пряму, яка перетинає відрізок, що сполучає центри основ, у точці, віддаленій на 6 см від площини нижньої основи, а саму цю площину — у точці, віддаленій на 15 см від центра нижньої основи. Знайдіть радіус основи циліндра.

**5.26.\*** Розгортка бічної поверхні циліндра є квадратом. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу циліндра.

**5.27.\*** Кут між діагоналлю розгортки бічної поверхні циліндра та стороною розгортки, що дорівнює довжині кола основи циліндра, дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть кут між діагоналлю осьового перерізу циліндра та площиною основи.

**5.28.\*\*** Кінці відрізка  $AB$ , що дорівнює 15 см, належать колам різних основ циліндра. Знайдіть відстань між прямою  $AB$  і віссю циліндра, якщо висота циліндра дорівнює 9 см, а радіус його основи — 8 см.

**5.29.\*\*** Точки  $O$  і  $O_1$  — відповідно центри нижньої та верхньої основ циліндра, точка  $A$  належить колу нижньої основи циліндра, а точка  $B$  — колу верхньої основи. Кут між прямими  $OA$  і  $O_1B$  дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть кут між прямими  $AB$  і  $OO_1$ , якщо діаметр основи циліндра дорівнює його висоті.

**5.30.\*\*** Прямокутник  $MM_1N_1N$  — переріз циліндра, паралельний його осі (рис. 5.14). Точки  $A$  і  $B$  лежать на основах циліндра по різні боки від даного перерізу. Побудуйте точку перетину прямої  $AB$  із площиною  $MM_1N_1N$ .

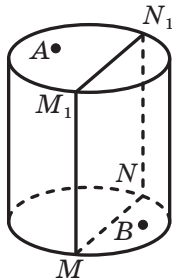


Рис. 5.14

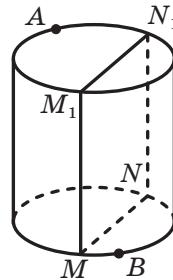


Рис. 5.15

**5.31.\*\*** Прямокутник  $MM_1N_1N$  — переріз циліндра, паралельний його осі. На колах основ циліндра по різні боки від даного перерізу позначено точки  $A$  і  $B$  (рис. 5.15). Побудуйте точку перетину прямої  $AB$  із площиною  $MM_1N_1N$ .

**5.32.\*\*** Площина, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ). Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює  $S$ .

**5.33.\*\*** Площина, паралельна осі циліндра, перетинає основу циліндра по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа утвореного перерізу дорівнює  $S$ .

**5.34.\*\*** Радіус основи циліндра дорівнює 13 см, а висота — 32 см. Прямокутник  $ABCD$  розміщений так, що його вершини  $A$  і  $D$  лежать на колі нижньої основи циліндра, а вершини  $B$  і  $C$  — на колі верхньої основи. Сторона  $AD$  у 4 рази менша від сторони  $AB$ . Знайдіть площу прямокутника  $ABCD$ .

**5.35.** Радіус основи циліндра дорівнює 8 см. Дві вершини квадрата зі стороною 12 см належать колу однієї основи циліндра, а дві — колу другої основи. Знайдіть висоту циліндра, якщо площа даного квадрата перетинає відрізок, який сполучає центри основ циліндра.



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 5.36.** Висота рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, дорівнює  $h$ , а кут між його рівними сторонами дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть радіус кола, вписаного в даний трикутник.
- 5.37.** Основи трапеції дорівнюють 6 см і 27 см, а одна з бічних сторін — 13 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в дану трапецію.
- 5.38.** Сторона основи правильної шестикутної призми дорівнює 6 см, а площа бічної поверхні —  $288 \text{ см}^2$ . Знайдіть більшу діагональ призми.

## 6. Комбінації циліндра та призми

**Означення.** Призму називають **вписаною в циліндр**, якщо її основи вписано в основи циліндра. При цьому циліндр називають **описаним навколо призми**.

Доведемо, що коли призму вписано в циліндр, то вона є прямою. Іншими словами, похилу призму вписати в циліндр неможливо. Для цього покажемо, що бічні ребра призми, вписаної в циліндр, є твірними циліндра.

Нехай відрізок  $AA_1$  — бічне ребро призми, а точки  $O$  і  $O_1$  — центри описаних кіл основ призми (рис. 6.1). При паралельному перенесенні на вектор  $\overline{AA_1}$  образом нижньої основи призми є верхня основа, а отже, образом точки  $O$  є точка  $O_1$ , тобто  $\overline{AA_1} = \overline{OO_1}$ . Пряма  $OO_1$  — вісь циліндра. Отже, відрізок  $AA_1$  перпендикулярний до основ циліндра. Оскільки точки  $A$  і  $A_1$  належать основам циліндра, то відрізок  $AA_1$  — твірна циліндра.

Таким чином, *вписати в циліндр можна таку пряму призму, основи якої є вписаними многокутниками.*

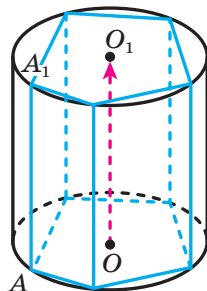


Рис. 6.1

Наприклад, правильну призму та пряму трикутну призму можна вписати в циліндр.

**Означення.** Призму називають **описаною навколо циліндра**, якщо її основи описано навколо основ циліндра. При цьому циліндр називають **вписаним у призму**.

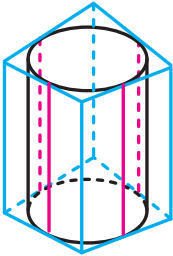


Рис. 6.2

Бічна грань призми, описаної навколо циліндра, проходить через твірну циліндра та інших спільних точок із циліндром не має (на рис. 6.2 ці твірні виділено блакитним кольором). У цьому разі говорять, що бічна грань призми **дотикається до циліндра**.

Доведіть самостійно, що коли призму описано навколо циліндра, то вона є прямою.

*Описати навколо циліндра можна таку пряму призму, основи якої є описаними многокутниками.*

Наприклад, правильну призму та пряму трикутну призму можна описати навколо циліндра.

**Задача.** У циліндр, радіус основи якого дорівнює 13 см, а висота — 17 см, вписано призму  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Основа призми, чотирикутник  $ABCD$ , є трапецією, у якій  $BC \parallel AD$  і  $BC = 10$  см,  $AD = 24$  см. Знайдіть площу чотирикутника  $AB_1 C_1 D$ .

**Розв'язання.** Чотирикутник, площу якого треба знайти, зображено на рисунку 6.3. Нехай точки  $O$  і  $O_1$  — центри основ циліндра. Проведемо через точку  $O$  висоту  $MN$  трапеції  $ABCD$  (рис. 6.4). Оскільки трапеція вписана в коло, то вона є рівнобічною. Тому пряма  $MN$  — вісь симетрії трапеції, а точки  $M$  і  $N$  — середини основ трапеції.

Проведемо радіуси  $OA$  і  $OB$  основи циліндра (рис. 6.4).

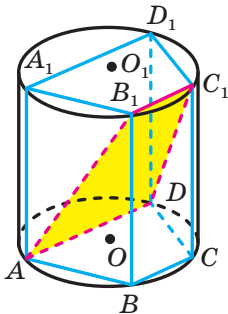


Рис. 6.3

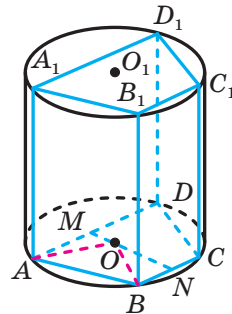


Рис. 6.4

Із прямокутних трикутників  $AOM$  і  $BON$  знайдемо відрізки  $OM$  і  $ON$ .

$$\text{Маємо: } OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{169 - 144} = 5 \text{ (см);}$$

$$ON = \sqrt{BO^2 - BN^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ (см).}$$

Тоді  $MN = 17$  см.

Нехай точка  $N_1$  — середина ребра  $B_1C_1$  (рис. 6.5).

Тоді  $NN_1 \parallel BB_1$ . Оскільки призма пряма, то відрізок  $NN_1$  є висотою призми, а отже, і висотою циліндра. За умовою  $NN_1 = 17$  см. Отримали, що в прямокутному трикутнику  $MNN_1$  катети є рівними. Отже,  $\angle NMN_1 = 45^\circ$ .

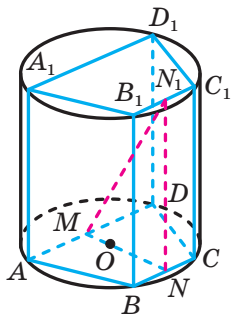


Рис. 6.5

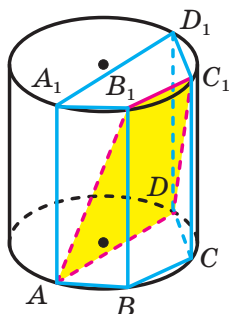


Рис. 6.6

Оскільки  $MN \perp AD$  і пряма  $MN$  — проекція прямої  $MN_1$  на площину основи призми, то  $MN_1 \perp AD$ . Отже, кут  $NMN_1$  — кут між площинами  $ABC$  і  $AB_1C_1$ .

Скориставшись теоремою про площу ортогональної проекції многокутника, можна записати:  $S_{AB_1C_1D} = \frac{S_{ABCD}}{\cos 45^\circ}$ .

$$\text{Маємо: } S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot MN = 289 \text{ см}^2.$$

$$\text{Тоді } S_{AB_1C_1D} = 289\sqrt{2} \text{ см}^2.$$

Здавалося б, розв'язування закінчено. Проте ми розглянули тільки той випадок, коли центри основ циліндра належать основам призми. Але центр описаного кола може й не належати трапеції. Цей випадок проілюстровано на рисунку 6.6. Закінчіть розв'язування самостійно.

**Відповідь:**  $289\sqrt{2}$  см<sup>2</sup> або  $221\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>. ◀



1. Яку призму називають вписаною в циліндр?
2. Чим для циліндра є бічні ребра призми, вписаної в циліндр?
3. Яку призму можна вписати в циліндр?
4. Яку призму називають описаною навколо циліндра?
5. У якому разі говорять, що бічна грань призми дотикається до циліндра?
6. Яку призму можна описати навколо циліндра?



### ВПРАВИ

- 6.1.<sup>o</sup> Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, основою якої є прямокутник?
- 6.2.<sup>o</sup> Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, основою якої є ромб, відмінний від квадрата?
- 6.3.<sup>o</sup> Визначте вид трикутника, який є основою призми, вписаної в циліндр, якщо вісь циліндра проходить поза призмою.
- 6.4.<sup>o</sup> Визначте вид трикутника, який є основою призми, вписаної в циліндр, якщо вісь циліндра проходить усередині призми.
- 6.5.<sup>o</sup> Чи можна вписати циліндр у пряму призму, основою якої є ромб?
- 6.6.<sup>o</sup> Чи можна вписати циліндр у пряму призму, основою якої є прямокутник, відмінний від квадрата?
- 6.7.<sup>o</sup> Основою прямої призми є чотирикутник  $ABCD$ , у якого  $\angle A = 36^\circ$ ,  $\angle B = 123^\circ$ ,  $\angle C = 144^\circ$ ,  $\angle D = 57^\circ$ . Чи можна описати циліндр навколо цієї призми?
- 6.8.<sup>o</sup> Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює меншій основі. Чи можна вписати циліндр у цю призму?
- 6.9.<sup>o</sup> Сума бічних сторін трапеції, яка є основою прямої призми, дорівнює 16 см, а середня лінія трапеції — 7 см. Чи можна вписати циліндр у цю призму?
- 6.10.\* Знайдіть площу повної поверхні циліндра, описаного навколо куба, ребро якого дорівнює  $a$ .
- 6.11.\* Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см і 8 см, а його висота дорівнює 12 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, описаного навколо даного паралелепіпеда.

- 6.12.\*** Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут  $30^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, вписаної в циліндр.
- 6.13.\*** Висота циліндра дорівнює 6 см, а діагональ його осьового перерізу утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, вписаної в циліндр.
- 6.14.\*** Сторона основи правильної шестикутної призми дорівнює  $a$ , а діагональ бічної грані утворює з бічним ребром призми кут  $\alpha$ . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо даної призми.
- 6.15.\*** Висота основи правильної трикутної призми дорівнює 9 см, а бічне ребро призми — 4 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо даної призми.
- 6.16.\*** Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 6 см, а висота — 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.
- 6.17.\*** Ребро куба дорівнює  $a$ . Знайдіть площу повної поверхні циліндра, вписаного в даний куб.
- 6.18.\*** У призму, основою якої є рівнобічна трапеція з основами 8 см і 18 см, вписано циліндр. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо висота призми дорівнює 10 см.
- 6.19.\*** У призму, основою якої є ромб зі стороною  $10\sqrt{2}$  см і кутом  $45^\circ$ , вписано циліндр. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо висота призми дорівнює 4 см.
- 6.20.\*** Знайдіть відношення площі бічної поверхні циліндра, описаного навколо правильної шестикутної призми, до площі бічної поверхні циліндра, вписаного в цю призму.
- 6.21.\*** Знайдіть відношення площі осьового перерізу циліндра, описаного навколо правильної трикутної призми, до площі осьового перерізу циліндра, вписаного в цю призму.
- 6.22.\*\*** Основою призми є прямокутний трикутник з катетом  $a$  і протилежним кутом  $\alpha$ . Діагональ бічної грані, яка містить гіпотенузу основи, нахилена до площини основи під кутом  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо даної призми.
- 6.23.\*\*** Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює  $S$ . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо даної призми.

- 6.24.\*\*** Основою призми є рівнобедрений прямокутний трикутник. Висота призми дорівнює  $h$ , а площа бічної поверхні —  $S$ . Знайдіть радіус основи циліндра, описаного навколо даної призми.
- 6.25.\*\*** Основа призми — рівнобедрений трикутник з кутом  $\alpha$  при основі. Діагональ грані, яка проходить через бічну сторону основи, дорівнює  $m$  і нахилена до площини основи під кутом  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.
- 6.26.\*\*** Основа призми — рівнобедрений трикутник з кутом  $\alpha$  між рівними сторонами. Діагональ грані, яка проходить через основу трикутника, дорівнює  $d$  і нахилена до площини основи під кутом  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.
- 6.27.\*\*** Площа бічної поверхні призми, основою якої є ромб з кутом  $\alpha$ , дорівнює  $S$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.
- 6.28.\*\*** Площа бічної поверхні правильної шестикутної призми дорівнює  $S$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.
- 6.29.\*\*** У правильну призму  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  вписано циліндр, який дотикається до бічних граней  $AA_1 B_1 B$  і  $BB_1 C_1 C$  по твірних  $MM_1$  і  $KK_1$  відповідно. Діагональ осьового перерізу цього циліндра дорівнює  $d$  і нахилена до площини основи під кутом  $\alpha$ . Знайдіть площу чотирикутника  $MM_1 K_1 K$ .
- 6.30.\*\*** У правильну призму  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  вписано циліндр, який дотикається до бічних граней  $AA_1 B_1 B$  і  $BB_1 C_1 C$  по твірних  $EE_1$  і  $FF_1$  відповідно. Чотирикутник  $EE_1 F_1 F$  є квадратом. Знайдіть площу цього квадрата, якщо радіус основи циліндра дорівнює  $R$ .



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 6.31.** Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців більшої бічної сторони на 1 см і на 2 см. Знайдіть площу трапеції.
- 6.32.** Відрізок  $CD$  — висота трикутника  $ABC$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 15$  см,  $CD = 12$  см. Знайдіть довжину кола, вписаного в трикутник  $B CD$ .
- 6.33.** Основою піраміди є ромб з діагоналями 30 см і 40 см. Висота піраміди, що дорівнює 16 см, проходить через точку перетину діагоналей ромба. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.



## 7. Конус

Розглянемо на площині  $\alpha$  коло із центром  $O$ . Проведемо відрізок  $OK$  перпендикулярно до площини  $\alpha$  (рис. 7.1). Сполучимо точку  $K$  з усіма точками кола. Усі проведені відрізки утворюють деяку фігуру  $F$ .

Коло із центром  $O$  обмежує круг. Тіло, обмежене цим кругом і фігурою  $F$ , називають **конусом**.

Фігуру  $F$  називають **бічною поверхнею конуса**, круг — **основною конуса**, відрізки, які утворюють фігуру  $F$ , — **твірними конуса**. На рисунку 7.1 відрізки  $KX$  і  $KY$  — твірні конуса. Усі твірні конуса є рівними й утворюють рівні кути з площиною основи.

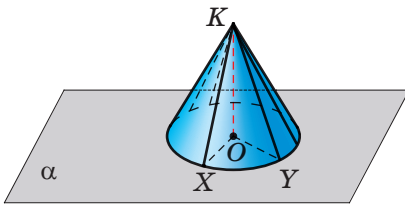


Рис. 7.1

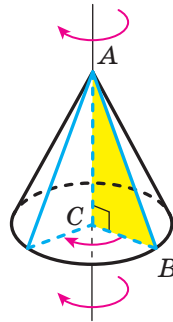


Рис. 7.2

Спільний кінець усіх твірних конуса називають **вершиною конуса**. На рисунку 7.1 точка  $K$  — вершина конуса.

Пряму, яка проходить через вершину конуса та центр його основи, називають **віссю конуса**. На рисунку 7.1 пряма  $KO$  — вісь конуса. Вісь конуса перпендикулярна до площини його основи.

На рисунку 7.1 кожний із відрізків  $OX$  і  $OY$  є радіусом основи конуса.

**Висотою конуса** називають відрізок, який сполучає вершину конуса із центром його основи. На рисунку 7.1 відрізок  $KO$  — висота конуса.

Конус можна розглядати як тіло, отримане в результаті обертання прямокутного трикутника навколо прямої, що містить його катет. На рисунку 7.2 зображено конус, отриманий обертанням прямокутного трикутника  $ABC$  навколо прямої  $AC$ . У результаті обертання гіпотенузи  $AB$  утворюється бічна поверхня конуса, а в результаті обертання катета  $CB$  — основа конуса.

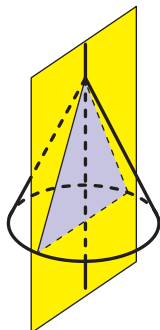


Рис. 7.3

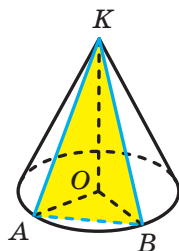


Рис. 7.4

Якщо конус перетнути площиною, що проходить через його вісь, то в перерізі утвориться рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого — твірні конуса, основа — діаметр основи конуса (рис. 7.3). Такий переріз називають **осьовим перерізом конуса**.

Площина, яка містить осьовий переріз конуса, є його площиною симетрії.

Через будь-які дві твірні  $KA$  і  $KB$  конуса можна провести площину (рис. 7.4). Розглянемо трикутник  $KAB$ , який є перерізом конуса цією площиною. Оскільки  $KA = KB$ , то перерізом конуса площиною, яка проходить через дві його твірні, є рівнобедрений трикутник.

Уявимо собі, що поверхню конуса розрізали по колу основи та деякій твірній (рис. 7.5), а потім розгорнули на площині. Отриману фігуру називають **розгорткою конуса на площину** або просто **розгорткою конуса** (рис. 7.6). Вона складається з круга, що дорівнює основі конуса, і кругового сектора, який називають **розгорткою бічної поверхні конуса**.

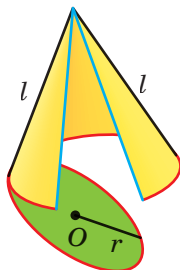


Рис. 7.5

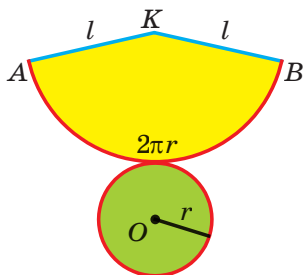


Рис. 7.6

Якщо твірна конуса дорівнює  $l$ , а радіус основи конуса —  $r$ , то радіус кругового сектора дорівнює  $l$ , а довжина дуги сектора —  $2\pi r$ . Нехай градусна міра кута  $AKB$  дорівнює  $\alpha$ . Тоді довжина дуги  $AB$  дорівнює  $\frac{\pi\alpha}{180}$ . Маємо:  $2\pi r = \frac{\pi\alpha}{180}$ . Звідси

$$\alpha = \frac{360r}{l}. \quad (*)$$

За площу  $S_6$  бічної поверхні конуса приймають площу розгортки його бічної поверхні. Скориставшись формулою площі сектора, маємо:

$$S_6 = \frac{\pi l^2 \alpha}{360}.$$

З урахуванням рівності (\*) отримуємо:

$$S_6 = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \frac{360r}{l} = \pi r l.$$

Отже, площу бічної поверхні конуса обчислюють за формулою

$$S_6 = \pi r l,$$

де  $r$  — радіус основи конуса,  $l$  — довжина твірної конуса.

**Площею повної поверхні конуса** називають суму площ бічної поверхні та основи конуса. Маємо:

$$S_{\text{п}} = S_6 + S_{\text{осн}},$$

де  $S_{\text{п}}$  — площа повної поверхні конуса,  $S_{\text{осн}}$  — площа основи конуса.

Площа основи конуса дорівнює  $\pi r^2$ . Тоді отримуємо формулу

$$S_{\text{п}} = \pi r l + \pi r^2$$

**Задача.** В основі конуса з вершиною  $K$  проведено хорду  $AB$  і діаметр  $AD$ . Знайдіть кут між твірною  $KD$  і хордою  $AB$ , якщо  $AB = KD$ .

*Розв'язання.* Проведемо діаметр  $BM$  основи конуса (рис. 7.7). Діагоналі чотирикутника  $ABDM$  точкою перетину діляться навпіл. Отже, цей чотирикутник — паралелограм. Звідси  $AB = MD$ . Оскільки  $AB \parallel MD$ , то шуканий кут дорівнює куту  $MDK$ .

Розглянемо трикутник  $MKD$ . Оскільки  $AB = KD$  і  $AB = MD$ , то трикутник  $MKD$  рівносторонній. Отже, шуканий кут дорівнює  $60^\circ$ .

*Відповідь:*  $60^\circ$ . ◀

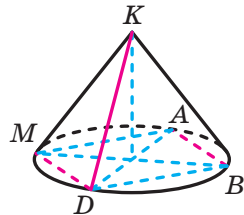
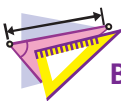


Рис. 7.7



1. Яке тіло називають конусом?
2. Опишіть, що називають бічною поверхнею конуса.
3. Що називають основою конуса? віссю конуса? висотою конуса?
4. Що називають осьовим перерізом конуса?
5. З яких фігур складається розгортка конуса?
6. Що приймають за площу бічної поверхні конуса?
7. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні конуса?
8. За якою формулою обчислюють площу повної поверхні конуса?



### ВПРАВИ

- 7.1.° Висота конуса дорівнює 4 см, а його твірна — 6 см. Знайдіть радіус основи конуса.
- 7.2.° Радіус основи конуса дорівнює 5 см, а його твірна — 13 см. Знайдіть висоту конуса.
- 7.3.° Знайдіть радіус основи та висоту конуса, якщо його твірна дорівнює 18 см, а осьовий переріз конуса є правильним трикутником.
- 7.4.° Радіус основи конуса дорівнює 2 см, а його осьовий переріз — рівнобедрений прямокутний трикутник. Знайдіть висоту конуса та його твірну.
- 7.5.° Радіус основи конуса дорівнює 9 см, а кут між твірною та площиною основи дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть площу:
  - 1) бічної поверхні конуса;
  - 2) осьового перерізу конуса.
- 7.6.° Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а висота — 8 см. Знайдіть площу:
  - 1) бічної поверхні конуса;
  - 2) повної поверхні конуса.
- 7.7.° Висота конуса дорівнює  $H$ , а кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу:
  - 1) осьового перерізу конуса;
  - 2) бічної поверхні конуса.
- 7.8.° Твірна конуса дорівнює  $a$ , а кут у його осьовому перерізі при вершині конуса дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу:
  - 1) осьового перерізу конуса;
  - 2) бічної поверхні конуса.

7.9.° Прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 8 см, а один із кутів дорівнює  $30^\circ$ , обертається навколо більшого катета. Знайдіть площу бічної поверхні утвореного конуса.

7.10.° Знайдіть площу осьового перерізу конуса, який утворився в результаті обертання прямокутного трикутника з гіпотенузою 17 см і катетом 15 см навколо другого катета.

7.11.° Радіус основи конуса дорівнює 15 см, а відстань від центра основи до твірної конуса — 12 см. Знайдіть твірну та висоту конуса.

7.12.° Висота конуса дорівнює  $4\sqrt{5}$  см, а відстань від центра основи до середини твірної конуса — 6 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

7.13.° Точка  $M$  — вершина конуса, точка  $O$  — центр його основи, точка  $A$  належить основі конуса, точка  $B$  належить відрізку  $MO$  (рис. 7.8). Побудуйте точку перетину прямої  $AB$  з бічною поверхнею конуса.

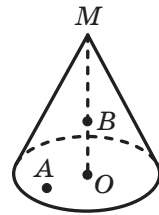


Рис. 7.8

7.14.° В основі конуса проведено хорду завдовжки  $a$ , що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ). Кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює  $\beta$ . Знайдіть висоту конуса.

7.15.° В основі конуса проведено хорду, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ). Кут між висотою конуса та його твірною дорівнює  $\beta$ , а довжина твірної дорівнює  $m$ . Знайдіть дану хорду.

7.16.° Площина, проведена через дві твірні конуса, перетинає основу по хорді, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює  $\beta$  ( $0^\circ < \beta < 180^\circ$ ). Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо висота конуса дорівнює  $H$ , а кут між площиною перерізу та площиною основи конуса дорівнює  $\alpha$ .

7.17.° Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює  $60^\circ$ , проведено площину. Ця площина перетинає основу конуса по хорді завдовжки 8 см, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює  $90^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

7.18.° Прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см обертається навколо прямої, яка містить його гіпотенузу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

7.19.° Рівнобедрений гострокутний трикутник з основою  $a$  і кутом  $\alpha$  при основі обертається навколо прямої, яка містить його бічну сторону. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

- 7.20.\*** Рівнобедрений трикутник з основою  $a$  і протилежним їй кутом  $\alpha$  обертається навколо прямої, яка містить його основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
- 7.21.\*** Прямокутна трапеція з основами 6 см і 9 см та висотою 4 см обертається навколо прямої, яка містить її більшу основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
- 7.22.\*** Прямокутна трапеція з основами 3 см і 4 см та гострим кутом  $45^\circ$  обертається навколо прямої, яка містить її меншу основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
- 7.23.\*** Ромб зі стороною 10 см і кутом  $60^\circ$  обертається навколо прямої, яка містить одну зі сторін ромба. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
- 7.24.\*** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см і 26 см, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Трапеція обертається навколо прямої, яка містить її більшу основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
- 7.25.\*** Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює 12 см, а градусна міра дуги —  $240^\circ$ . Знайдіть радіус основи конуса.
- 7.26.\*** Розгорткою бічної поверхні конуса є півкруг. Якою є величина кута при вершині осьового перерізу конуса?
- 7.27.\*** Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює 5 см. Знайдіть центральний кут цього сектора, якщо висота конуса дорівнює 4 см.
- 7.28.\*\*** Через дві твірні конуса проведено площину, яка утворює з площиною основи конуса кут  $\alpha$ . Відстань від центра основи конуса до цієї площини дорівнює  $a$ , а кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює  $\beta$ . Знайдіть радіус основи конуса.
- 7.29.\*\*** Відрізок  $MO$  — висота конуса, відрізки  $MA$  і  $MB$  — його твірні,  $MO = 4\sqrt{2}$  см. Відстань від точки  $O$  до прямої  $AB$  дорівнює 2 см. Знайдіть відстань від точки  $O$  до площини  $AMB$ .
- 7.30.\*\*** Через дві твірні конуса проведено переріз, кут між площиною перерізу та площиною основи конуса дорівнює  $\alpha$ . Кут між твірною та площиною основи дорівнює  $\beta$ , а радіус основи конуса дорівнює  $R$ . Знайдіть площу цього перерізу.
- 7.31.\*\*** Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює  $\alpha$ , проведено переріз. Кут між площиною цього перерізу та площиною основи конуса дорівнює  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює  $H$ .

- 7.32.\*\* Відрізки  $MA$ ,  $MB$  і  $MC$  — твірні конуса, причому  $MA \perp MB$ ,  $MB \perp MC$ ,  $MA \perp MC$ ,  $MA = 3$  см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
- 7.33.\*\* Відрізок  $MK$  — середня лінія трикутника  $ABC$ , паралельна стороні  $AC$ ,  $AB = 15$  см,  $AC = 14$  см,  $BC = 13$  см. Трикутник  $ABC$  обертається навколо прямої  $MK$ . Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
- 7.34.\*\* Відрізок  $EF$  — середня лінія трапеції  $ABCD$ , у якій  $BC \parallel AD$ ,  $AB = BC = CD = a$ ,  $AD = 2a$ . Дана трапеція обертається навколо прямої  $EF$ . Знайдіть площу поверхні тіла обертання.



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 7.35. Відрізки  $AD$  і  $CE$  — медіани трикутника  $ABC$ . Знайдіть сторону  $AC$ , якщо  $AB = 8\sqrt{5}$  см,  $BC = 6\sqrt{5}$  см і  $AD \perp CE$ .
- 7.36. Площа рівнобічної трапеції дорівнює  $32\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>, а гострий кут —  $60^\circ$ . Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо відомо, що в трапецію можна вписати коло.
- 7.37. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом  $30^\circ$  при основі та бічною стороною 12 см. Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть висоту піраміди.

## 8. Зрізаний конус

Перетнемо конус площиною, паралельною площині основи. Фігура, отримана в перерізі, — це образ основи конуса при гомотетії із центром у вершині конуса. Тому перерізом конуса площиною, паралельною основі (або перпендикулярною до осі конуса), є круг.

Січна площина, паралельна основі конуса, ділить конус на два тіла. Одне з них є конусом, друге називають **зрізаним конусом** (рис. 8.1).

Основу даного конуса, з якого утворено зрізаний конус, і круг, отриманий у перерізі, називають **основами зрізаного конуса**. Частину бічної поверхні даного конуса та частину його твірної, які містяться між основами зрізаного конуса,

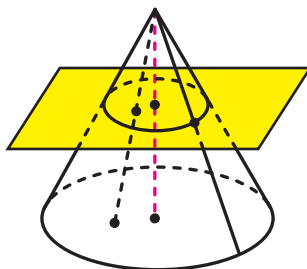


Рис. 8.1

називають відповідно **бічною поверхнею** та **твірною зрізаного конуса** (рис. 8.2). Пряму, яка проходить через центри  $O$  і  $O_1$  основ, називають **віссю зрізаного конуса**.

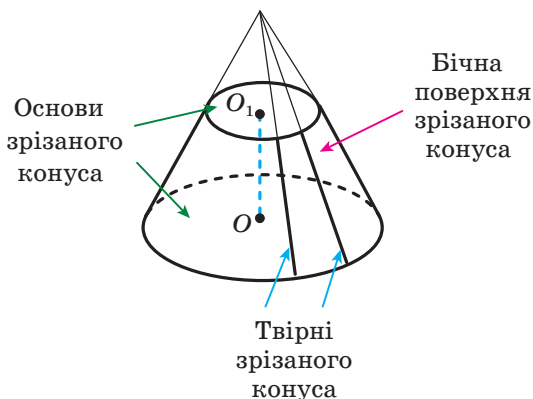


Рис. 8.2

**Висотою зрізаного конуса** називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки площини однієї основи до площини другої основи. На рисунку 8.2 відрізок  $OO_1$  є висотою зрізаного конуса.

Зрізаний конус можна розглядати як тіло, отримане в результаті обертання прямокутної трапеції навколо прямої, що містить меншу бічну сторону. На рисунку 8.3 зображено зрізаний конус, отриманий обертанням прямокутної трапеції  $ABCD$  навколо прямої  $AB$ . У результаті обертання бічної сторони  $CD$  трапеції утворюється бічна поверхня зрізаного конуса, а в результаті обертання основ  $AD$  і  $BC$  трапеції — основи зрізаного конуса.

Якщо перетнути зрізаний конус площиною, що проходить через його вісь, то в перерізі утворюється рівнобічна трапеція, бічні сторони якої — твірні зрізаного конуса, основи — діаметри основ зрізаного конуса (рис. 8.4). Такий переріз називають **осьовим перерізом зрізаного конуса**.

Площина, яка містить осьовий переріз зрізаного конуса, є його площиною симетрії.

Будь-які дві твірні  $AA_1$  і  $BB_1$  зрізаного конуса належать прямим  $AK$  і  $BK$ , що перетинаються (рис. 8.5). Отже, через прямі  $AA_1$  і  $BB_1$  можна провести площину. Розглянемо чотирикутник  $AA_1B_1B$ , який є перерізом зрізаного конуса цією площиною. Маємо:  $AA_1 = BB_1$  і  $A_1B_1 \parallel AB$ . Таким чином, перерізом зрізаного конуса площиною, яка проходить через дві його твірні, є рівнобічна трапеція.



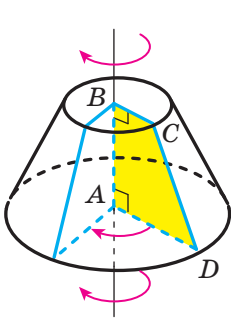


Рис. 8.3

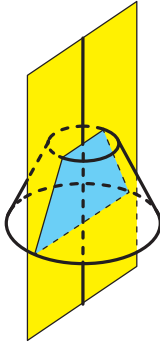


Рис. 8.4

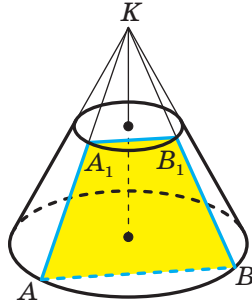


Рис. 8.5

Уявимо собі, що поверхню зрізаного конуса розрізали по колах основ і деякій твірній (рис. 8.6), а потім розгорнули на площині. Отриману фігуру називають **розгорткою зрізаного конуса на площину** або просто **розгорткою зрізаного конуса** (рис. 8.7). Вона складається з двох кіл, що дорівнюють основам зрізаного конуса, і частини кільця, утвореного двома концентричними колами. Цю частину кільця називають **розгорткою бічної поверхні зрізаного конуса**.

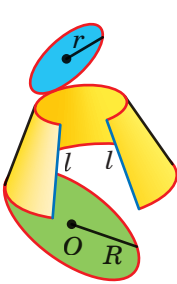


Рис. 8.6

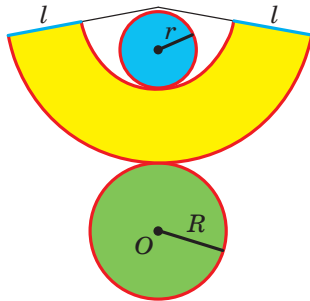


Рис. 8.7

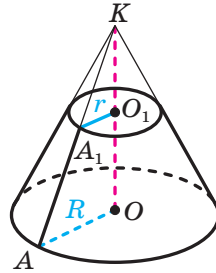


Рис. 8.8

За площу  $S_6$  бічної поверхні зрізаного конуса приймають площу розгортки його бічної поверхні.

На рисунку 8.8 зображено три тіла: конус із вершиною в точці  $K$ , твірною  $KA$  та основою із центром  $O$  і радіусом  $R$  («великий» конус); конус із вершиною в точці  $K$ , твірною  $KA_1$  та основою із центром  $O_1$  і радіусом  $r$  («малий» конус); зрізаний конус із твірною  $AA_1$  та основами із центрами  $O$  і  $O_1$ .

Зрозуміло, що площа  $S_6$  бічної поверхні зрізаного конуса дорівнює різниці площ бічних поверхонь «великого» і «малого» конусів. Маємо:

$$\begin{aligned} S_6 &= \pi R \cdot KA - \pi r \cdot KA_1 = \\ &= \pi R(KA_1 + AA_1) - \pi r KA_1 = \pi R \cdot AA_1 + \pi(R - r)KA_1. \end{aligned}$$

Оскільки прямокутні трикутники  $AOK$  і  $A_1O_1K$  мають спільний гострий кут  $AKO$ , то ці трикутники подібні. Звідси

$$\begin{aligned} \frac{KA}{KA_1} &= \frac{OA}{O_1A_1}, \text{ тобто } \frac{KA}{KA_1} = \frac{R}{r}. \text{ Маємо:} \\ \frac{KA}{KA_1} - 1 &= \frac{R}{r} - 1; \\ \frac{KA - KA_1}{KA_1} &= \frac{R - r}{r}; \\ \frac{AA_1}{KA_1} &= \frac{R - r}{r}; \\ KA_1 &= \frac{r \cdot AA_1}{R - r}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} S_6 &= \pi R \cdot AA_1 + \pi(R - r) \cdot \frac{r \cdot KA_1}{R - r} = \\ &= \pi R \cdot AA_1 + \pi r \cdot AA_1 = \pi(R + r) \cdot AA_1. \end{aligned}$$

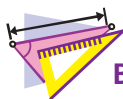
Отже, площу бічної поверхні зрізаного конуса обчислюють за формулою

$$S_6 = \pi(R + r)l,$$

де  $R$  і  $r$  — радіуси основ,  $l$  — довжина твірної зрізаного конуса.



1. Що називають бічною поверхнею зрізаного конуса? твірною зрізаного конуса? віссю зрізаного конуса? висотою зрізаного конуса?
2. Що називають осьовим перерізом зрізаного конуса?
3. З яких фігур складається розгортка зрізаного конуса?
4. Що приймають за площу бічної поверхні зрізаного конуса?
5. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні зрізаного конуса?



## ВПРАВИ

- 8.1.<sup>°</sup> Точка  $M$  — вершина конуса, точка  $O$  — центр його основи. Радіус основи конуса дорівнює 18 см. На відрізку  $MO$  позначено точку  $K$  так, що  $MK : KO = 4 : 5$ . Через точку  $K$  проведено площину, паралельну основі конуса. Знайдіть площу утвореного перерізу конуса.
- 8.2.<sup>°</sup> Площа перерізу конуса площиною, перпендикулярною до його висоти, дорівнює  $12\pi$  см<sup>2</sup>. У якому відношенні площина перерізу ділить висоту конуса, рахуючи від його вершини, якщо радіус основи дорівнює  $3\sqrt{3}$  см?
- 8.3.<sup>°</sup> Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 1 см і 2 см, а твірна — 5 см.
- 8.4.<sup>°</sup> Знайдіть площу повної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 4 см і 6 см, а твірна — 3 см.
- 8.5.<sup>°</sup> Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 8 см, а твірна — 13 см. Знайдіть площу осевого перерізу зрізаного конуса.
- 8.6.<sup>°</sup> Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см і 12 см, а висота — 15 см. Знайдіть твірну зрізаного конуса.
- 8.7.<sup>°</sup> У трапеції  $ABCD$  відомо, що  $BC \parallel AD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $\angle D = 45^\circ$ ,  $AD = 7$  см,  $CD = 2\sqrt{2}$  см. Трапеція обертається навколо прямої  $AB$ . Знайдіть площу бічної поверхні утвореного зрізаного конуса.
- 8.8.<sup>°</sup> Дано трапецію  $ABCD$  таку, що  $BC \parallel AD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AB = 6\sqrt{3}$  см,  $BC = 2$  см,  $\angle D = 60^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, отриманого в результаті обертання даної трапеції навколо прямої  $AB$ .
- 8.9.<sup>°</sup> Висоту конуса поділили на 4 рівних відрізки та через точки поділу провели площини, паралельні основі конуса. Знайдіть площу найбільшого з утворених перерізів конуса, якщо площа його основи дорівнює  $S$ .
- 8.10.<sup>°</sup> Висота конуса дорівнює  $h$ . На якій відстані від вершини конуса треба провести площину, перпендикулярну до висоти конуса, щоб площа утвореного перерізу конуса була в 3 рази меншою від площі його основи?

- 8.11.\*** Площі основ зрізаного конуса дорівнюють  $4\text{ см}^2$  і  $16\text{ см}^2$ . Через середину висоти зрізаного конуса проведено площину, паралельну його основам. Знайдіть площу утвореного перерізу зрізаного конуса.
- 8.12.\*** Точка  $O$  — центр більшої основи зрізаного конуса, точка  $O_1$  — центр його меншої основи, точка  $O_2$  — середина відрізка  $OO_1$ . Площа більшої основи дорівнює  $4\pi\text{ см}^2$ , а меншої —  $\pi\text{ см}^2$ . Через точку  $O_2$  проведено площину, перпендикулярну до прямої  $OO_1$ . Знайдіть відношення площі бічної поверхні зрізаного конуса з висотою  $O_1O_2$  до площі бічної поверхні зрізаного конуса з висотою  $O_2O$ .
- 8.13.\*** Радіус більшої основи зрізаного конуса дорівнює  $R$ , радіус меншої основи —  $r$ , а кут між твірною та площиною більшої основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса.
- 8.14.\*** Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють  $5\text{ см}$  і  $15\text{ см}$ , а діагональ осьового перерізу —  $4\sqrt{61}\text{ см}$ . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
- 8.15.\*\*** У зрізаному конусі проведено осьовий переріз  $CC_1D_1D$  і по різні боки від нього на основах конуса позначено точки  $A$  і  $B$  (рис. 8.9). Побудуйте точку перетину прямої  $AB$  із площиною  $CC_1D_1$ .

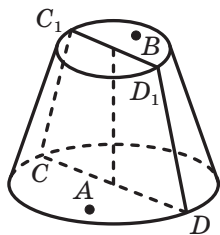


Рис. 8.9

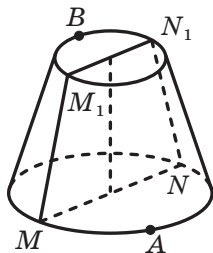


Рис. 8.10

- 8.16.\*\*** У зрізаному конусі проведено осьовий переріз  $MM_1N_1N$  і по різні боки від нього на колах основ позначено точки  $A$  і  $B$  (рис. 8.10). Побудуйте точку перетину прямої  $AB$  із площиною  $MM_1N_1$ .
- 8.17.\*\*** Висота зрізаного конуса дорівнює  $6\text{ см}$ , а кут між його твірною та площиною більшої основи становить  $60^\circ$ . Діагоналі осьового перерізу зрізаного конуса перпендикулярні. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

- 8.18.\*\*** Твірна зрізаного конуса дорівнює  $m$  і утворює з площиною більшої основи кут  $\alpha$ , а діагональ осьового перерізу перпендикулярна до твірної. Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса.
- 8.19.\*\*** Кут між твірною зрізаного конуса та площиною більшої основи дорівнює  $\alpha$ , а кут між діагоналлю осьового перерізу та цією площиною дорівнює  $\beta$ . Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса, якщо його висота дорівнює  $h$ .
- 8.20.\*\*** Через дві твірні зрізаного конуса, кут між якими дорівнює  $90^\circ$ , проведено площину, що перетинає більшу основу по хорді завдовжки  $a$ , а меншу — по хорді завдовжки  $b$  і відтинає від кола кожної основи дугу, градусна міра якої  $120^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
- 8.21.\*\*** Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють  $R$  і  $r$ ,  $R > r$ . Через дві твірні проведено площину, яка перетинає основи зрізаного конуса по хордах, що стягують дуги  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ), і яка утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Знайдіть площу утвореного перерізу зрізаного конуса.
- 8.22.\*\*** Ромб зі стороною  $a$  і гострим кутом  $\alpha$  обертається навколо прямої, що проходить через вершину гострого кута ромба перпендикулярно до його сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
- 8.23.\*\*** Рівнобедрений гострокутний трикутник з основою  $a$  і протилежним їй кутом  $\alpha$  обертається навколо прямої, що проходить через вершину даного кута перпендикулярно до бічної сторони трикутника. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
- 8.24.\*\*** Площа рівнобедреного трикутника дорівнює  $S$ , а кут між його бічними сторонами дорівнює  $\alpha$ . Трикутник обертається навколо прямої, що проходить через вершину кута при його основі перпендикулярно до основи. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

**ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

- 8.25.** Знайдіть площу круга, вписаного в трикутник зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см.
- 8.26.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини його меншого кута.

8.27. Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з бічною стороною 8 см і кутом  $120^\circ$ . Кут між діагоналями рівних бічних граней, проведеними з однієї вершини верхньої основи, дорівнює  $90^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

## 9. Комбінації конуса та піраміди

**Означення.** Піраміду називають **вписаною в конус**, якщо її основу вписано в основу конуса, а вершина збігається з вершиною конуса. При цьому конус називають **описаним навколо піраміди**.

Ребра піраміди, вписаної в конус, є твірними конуса, а висоти піраміди й конуса збігаються (рис. 9.1).

Піраміду можна вписати в конус, якщо навколо основи цієї піраміди можна описати коло, а вершина цієї піраміди проектується в центр описаного кола основи.

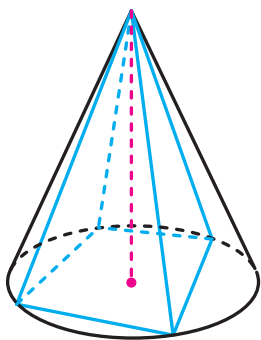


Рис. 9.1

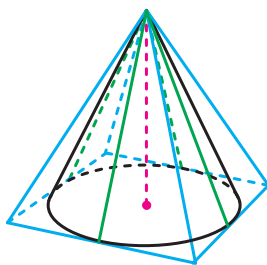


Рис. 9.2

**Означення.** Піраміду називають **описаною навколо конуса**, якщо її основу описано навколо основи конуса, а вершина збігається з вершиною конуса. При цьому конус називають **вписаним у піраміду**.

Бічна грань піраміди, описаної навколо конуса, проходить через твірну конуса й інших спільних точок з конусом не має (на рис. 9.2 ці твірні виділено блакитним кольором). У такому разі говорять, що бічна грань піраміди **дотикається до конуса**.

Висота піраміди, описаної навколо конуса, і висота конуса збігаються.

Піраміду можна описати навколо конуса, якщо в основу цієї піраміди можна вписати коло, а вершина цієї піраміди проектується в центр вписаного кола основи.

На рисунку 9.3 зображено піраміду, вписану в конус, яку перетнули площиною, паралельною основі. У результаті утворилися дві комбінації тіл: піраміда, вписана в конус, і **зрізана піраміда, вписана в зрізаний конус**. При цьому зрізаний конус називають **описаним навколо зрізаної піраміди**.

Основи зрізаної піраміди, вписаної в зрізаний конус, є багатокутниками, вписаними в основи зрізаного конуса. Бічні ребра зрізаної піраміди є твірними зрізаного конуса.

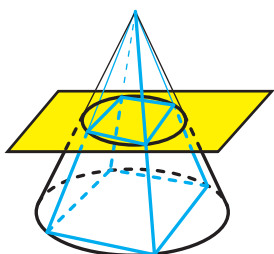


Рис. 9.3

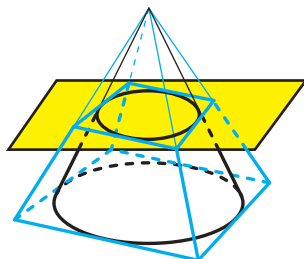


Рис. 9.4

На рисунку 9.4 зображено піраміду, описану навколо конуса, яку перетнули площиною, паралельною основі. У результаті утворилися дві комбінації тіл: піраміда, описана навколо конуса, і **зрізана піраміда, описана навколо зрізаного конуса**. При цьому зрізаний конус називають **вписаним у зрізану піраміду**.

Основи зрізаної піраміди, описаної навколо зрізаного конуса, є багатокутниками, описаними навколо основ зрізаного конуса. Бічні грані цієї зрізаної піраміди проходять через твірні зрізаного конуса й інших спільних точок зі зрізаним конусом не мають.

**Задача.** Конус, радіус основи якого дорівнює 3 см, а твірна — 5 см, вписано в чотирикутну піраміду  $KABCD$ . Основою піраміди є рівнобічна трапеція  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ), бічна сторона якої дорівнює 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

**Розв'язання.** Вершина даної піраміди проектується в центр вписаного кола основи. Як ви знаєте, у такій піраміді двогранні кути при ребрах основи є рівними. Проведемо радіус  $OM$  у точку

дотику ребра  $AD$  до основи конуса, сполучимо точки  $M$  і  $K$  (рис. 9.5). Оскільки  $OM \perp AD$ , то за теоремою про три перпендикуляри  $KM \perp AD$ . Отже, кут  $KMO$  — лінійний кут двогранного кута при ребрі  $AD$ . Нехай  $\angle KMO = \alpha$ . Маємо:  $\cos \alpha = \frac{OM}{KM} = \frac{3}{5}$ .

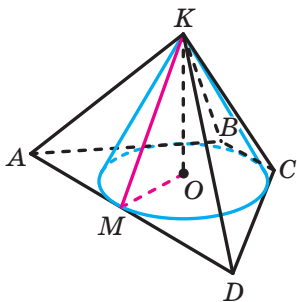


Рис. 9.5

Згідно з твердженням, доведеним у ключовій задачі п. 3, можна записати:

$$S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}.$$

Знайдемо площу основи піраміди, тобто площу трапеції  $ABCD$ .

Висота даної трапеції дорівнює діаметру вписаного кола, тобто 6 см. Оскільки в дану трапецію можна вписати коло, то  $AD + BC = AB + DC = 2AB = 20$  см. Маємо:

$$S_{\text{осн}} = \frac{AD + BC}{2} \cdot 2OM = 60 \text{ см}^2.$$

$$\text{Таким чином, } S_6 = \frac{60}{\cos \alpha} = 100 \text{ (см}^2\text{)}.$$

**Відповідь:** 100 см<sup>2</sup>. ◀



1. Яку піраміду називають вписаною в конус?
2. Чим для конуса є бічні ребра піраміди, вписаної в конус?
3. Яку піраміду можна вписати в конус?
4. Яку піраміду називають описаною навколо конуса?
5. У якому разі говорять, що бічна грань піраміди дотикається до конуса?
6. Яку піраміду можна описати навколо конуса?
7. Що називають зрізаною пірамідою, вписаною в зрізаний конус?
8. Чим для зрізаного конуса є бічні ребра зрізаної піраміди, вписаної в зрізаний конус?
9. Що називають зрізаною пірамідою, описаною навколо зрізаного конуса?



### ВПРАВИ

- 9.1.\* Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро — 8 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.



- 9.2.\*** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, а висота — 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.
- 9.3.\*** Основою піраміди є трикутник зі стороною  $a$  та протилежним їй кутом  $\alpha$ , а кут між кожним бічним ребром і площиною основи дорівнює  $\beta$ . Знайдіть висоту та твірну конуса, описаного навколо даної піраміди.
- 9.4.\*** Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см, а висота піраміди дорівнює 12 см. Вершина піраміди проєкується в середину гіпотенузи. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
- 9.5.\*** Основою піраміди є прямокутник зі сторонами  $4\sqrt{7}$  см і 12 см, а кожне бічне ребро піраміди дорівнює 17 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.
- 9.6.\*** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а висота — 6 см. Знайдіть твірну конуса, вписаного в дану піраміду.
- 9.7.\*** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 18 см, а апофема — 9 см. Знайдіть висоту конуса, вписаного в дану піраміду.
- 9.8.\*** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює  $a$ , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.
- 9.9.\*** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $a$ , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в дану піраміду.
- 9.10.\*** Навколо конуса описано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює  $a$ , а бічне ребро утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
- 9.11.\*** Навколо конуса описано правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює  $a$ , а бічне ребро утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
- 9.12.\*\*** Основа піраміди — прямокутник, менша зі сторін якого дорівнює  $a$ , а кут між діагоналями дорівнює  $\alpha$ . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.

- 9.13.\*\*** Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетом  $b$  і прилеглим до нього гострим кутом  $\alpha$ . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом  $\varphi$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
- 9.14.\*\*** Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою  $a$  і прилеглим до неї кутом  $\alpha$ . Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
- 9.15.\*\*** Основа піраміди — трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см, а висота піраміди дорівнює  $\frac{5\sqrt{87}}{8}$  см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
- 9.16.\*\*** Доведіть, що коли в піраміду  $MABCD$  можна вписати конус, то сума площ граней  $AMB$  і  $CMD$  дорівнює сумі площ граней  $AMD$  і  $BMC$ .
- 9.17.\*\*** Двогранний кут правильної трикутної піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ , а відстань від центра основи до бічної грані дорівнює  $m$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.
- 9.18.\*\*** Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює  $\beta$ , а відстань від центра основи до бічної грані дорівнює  $d$ . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в дану піраміду.
- 9.19.\*\*** Навколо конуса описано піраміду, основою якої є ромб зі стороною  $a$  і кутом  $\alpha$ , а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $\beta$ . Знайдіть площу осьового перерізу даного конуса.
- 9.20.\*\*** Навколо конуса описано піраміду, основою якої є рівнобедрений трикутник з бічною стороною  $a$  і кутом  $\alpha$  при основі. Усі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні даного конуса.
- 9.21.\*\*** Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Усі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $60^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.
- 9.22.\*\*** Навколо конуса описано піраміду, основою якої є трикутник зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см, а висота піраміди дорівнює  $4\sqrt{2}$  см. Знайдіть площу бічної поверхні даного конуса.

- 9.23.\*\* У зрізаний конус вписано правильну зрізану трикутну піраміду. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 6 см і 18 см, а висота — 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
- 9.24.\*\* Навколо правильної зрізаної чотирикутної піраміди описано зрізаний конус. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, якщо сторони основ зрізаної піраміди дорівнюють 8 см і 12 см, а її висота —  $2\sqrt{7}$  см.
- 9.25.\*\* У правильну зрізану чотирикутну піраміду вписано зрізаний конус, радіуси основ якого дорівнюють 5 см і 7 см, а кут між твірною та площиною більшої основи дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
- 9.26.\*\* Навколо зрізаного конуса описано правильну зрізану трикутну піраміду, сторони основ якої дорівнюють 18 см і 24 см, а бічне ребро — 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 9.27. На стороні  $BC$  прямокутника  $ABCD$  позначили точку  $M$  так, що  $AM = 13$  см. Знайдіть площу чотирикутника  $AMCD$ , якщо  $AB = 12$  см,  $BD = 20$  см.
- 9.28. Перпендикуляр, опущений з точки кола на діаметр, ділить його на два відрізки, один з яких на 27 см більший за другий. Знайдіть довжину даного кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 18 см.
- 9.29. Дано точки  $A(-6; 5; 2)$ ,  $B(2; 3; 4)$  і  $M(4; -1; 2)$ . Знайдіть відстань від точки  $M$  до середини відрізка  $AB$ .

## 10. Куля. Взаємне розміщення сфери та площини

Із курсу математики 6 класу ви знаєте, що сфера обмежує тіло, яке називають кулею.

**Означення.** **Кулею** називають геометричне місце точок простору, відстані від яких до заданої точки не більші за дане додатне число.

Задану точку називають **центром кулі**. Сферу, яка обмежує кулю, називають **поверхнею кулі**. **Радіусом кулі** називають радіус її поверхні.

**Діаметр кулі** — це діаметр поверхні кулі.

Якщо  $X$  — довільна точка кулі радіуса  $r$  із центром  $O$ , то  $OX \leq r$ .

У курсі планіметрії ви досліджували взаємне розміщення кола та прямої і з'ясували, що воно залежить від двох параметрів: радіуса кола та відстані від центра кола до прямої. Просторовим аналогом цієї задачі є дослідження взаємного розміщення сфери та площини.

Нехай радіус даної сфери дорівнює  $r$ , а відстань від центра  $O$  сфери до даної площини  $\alpha$  дорівнює  $d$ .

І випадок. Нехай  $d > r$ . У цьому випадку сфера та площина не мають спільних точок (рис. 10.1).

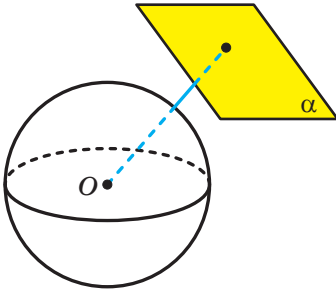


Рис. 10.1

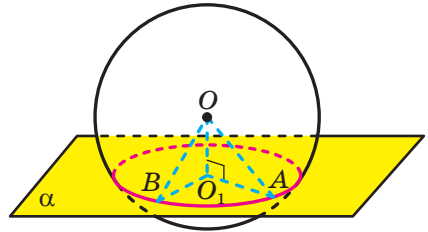


Рис. 10.2

II випадок. Нехай  $d < r$ . Доведемо, що в цьому випадку переріз сфери та площини є коло.

Розглянемо випадок, коли січна площина не проходить через центр сфери, тобто  $d \neq 0$ . Із центра  $O$  сфери опустимо перпендикуляр  $OO_1$  на площину  $\alpha$ . Нехай  $A$  — довільна спільна точка сфери та площини  $\alpha$  (рис. 10.2). Із прямокутного трикутника  $OO_1A$ , у якому  $OO_1 = d$ ,  $OA = r$ , отримуємо:  $O_1A = \sqrt{r^2 - d^2}$ . Отже, усі спільні точки сфери та площини  $\alpha$  належать колу радіуса  $\sqrt{r^2 - d^2}$  із центром  $O_1$ . Залишилося показати, що будь-яка точка цього кола є спільною точкою сфери та площини  $\alpha$ .

Нехай  $B$  — довільна точка цього кола. Тоді  $O_1B = \sqrt{r^2 - d^2}$ . Оскільки точка  $B$  належить площині  $\alpha$ , то з прямокутного трикутника  $OO_1B$  отримуємо:  $OB = \sqrt{O_1B^2 + OO_1^2}$ , тобто

$$OB = \sqrt{(\sqrt{r^2 - d^2})^2 + d^2} = \sqrt{r^2} = r.$$

Отже, точка  $B$  належить сфері.

Нехай січна площина проходить через центр сфери, тобто  $d = 0$ . Тоді в перерізі отримаємо фігуру, що складається з тих і тільки тих точок площини  $\alpha$ , які віддалені від точки  $O$  на відстань  $r$ . Такою фігурою є коло радіуса  $r$  із центром  $O$ . Це коло називають **великим колом сфери** (рис. 10.3).

Отже, якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса, то перерізом сфери площиною є коло.

Спираючись на це твердження, можна зробити такий висновок: якщо відстань від центра кулі до площини менша від радіуса кулі, то перерізом кулі площиною є круг.

Якщо площина проходить через центр кулі, то круг, утворений у перерізі, називають **великим кругом кулі**.

Площина, яка проходить через центр кулі, є її площиною симетрії. Центр кулі є її центром симетрії.

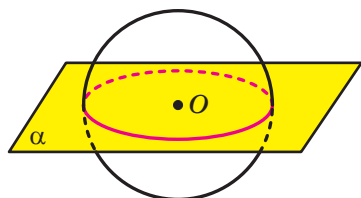


Рис. 10.3

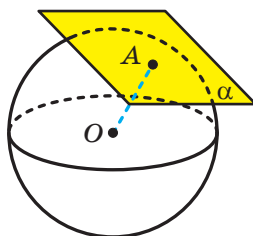


Рис. 10.4

III випадок. Нехай  $d = r$ . У цьому випадку сфера та площина мають тільки одну спільну точку (рис. 10.4).

**Означення.** Площину, яка має зі сферою тільки одну спільну точку, називають **дотичною площиною до сфери**.

Цю спільну точку називають **точкою дотику**. На рисунку 10.4 точка  $A$  — точка дотику.

Якщо фігура належить дотичній площині та має зі сферою (з поверхнею кулі) спільну точку, то говорять, що ця фігура **дотикається до сфери**. Якщо такою фігурою є пряма, то говорять, що така пряма є **дотичною до сфери**. Наприклад, прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  на рисунку 10.5 є дотичними до сфери. Вони дотикаються до сфери в точці  $A$ .

Якщо фігура дотикається до сфери, то також говорять, що фігура дотикається

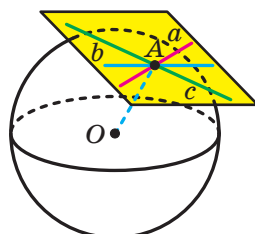


Рис. 10.5

до кулі, обмеженої цією сферою. Наприклад, можна сказати, що на рисунку 10.4 зображено площину  $\alpha$ , яка дотикається до кулі.

**Теорема 10.1.** *Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.*

*Доведення.* Нехай площина  $\alpha$  дотикається до сфери із центром  $O$  в точці  $A$ . Доведемо, що  $OA \perp \alpha$ .

Припустимо, що відрізок  $OA$  є похилою до площини  $\alpha$ . Тоді відстань від точки  $O$  до площини  $\alpha$  менша від радіуса. Отже, сфера та площина  $\alpha$  перетинаються по колу, тобто мають більше ніж одну спільну точку. А це суперечить тому, що площина  $\alpha$  дотикається до сфери. Таким чином, наше припущення є хибним, і радіус  $OA$  не є похилою до площини  $\alpha$ , тобто  $OA \perp \alpha$ . ◀

**Наслідок.** *Пряма, дотична до сфери, перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.*

Розглянемо сферу із центром  $O$ , яка дотикається до граней двогранного кута в точках  $A$  і  $B$  (рис. 10.6). Тоді за теоремою 10.1  $OA \perp \alpha$  і  $OB \perp \beta$ . Оскільки  $OA = OB$ , то точка  $O$  рівновіддалена від граней двогранного кута. Таким чином, точка  $O$  належить бісектору даного двогранного кута.

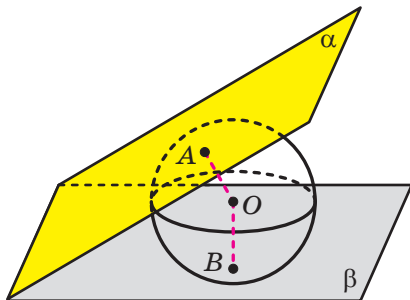


Рис. 10.6

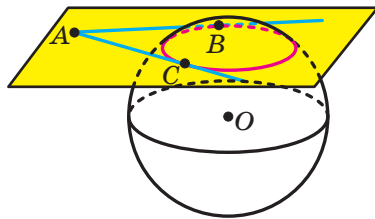


Рис. 10.7

Отже, якщо сфера дотикається до граней двогранного кута, то центр сфери належить бісектору двогранного кута.

**Задача.** Доведіть, що коли через дану точку до сфери проведено дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, є рівними.

*Розв'язання.* Нехай прямі  $AB$  і  $AC$  — довільні дотичні, проведені до сфери,  $B$  і  $C$  — точки дотику (рис. 10.7). Доведемо, що  $AB = AC$ .

Розглянемо площину  $ABC$ . Вона має зі сферою щонайменше дві спільні точки. Отже, площина  $ABC$  перетинає сферу по колу. Прямі  $AB$  і  $AC$  лежать в одній площині з колом та мають із ним тільки по одній спільній точці, тобто вони є дотичними до нього. Звідси  $AB = AC$ . ◀






1. Що називають кулею?
2. Що називають радіусом кулі? діаметром кулі?
3. Опишіть усі можливі випадки взаємного розміщення сфери та площини.
4. Що є перерізом сфери площиною, якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери?
5. Що називають великим кругом кулі?
6. Яку площину називають дотичною площиною до сфери?
7. Яку властивість має радіус, проведений у точку дотику площини до сфери?
8. Яку пряму називають дотичною до сфери?



### ВПРАВИ

- 10.1.° Якою фігурою є геометричне місце точок простору, віддалених від даної точки на відстань, не більшу за 7 см?
- 10.2.° Радіус кулі дорівнює  $\sqrt{5}$  см. Чи належить кулі точка  $A$ , якщо вона віддалена від центра кулі: 1) на 2 см; 2) на 2,3 см?
- 10.3.° Радіус кулі дорівнює  $4\frac{2}{7}$  см. Чи належить кулі точка  $B$ , якщо вона віддалена від центра кулі: 1) на 5 см; 2) на  $\sqrt{15}$  см?
- 10.4.° Дано сферу радіуса 6 см і площину  $\alpha$ . Якою має бути відстань від центра сфери до площини  $\alpha$ , щоб:
  - 1) сфера та площина не мали спільних точок;
  - 2) сфера та площина мали одну спільну точку;
  - 3) перетином сфери та площини було коло;
  - 4) перетином сфери та площини було коло найбільш можливої довжини?
- 10.5.° Діаметр сфери дорівнює 20 см, а відстань від її центра до площини  $\alpha$  — 12 см. Чи мають дана сфера та площина  $\alpha$  спільні точки?

- 10.6.° 1) Яка географічна паралель є найбільшим колом земної кулі?  
2) Знайдіть довжину полярного кола Землі, прийнявши радіус Землі рівним 6400 км. Відповідь округліть до тисяч кілометрів.  
3) Обчисліть шлях, який проходить за добу внаслідок обертання Землі навколо її осі населений пункт, у якому ви живете.
- 10.7.° Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть площу її великого круга.
- 10.8.° Скільки площин, що дотикаються до сфери, можна провести через точку:  
1) яка належить цій сфері;  
2) яка розміщена поза сферою?
- 10.9.° Скільки прямих, що дотикаються до сфери, можна провести через точку:  
1) яка належить цій сфері;  
2) яка розміщена поза сферою?
-  10.10.° Доведіть, що коли площина  $\alpha$  перетинає сферу із центром  $O$  по колу із центром  $O_1$ , то  $OO_1 \perp \alpha$ .
- 10.11.° Сфера перетинається площиною, відстань від якої до центра сфери дорівнює 6 см. Довжина лінії перетину сфери з площиною дорівнює 16л см. Знайдіть радіус сфери.
- 10.12.° Перерізом кулі радіуса 13 см площиною є круг, площа якого дорівнює  $25\pi$  см<sup>2</sup>. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу.
- 10.13.° Через кінець діаметра кулі радіуса  $R$  проведено площину, яка утворює із цим діаметром кут  $\alpha$ ,  $\alpha \neq 90^\circ$ . Знайдіть площу утвореного перерізу кулі.
- 10.14.° Знайдіть довжину лінії перетину сфери з площиною, віддаленою від центра сфери на 2 см, якщо радіус сфери, проведений в одну з точок цієї лінії, утворює з даною площиною кут  $30^\circ$ .
-  10.15.° Доведіть, що перерізи сфери площинами, які рівновіддалені від її центра, мають рівні радіуси.
-  10.16.° Доведіть, що з двох перерізів сфери площинами більший радіус має переріз, площина якого віддалена на меншу відстань від центра сфери.
- 10.17.° Сфера, радіус якої дорівнює  $R$ , дотикається до граней двогранного кута, що дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть відстань від центра сфери до ребра двогранного кута.



- 10.18.°** Куля дотикається до граней двогранного кута, відстань від ребра якого до центра кулі дорівнює 8 см. Знайдіть площу великого круга кулі, якщо величина двогранного кута дорівнює  $120^\circ$ .
- 10.19.\*** Чи є у вас зауваження до таких міркувань: «Нехай точка  $O$  — центр сфери,  $A$  і  $B$  — довільні точки сфери. Через три точки  $A$ ,  $B$  і  $O$  проведемо площину, що перетинає сферу по колу, яке є великим колом сфери. Отже, через будь-які дві точки сфери можна провести її велике коло, і до того ж тільки одне?»
- 10.20.\*** Вершини прямокутника лежать на сфері радіуса 26 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його сторони дорівнюють 12 см і 16 см.
- 10.21.\*** На поверхні кулі позначено точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  такі, що  $AB = BC = 15$  см,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Знайдіть відстань від центра кулі до площини  $ABC$ , якщо радіус кулі дорівнює 17 см.
- 10.22.\*** Вершини трикутника зі сторонами 1 см,  $\sqrt{3}$  см і 2 см лежать на сфері. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань від її центра до площини цього трикутника дорівнює  $4\sqrt{3}$  см.
- 10.23.\*** Відстань між рівновеликими паралельними перерізами кулі, радіус якої 15 см, дорівнює 18 см. Знайдіть площу кожного із цих перерізів.
- 10.24.\*** На радіусі  $OA$  сфери із центром  $O$  позначено точки  $B$  і  $C$ , причому точка  $B$  лежить між точками  $O$  і  $C$ . Через кожну з точок  $B$  і  $C$  проведено площину, перпендикулярну до прямої  $OA$ . Кола, що утворилися внаслідок перетину сфери площинами, мають довжини  $24\pi$  см і  $18\pi$  см, а відстань між цими площинами дорівнює 3 см. Знайдіть радіус сфери.
- 10.25.\*** Яка фігура є геометричним місцем центрів сфер, які:
- 1) дотикаються до даної площини в даній точці;
  - 2) мають даний радіус і дотикаються до даної площини?
- 10.26.\*** Радіус сфери дорівнює 40 см. Точка  $A$ , яка належить площині, що дотикається до цієї сфери, віддалена від точки дотику на 9 см. Знайдіть відстань від точки  $A$  до найближчої до неї точки сфери.
- 10.27.\*** Через точку  $M$  сфери радіуса 112 см проведено дотичну площину. На цій площині позначено точку  $K$ , відстань від якої до найбільш віддаленої від неї точки сфери дорівнює 225 см. Знайдіть відстань між точками  $M$  і  $K$ .

- 10.28.\*** Дві кулі, радіуси яких дорівнюють 7 см і 9 см, мають спільний центр. Площина  $\alpha$  дотикається до меншої кулі. Знайдіть площу перерізу більшої кулі площиною  $\alpha$ .
- 10.29.\*** Складіть рівняння сфери, яка дотикається до кожної з координатних площин і проходить через точку  $M(10; -10; 8)$ .
- 10.30.\*** Складіть рівняння сфери радіуса 4, яка дотикається до кожної з координатних площин, якщо абсциса та ордината центра сфери — від’ємні числа, а апліката — додатне.
- 10.31.\*** Яку фігуру утворюють точки, координати яких задовольняють нерівність  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$ ?
- 10.32.\*** Яку фігуру утворюють точки, координати яких задовольняють нерівність  $x^2 + y^2 + z^2 > 6x - 4y$ ?
- 10.33.\*** Точки  $A, B, C, D, E$  і  $F$  належать сфері. Доведіть, що прямі, які перпендикулярні до площин  $ABC$  і  $DEF$  та проходять через центри описаних кіл трикутників  $ABC$  і  $DEF$ , перетинаються або збігаються.
- 10.34.\*** Через деяку точку до сфери проведено дотичні. Знайдіть геометричне місце точок дотику.
- 10.35.\*** Через точку  $A$  проведено дотичні до сфери. Відстань від точки  $A$  до кожної з точок дотику дорівнює 40 см, а до найближчої до неї точки сфери — 20 см. Знайдіть довжину лінії, яка є геометричним місцем точок дотику.
- 10.36.\*** Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 28 см і 39 см та дотикаються до даної сфери. Відстань від центра сфери до площини цього трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть радіус сфери.
- 10.37.\*** Сторони ромба дотикаються до сфери, діаметр якої дорівнює  $a$ . Знайдіть відстань від центра сфери до площини ромба, якщо його сторона дорівнює  $a$ , а гострий кут дорівнює  $\alpha$ .
- 10.38.\*\*** Перерізи кулі, площини яких перпендикулярні, мають спільну хорду завдовжки 12 см. Знайдіть радіус кулі, якщо площі даних перерізів дорівнюють  $64\pi$  см<sup>2</sup> і  $100\pi$  см<sup>2</sup>.
- 10.39.\*\*** Перерізи кулі, площини яких перпендикулярні, мають спільну хорду. Відстань від центра кулі до площини одного з даних перерізів дорівнює 4 см, а до площини другого — 5 см. Знайдіть довжину спільної хорди цих перерізів, якщо радіус кулі дорівнює  $5\sqrt{2}$  см.

10.40.\*\* Через точку  $A$  проведено дві прямі, які дотикаються до сфери із центром  $O$  в точках  $B$  і  $C$ . Площини  $AOB$  і  $AOC$  перпендикулярні,  $AO = 9$  см, радіус сфери дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між точками  $B$  і  $C$ .

10.41.\*\* Через точку  $M$  проведено дві прямі, які дотикаються до сфери із центром  $O$  в точках  $A$  і  $B$ . Двогранний кут із гранями  $AMO$  і  $BMO$  дорівнює  $120^\circ$ ,  $AB = 6$  см,  $AM = 4\sqrt{3}$  см. Знайдіть радіус сфери.

10.42.\* У кулі радіуса  $R$  проведено два рівних перерізи, які мають спільну хорду завдовжки  $a$ . Кут між площинами перерізів дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу кожного з даних перерізів.



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

10.43. Відрізок  $BD$  — висота рівнобедреного трикутника  $ABC$ , проведена до його основи. Точка  $M$  — середина відрізка  $BD$ . Пряма  $AM$  перетинає сторону  $BC$  у точці  $K$ . Знайдіть, у якому відношенні точка  $K$  ділить сторону  $BC$ , рахуючи від точки  $B$ .

10.44. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 32 см, а радіус вписаного кола — 12 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

10.45. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами  $2\sqrt{5}$  см і  $4\sqrt{5}$  см. Бічні ребра піраміди є рівними, а її висота дорівнює  $3\sqrt{19}$  см. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через діагональ основи паралельно бічному ребру.

## 11. Многогранники, вписані у сферу

**Означення.** Многогранник називають **вписаним у сферу**, якщо всі його вершини належать сфері. При цьому сферу називають **описаною навколо многогранника**.

З означення випливає, що коли многогранник вписаний у сферу, то центр сфери рівновіддалений від усіх його вершин. Є правильним і обернене твердження: *якщо для даного многогранника існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин, то навколо цього многогранника можна описати сферу.*

Наприклад, усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда є рівними, перетинаються в одній точці та цією точкою діляться навпіл. Отже, точка перетину діагоналей прямокутного паралелепіпеда рівновіддалена від усіх його вершин. Тому навколо цього многогранника можна описати сферу (рис. 11.1).

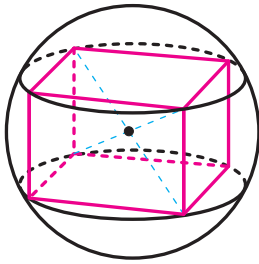


Рис. 11.1

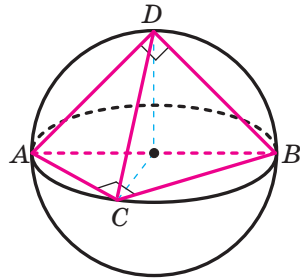


Рис. 11.2

На рисунку 11.2 зображено тетраедр  $DABC$ , у якому  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ . Оскільки середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин, то середина ребра  $AB$  є точкою, рівновіддаленою від усіх вершин тетраедра  $DABC$ , тобто є центром сфери, описаної навколо даного тетраедра.

Якщо многогранник є вписаним у сферу, то також говорять, що многогранник є вписаним у кулю, обмежену цією сферою. Наприклад, можна сказати, що на рисунках 11.1 і 11.2 зображено відповідно прямокутний паралелепіпед і тетраедр, вписані в кулю, або кулю, описану навколо кожного з указаних многогранників.

Якщо многогранник є вписаним у сферу, то площини його граней перетинають сферу по колах. Отже, *кожна грань многогранника, вписаного у сферу, є многокутником, вписаним у коло.*

Отже, якщо навколо якоїсь грані многогранника не можна описати коло, то навколо цього многогранника не можна описати сферу. Наприклад, навколо паралелограма, відмінного від прямокутника, описати коло не можна. Отже, не можна описати сферу навколо похилої призми.

**Задача 1.** Доведіть, що коли навколо основи прямої призми можна описати коло, то таку призму можна вписати у сферу, а центр сфери, описаної навколо призми, є серединою відрізка, який сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми.

*Розв'язання.* Ви знаєте, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від вершин даного многокутника, вписаного в коло,

є пряма (рис. 11.3), яка перпендикулярна до площини многокутника та проходить через центр цього кола. Отже, якщо точка, рівновіддалена від усіх вершин розглядуваної призми, існує, то вона лежить на прямій  $O_1O_2$ , де  $O_1$  і  $O_2$  — центри описаних кіл основ призми (рис. 11.4). Нескладно показати (зробіть це самостійно), що середина  $O$  відрізка  $O_1O_2$  — шукана точка, тобто точка  $O$  — центр сфери, описаної навколо прямої призми. ◀

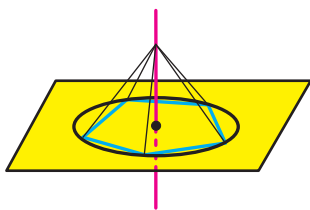


Рис. 11.3

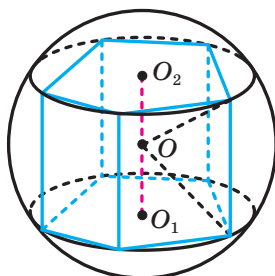


Рис. 11.4

Зі сказаного випливає, що *навколо правильної призми можна описати сферу*.

**Задача 2.** Доведіть, що коли навколо основи піраміди можна описати коло, то таку піраміду можна вписати у сферу.

*Розв'язання.* Із курсу геометрії 10 класу ви знаєте, що коли існує точка, рівновіддалена від усіх вершин основи піраміди, то ця точка належить прямій  $a$  (рис. 11.5), яка перпендикулярна до основи піраміди та проходить через центр  $O_1$  описаного кола основи.

Геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є площина, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину. Розглянемо площину  $\alpha$ , яка перпендикулярна до бічного ребра  $SA$  та проходить через його середину. Очевидно, що ця площина не паралельна прямій  $a$  та не містить її. Нехай  $a \cap \alpha = O$ . Оскільки точка  $O$  рівновіддалена від усіх вершин основи та  $OS = OA$ , то точка  $O$  рівновіддалена від усіх вершин піраміди, а отже, вона є центром описаної сфери розглядуваної піраміди. ◀

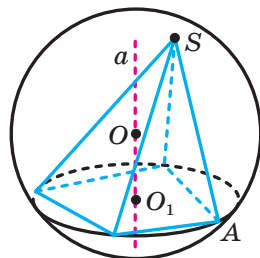


Рис. 11.5

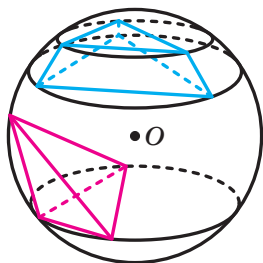


Рис. 11.6

Із доведеного випливає, що *навколо будь-якого тетраедра можна описати сферу*.

Також *сферу можна описати навколо правильної піраміди*. Центр описаної сфери належить *прямій, яка містить висоту правильної піраміди*.

Центр кола, описаного навколо многокутника, може належати многокутнику, зокрема лежати на стороні, а може й не належати многокутнику. Аналогічна ситуація виникає і в просторі: центр сфери, описаної навколо многогранника, може йому належати (рис. 11.5), зокрема лежати на грані (рис. 11.2), і може знаходитися поза многогранником (рис. 11.6).

**Задача 3.** У трикутній піраміді кожне бічне ребро дорівнює  $b$ , а висота дорівнює  $h$ . Знайдіть радіус сфери, описаної навколо піраміди.

*Розв'язання.* Нехай  $DABC$  — дана трикутна піраміда, точка  $O_1$  — центр основи  $ABC$ . За умовою  $DB = b$ ,  $DO_1 = h$ .

Існують три випадки (рис. 11.7): центр сфери, описаної навколо піраміди, може або належати внутрішній області піраміди, або належати її грані, або не належати піраміді.

Зрозуміло, що в усіх трьох випадках центр  $O$  сфери, описаної навколо даної піраміди, належить прямій  $DO_1$  (рис. 11.7). Відрізки  $OD$  і  $OB$  — радіуси сфери.

Розглянемо випадок, коли центр  $O$  сфери лежить між точками  $D$  і  $O_1$  (рис. 11.7, а).

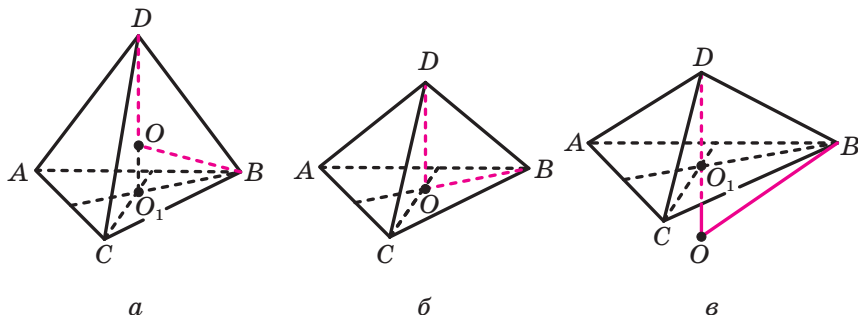


Рис. 11.7

Із прямокутного трикутника  $DO_1B$  отримуємо:  $O_1B^2 = DB^2 - DO_1^2$ .  
Звідси  $O_1B^2 = b^2 - h^2$ .

Нехай радіус сфери дорівнює  $R$ . Тоді  $OO_1 = h - R$ . Із прямокутного трикутника  $OO_1B$  отримуємо:  $OB^2 = OO_1^2 + O_1B^2$ .

Маємо:  $R^2 = (h - R)^2 + b^2 - h^2$ .

Звідси  $R = \frac{b^2}{2h}$ .

Залишилося розглянути ще два випадки: центр  $O$  сфери збігається з точкою  $O_1$  (рис. 11.7, б); центр  $O$  сфери лежить поза пірамідою (рис. 11.7, в). Розглянувши ці випадки самостійно, ви зможете переконатися, що відповідь не зміниться:  $R = \frac{b^2}{2h}$ .

Наведемо ще одне розв'язання цієї задачі, у якому немає потреби розглядати три випадки розміщення центра описаної сфери.

Пряма  $DO_1$  проходить через центр сфери та перетинає її у двох точках: у точці  $D$  і в деякій точці  $D_1$  (рис. 11.8). Тоді відрізок  $DD_1$  — діаметр сфери. Площина  $DD_1B$ , проходячи через центр сфери, перетинає її по великому колу. Тоді трикутник  $DD_1B$  є вписаним у велике коло сфери з діаметром  $DD_1$ .

Отже,  $\angle DBD_1 = 90^\circ$ . Використовуючи метричні співвідношення в прямокутному трикутнику, можна записати:  $DB^2 = DO_1 \cdot DD_1$ .

Звідси  $b^2 = h \cdot 2R$ ;  $R = \frac{b^2}{2h}$ .

Відповідь:  $\frac{b^2}{2h}$ . ◀

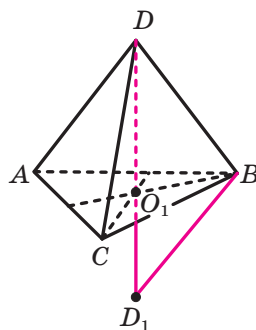


Рис. 11.8


1. Який многогранник називають вписаним у сферу?
2. У якому разі навколо многогранника можна описати сферу?
3. У якому разі призму можна вписати у сферу?
4. Де розміщений центр сфери, описаної навколо правильної призми?
5. У якому разі піраміду можна вписати у сферу?
6. Де розміщений центр сфери, описаної навколо правильної піраміди?



## ВПРАВИ

- 11.1.°** Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см, 6 см і 12 см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного паралелепіпеда.
- 11.2.°** У сферу радіуса  $R$  вписано куб. Знайдіть площу поверхні цього куба.
- 11.3.\*** Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює 2 см, а сторона основи — 12 см. Знайдіть радіус кулі, у яку вписано дану призму.
- 11.4.\*** У кулю радіуса  $R$  вписано правильну чотирикутну призму, сторона основи якої дорівнює  $a$ . Знайдіть площу бічної поверхні даної призми.
- 11.5.\*** Бічне ребро правильної шестикутної призми дорівнює 8 см, а діагональ бічної грані — 13 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної призми.
- 11.6.\*** Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Радіус кулі, описаної навколо даної призми, дорівнює 13 см. Знайдіть бічне ребро призми.
- 11.7.\*** Основою прямої призми є трикутник з кутом  $150^\circ$  і протилежною йому стороною, що дорівнює 15 см. Бічне ребро призми дорівнює 16 см. Знайдіть радіус сфери, у яку вписано дану призму.
- 11.8.\*** У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює 2 см, а висота — 4 см. Знайдіть радіус кулі.
- 11.9.\*** У кулю радіуса  $R$  вписано правильну чотирикутну піраміду, бічне ребро якої утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайдіть висоту піраміди.
- 11.10.\*** Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $\alpha$ , а сторона основи дорівнює  $a$ . Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даної піраміди.
- 11.11.\*** Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ , а сторона основи дорівнює  $a$ . Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даної піраміди.
- 11.12.\*** Точки  $A(1; 2; -3)$ ,  $B(5; 2; -3)$ ,  $C(1; 2; 0)$ ,  $D(1; 4; -3)$  є вершинами піраміди  $ABCD$ . Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даної піраміди.



- 11.13.\*** Точки  $A(-1; 3; -2)$ ,  $B(-3; 3; -2)$ ,  $C(-1; 4; -2)$ ,  $M(-1; 3; 2)$  є вершинами піраміди  $МАВС$ . Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даної піраміди.
- 11.14.\*\*** У кулю вписано правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут  $30^\circ$ . Знайдіть радіус кулі.
- 11.15.\*\*** Центр кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, ділить її висоту на відрізки завдовжки 6 см і 3 см. Знайдіть сторону основи піраміди.
- 11.16.\*\*** Двогранний кут правильної трикутної піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ , а радіус сфери, описаної навколо даної піраміди, дорівнює  $R$ . Знайдіть висоту піраміди.
- 11.17.\*\*** Знайдіть радіус кулі, описаної навколо правильного тетраедра, ребро якого дорівнює  $a$ .
-  **11.18.\*\*** Доведіть, що коли бічні ребра піраміди є рівними, то навколо неї можна описати сферу, причому центр цієї сфери належить прямій, яка містить висоту піраміди.
- 11.19.\*\*** У трикутній піраміді кожне бічне ребро дорівнює  $b$ , а висота дорівнює  $h$ . Скориставшись результатом задачі 3 п. 11, визначте, при якому співвідношенні між бічним ребром  $b$  і висотою  $h$  центр описаної навколо піраміди сфери належить піраміді, а при якому співвідношенні — не належить піраміді.
- 11.20.\*\*** Основою піраміди є прямокутник з кутом  $\alpha$  між діагоналями, а кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Радіус кулі, описаної навколо даної піраміди, дорівнює  $R$ . Знайдіть площу основи піраміди.
- 11.21.\*\*** Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 10 см і 24 см, а бічні ребра піраміди рівні. Знайдіть висоту піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо цієї піраміди, дорівнює 13 см.
- 11.22.\*\*** Основою піраміди є трикутник, один із кутів якого дорівнює  $60^\circ$ , а протилежна йому сторона —  $4\sqrt{3}$  см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від центра кулі, описаної навколо даної піраміди, до площини її основи.
- 11.23.\*\*** Радіус кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, дорівнює 25 см, а відстань від її центра до площини основи піраміди — 7 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

- 11.24.\*\* Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 4 см і 6 см, а одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи. Знайдіть висоту піраміди, якщо радіус описаної навколо неї кулі дорівнює 4 см.
- 11.25.\*\* Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 3 см. Одне з бічних ребер піраміди дорівнює 2 см і перпендикулярне до площини основи. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної піраміди.
- 11.26.\*\* Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною  $a$ . Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а третя грань утворює з основою кут  $\alpha$ . Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної піраміди.
- 11.27.\*\* Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють  $5\sqrt{3}$  см і  $12\sqrt{3}$  см, а її висота — 17 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної зрізаної піраміди.
- 11.28.\*\* Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 2 см і 14 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут  $45^\circ$ . Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної зрізаної піраміди.
- 11.29.\* Бічні ребра трикутної піраміди дорівнюють 4 см, 6 см і 12 см, а всі плоскі кути при вершині піраміди є прямими. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної піраміди.
- 11.30.\* Знайдіть радіус кулі, описаної навколо зрізаної піраміди  $ABCA_1B_1C_1$ , якщо  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 8$  см,  $BC = 16\sqrt{2}$  см,  $B_1C_1 = 12\sqrt{2}$  см, а висота піраміди дорівнює 3 см.

**ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

- 11.31. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 12 см, а менша бічна сторона —  $4\sqrt{3}$  см. Знайдіть площу трапеції, якщо один з її кутів дорівнює  $120^\circ$ .
- 11.32. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 20 см, а висота, проведена до бічної сторони, — 24 см. Знайдіть площу даного трикутника.
- 11.33. Точки  $A(3; -1; 0)$ ,  $B(1; 0; 2)$  і  $C(-1; 3; 2)$  є вершинами паралелограма  $ABCD$ . Знайдіть діагональ  $BD$ .

## 12. Многогранники, описані навколо сфери

**Означення.** Многогранник називають **описаним навколо сфери**, якщо всі його грані дотикаються до сфери. При цьому сферу називають **вписаною в многогранник**.

З означення випливає, що коли многогранник описано навколо сфери, то центр сфери рівновіддалений від усіх площин, які містять його грані. Є правильним і таке твердження: *якщо для даного опуклого многогранника існує точка, яка йому належить і рівновіддалена від усіх площин, що містять його грані, то в цей многогранник можна вписати сферу*.

Наприклад, точка перетину діагоналей куба рівновіддалена від усіх площин граней куба. Отже, у куб можна вписати сферу (рис. 12.1).

Якщо многогранник описано навколо сфери, то також говорять, що многогранник описано навколо кулі, обмеженої цією сферою. Наприклад, можна сказати, що на рисунку 12.1 зображено куб, описаний навколо кулі, або кулю, вписану в куб.

Якщо сфера дотикається до граней двогранного кута, то її центр належить бісектору цього кута. Отже, якщо сферу вписано в многогранник, то її центр належить бісекторам усіх двогранних кутів многогранника при його ребрах. Є правильним і таке твердження: *якщо всі бісектори двогранних кутів опуклого многогранника при його ребрах мають спільну точку, то в цей многогранник можна вписати сферу*.

Використовуючи це твердження, можна довести (зробіть це самостійно), що в будь-якому тетраедрі існує точка, рівновіддалена від усіх площин, які містять його грані. Отже, *у будь-який тетраедр можна вписати сферу*.

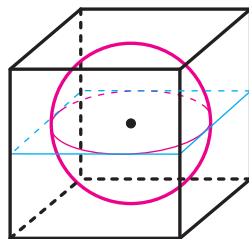


Рис. 12.1

**Задача 1.** Доведіть, що коли двогранні кути піраміди при ребрах її основи рівні, то в таку піраміду можна вписати сферу.

**Розв'язання.** Згідно з твердженням, доведеним у ключовій задачі 3.47, коли двогранні кути піраміди при ребрах її основи рівні, то кожна точка висоти піраміди рівновіддалена від площин її бічних граней (рис. 12.2). Тоді точка перетину бісектора двогранного кута при ребрі основи з висотою піраміди рівновіддалена від площин усіх граней піраміди. ◀

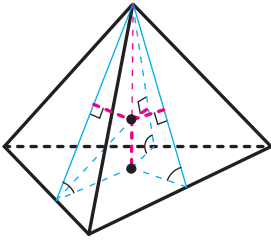


Рис. 12.2

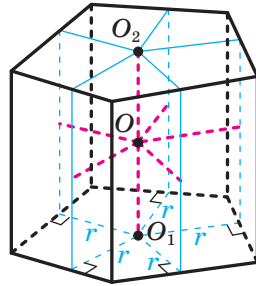


Рис. 12.3

З доведеного випливає, що в будь-яку правильну піраміду можна вписати сферу. Центр вписаної сфери належить висоті піраміди.

**Задача 2.** Доведіть, що коли в основу прямої призми можна вписати коло й висота призми дорівнює діаметру цього кола, то в таку призму можна вписати сферу.

*Розв'язання.* Нехай точки  $O_1$  і  $O_2$  — центри кіл радіуса  $r$ , вписаних в основи прямої призми (рис. 12.3). Пряма  $O_1O_2$  паралельна площині кожної бічної грані призми. Точка  $O_1$  віддалена від площини кожної бічної грані призми на відстань  $r$ . Отже, будь-яка точка прямої  $O_1O_2$  віддалена від площини кожної бічної грані призми на відстань  $r$ . Оскільки  $O_1O_2 = 2r$ , то середина  $O$  відрізка  $O_1O_2$  рівновіддалена від площин усіх граней призми. ◀

З доведеного випливає, що в правильну призму, висота якої дорівнює діаметру кола, вписаного в основу призми, можна вписати сферу. Центр сфери є серединою відрізка, який сполучає центри основ призми.

Справедливе й таке твердження: якщо в пряму призму можна вписати сферу, то в основу призми можна вписати коло з радіусом, який дорівнює радіусу сфери, а висота призми дорівнює діаметру сфери. Доведіть це твердження самостійно.

**Задача 3.** У пряму чотирикутну призму, основою якої є рівнобічна трапеція з основами 16 см і 4 см, вписано сферу. Знайдіть бічне ребро призми.

*Розв'язання.* Оскільки в пряму призму вписано сферу, то в основу призми можна вписати коло, діаметр якого дорівнює діаметру вписаної сфери, тобто бічному ребру призми.

Основою призми є трапеція, а отже, діаметр вписаного кола дорівнює висоті цієї трапеції. Знайдемо висоту трапеції.

Трапеція  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) — основа призми (рис. 12.4). Оскільки в чотирикутник  $ABCD$  можна вписати коло, то  $AD + BC = AB + CD$ .

З урахуванням умови отримуємо, що  $AB + CD = 20$  см. Оскільки  $AB = CD$ , то  $AB = 10$  см.

Проведемо висоту  $BM$  трапеції.

Ураховуючи, що трапеція  $ABCD$  є рівнобічною, маємо:  $AM = \frac{AD - BC}{2}$ , тобто  $AM = 6$  см. Із прямокутного трикутника  $ABM$

отримуємо:  $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$  (см).

Тоді діаметр вписаної сфери дорівнює 8 см, а отже, і бічне ребро дорівнює 8 см.

*Відповідь:* 8 см. ◀

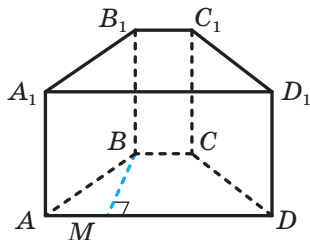


Рис. 12.4

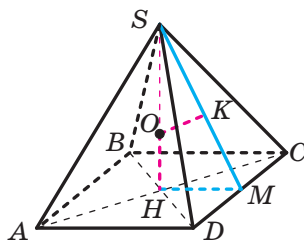


Рис. 12.5

**Задача 4.** Знайдіть радіус сфери, вписаної в правильну чотирикутну піраміду  $SABCD$ , у якій ребро основи  $AB$  дорівнює  $a$ , а висота —  $h$ .

*Розв'язання.* Оскільки дана піраміда є правильною, то центр  $O$  вписаної сфери належить висоті  $SH$  піраміди, де  $H$  — точка перетину діагоналей квадрата  $ABCD$  (рис. 12.5). Тоді відрізок  $OH$  — радіус вписаної сфери. Нехай  $OH = r$ .

У грані  $DSC$  проведемо апофему  $SM$ . Маємо:  $SH \perp DC$ ,  $SM \perp DC$ . Отже,  $DC \perp HSM$ . У площині  $HSM$  проведемо  $OK \perp SM$ , точка  $K$  належить апофемі  $SM$ . Оскільки  $DC \perp HSM$  і  $OK \subset HSM$ , то  $DC \perp OK$ . Маємо:  $OK \perp SM$ ,  $OK \perp DC$ . Тоді  $OK \perp DSC$ , тому відрізок  $OK$  — радіус вписаної сфери,  $OK = r$ .

Прямокутні трикутники  $KSO$  і  $HSM$  мають спільний гострий кут. Отже, ці трикутники подібні.

Тоді можна записати:  $\frac{OK}{HM} = \frac{SO}{SM}$ .

Маємо:  $SO = h - r$ ,  $HM = \frac{a}{2}$ ,  $SM = \sqrt{HM^2 + SH^2}$ , тобто

$$SM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}.$$

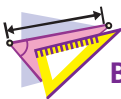
Отримуємо:  $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{h-r}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}}$ .

Звідси  $r\sqrt{a^2 + 4h^2} = ah - ar$ ;  $r = \frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}$ .

*Відповідь:*  $\frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}$ . ◀



1. Який многогранник називають описаним навколо сфери?
2. У який многогранник можна вписати сферу?
3. Яку властивість повинні мати бісектори двограних кутів при ребрах опуклого многогранника, щоб у цей многогранник можна було вписати сферу?
4. Де розміщений центр сфери, вписаної в правильну піраміду?
5. Які властивості повинні мати основа та висота прямої призми, щоб у неї можна було вписати сферу?
6. Яку властивість повинна мати висота правильної призми, щоб у неї можна було вписати сферу?
7. Яка точка є центром кулі, вписаної в правильну призму?



## ВПРАВИ

- 12.1.° Чому дорівнює радіус кулі, вписаної в куб з ребром  $a$ ?
- 12.2.° У правильну трикутну призму вписано кулю, радіус якої дорівнює  $R$ . Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 12.3.° У правильну шестикутну призму вписано кулю, радіус якої дорівнює  $R$ . Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 12.4.° Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетом  $a$  та протилежним йому кутом  $\alpha$ . Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану призму.

- 12.5.\*** Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник. Висота цього трикутника, проведена до його основи, дорівнює  $h$  і утворює з бічною стороною трикутника кут  $\alpha$ . Знайдіть висоту призми, якщо відомо, що в цю призму можна вписати кулю.
- 12.6.\*** Основою прямої призми є прямокутна трапеція, більша бічна сторона якої дорівнює 12 см, а гострий кут —  $30^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо відомо, що в цю призму можна вписати кулю.
- 12.7.\*** Основою прямої призми є ромб, діагоналі якого дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо відомо, що в цю призму можна вписати кулю.
- 12.8.\*** Основою прямої призми, у яку вписано кулю, є ромб з гострим кутом  $\alpha$ . Знайдіть кут між меншою діагоналлю призми та площиною її основи.
- 12.9.\*** Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну шестикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює  $a$ , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ .
- 12.10.\*** Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює  $a$ , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ .
- 12.11.\*\*** Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильний тетраедр, ребро якого дорівнює  $a$ .
- 12.12.\*\*** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро —  $\sqrt{21}$  см. Знайдіть радіус сфери, вписаної в дану піраміду.
- 12.13.\*\*** Основою піраміди є ромб зі стороною  $a$  та кутом  $\alpha$ . Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $\beta$ . Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.
- 12.14.\*\*** Трикутник  $ABC$  є основою піраміди  $DABC$ ,  $AB = BC$ ,  $AC = a$ ,  $\angle BAC = \alpha$ . Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $\beta$ . Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.
- 12.15.\*\*** Двогранні кути піраміди при ребрах основи рівні, а площа основи дорівнює  $S$ . Центр кулі, вписаної в піраміду, ділить її висоту у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини піраміди. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
- 12.16.\*\*** Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $45^\circ$ . У якому відношенні центр вписаної в цю піраміду кулі ділить її висоту, рахуючи від вершини піраміди?

- 12.17.\*\*** Куля, вписана в правильну чотирикутну піраміду, дотикається до однієї з її бічних граней у точці  $A$ . Знайдіть площу перерізу цієї кулі площиною, яка проходить через точку  $A$  паралельно основі піраміди, якщо двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $60^\circ$ , а відстань від центра кулі до вершини піраміди — 8 см.
- 12.18.\*\*** Двогранний кут правильної трикутної піраміди при ребрі основи дорівнює  $45^\circ$ , а радіус вписаної сфери —  $\sqrt{2}$  см. Ця сфера дотикається до однієї з бічних граней піраміди в точці  $M$ . Знайдіть довжину лінії перетину даної сфери та площини, яка проходить через точку  $M$  паралельно основі піраміди.
- 12.19.\*\*** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює  $a$ , а плоский кут при вершині піраміди дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.
- 12.20.\*\*** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $a$ , а плоский кут при вершині піраміди дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.
- 12.21.\*\*** Доведіть, що коли центр кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, і центр вписаної в неї кулі збігаються, то дана піраміда є правильним тетраедром.
- 12.22.\*\*** Трикутник  $ABC$  є основою піраміди  $DABC$ ,  $AB = BC = DB = a$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $DB \perp ABC$ . Знайдіть радіус сфери, вписаної в дану піраміду.
- 12.23.\*\*** Навколо кулі описано правильну трикутну зрізану піраміду, сторони основ якої дорівнюють 6 см і 12 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
- 12.24.\*\*** У правильну чотирикутну зрізану піраміду вписано кулю, радіус якої дорівнює  $R$ . Двогранний кут зрізаної піраміди при ребрі її більшої основи дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 12.25.** Знайдіть площу паралелограма, якщо його діагоналі дорівнюють 16 см і 20 см та одна з них перпендикулярна до сторони.
- 12.26.** Висота ромба дорівнює 12 см, а менша діагональ — 15 см. Знайдіть площу ромба.



12.27. Чи є колінеарними вектори  $\vec{m}(8; -10; 6)$  і  $\vec{n}(-4; 5; -3)$ ? Знайдіть координати вектора  $\vec{k}$ , який колінеарний вектору  $\vec{n}$  і модуль якого в 3 рази більший за модуль вектора  $\vec{n}$ .

## 13. Комбінації циліндра (конуса) та сфери

**Означення.** Циліндр називають **вписаним у сферу**, якщо кола основ циліндра належать сфері (рис. 13.1). При цьому сферу називають **описаною навколо циліндра**.

Ви знаєте, що навколо будь-якого прямокутника можна описати коло, причому центр описаного кола є серединою відрізка, який сполучає середини протилежних сторін прямокутника.

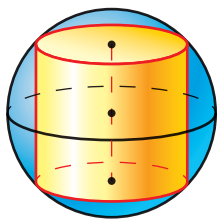


Рис. 13.1

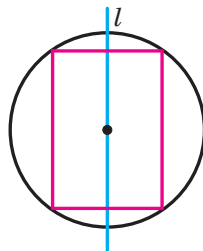


Рис. 13.2

Розглянемо прямокутник, навколо якого описано коло. Прямая  $l$ , що проходить через середини протилежних сторін прямокутника, є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 13.2. Обертатимемо прямокутник разом з описаним колом навколо прямої  $l$ . У результаті отримаємо сферу, описану навколо циліндра.

Наведені міркування є ілюстрацією до такого твердження: *навколо будь-якого циліндра можна описати сферу, причому центр сфери — це середина відрізка, що сполучає центри основ циліндра, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осевого перерізу циліндра.*

**Означення.** Конус називають **вписаним у сферу**, якщо вершина конуса та коло його основи належать сфері (рис. 13.3). При цьому сферу називають **описаною навколо конуса**.

Розглянемо рівнобедрений трикутник, навколо якого описано коло. Прямая  $l$ , що містить висоту трикутника, проведена до основи,

є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 13.4. Обертатимемо трикутник разом з описаним колом навколо прямої  $l$ . У результаті отримаємо сферу, описану навколо конуса.

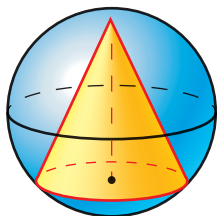


Рис. 13.3

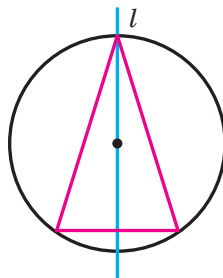


Рис. 13.4

Наведені міркування є ілюстрацією до такого твердження: *навколо будь-якого конуса можна описати сферу, причому центр описаної сфери належить осі конуса, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осевого перерізу конуса.*

**Означення.** Зрізаний конус називають **вписаним у сферу**, якщо кола основ конуса належать сфері (рис. 13.5). При цьому сферу називають **описаною навколо зрізаного конуса**.

Розглянемо рівнобічну трапецію, навколо якої описано коло. Пряма  $l$ , що проходить через середини основ трапеції, є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 13.6. Обертатимемо трапецію разом з описаним колом навколо прямої  $l$ . У результаті отримаємо сферу, описану навколо зрізаного конуса.

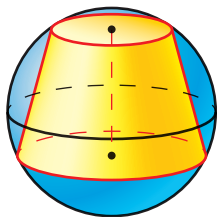


Рис. 13.5

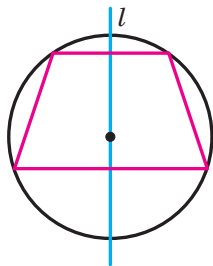


Рис. 13.6

Наведені міркування є ілюстрацією до такого твердження: *навколо будь-якого зрізаного конуса можна описати сферу, причому центр описаної сфери належить осі зрізаного конуса, а радіус*

сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу зрізаного конуса.

Якщо циліндр (конус, зрізаний конус) вписано у сферу, то також говорять, що циліндр (конус, зрізаний конус) вписано в кулю, обмежену цією сферою. Наприклад, можна сказати, що на рисунках 13.1, 13.3 і 13.5 зображено відповідно циліндр, конус і зрізаний конус, вписані в кулю. Також говорять, що кулю описано навколо кожного із зазначених тіл обертання.

**Означення.** Циліндр називають **описаним навколо сфери**, якщо обидві основи циліндра та всі його твірні дотикаються до сфери (рис. 13.7). При цьому сферу називають **вписаною в циліндр**.

Ви знаєте, що коли в прямокутник можна вписати коло, то він є квадратом.

Розглянемо квадрат, у який вписано коло. Пряма  $l$ , що проходить через центр кола перпендикулярно до двох протилежних сторін квадрата, є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 13.8. Обертатимемо квадрат разом із вписаним у нього колом навколо прямої  $l$ . У результаті отримаємо сферу, вписану в циліндр.

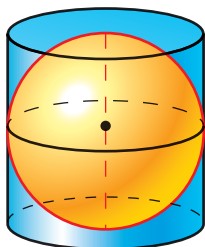


Рис. 13.7

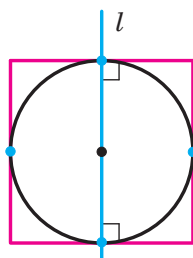


Рис. 13.8

Наведені міркування є ілюстрацією до такого твердження: *якщо осьовим перерізом циліндра є квадрат, то в такий циліндр можна вписати сферу, причому центр вписаної сфери — це середина відрізка, який сполучає центри основ циліндра, а радіус сфери дорівнює радіусу основи циліндра.*

**Означення.** Конус називають **описаним навколо сфери**, якщо основа конуса та всі його твірні дотикаються до сфери (рис. 13.9). При цьому сферу називають **вписаною в конус**.

Розглянемо рівнобедрений трикутник, у який вписано коло. Пряма  $l$ , що містить висоту трикутника, проведену до основи,

є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 13.10. Обертати-  
 мемо рівнобедрений трикутник разом із вписаним у нього колом  
 навколо прямої  $l$ . У результаті отримуємо сферу, вписану в конус.

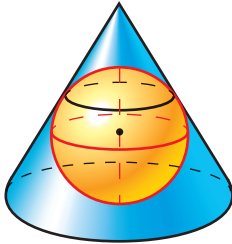


Рис. 13.9

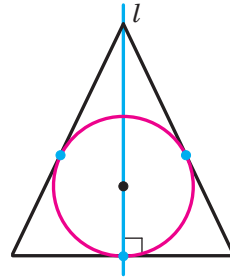


Рис. 13.10

Наведені міркування є ілюстрацією до такого твердження:  
*у будь-який конус можна вписати сферу, причому центр вписаної  
 сфери належить висоті конуса, а радіус сфери дорівнює радіусу  
 кола, вписаного в осьовий переріз конуса.*

**Означення.** Зрізаний конус називають **описаним навколо  
 сфери**, якщо обидві основи зрізаного конуса та всі його твірні  
 дотикаються до сфери (рис. 13.11). При цьому сферу називають  
**вписаною в зрізаний конус**.

Розглянемо рівнобічну трапецію, у яку вписано коло. Пряма  $l$ ,  
 що проходить через центр кола перпендикулярно до основ трапеції,  
 є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 13.12. Обертати-  
 мемо трапецію разом із вписаним у неї колом навколо прямої  $l$ .  
 У результаті отримуємо сферу, вписану в зрізаний конус.

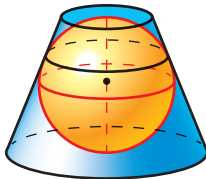


Рис. 13.11

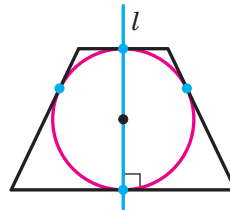


Рис. 13.12

Наведені міркування є ілюстрацією до такого твердження:  
*якщо в осьовий переріз зрізаного конуса можна вписати коло, то  
 в такий зрізаний конус можна вписати сферу, причому центр*

вписаної сфери — це середина відрізка, який сполучає центри основ зрізаного конуса, а радіус сфери дорівнює половині висоти зрізаного конуса.

Якщо циліндр (конус, зрізаний конус) описано навколо сфери, то також говорять, що циліндр (конус, зрізаний конус) описано навколо кулі, обмеженої цією сферою. Наприклад, можна сказати, що на рисунках 13.7, 13.9 і 13.11 зображено відповідно циліндр, конус і зрізаний конус, описані навколо кулі. Також говорять, що кулю вписано в кожне з указаних тіл обертання.

**Задача.** Знайдіть радіус сфери, вписаної в конус, радіус основи якого дорівнює  $r$ , а твірна нахилена до площини основи під кутом  $\alpha$ .

*Розв'язання.* На рисунку 13.13 зображено рівнобедрений трикутник  $ABC$  ( $AB = BC$ ), який є осьовим перерізом даного конуса, і вписане в нього коло. Радіус цього кола дорівнює радіусу сфери, вписаної в конус.

Нехай точка  $O$  — центр кола, а  $K$  — точка дотику цього кола до сторони  $AC$ . Тоді  $OK \perp AC$  і  $AK = KC$ , відрізок  $AK$  — радіус основи конуса.

За умовою задачі  $\angle BAC = \alpha$ ,  $AK = r$ . Оскільки  $O$  — це точка перетину бісектрис трикутника  $ABC$ , то  $\angle OAK = \frac{\alpha}{2}$ .

Із прямокутного трикутника  $AOK$  отримуємо:  $OK = AK \operatorname{tg} \angle OAK$ , тобто  $OK = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

*Відповідь:*  $r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ . ◀

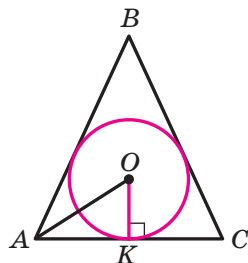
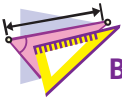


Рис. 13.13



1. Який циліндр називають вписаним у сферу?
2. Яка точка є центром сфери, описаної навколо циліндра?
3. Чому дорівнює радіус сфери, описаної навколо циліндра?
4. Який конус називають вписаним у сферу?
5. Де розміщений центр сфери, описаної навколо конуса?
6. Чому дорівнює радіус сфери, описаної навколо конуса?
7. Який зрізаний конус називають вписаним у сферу?
8. Де розміщений центр сфери, описаної навколо зрізаного конуса?
9. Чому дорівнює радіус сфери, описаної навколо зрізаного конуса?

10. Який циліндр називають описаним навколо сфери?
11. У якому разі в циліндр можна вписати сферу?
12. Яка точка є центром сфери, вписаної в циліндр?
13. Чому дорівнює радіус сфери, вписаної в циліндр?
14. Який конус називають описаним навколо сфери?
15. Де розміщений центр сфери, вписаної в конус?
16. Чому дорівнює радіус сфери, вписаної в конус?
17. Який зрізаний конус називають описаним навколо сфери?
18. У якому разі в зрізаний конус можна вписати сферу?
19. Яка точка є центром сфери, вписаної в зрізаний конус?
20. Чому дорівнює радіус сфери, вписаної в зрізаний конус?



### ВПРАВИ

- 13.1.° Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а його висота — 15 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даного циліндра.
- 13.2.° Висота циліндра дорівнює  $4\sqrt{3}$  см, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного циліндра.
- 13.3.° Осьовий переріз конуса є прямокутним трикутником, а діаметр основи конуса дорівнює 10 см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного конуса.
- 13.4.° Твірна конуса завдовжки 9 см дорівнює діаметру його основи. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного конуса.
- 13.5.° Знайдіть радіус кулі, вписаної в циліндр, діагональ осьового перерізу якого дорівнює 8 см.
- 13.6.° Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо кулі, радіус якої дорівнює  $R$ .
- 13.7.° Твірна конуса дорівнює діаметру його основи. Як радіус сфери, вписаної в даний конус, відноситься до радіуса описаної навколо нього сфери?
- 13.8.° Кут між твірною конуса та його висотою дорівнює  $45^\circ$ , а відстань від центра вписаної в конус кулі до вершини конуса дорівнює 4 см. Знайдіть радіус даної кулі.
- 13.9.° У кулю вписано циліндр, висота якого дорівнює діаметру основи. У скільки разів площа великого круга кулі більша за площу основи циліндра?
- 13.10.° Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з висотою циліндра кут  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус кулі, описаної навколо нього, дорівнює  $R$ .

- 13.11.\*** Радіус основи циліндра дорівнює  $r$ , а радіус кулі, описаної навколо цього циліндра, дорівнює  $R$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
- 13.12.\*** Твірна конуса дорівнює  $b$ , а його висота —  $h$ . Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даного конуса.
- 13.13.\*** Радіус описаної навколо конуса кулі дорівнює  $R$ . Твірну конуса видно із центра цієї кулі під кутом  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
- 13.14.\*** Знайдіть радіус кулі, описаної навколо зрізаного конуса, якщо радіуси основ конуса дорівнюють 5 см і 8 см, а його висота — 9 см.
- 13.15.\*** Твірна зрізаного конуса дорівнює  $2\sqrt{3}$  см, а радіус меншої основи —  $\sqrt{3}$  см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного зрізаного конуса, якщо кут між його твірною та більшою основою дорівнює  $60^\circ$ .
- 13.16.\*** Твірна конуса дорівнює 10 см, а радіус основи — 6 см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в даний конус.
- 13.17.\*** У конус із твірною  $b$  і кутом  $\alpha$  при вершині осьового перерізу вписано кулю. Знайдіть радіус кулі.
- 13.18.\*** У зрізаний конус, твірна якого дорівнює 8 см, вписано кулю. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
- 13.19.\*** У зрізаний конус, радіуси основ якого дорівнюють 3 см і 4 см, вписано кулю. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
- 13.20.\*** Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють  $r$  і  $R$ . Знайдіть радіус сфери, вписаної в даний зрізаний конус.
- 13.21.\*** Кут між твірною зрізаного конуса та площиною більшої основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть радіус кулі, вписаної в даний зрізаний конус, і радіуси основ зрізаного конуса, якщо його твірна дорівнює  $b$ .
- 13.22.\*\*** Радіус основи конуса дорівнює 4 см, а радіус описаної навколо нього кулі — 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
- 13.23.\*\*** Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 4 см, а радіус описаної навколо нього кулі — 5 см. Знайдіть висоту зрізаного конуса.
- 13.24.\*\*** Радіус кулі, вписаної в конус, дорівнює  $r$ . Твірну конуса видно із центра вписаної кулі під кутом  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
- 13.25.\*\*** Найбільший кут між твірними конуса дорівнює  $90^\circ$ . У конус вписано кулю, радіус якої дорівнює  $R$ . Знайдіть площу повної поверхні конуса.

- 13.26.\*\*** У конус, твірна якого дорівнює 15 см, а висота — 12 см, вписано сферу. Знайдіть довжину лінії, по якій сфера дотикається до бічної поверхні конуса.
- 13.27.\*\*** Кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює  $\alpha$ , а радіус основи —  $R$ . У конус вписано кулю. Знайдіть відстань від вершини конуса до площини круга, коло якого є лінією дотику кулі та бічної поверхні конуса.
- 13.28.\*\*** У зрізаний конус вписано кулю, радіус якої дорівнює  $R$ . Діаметр більшої основи зрізаного конуса видно із центра кулі під кутом  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
- 13.29.\*\*** Навколо кулі описано зрізаний конус, радіуси основ якого дорівнюють 8 см і 18 см. Знайдіть довжину лінії, по якій куля дотикається до бічної поверхні зрізаного конуса.



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 13.30.** У трикутник  $ABC$  вписано ромб  $AMFK$  так, що кут  $A$  в них спільний, а вершина  $F$  належить стороні  $BC$ . Знайдіть сторону ромба, якщо  $AB = 10$  см,  $AC = 15$  см.
- 13.31.** Один із кутів трапеції дорівнює  $30^\circ$ , а бічні сторони трапеції перпендикулярні. Знайдіть меншу бічну сторону трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см, а одна з основ — 8 см.
- 13.32.** Знайдіть площу паралелограма, побудованого як на сторонах на векторах  $\vec{a}(-2; 2; 1)$  і  $\vec{b}(4; 8; 1)$ .



### КРАСА ТА РОЗУМ УКРАЇНИ

Роксолана, Соломія Крушельницька, Леся Українка — відомі в усьому світі українки минулого.

Сучасні українські дівчата стають найкращими не тільки в політиці та мистецтві, а й на аренах математичних змагань. У найпрестижнішій Європейській математичній олімпіаді для дівчат (EGMO) українські школярки Софія Дубова (2014 рік), Ольга Шевченко (2017 рік) та Аліна Гарбузова (2018 рік) тричі виборювали першість серед усіх учасниць, розв'язавши абсолютно всі запропоновані задачі. Узагалі, українська команда дівчат досі залишається єдиною командою Європи, яка тричі ставала першою в офіційному командному заліку. Такі досягнення переконали європейську спільноту вибрати місцем проведення EGMO у 2019 р. місто Київ. Упевнені, що в черговий раз побачимо наших розумниць на вершині п'єдесталу пошани.





**Команда України на першій олімпіаді EGMO  
(Кембридж, Велика Британія, 2012 рік)**

Склад команди (зліва направо): Харитонова Олена (срібло); Кравченко Юлія (срібло); Павлюк Марія (срібло); Сердюк Ярослава (срібло)

**ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ**

- Обчисліть площу бічної поверхні циліндра, осьовим перерізом якого є квадрат зі стороною 8 см.  
А)  $32\pi$  см<sup>2</sup>;    Б)  $64\pi$  см<sup>2</sup>;    В)  $128\pi$  см<sup>2</sup>;    Г)  $256\pi$  см<sup>2</sup>.
- Висота циліндра дорівнює 8 см, а радіус основи — 5 см. На відстані 4 см від осі циліндра паралельно їй проведено площину. Знайдіть площу утвореного перерізу.  
А)  $40$  см<sup>2</sup>;    Б)  $24$  см<sup>2</sup>;    В)  $48$  см<sup>2</sup>;    Г)  $64$  см<sup>2</sup>.
- Хорду нижньої основи циліндра видно із центра цієї основи під кутом  $\alpha$ . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди, нахилений до площини основи під кутом  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус основи дорівнює  $r$ .  
А)  $2\pi r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ ;    В)  $2\pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ ;  
Б)  $2\pi r^2 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta$ ;    Г)  $2\pi r^2 \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$ .
- Кут між твірною та площиною основи конуса дорівнює  $60^\circ$ , а висота конуса —  $9\sqrt{3}$  см. Чому дорівнює твірна конуса?  
А)  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$  см;    Б)  $18\sqrt{3}$  см;    В)  $13,5$  см;    Г)  $18$  см.

5. Обчисліть площу бічної поверхні конуса, діаметр основи якого дорівнює 12 см, а твірна — 17 см.

А)  $102\pi$  см<sup>2</sup>; Б)  $204\pi$  см<sup>2</sup>; В)  $34\pi$  см<sup>2</sup>; Г)  $68\pi$  см<sup>2</sup>.

6. Площа бічної поверхні конуса дорівнює  $240\pi$  см<sup>2</sup>. Чому дорівнює висота конуса, якщо радіус його основи дорівнює 12 см?

А) 12 см; Б) 16 см; В) 20 см; Г) 2 см.

7. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом  $\alpha$ , а з вершини конуса — під кутом  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо радіус його основи дорівнює  $r$ .

А)  $\pi r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$ ;

В)  $\frac{\pi r^2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$ ;

Б)  $\pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$ ;

Г)  $\frac{\pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$ .

8. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а прилеглий до нього кут дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, утвореного в результаті обертання цього трикутника навколо даного катета.

А)  $24\pi\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>; Б)  $12\pi\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>; В)  $24\pi$  см<sup>2</sup>; Г)  $12\pi$  см<sup>2</sup>.

9. Чому дорівнює площа бічної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 6 см і 10 см, а кут між твірною та площиною більшої основи дорівнює  $30^\circ$ ?

А)  $32\pi\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>; Б)  $\frac{128\pi\sqrt{3}}{3}$  см<sup>2</sup>; В)  $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$  см<sup>2</sup>; Г)  $128\pi$  см<sup>2</sup>.

10. Яку нерівність задовольняють координати всіх точок кулі радіуса  $r = 6$  із центром у точці  $O(1; -3; 5)$ ?

А)  $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 \leq 36$ ;

Б)  $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 \geq 36$ ;

В)  $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 \leq 36$ ;

Г)  $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 \leq 6$ .

11. Укажіть рівняння сфери із центром у точці  $B(-4; 5; -8)$ , яка дотикається до площини  $yz$ .

А)  $(x-4)^2 + (y+5)^2 + (z-8)^2 = 8$ ;

Б)  $(x+4)^2 + (y-5)^2 + (z+8)^2 = 64$ ;

В)  $(x+4)^2 + (y-5)^2 + (z+8)^2 = 4$ ;

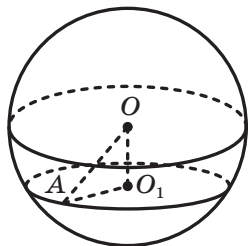
Г)  $(x+4)^2 + (y-5)^2 + (z+8)^2 = 16$ .

12. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см. У цю призму вписано сферу. Чому дорівнює радіус цієї сфери?

- А) 1 см;                      Б) 2 см;                      В)  $\frac{5}{2}$  см;                      Г) 3 см.

13. У кулі із центром  $O$ , зображеній на рисунку, проведено переріз із центром  $O_1$  на відстані 12 см від центра кулі. Знайдіть радіус кулі, якщо радіус перерізу дорівнює 9 см.

- А) 10 см;                      Б) 15 см;  
Б) 12 см;                      Г) 21 см.



14. Через кінець радіуса кулі проведено переріз, який утворює із цим радіусом кут  $45^\circ$ . Знайдіть радіус кулі, якщо площа перерізу дорівнює  $36\pi$  см<sup>2</sup>.

- А)  $6\sqrt{2}$  см;                      Б) 6 см;                      В)  $12\sqrt{2}$  см;                      Г) 12 см.

15. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\varphi$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо даної призми.

- А)  $\pi d^2 \sin 2\varphi$ ;                      В)  $\frac{1}{2} \pi d^2 \sin 2\varphi$ ;  
Б)  $\pi d^2 \cos 2\varphi$ ;                      Г)  $\frac{1}{2} \pi d^2 \cos 2\varphi$ .

16. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою  $b$  і кутом  $\beta$  при основі. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $\alpha$ . Знайдіть твірну конуса, вписаного в дану піраміду.

- А)  $\frac{b \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \alpha}$ ;                      В)  $\frac{b \operatorname{ctg} \beta}{\cos \alpha}$ ;  
Б)  $\frac{b \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{2 \cos \alpha}$ ;                      Г)  $\frac{b \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{\cos \alpha}$ .

17. У кулю радіуса  $r$  вписано правильну шестикутну призму, більша діагональ якої утворює з бічним ребром кут  $\alpha$ . Знайдіть сторону основи призми.

- А)  $2r \sin \alpha$ ;                      Б)  $2r \cos \alpha$ ;                      В)  $r \cos \alpha$ ;                      Г)  $r \sin \alpha$ .

18. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 18 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть радіус сфери, вписаної в цю піраміду.

- А) 9 см;                      Б)  $3\sqrt{3}$  см;                      В) 12 см;                      Г)  $12\sqrt{3}$  см.



## ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

### Площа бічної поверхні циліндра

За площу  $S_6$  бічної поверхні циліндра приймають площу розгортки його бічної поверхні.

$S_6 = 2\pi rh$ , де  $S_6$  — площа бічної поверхні циліндра,  $r$  — радіус основи циліндра,  $h$  — довжина висоти циліндра.

### Площа повної поверхні циліндра

$S_{\text{п}} = S_6 + 2S_{\text{осн}}$ , де  $S_{\text{п}}$  — площа повної поверхні циліндра,  $S_{\text{осн}}$  — площа основи циліндра.

$$S_{\text{п}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

### Комбінації циліндра та призми

Призму називають вписаною в циліндр, якщо її основи вписано в основи циліндра. При цьому циліндр називають описаним навколо призми.

Призму називають описаною навколо циліндра, якщо її основи описано навколо основ циліндра. При цьому циліндр називають вписаним у призму.

### Площа бічної поверхні конуса

За площу  $S_6$  бічної поверхні конуса приймають площу розгортки його бічної поверхні.

$S_6 = \pi rl$ , де  $r$  — радіус основи конуса,  $l$  — довжина твірної конуса.

### Площа повної поверхні конуса

$S_{\text{п}} = S_6 + S_{\text{осн}}$ , де  $S_{\text{п}}$  — площа повної поверхні конуса,  $S_{\text{осн}}$  — площа основи конуса.

$$S_{\text{п}} = \pi rl + \pi r^2$$

### Площа бічної поверхні зрізаного конуса

$S_6 = \pi(R+r)l$ , де  $R$  і  $r$  — радіуси основ,  $l$  — довжина твірної зрізаного конуса.

### Комбінації конуса та піраміди

Піраміду називають вписаною в конус, якщо її основу вписано в основу конуса, а вершина збігається з вершиною конуса. При цьому конус називають описаним навколо піраміди.

Піраміду називають описаною навколо конуса, якщо її основу описано навколо основи конуса, а вершина збігається з вершиною конуса. При цьому конус називають вписаним у піраміду.

## Куля

Кулею називають геометричне місце точок простору, відстані від яких до заданої точки не більші за дане додатне число.

## Рівняння сфери

Рівняння сфери із центром у точці  $A(a; b; c)$  і радіусом  $r$  має вигляд  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ .

## Взаємне розміщення сфери та площини

Якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери, то перерізом сфери площиною є коло.

Площину, яка має зі сферою тільки одну спільну точку, називають дотичною площиною до сфери. Цю спільну точку називають точкою дотику. У цьому випадку відстань від центра сфери до площини дорівнює радіусу сфери.

Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

## Многогранник, вписаний у сферу

Многогранник називають вписаним у сферу, якщо всі його вершини належать сфері. При цьому сферу називають описаною навколо многогранника.

Якщо для даного многогранника існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин, то навколо цього многогранника можна описати сферу.

Кожна грань многогранника, вписаного у сферу, є многокутником, вписаним у коло.

Якщо навколо основи прямої призми можна описати коло, то таку призму можна вписати у сферу, а центр сфери, описаної навколо призми, є серединою відрізка, який сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми.

Навколо правильної призми можна описати сферу.

Якщо навколо основи піраміди можна описати коло, то таку піраміду можна вписати у сферу.

Навколо правильної піраміди можна описати сферу. Центр описаної сфери належить прямій, яка містить висоту правильної піраміди.

## Многогранник, описаний навколо сфери

Многогранник називають описаним навколо сфери, якщо всі його грані дотикаються до сфери. При цьому сферу називають вписаною в многогранник.

Якщо для даного опуклого многогранника існує точка, яка йому належить і рівновіддалена від усіх площин, що містять його грані, то в цей многогранник можна вписати сферу.

Якщо всі бісектори двогранних кутів опуклого многогранника при його ребрах мають спільну точку, то в цей многогранник можна вписати сферу.

У будь-який тетраедр можна вписати сферу.

У правильну призму, висота якої дорівнює діаметру кола, вписаного в основу призми, можна вписати сферу. Центр сфери є серединою відрізка, який сполучає центри основ призми.

### **Комбінації циліндра та сфери**

Циліндр називають вписаним у сферу, якщо кола основ циліндра належать сфері. При цьому сферу називають описаною навколо циліндра.

Навколо будь-якого циліндра можна описати сферу, причому центр сфери — це середина відрізка, що сполучає центри основ циліндра, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу циліндра.

Циліндр називають описаним навколо сфери, якщо обидві основи циліндра та всі його твірні дотикаються до сфери. При цьому сферу називають вписаною в циліндр.

Якщо осьовим перерізом циліндра є квадрат, то в такий циліндр можна вписати сферу, причому центр вписаної сфери — це середина відрізка, який сполучає центри основ циліндра, а радіус сфери дорівнює радіусу основи циліндра.

### **Комбінації конуса та сфери**

Конус називають вписаним у сферу, якщо вершина конуса та коло його основи належать сфері. При цьому сферу називають описаною навколо конуса.

Навколо будь-якого конуса можна описати сферу, причому центр описаної сфери належить осі конуса, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу конуса.

Конус називають описаним навколо сфери, якщо основа конуса та всі його твірні дотикаються до сфери. При цьому сферу називають вписаною в конус.

У будь-який конус можна вписати сферу, причому центр вписаної сфери належить висоті конуса, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, вписаного в осьовий переріз конуса.

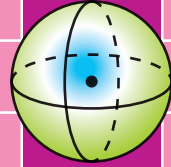
### **Комбінації зрізаного конуса та сфери**

Зрізаний конус називають вписаним у сферу, якщо кола основ конуса належать сфері. При цьому сферу називають описаною навколо зрізаного конуса.

Навколо будь-якого зрізаного конуса можна описати сферу, причому центр описаної сфери належить осі зрізаного конуса, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу зрізаного конуса.

Зрізаний конус називають описаним навколо сфери, якщо обидві основи зрізаного конуса та всі його твірні дотикаються до сфери. При цьому сферу називають вписаною в зрізаний конус.

Якщо в осьовий переріз зрізаного конуса можна вписати коло, то в такий зрізаний конус можна вписати сферу, причому центр вписаної сфери — це середина відрізка, який сполучає центри основ зрізаного конуса, а радіус сфери дорівнює половині висоти зрізаного конуса.



## § 3. ОБ'ЄМИ ТІЛ. ПЛОЩА СФЕРИ

- 14.** Об'єм тіла. Формули для обчислення об'єму призми
- 15.** Формули для обчислення об'ємів піраміди та зрізаної піраміди
- 16.** Об'єми тіл обертання
- 17.** Площа сфери

- У цьому параграфі ви докладніше ознайомитеся з уже відомим вам поняттям об'єму, вивчите нові формули для обчислення об'ємів многогранників і тіл обертання.
- Навчіться знаходити площу сфери.



## 14. Об'єм тіла. Формули для обчислення об'єму призми

З такою величиною, як об'єм, ви часто стикаєтесь у повсякденному житті: об'єм пакета соку, об'єм скляної банки, показники споживання води або палива на лічильниках (рис. 14.1). З поняттям об'єму ви ознайомились у курсі математики 5 класу. Крім того, це поняття ви неодноразово використовували, наприклад, на уроках фізики та хімії.



Рис. 14.1

Вивчаючи планіметрію, ви часто стикалися з такою геометричною величиною, як площа фігури. Об'єм тіла в стереометрії є аналогом площі фігури в планіметрії. Побачити цю аналогію нескладно, якщо порівняти означення площі многокутника, вивчене вами у 8 класі, з таким означенням.

**Означення. Об'ємом тіла** називають додатну величину, яка має такі властивості:

- 1) рівні тіла мають рівні об'єми;
- 2) якщо тіло складене з кількох інших тіл, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих тіл;
- 3) за одиницю виміру об'єму тіла беруть одиничний куб, тобто куб з ребром, яке дорівнює одиниці виміру довжини.

Вивчення об'ємів тіл почнемо з многогранників.

Виміряти об'єм многогранника — це означає порівняти його об'єм з об'ємом одиничного куба. У результаті отримують числове значення об'єму даного многогранника. Це число показує, у скільки разів об'єм даного многогранника відрізняється від об'єму одиничного куба.

Покажемо, як, спираючись на означення, знайти об'єм, наприклад, прямокутного паралелепіпеда з ребрами 1 см, 1 см і 3 см (рис. 14.2).

Такий паралелепіпед можна розбити на три куби з ребром 1 см. Із властивості 2 об'єму випливає, що об'єм даного паралелепіпеда дорівнює трьом об'ємам куба з ребром 1 см (коротко записують:  $3 \text{ см}^3$ ).

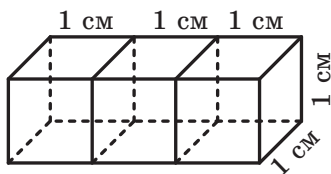


Рис. 14.2

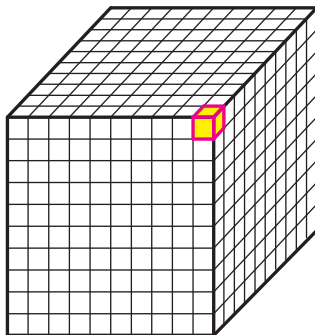


Рис. 14.3

Ще один приклад. Знайдемо об'єм  $V$  куба з ребром 1 мм, приймаючи за одиницю довжини 1 см. Якщо ребра одиничного куба (куба з ребром 1 см) поділити на 10 рівних частин і через точки поділу провести площини, паралельні його граням, то одиничний куб буде розбито на 1000 рівних кубів з ребром 1 мм (рис. 14.3). За властивістю 1 об'єму всі вони мають один і той самий об'єм  $V$ . За властивістю 2 об'єму отримуємо:

$$1 = \underbrace{V + V + \dots + V}_{1000}.$$

$$\text{Звідси } V = \frac{1}{1000} \text{ см}^3.$$

Знаходити об'єми тіл, зокрема многогранників, спираючись тільки на означення, часто є складною задачею. Наприклад, не просто порівняти об'єм трикутної піраміди з об'ємом одиничного куба. Недаремно формулу для обчислення об'єму піраміди, знайдену вченими Стародавньої Греції, вважають одним з найважливіших досягнень античної науки.

Водночас із курсу алгебри ви знаєте, що для обчислення об'єму тіла можна скористатися формулою

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (1)$$

де  $S(x)$  — площа фігури, отриманої в результаті перетину тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис, а проміжок  $[a; b]$  є проекцією тіла на вісь абсцис (рис. 14.4).

Скориставшись формулою (1), обчислимо об'єм призми.

Розглянемо призму з висотою  $h$  і основою, площа якої дорівнює  $S$ .

Уведемо систему координат так, щоб одна з основ призми лежала в площині, у всіх точок якої абсциса дорівнює 0, а висота призми належала додатній півосі абсцис (рис. 14.5). Тоді проекцією призми на вісь абсцис є проміжок  $[0; h]$ .

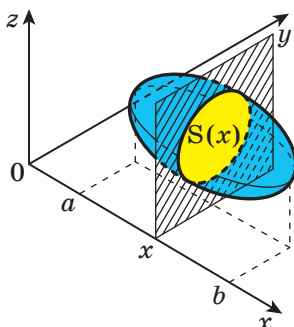


Рис. 14.4

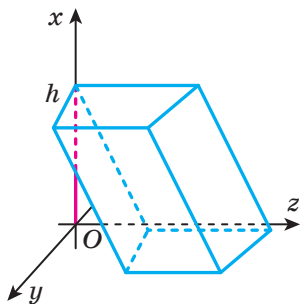


Рис. 14.5

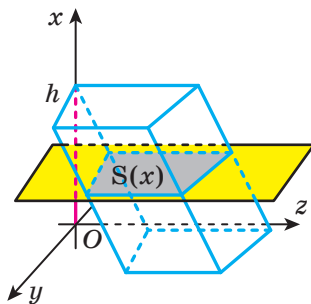


Рис. 14.6

Зрозуміло, що перерізом призми будь-якою площиною, перпендикулярною до осі абсцис, є многокутник, що дорівнює основі призми (рис. 14.6). Тому  $S(x) = S$  для всіх значень  $x \in [0; h]$ . Спираючись на формулу (1), отримуємо:

$$V = \int_0^h S dx = Sx \Big|_0^h = Sh.$$

Таким чином, *об'єм  $V$  призми з висотою  $h$  і основою, площа якої дорівнює  $S$ , обчислюють за формулою*

$$V = Sh$$

Оскільки паралелепіпед є окремим видом призми, то цю формулу використовують і для обчислення об'єму паралелепіпеда. Зокрема,

якщо ребра прямокутного паралелепіпеда, які мають спільну вершину, дорівнюють  $a$ ,  $b$  і  $c$ , то об'єм цього паралелепіпеда можна знайти за формулою

$$V = abc$$

**Задача.** У похилій призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми й перпендикулярний до них. Доведіть, що об'єм такої призми дорівнює добутку площі перерізу та бічного ребра.

*Розв'язання.* Доведення проведемо для трикутної призми. Для інших  $n$ -кутних призм доведення буде аналогічним.

Розглянемо призму  $ABCA_1B_1C_1$ . Нехай трикутник  $MPN$  — переріз, про який ідеться в умові (рис. 14.7). Розглянемо паралельне перенесення на вектор  $\overline{AA_1}$  многогранника  $ABCM PN$ . Тоді образом трикутника  $ABC$  є трикутник  $A_1B_1C_1$ . Нехай образом трикутника  $MPN$  є трикутник  $M_1P_1N_1$ . Отримуємо, що образом многогранника  $ABCM PN$  є многогранник  $A_1B_1C_1M_1P_1N_1$ . Тому ці многогранники рівні, а отже, рівними є також їхні об'єми.

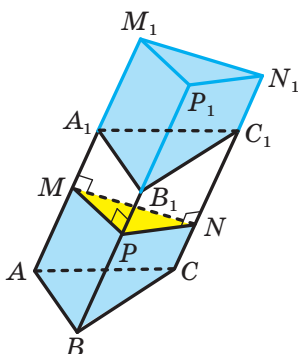


Рис. 14.7

Таким чином, призми  $ABCA_1B_1C_1$  і  $MPNM_1P_1N_1$  мають рівні об'єми. Призма  $MPNM_1P_1N_1$  є прямою, тому її об'єм  $V$  дорівнює  $S_{MPN} \cdot MM_1$ .

Оскільки  $MM_1 = AA_1$ , то об'єм призми  $ABCA_1B_1C_1$  дорівнює  $S_{MPN} \cdot AA_1$ . ◀



1. Що називають об'ємом тіла?
2. Що означає виміряти об'єм многогранника?
3. За якою формулою обчислюють об'єм призми?

**ВПРАВИ**

- 14.1.° Чому дорівнює об'єм призми, площа основи якої дорівнює  $12 \text{ см}^2$ , а висота —  $5 \text{ см}$ ?
- 14.2.° Знайдіть об'єм куба, діагональ грані якого дорівнює  $d$ .
- 14.3.° Як зміниться об'єм куба, якщо кожне його ребро збільшити в 3 рази?
- 14.4.° Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, кожне ребро якої дорівнює  $a$ .
- 14.5.° Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми, кожне ребро якої дорівнює  $a$ .
- 14.6.° Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює  $a$ , а кут між діагоналлю призми та площиною основи дорівнює  $\alpha$ .
- 14.7.° Висота правильної трикутної призми дорівнює  $h$ , а діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайдіть об'єм призми.
- 14.8.° Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють  $4 \text{ см}$ ,  $6 \text{ см}$  і  $9 \text{ см}$ . Знайдіть ребро куба, об'єм якого дорівнює об'єму даного паралелепіпеда.
- 14.9.° Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 2, 3 і 6, а його діагональ дорівнює  $14 \text{ см}$ . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
- 14.10.° Переріз залізничного насипу має форму трапеції, нижня основа якої дорівнює  $15 \text{ м}$ , верхня основа —  $8 \text{ м}$ , а висота —  $3,2 \text{ м}$ . Скільки кубічних метрів землі знадобиться, щоб побудувати  $1 \text{ км}$  насипу?
- 14.11.° Цех, у якому працюватимуть  $a$  робітників, має форму прямокутного паралелепіпеда. Щоби приміщення цеху відповідало санітарним нормам, на кожного робітника цеху повинно припадати  $b \text{ м}^3$  повітря. Якою має бути в цьому разі висота  $h$  цеху, якщо площа його підлоги становить  $S \text{ м}^2$ ?

- 14.12.° Знайдіть місткість сараю з двоскатним дахом (рис. 14.8), якщо довжина сараю дорівнює 12 м, ширина — 8 м, висота стін — 3,5 м, а висота гребеня даху — 6 м (товщиною стін знехтувати).

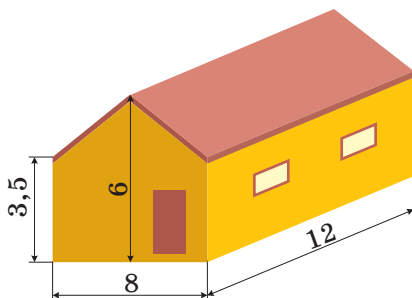


Рис. 14.8

- 14.13.° Основа прямої призми — ромб зі стороною 8 см і кутом  $60^\circ$ . Менша діагональ призми дорівнює 17 см. Знайдіть об'єм призми.
- 14.14.° Основа прямої призми — рівнобічна трапеція з основами 5 см і 11 см та діагоналлю 10 см. Діагональ призми дорівнює 26 см. Знайдіть об'єм призми.
- 14.15.° Основою похилої призми є паралелограм зі сторонами 3 см і 8 см та кутом  $30^\circ$ . Бічне ребро призми дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм призми.
- 14.16.° Основою похилої призми є трикутник зі сторонами  $4\sqrt{3}$  см і 5 см та кутом  $120^\circ$  між ними. Бічне ребро призми дорівнює 20 см і утворює з висотою призми кут  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм призми.
- 14.17.\* Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут  $30^\circ$ . Кут між діагоналлю основи та однією з її сторін дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
- 14.18.\* Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює  $d$  і утворює з площиною бічної грані кут  $\alpha$ . Знайдіть об'єм призми.
- 14.19.\* Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\alpha$ , а з площиною бічної грані — кут  $\beta$ . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
- 14.20.\* Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , якщо її діагоналі  $A_1 D$  і  $A_1 E$  дорівнюють відповідно 13 см і 12 см.

- 14.21.\*** Основою прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є ромб  $ABCD$ . Відомо, що  $\angle BAD = \alpha$ ,  $AC = d$ . Через пряму  $BD$  і точку  $C_1$  проведено площину, яка утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Знайдіть об'єм призми.
- 14.22.\*** Основою прямої призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  є трикутник  $ABC$ . Відомо, що  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $AB = c$ . Площина  $A_1 BC$  утворює з площиною основи призми кут  $\alpha$ . Знайдіть об'єм призми.
- 14.23.\*** Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда, які мають спільну вершину, дорівнюють  $S_1$ ,  $S_2$  і  $S_3$ . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
- 14.24.\*** Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює  $S$ . Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють  $S_1$  і  $S_2$ . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
- 14.25.\*** Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 20 см, а відстані між паралельними прямими, які містять ребра призми, дорівнюють 17 см, 25 см і 26 см. Знайдіть об'єм призми.
- 14.26.\*** Бічне ребро похилого паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 8 см, відстань між прямими  $AA_1$  і  $BB_1$  —  $5\sqrt{3}$  см, між прямими  $AA_1$  і  $DD_1$  — 4 см, а двогранний кут паралелепіпеда при ребрі  $AA_1$  дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
- 14.27.\*** Основою похилої призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  є рівносторонній трикутник  $ABC$  зі стороною  $a$ . Вершина  $A_1$  призми рівновіддалена від вершин трикутника  $ABC$ , а кут між ребром  $AA_1$  і площиною основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть об'єм призми.
- 14.28.\*** Основою похилої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є квадрат  $ABCD$  зі стороною  $a$ , бічне ребро призми дорівнює  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Вершина  $A_1$  призми рівновіддалена від сторін квадрата  $ABCD$ . Знайдіть об'єм призми.
- 14.29.\*\*** Через вершини  $B$ ,  $D$  і  $C_1$  правильної призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  проведено площину, яка утворює з площиною основи призми кут  $60^\circ$ . Відстань від точки  $C$  до проведеної площини дорівнює  $2\sqrt{3}$  см. Знайдіть об'єм призми.
- 14.30.\*\*** Через вершини  $A$ ,  $C$  і  $B_1$  правильної призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  проведено площину, яка утворює з площиною основи призми кут  $45^\circ$ . Відстань від точки  $B$  до проведеної площини дорівнює  $3\sqrt{2}$  см. Знайдіть об'єм призми.

- 14.31.\*\* Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 30 см і 40 см. Через діагональ основи проведено площину, яка паралельна діагоналі паралелепіпеда й утворює з площиною основи кут  $30^\circ$ . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
- 14.32.\*\* Основою прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є ромб  $ABCD$ , діагоналі якого дорівнюють 8 см і  $4\sqrt{5}$  см. Кут між площиною, яка проходить через прями  $AD$  і  $B_1 C_1$ , і площиною основи призми дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм призми.
- 14.33.\*\* Основою похилого паралелепіпеда є ромб, одна з діагоналей якого дорівнює 24 см. Діагональ однієї з бічних граней дорівнює  $13\sqrt{3}$  см і перпендикулярна до площини основи. Кут між бічним ребром паралелепіпеда та площиною основи дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
- 14.34.\*\* Висота похилої призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  дорівнює  $6\sqrt{2}$  см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом  $45^\circ$ . Площа грані  $AA_1 B_1 B$  дорівнює  $36 \text{ см}^2$ , площа грані  $AA_1 C_1 C$  —  $48 \text{ см}^2$ , а двогранний кут призми при ребрі  $AA_1$  дорівнює  $120^\circ$ . Знайдіть об'єм призми.
- 14.35.\*\* Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною 2 см. Бічне ребро призми дорівнює 5 см і утворює з двома сусідніми сторонами основи кути по  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм призми.
- 14.36.\*\* Основою похилого паралелепіпеда є квадрат, а кожна його бічна грань — ромб зі стороною  $a$  та кутом  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
- 14.37.\*\* Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною 3 см. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи та є ромбом з діагоналлю 4 см. Знайдіть об'єм призми.
- 14.38.\*\* Основою похилої призми є квадрат. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а площа кожної з двох інших граней дорівнює  $36 \text{ см}^2$ . Бічні ребра призми дорівнюють ребрам основи та утворюють з площиною основи кут  $30^\circ$ . Знайдіть об'єм призми.

**ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

- 14.39. У прямокутному трикутнику медіани, проведені до катетів, дорівнюють  $2\sqrt{73}$  см і  $4\sqrt{13}$  см. Знайдіть катети трикутника.



14.40. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC = 7,5$  см,  $AC = 12$  см. Знайдіть відстань від вершини  $B$  до ортоцентра трикутника  $ABC$ .

14.41. Дано вектори  $\vec{m}(3; -2; p)$  і  $\vec{n}(-9; 6; -12)$ .

- 1) При якому значенні  $p$  вектори  $\vec{m}$  і  $\vec{n}$  є колінеарними?
- 2) При якому значенні  $p$  вектор  $\vec{m}$  буде перпендикулярним до осі  $z$ ?

## 15. Формули для обчислення об'ємів піраміди та зрізаної піраміди

**Теорема 15.1.** *Об'єм  $V$  піраміди з висотою  $h$  і основою, площа якої дорівнює  $S$ , обчислюють за формулою*

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

*Доведення.* Нехай дано піраміду з висотою  $OM$ , що дорівнює  $h$ , та основою, площа якої дорівнює  $S$  (рис. 15.1). Доведемо, що об'єм піраміди дорівнює  $V = \frac{1}{3}Sh$ .

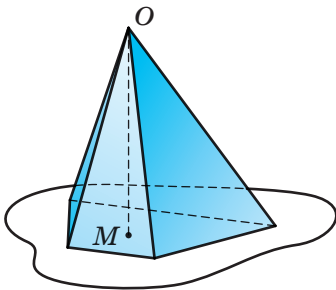


Рис. 15.1

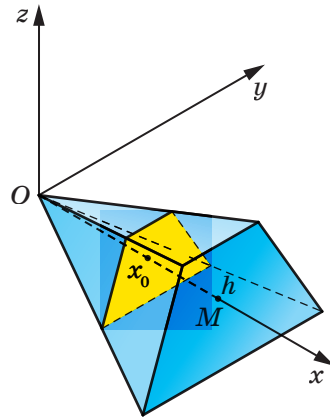


Рис. 15.2

Уведемо систему координат так, щоб вершина піраміди  $O$  збігалася з початком координат, а висота піраміди  $OM$  належала додатній півосі абсцис (рис. 15.2). Тоді основа піраміди лежить у площині, у всіх точок якої абсциса дорівнює  $h$ . Тому проекцією піраміди на вісь абсцис є проміжок  $[0; h]$ .

Нехай площина, у всіх точок якої абсциса дорівнює  $x_0$ , перетинає піраміду по багатокутнику з площею  $S(x_0)$ . Площина цього перерізу паралельна площині основи піраміди, тому багатокутник, утворений у перерізі, подібний основі піраміди. При цьому коефіцієнт подібності дорівнює  $\frac{x_0}{h}$ . Скориставшись теоремою про відношення площ подібних фігур, отримуємо пропорцію

$$\frac{S(x_0)}{S} = \frac{x_0^2}{h^2}.$$

Звідси  $S(x_0) = \frac{x_0^2}{h^2}S$ . Тепер можна записати:

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{x^2}{h^2} S dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} Sh. \blacktriangleleft$$

**Задача 1.** Основою чотирикутної піраміди  $MABCD$  є прямокутник  $ABCD$ . Бічна грань  $AMB$  перпендикулярна до площини основи. Знайдіть об'єм піраміди, якщо  $AB = 10$  см,  $BC = 12$  см,  $MA = MB = 13$  см.

*Розв'язання.* Проведемо висоту  $MK$  трикутника  $AMB$  (рис. 15.3). Оскільки  $AMB \perp ABC$ , то  $MK \perp ABC$ . Отже, відрізок  $MK$  — висота даної піраміди.

Оскільки  $MA = MB$ , то відрізок  $MK$  є медіаною трикутника  $AMB$ . Звідси  $AK = KB = 5$  см.

Із прямокутного трикутника  $MKA$  отримуємо:

$$MK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

Площа прямокутника  $ABCD$  дорівнює  $120 \text{ см}^2$ .

Тепер можемо знайти об'єм  $V$  піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 12 = 480 \text{ (см}^3\text{)}.$$

*Відповідь:*  $480 \text{ см}^3$ .  $\blacktriangleleft$

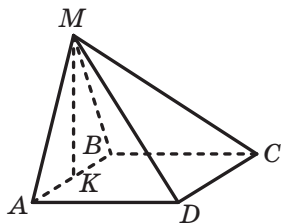


Рис. 15.3

Формулу для обчислення об'єму піраміди використовують для обчислення об'ємів опуклих многогранників, оскільки довільний опуклий многогранник можна розбити на скінченну кількість пірамід. Справді, виберемо всередині такого многогранника довільну точку й розглянемо піраміди, основами яких є грані многогранника,

а вершиною — вибрана точка. Тепер зрозуміло, що об'єм опуклого многогранника дорівнює сумі об'ємів пірамід, на які його розбито (рис. 15.4).

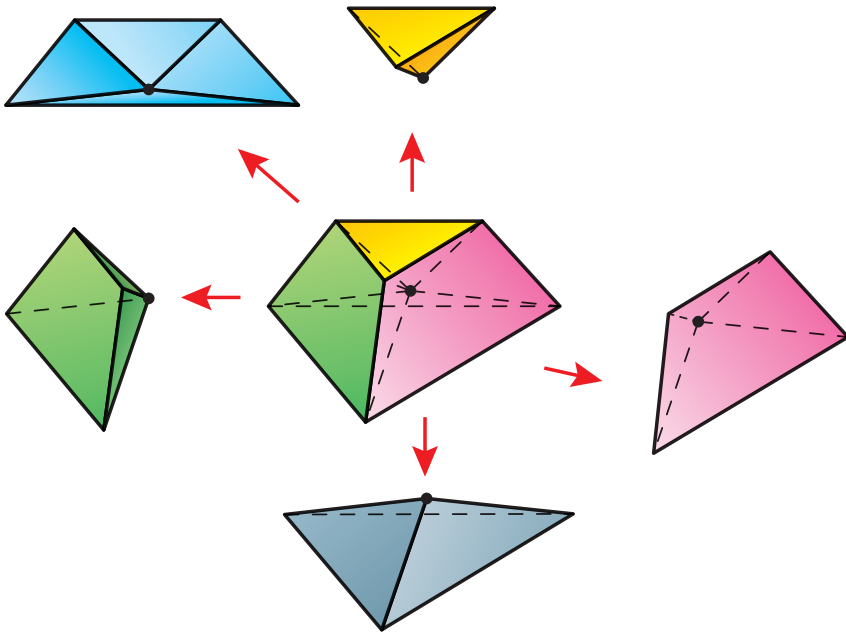


Рис. 15.4

Можна довести, що на піраміді можливо розбити не тільки опуклий, а й неопуклий многогранник. Тому об'єм довільного многогранника можна знайти як суму об'ємів пірамід, на які його розбито.

**Задача 2.** На рисунку 15.5 зображено многогранник, усі ребра якого дорівнюють  $a$ . Знайдіть об'єм цього многогранника.<sup>1</sup>

*Розв'язання.* Розіб'ємо даний многогранник на дві рівні правильні чотирикутні піраміди  $EABCD$  і  $FABCD$  (рис. 15.6). Оскільки всі ребра піраміди  $EABCD$  дорівнюють  $a$ , то нескладно встановити, що площа основи цієї піраміди дорівнює  $S = a^2$ , а висота дорівнює

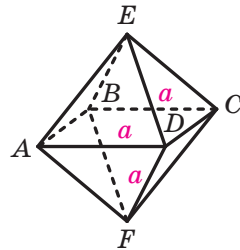


Рис. 15.5

<sup>1</sup> Многогранник на рисунку 15.5 називають правильним октаедром. Див. оповідання «Платонові тіла» на с. 37.

$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  (зробіть це самостійно). Тому об'єм піраміди  $EABCD$  дорівнює:

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3}a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Оскільки даний многогранник складається з двох таких пірамід, то його об'єм дорівнює:

$$V = 2V_{\text{пір}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Відповідь:  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ . ◀

На рисунку 15.7 зображено зрізану піраміду з висотою  $h$  і основами, площі яких дорівнюють  $S_1$  і  $S_2$ . Використовуючи формулу  $V = \int_0^h S(x)dx$ , можна показати, що об'єм  $V$  зрізаної піраміди з висотою  $h$  і основами, площі яких дорівнюють  $S_1$  і  $S_2$ , обчислюють за формулою

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

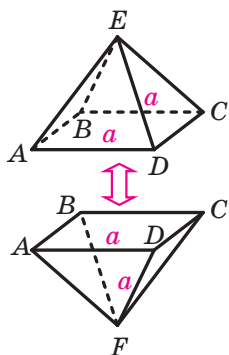


Рис. 15.6

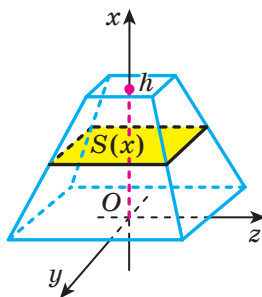
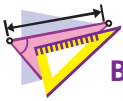


Рис. 15.7



1. За якою формулою обчислюють об'єм піраміди?
2. За якою формулою обчислюють об'єм зрізаної піраміди?



## ВПРАВИ

15.1.° Знайдіть об'єм піраміди:

- 1) основою якої є квадрат зі стороною 2 см, а висота піраміди дорівнює 2 см;
- 2) основою якої є ромб з діагоналями 2 см і 3 см, а висота піраміди дорівнює 10 см;
- 3) основою якої є трикутник зі сторонами 6 см і 9 см та кутом  $30^\circ$  між ними, а висота піраміди дорівнює 12 см.

15.2.° Знайдіть висоту піраміди, об'єм якої дорівнює  $20 \text{ см}^3$ , а площа основи —  $15 \text{ см}^2$ .

15.3.° Основою піраміди є прямокутник, сторони якого відносяться як 2 : 3, висота піраміди дорівнює 5 см, а об'єм —  $90 \text{ см}^3$ . Знайдіть периметр основи піраміди.

15.4.° Як зміниться об'єм піраміди, якщо кожную сторону її основи збільшити в 3 рази, а висоту — у 4 рази?

15.5.° Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 5 см, а бічне ребро — 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.

15.6.° Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $a$ , а бічне ребро —  $b$ . Знайдіть об'єм піраміди.

15.7.° Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.

15.8.° Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.

15.9.° Об'єм прямої призми  $ABCA_1B_1C_1$ , зображеної на рисунку 15.8, дорівнює  $V$ . Точка  $D$  — середина ребра  $AA_1$ . Знайдіть об'єм піраміди  $DABC$ .

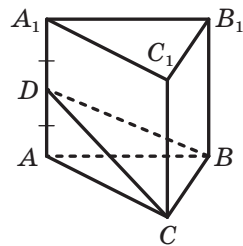


Рис. 15.8

15.10.° Дерев'яний куб, ребро якого дорівнює 12 см, розпилили на дві частини: трикутну піраміду та семигранник (рис. 15.9). Знайдіть об'єм семигранника, якщо площина розпилу проходить через середини трьох ребер куба, які мають спільну вершину.

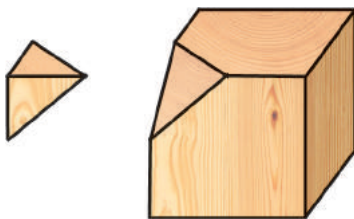


Рис. 15.9

- 15.11.° Основами зрізаної піраміди, висота якої дорівнює 6 см, є прямокутники. Сторони однієї основи дорівнюють 12 см і 16 см, а менша сторона другої — 3 см. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
- 15.12.° Знайдіть об'єм правильної трикутної зрізаної піраміди, сторони основ якої дорівнюють 5 см і 10 см, а висота — 9 см.
- 15.13.° Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює  $b$  і утворює з висотою піраміди кут  $\alpha$ .
- 15.14.° Знайдіть об'єм правильного тетраедра, ребро якого дорівнює  $a$ .
- 15.15.° Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює  $b$  і утворює з площиною основи кут  $\alpha$ .
- 15.16.° Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює  $b$ , а плоский кут при вершині піраміди дорівнює  $\beta$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.17.° Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $b$  і утворює зі стороною основи кут  $\alpha$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.18.° Основою піраміди є трикутник зі сторонами  $3\sqrt{10}$  см,  $3\sqrt{10}$  см і 6 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.19.° Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 24 см і 18 см, а кожне її бічне ребро дорівнює 25 см. Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.20.° Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом  $a$  та прилеглим до нього кутом  $\alpha$ . Кожне бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом  $\beta$ . Знайдіть об'єм піраміди.

- 15.21.\*** Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює  $b$ . Кут між бічними сторонами основи піраміди дорівнює  $\beta$ . Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною її основи кут  $\alpha$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.22.\*** Основою піраміди є ромб зі стороною  $a$  та кутом  $\alpha$ . Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $\beta$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.23.\*** Основою піраміди є трапеція, паралельні сторони якої дорівнюють 4 см і 10 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $45^\circ$ , а об'єм піраміди дорівнює  $\frac{280}{3}$  см<sup>3</sup>. Знайдіть висоту піраміди.
- 15.24.\*** Основою піраміди є трикутник зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.25.\*** Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною  $a$ . Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а третя нахилена до неї під кутом  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.26.\*** Прямокутник  $ABCD$  — основа піраміди  $MABCD$ . Грані  $ABM$  і  $CBM$  перпендикулярні до основи піраміди, грань  $ADM$  утворює з основою кут  $60^\circ$ , а грань  $CDM$  — кут  $30^\circ$ . Висота піраміди дорівнює  $3\sqrt{3}$  см. Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.27.\*** Грані  $DAB$  і  $DAC$  піраміди  $DABC$  перпендикулярні до основи, а грань  $DBC$  нахилена до основи під кутом  $\beta$ . Знайдіть об'єм піраміди, якщо  $AB = BC = m$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .
- 15.28.\*** Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють  $a$  і  $b$ ,  $a > b$ . Двогранний кут піраміди при ребрі більшої основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
- 15.29.\*** На рисунку 15.10 зображено бункер для зерна, який має форму правильної чотирикутної зрізаної піраміди (розміри на рисунку дано в сантиметрах). Скільки тонн зерна можна засипати в такий бункер, якщо маса 1 м<sup>3</sup> зерна становить 800 кг?
- 15.30.\*** Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють  $a$  і  $b$ ,  $a > b$ . Кут між бічним ребром піраміди та більшою основою дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

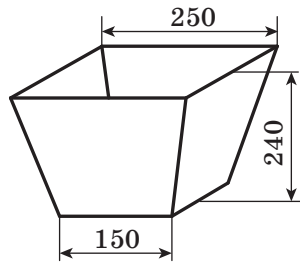



Рис. 15.10

- 15.31.\*** Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 12 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $60^\circ$ . Висоту піраміди поділили на 3 рівні частини та через точки поділу провели площини, паралельні основі. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди, яка міститься між цими площинами.
- 15.32.\*** Висота піраміди дорівнює 27 см. Площина, яка проходить паралельно основі цієї піраміди, відтинає від неї зрізану піраміду, площі основ якої дорівнюють  $32 \text{ см}^2$  і  $162 \text{ см}^2$ . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
-  **15.33.\*\*** Доведіть, що коли в многогранник, площа поверхні якого дорівнює  $S$ , вписано кулю радіуса  $r$ , то об'єм  $V$  цього многогранника можна знайти за формулою  $V = \frac{1}{3}Sr$ .
- 15.34.\*\*** Кожне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $a$ . Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.
- 15.35.\*\*** Основою піраміди є квадрат зі стороною 5 см. Одне з бічних ребер піраміди, що дорівнює 12 см, є висотою піраміди. Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.
- 15.36.\*\*** Відстань від вершини основи правильної трикутної піраміди до протилежної бічної грані дорівнює  $d$ , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.37.\*\*** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $a$ , а двогранний кут піраміди при її бічному ребрі дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.38.\*\*** Висота правильної трикутної піраміди дорівнює  $H$ , а двогранний кут піраміди при її бічному ребрі дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.39.\*\*** Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною  $a$  та кутом  $\alpha$  при основі. Бічна грань піраміди, яка містить основу рівнобедреного трикутника, перпендикулярна до площини цього трикутника, а дві інші грані нахилені до цієї площини під кутом  $\beta$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 15.40.\*\*** Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом  $a$  та прилеглим до нього кутом  $\alpha$ . Бічна грань піраміди, яка містить більшу сторону основи, перпендикулярна до площини основи, а дві інші грані нахилені до цієї площини під кутом  $\beta$ . Знайдіть об'єм піраміди.



- 15.41.\*\* Основи зрізаної піраміди — рівнобедрені прямокутні трикутники з гіпотенузами  $a$  і  $b$ ,  $a > b$ . Бічні грані піраміди, які містять катети основ, перпендикулярні до основ, а третя бічна грань утворює з більшою основою кут  $\beta$ . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
- 15.42.\*\* Основи зрізаної піраміди — квадрати зі сторонами  $a$  і  $b$ ,  $a > b$ . Одна з бічних граней піраміди є рівнобічною трапецією та перпендикулярна до основ, а протилежна їй грань утворює з більшою основою кут  $\alpha$ . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
- 15.43.\*\* Основи зрізаної піраміди — правильні трикутники зі сторонами  $a$  і  $b$ ,  $a > b$ . Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до основ, а дві інші утворюють з більшою основою кут  $\alpha$ . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 15.44. Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 12 см, а кут між ними —  $60^\circ$ . Знайдіть площу паралелограма.
- 15.45. Більша діагональ прямокутної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 9 см і 15 см, а більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.
- 15.46. Знайдіть площу трикутника  $ABC$ , якщо  $\overline{AB}(1; -2; 2)$  і  $\overline{AC}(4; -2; -4)$ .

## 16. Об'єми тіл обертання

У цьому пункті ви продовжите вивчати об'єми тіл і ознайомитеся з формулами для обчислення об'ємів тіл обертання: конуса, циліндра, кулі тощо. Як і під час вивчення об'ємів многогранників, користуватимемося формулою

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (1)$$

Скориставшись формулою (1), обчислимо об'єм конуса.

Розглянемо конус із висотою  $h$  і основою, радіус якої дорівнює  $r$ .

Уведемо систему координат так, щоб вершина конуса збігалася з початком координат, а висота конуса належала додатній півосі

абсцис (рис. 16.1). Тоді проекцією конуса на вісь абсцис є проміжок  $[0; h]$ .

Перерізом конуса площиною, у всіх точках якої абсциса дорівнює  $x_0$ , буде круг радіуса  $r_0$  (рис. 16.1). Оскільки площина перерізу паралельна площині основи конуса, то

$$\frac{x_0}{h} = \frac{r_0}{r}.$$

Отримуємо, що  $r_0 = \frac{rx_0}{h}$ . Тому площа перерізу дорівнює:

$$S(x_0) = \pi r_0^2 = \frac{\pi r^2 x_0^2}{h^2}.$$

Скориставшись формулою (1), запишемо:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2}{h^2} dx = \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h. \end{aligned}$$

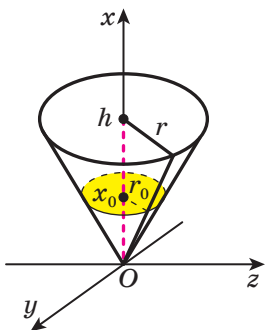


Рис. 16.1

Таким чином,

*об'єм конуса з висотою  $h$  і радіусом  $r$  основи обчислюють за формулою*

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Зауважимо, що  $\pi r^2 = S$ , де  $S$  — площа основи конуса, тому *об'єм конуса з висотою  $h$  і основою, площа якої дорівнює  $S$ , обчислюють за формулою*

$$V = \frac{1}{3} S h$$

Зверніть увагу, що отримана формула для обчислення об'єму конуса збігається з формулою для обчислення об'єму піраміди.

Міркуючи аналогічно, за допомогою формули (1) можна встановити, що

*об'єм зрізаного конуса можна обчислити за формулами*

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2),$$

$$V = \frac{h}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

де  $h$  — довжина висоти зрізаного конуса,  $r_1$  і  $r_2$  — радіуси основ,  $S_1$  і  $S_2$  — площі основ зрізаного конуса;

об'єм циліндра можна обчислити за формулами

$$V = \pi r^2 h,$$

$$V = Sh,$$

де  $h$  — довжина висоти циліндра,  $r$  — радіус основи циліндра,  $S$  — площа основи циліндра;

об'єм кулі можна обчислити за формулою

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

де  $r$  — радіус кулі.

Розглянемо кулю із центром  $O$ . Проведемо її діаметр  $AB$ . Нехай  $M$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ . Проведемо через точку  $M$  площину перпендикулярно до діаметра  $AB$ . Ця площина ділить кулю на два тіла, кожне з яких називають **кульовим сегментом** (рис. 16.2).

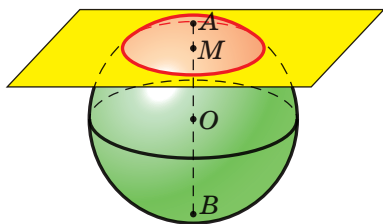


Рис. 16.2

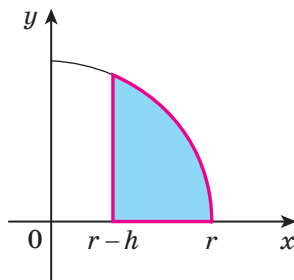


Рис. 16.3

Круг, що утворився в результаті перерізу кулі площиною, називають **основною** кожного з двох сегментів. Довжини відрізків  $AM$  і  $BM$  називають **висотами** сегментів, а точки  $A$  і  $B$  — їхніми **вершинами**.

Виведемо формулу для обчислення об'єму кульового сегмента.

Розглянемо функцію  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  на проміжку  $[r - h; r]$ . Її графіком є дуга кола (рис. 16.3). У результаті обертання навколо

осі абсцис криволінійної трапеції, пофарбованої на рисунку 16.3 блакитним кольором, утворюється кульовий сегмент заввишки  $h$ , який є частиною кулі радіуса  $r$ . Тоді об'єм цього кульового сегмента дорівнює:

$$\int_a^b S(x) dx = \int_{r-h}^r \pi(r^2 - x^2) dx = \pi \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{r-h}^r =$$

$$= \pi \left( r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2(r-h) + \frac{(r-h)^3}{3} \right).$$

Після перетворень отримуємо формулу для обчислення об'єму кульового сегмента

$$V = \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right)$$

Перетнемо кулю двома паралельними площинами. Частина кулі, що міститься між цими площинами, називають **кульовим шаром** (рис. 16.4).

Об'єм кульового шару можна знайти як різницю об'ємів двох кульових сегментів. Наприклад, об'єм кульового шару на рисунку 16.4 дорівнює різниці об'ємів кульових сегментів з висотами  $AC$  і  $AB$ .

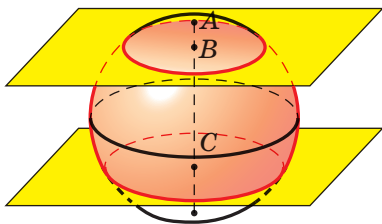


Рис. 16.4

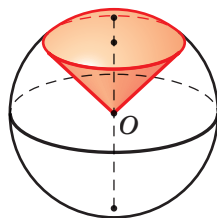


Рис. 16.5

Розглянемо конус із вершиною в центрі кулі та твірною, що дорівнює радіусу кулі (рис. 16.5). Основа цього конуса ділить кулю на два кульових сегменти. Розглянемо сегмент, вершина якого та центр кулі розташовані по різні боки від площини, що містить основу конуса. Об'єднання цього сегмента й конуса називають **кульовим сектором**.

Доведіть самостійно, що об'єм  $V$  кульового сектора можна обчислити за формулою

$$V = \frac{2}{3}\pi r h^2,$$

де  $h$  — висота відповідного кульового сегмента,  $r$  — радіус сфери.

**Задача.** Знайдіть об'єм конуса, твірна якого дорівнює  $l$  і нахилена до площини основи під кутом  $\varphi$ .

*Розв'язання.* На рисунку 16.6 зображено конус, твірна  $KL$  якого дорівнює  $l$  і нахилена до площини основи під кутом  $\varphi$ . Нехай  $O$  — центр основи конуса. Із прямокутного трикутника  $KLO$  знайдемо радіус  $r$  основи та висоту конуса  $h$ . Маємо:

$$r = l \cos \varphi,$$

$$h = l \sin \varphi.$$

Використовуючи формулу  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ , знаходимо об'єм конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

*Відповідь:*  $\frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi$ . ◀

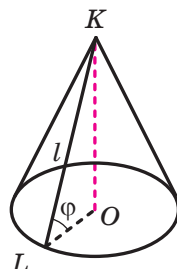
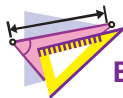


Рис. 16.6



1. За якою формулою обчислюють об'єм конуса?
2. За якою формулою обчислюють об'єм зрізаного конуса?
3. За якою формулою обчислюють об'єм циліндра?
4. За якою формулою обчислюють об'єм кулі?
5. За якою формулою обчислюють об'єм кульового сегмента?
6. За якою формулою обчислюють об'єм кульового сектора?




## ВПРАВИ

**16.1.°** Знайдіть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 4 см, а висота — 5 см.

**16.2.°** Знайдіть висоту циліндра, об'єм якого дорівнює  $98\pi$  см<sup>3</sup>, а радіус основи — 7 см.

- 16.3.° Знайдіть радіус основи циліндра, об'єм якого дорівнює  $252\pi$  см<sup>3</sup>, а висота — 7 см.
- 16.4.° Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання прямокутника зі сторонами  $a$  і  $b$  навколо прямої, яка містить його сторону, що дорівнює  $b$ .
- 16.5.° Висота циліндра дорівнює  $H$ , а осьовий переріз циліндра є квадратом. Знайдіть об'єм циліндра.
- 16.6.° Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 20 см і утворює з площиною основи кут  $30^\circ$ . Знайдіть об'єм циліндра.
- 16.7.° У циліндричну посудину, наповнену водою, занурили металеву деталь. При цьому виявилось, що деталь повністю покрито водою. Рівень води в посудині піднявся на 14 см, не досягнувши краю посудини. Знайдіть об'єм деталі, якщо внутрішній діаметр посудини дорівнює 20 см.
- 16.8.° Знайдіть об'єм конуса, радіус основи якого дорівнює 6 см, а висота — 5 см.
- 16.9.° Знайдіть висоту конуса, об'єм якого дорівнює  $24\pi$  см<sup>3</sup>, а радіус основи — 3 см.
- 16.10.° Об'єм конуса дорівнює  $50\pi$  см<sup>3</sup>, а його висота — 6 см. Знайдіть радіус основи конуса.
- 16.11.° Купа щебеню має форму конуса, радіус основи якого 2,1 м, а твірна — 3,5 м. Скільки тонн становить маса щебеню, зібраного в цю купу, якщо маса  $1$  м<sup>3</sup> щебеню дорівнює 3 т? Відповідь округліть до одиниць.
- 16.12.° Осьовий переріз конуса є рівностороннім трикутником, а радіус основи конуса дорівнює  $R$ . Знайдіть об'єм конуса.
- 16.13.° Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 4 см, а кут між твірною та площиною основи дорівнює  $30^\circ$ .
- 16.14.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а один із кутів —  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання даного трикутника навколо прямої, яка містить катет, прилеглий до даного кута.
- 16.15.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см, а один із катетів — 5 см. Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання цього трикутника навколо прямої, яка містить даний катет.

- 16.16.° Знайдіть об'єм зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 8 см і 14 см, а кут між його твірною та площиною більшої основи дорівнює  $45^\circ$ .
- 16.17.° Знайдіть об'єм зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 1 см і 3 см, а твірна дорівнює  $2\sqrt{5}$  см.
- 16.18.° Знайдіть об'єм кулі, радіус якої дорівнює 3 см.
-  16.19.° Доведіть, що об'єми двох куль відносяться як куби їхніх радіусів.
- 16.20.° У скільки разів треба збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився в 5 разів?
- 16.21.° Об'єми двох куль відносяться як 8 : 125. Знайдіть відношення їхніх радіусів.
- 16.22.° Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо куба, ребро якого дорівнює  $a$ .
- 16.23.° Знайдіть об'єм кулі, вписаної в куб, ребро якого дорівнює  $a$ .
- 16.24.\* Радіус кулі дорівнює 8 см, а висота її сегмента — 3 см. Знайдіть:
- 1) об'єм сегмента;
  - 2) об'єм кульового сектора, що відповідає даному сегменту.
- 16.25.\* Об'єм кульового сегмента дорівнює  $360\pi$  см<sup>3</sup>, а його висота — 6 см. Знайдіть:
- 1) радіус кулі;
  - 2) об'єм кульового сектора, що відповідає даному сегменту.
- 16.26.\* Кусок алюмінієвого дроту діаметром 10 мм має масу 16,3 кг. Густина алюмінію дорівнює  $2600$  кг/м<sup>3</sup>. Скільки метрів становить довжина дроту? Відповідь округліть до одиниць.
- 16.27.\* Свинцева труба, товщина стінки якої дорівнює 4 мм, має внутрішній діаметр 32 мм. Густина свинцю дорівнює  $11\,400$  кг/м<sup>3</sup>. Скільки кілограмів становить маса труби, якщо її довжина дорівнює 15 м? Відповідь округліть до одиниць.
- 16.28.\* У нижній основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює  $\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди, утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Знайдіть об'єм циліндра, якщо його твірна дорівнює  $m$ .
- 16.29.\* У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом  $90^\circ$ , а із центра верхньої основи — під кутом  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює  $R$ .

- 16.30.** Паралельно осі циліндра проведено переріз, відстань від площини якого до осі циліндра дорівнює 12 см. Діагональ перерізу дорівнює  $10\sqrt{5}$  см, а радіус основи циліндра — 13 см. Знайдіть об'єм циліндра.
- 16.31.** Площина, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює  $\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Діагональ отриманого перерізу утворює з віссю циліндра кут  $\beta$  і віддалена від неї на відстань  $d$ . Знайдіть об'єм циліндра.
- 16.32.** Кут в осьовому перерізі конуса при його вершині дорівнює  $\alpha$ , а відстань від центра основи конуса до твірної дорівнює  $m$ . Знайдіть об'єм конуса.
- 16.33.** В основі конуса хорда завдовжки  $a$  стягує дугу, градусна міра якої дорівнює  $\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Кут між твірною конуса та площиною його основи дорівнює  $\beta$ . Знайдіть об'єм конуса.
- 16.34.** Хорда основи конуса стягує дугу, градусна міра якої дорівнює  $60^\circ$ . Відрізок, що сполучає вершину конуса із серединою даної хорди, утворює з площиною основи конуса кут  $60^\circ$ . Висота конуса дорівнює  $\sqrt{3}$  см. Знайдіть об'єм конуса.
- 16.35.** Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює  $\alpha$ , проведено площину. Кут між цією площиною та площиною основи конуса дорівнює  $\beta$ . Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює  $b$ .
- 16.36.** Площина, проведена через дві твірні конуса, перетинає його основи по хорді, яку видно із центра основи конуса під кутом  $\alpha$ . Кут між проведеною площиною та площиною основи конуса дорівнює  $\beta$ . Знайдіть об'єм конуса, якщо радіус його основи дорівнює  $R$ .
- 16.37.** Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання трикутника зі сторонами 10 см, 17 см і 21 см навколо прямої, яка містить його більшу сторону.
- 16.38.** Рівнобічну трапецію з основами 1 см і 25 см обертають навколо прямої, що містить її більшу основу. Знайдіть об'єм отриманого тіла, якщо відомо, що в дану трапецію можна вписати коло.
- 16.39.** Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання прямокутного трикутника навколо прямої, що містить гіпотенузу цього трикутника, якщо відомо його катет  $a$  та прилеглий до цього катета кут  $\beta$ .



16.40.\* Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, градусна міра дуги якого становить  $120^\circ$ . Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його бічної поверхні дорівнює  $9\pi$  см<sup>2</sup>.

16.41.\* Розгорткою бічної поверхні конуса є півкруг, радіус якого дорівнює 8 см. Знайдіть об'єм конуса.

16.42.\* У конус вписано кулю, радіус якої дорівнює 3 см. Знайдіть об'єм конуса, якщо радіус його основи дорівнює 6 см.

16.43.\* У конус вписано кулю, радіус якої дорівнює  $r$ . Знайдіть об'єм конуса, якщо кут між його твірною та площиною основи дорівнює  $\alpha$ .

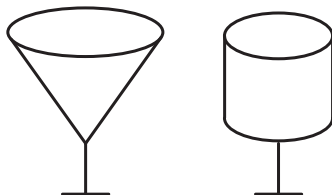


Рис. 16.7

16.44.\* Із посудини, що має форму конуса з висотою 8 см і діаметром основи 12 см, наповненої до країв водою, перелили воду в посудину, що має форму циліндра (рис. 16.7). Діаметр основи циліндра дорівнює 8 см. Якою має бути найменша висота циліндричної посудини, щоб вода з неї не вилівалася?

16.45.\* Стіг сіна має форму циліндра з конічною верхівкою. Радіус його основи дорівнює 2,5 м, висота всього стогу — 4 м, а висота його циліндричної частини — 2,2 м. Густина сіна дорівнює  $30$  кг/м<sup>3</sup>. Скільки тонн становить маса стогу? Відповідь округліть до десятих.

16.46.\* Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють  $R$  і  $r$ ,  $R > r$ . Знайдіть відношення об'єму даного зрізаного конуса до об'єму конуса, частиною якого він є.

16.47.\* Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см і 6 см. Твірну зрізаного конуса видно з точки перетину діагоналей його осьового перерізу, який проходить через цю твірну, під кутом  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

16.48.\* Радіус однієї з основ зрізаного конуса в 4 рази більший за радіус другої основи. Висота зрізаного конуса дорівнює 8 см, а діагональ його осьового перерізу — 17 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

16.49.\* Ромб зі стороною 6 см і кутом  $60^\circ$  обертається навколо прямої, яка проходить через вершину гострого кута ромба перпендикулярно до його сторони. Знайдіть об'єм утвореного тіла.

- 16.50.\*** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона — 10 см. Трикутник обертається навколо прямої, яка проходить через вершину кута при його основі перпендикулярно до цієї основи. Знайдіть об'єм утвореного тіла.
- 16.51.\*** Металеву кулю радіуса 15 см розплавляли та з отриманого металу відлили кілька куль, радіуси яких дорівнюють 3 см. Скільки відлили таких куль? Втратами металу під час переплавки знехтувати.
- 16.52.\*** Три металеві кулі, радіуси яких дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см, розплавляли та з отриманого металу відлили одну кулю. Який радіус отриманої кулі? Втратами металу під час переплавки знехтувати.
- 16.53.\*** Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а його твірна — 10 см. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в даний конус.
- 16.54.\*** Знайдіть об'єм кулі, вписаної в правильну трикутну призму, сторона основи якої дорівнює  $2\sqrt{3}$  см.
- 16.55.\*** Висота конуса дорівнює  $H$ , а його осьовий переріз є правильним трикутником. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо даного конуса.
- 16.56.\*** Твірна конуса дорівнює  $a$ , а кут між нею та площиною основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо даного конуса.
- 16.57.\*** У крузі проведено хорду  $MN$ , паралельну діаметру  $AB$ . Круговий сегмент, що обмежений хордою  $MN$  і не має спільних точок з діаметром  $AB$ , обертається навколо прямої  $AB$ . Знайдіть об'єм утвореного тіла, якщо  $MN = 1$  см.
- 16.58.\*** Дві паралельні площини перетинають кулю радіуса 13 см. Радіуси кругів, що утворилися в перерізі, дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть об'єм кульового шару, обмеженого цими кругами.
- 16.59.\*\*** Об'єм правильної трикутної призми дорівнює  $V$ . Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в дану призму.
- 16.60.\*\*** Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, паралельні сторони якої дорівнюють 2 см і 8 см. Діагональ призми дорівнює  $3\sqrt{10}$  см. Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в дану призму.
- 16.61.\*\*** Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $b$  і утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо даної піраміди.

- 16.62.** Одна зі сторін основи трикутної піраміди дорівнює 12 см, а протилежний їй кут основи —  $60^\circ$ . Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом  $30^\circ$ . Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо даної піраміди.
- 16.63.** Основою піраміди є ромб зі стороною  $a$  та кутом  $\alpha$ . Знайдіть об'єм конуса, вписаного в дану піраміду, якщо кут між його твірною та площиною основи піраміди дорівнює  $\beta$ .
- 16.64.** Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см, а двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $60^\circ$ . Знайдіть об'єм конуса, вписаного в дану піраміду.
- 16.65.** Твірна зрізаного конуса дорівнює  $a$ , а кут між нею та площиною більшої основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть об'єм зрізаного конуса, якщо діагоналі його осьового перерізу перпендикулярні.
- 16.66.** У зрізаний конус вписано кулю, радіус якої дорівнює  $r$ . Діаметр більшої основи зрізаного конуса видно із центра вписаної кулі під кутом  $\alpha$ . Знайдіть об'єм зрізаного конуса.
- 16.67.** Знайдіть об'єм кулі, вписаної в правильний тетраедр, ребро якого дорівнює  $a$ .
- 16.68.** Бічне ребро правильної піраміди дорівнює  $a$  і утворює з її основою кут  $\alpha$ . Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо даної піраміди.



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 16.69.** Діагоналі квадрата  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Через середину відрізка  $BO$  проведено пряму, паралельну діагоналі  $AC$ . Знайдіть відношення площ фігур, на які ця пряма розбиває квадрат  $ABCD$ .
- 16.70.** Коло, центр якого належить гіпотенузі прямокутного рівнобедреного трикутника з катетом  $a$ , дотикається до одного з катетів і проходить через вершину протилежного йому гострого кута. Знайдіть радіус цього кола.
- 16.71.** Медіани грані  $ABC$  тетраедра  $DABC$  перетинаються в точці  $O$ . На ребрі  $CD$  позначили точку  $M$  так, що  $CM : MD = 3 : 1$ . Визначте вектор  $\overrightarrow{OM}$  через вектори  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AD}$ .

## 17. Площа сфери

Вивчаючи такі тіла обертання, як циліндр і конус, ви дізналися, що поверхню цих тіл можна розгорнути на площину (рис. 5.9, 7.6). Площами поверхонь (площами повних поверхонь) циліндра та конуса називають площі їхніх розгорток.

На відміну від циліндра та конуса, сферу (поверхню кулі) неможливо розгорнути на площину, тому площу сфери визначають в інший спосіб.

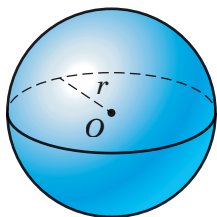


Рис. 17.1

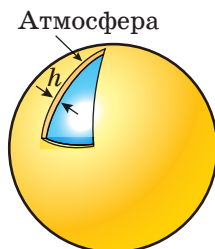


Рис. 17.2

Розглянемо кулю із центром у точці  $O$  радіуса  $r$  (рис. 17.1). Уявимо, що на цю кулю нанесли тонкий однорідний шар фарби (рис. 17.2). Позначимо площу сфери через  $S_{\text{сф}}$ , товщину шару фарби —  $h$ , а об'єм фарби —  $V_h$ . Фарба утворюватиме так звану *атмосферу* кулі завтовшки  $h$ . Зрозуміло, що атмосфера кулі завтовшки  $h$  складається з усіх точок кулі із центром у точці  $O$  і радіусом  $r + h$ , які не належать даній кулі.

Оскільки фарбу нанесено на кулю однорідним тонким шаром, то природно вважати, що

$$V_h \approx S_{\text{сф}} h$$

або

$$S_{\text{сф}} \approx \frac{V_h}{h}.$$

Зрозуміло, що чим тонший шар фарби, тим точнішою є записана наближена рівність.

На підставі цієї рівності введемо означення площі поверхні кулі.

**Означення.** Площею сфери (поверхні кулі) називають границю відношення  $\frac{V_h}{h}$  при  $h$ , що прямує до нуля, де  $V_h$  — об'єм атмосфери кулі завтовшки  $h$ .

**Теорема 17.1.** *Площа сфери радіуса  $r$  дорівнює*

$$S_{\text{сф}} = 4\pi r^2$$

*Доведення.* Розглянемо кулю радіуса  $r$  (рис. 17.1). Знайдемо об'єм  $V_h$  атмосфери кулі завтовшки  $h$  (рис. 17.2):

$$V_h = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi((r+h)^3 - r^3).$$

Застосовуючи формулу різниці кубів двох виразів, отримуємо:

$$V_h = \frac{4}{3}\pi((r+h)^3 - r^3) = \frac{4}{3}\pi h((r+h)^2 + (r+h)r + r^2).$$

Далі запишемо:

$$S_{\text{сф}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V_h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{3}\pi((r+h)^2 + (r+h)r + r^2) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2. \quad \blacktriangleleft$$



1. Що називають площею поверхні кулі?
2. За якою формулою обчислюють площу сфери?

**ВПРАВИ**

- 17.1.° Радіус сфери дорівнює 5 см. Чому дорівнює її площа?
- 17.2.° Знайдіть площу сфери, рівняння якої має вигляд  $x^2 + y^2 + z^2 = 13$ .
- 17.3.° Знайдіть радіус сфери, площа якої дорівнює  $256\pi$  см<sup>2</sup>.
- 17.4.° Радіус кулі збільшили в 7 разів. Як при цьому змінилася площа її поверхні?
- 17.5.° Як треба змінити радіус кулі, щоби площа її поверхні зменшилася в 3 рази?
- 17.6.° Об'єми двох куль відносяться як 27 : 125. Як відносяться площі їхніх поверхонь?
- 17.7.° Площа великого круга кулі дорівнює  $S$ . Знайдіть площу поверхні даної кулі.
- 17.8.° Площина, віддалена від центра сфери на 7 см, перетинає сферу по лінії, довжина якої дорівнює  $6\pi$  см. Знайдіть площу сфери.
- 17.9.° Площа перерізу кулі площиною, віддаленою від її центра на 4 см, дорівнює  $24\pi$  см<sup>2</sup>. Знайдіть площу поверхні кулі.

- 17.10.\*** Скільки метрів тканини завширшки 1 м знадобиться для виготовлення повітряної кулі, радіус якої дорівнює 2 м, якщо на з'єднання деталей кулі та відходи витрачається 10 % тканини? Відповідь округліть до десятих.
- 17.11.\*** У якому випадку витрачається більше сировини: для нікелювання однієї кулі діаметром 6 см або для нікелювання 8 куль діаметром 1 см кожна?
- 17.12.\*** Площі двох паралельних перерізів кулі, розміщених по один бік від її центра, дорівнюють  $400\pi$  см<sup>2</sup> і  $49\pi$  см<sup>2</sup>. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо відстань між площинами перерізів дорівнює 9 см.
- 17.13.\*** Два перерізи кулі мають тільки одну спільну точку, а їхні площини перпендикулярні. Радіус одного перерізу дорівнює 5 см, а радіус другого — 12 см. Знайдіть площу поверхні кулі.
- 17.14.\*** Площі двох паралельних перерізів кулі, розміщених по різні боки від її центра, дорівнюють  $9\pi$  см<sup>2</sup> і  $25\pi$  см<sup>2</sup>. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо відстань між площинами перерізів дорівнює 8 см.
- 17.15.\*** Знайдіть відношення площі сфери, вписаної в куб, до площі сфери, описаної навколо даного куба.
- 17.16.\*** Знайдіть площу сфери, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.
- 17.17.\*** Осьовим перерізом циліндра є квадрат. Площа повної поверхні циліндра дорівнює  $S$ . Знайдіть площу сфери, описаної навколо даного циліндра.
- 17.18.\*** Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник. Знайдіть відношення площі сфери, вписаної в даний конус, до площі сфери, описаної навколо нього.
- 17.19.\*\*** Гіпотенуза та катети прямокутного трикутника є діаметрами трьох куль. Знайдіть площу поверхні більшої кулі, якщо площі поверхонь менших куль дорівнюють  $S_1$  і  $S_2$ .
- 17.20.\*\*** Один із кутів трикутника дорівнює  $120^\circ$ . Сторони трикутника є діаметрами трьох куль. Знайдіть площу поверхні більшої кулі, якщо площі поверхонь менших куль дорівнюють  $S_1$  і  $S_2$ .
- 17.21.\*\*** Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом  $a$  і прилеглим до нього кутом  $\alpha$ . Бічні ребра піраміди утворюють із площиною її основи кут  $\beta$ . Знайдіть площу поверхні кулі, описаної навколо даної піраміди.

**17.22.** Висота правильної трикутної піраміди дорівнює  $H$ , а двограний кут піраміди при ребрі основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної в дану піраміду.



### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**17.23.** У коло вписано чотирикутник  $ABCD$ . Кут  $A$  в 3 рази більший за кут  $C$ , а кут  $B$  у 5 разів менший від кута  $A$ . Знайдіть кут  $D$ .

**17.24.** Відрізок  $BM$  — медіана трикутника  $ABC$ . Відомо, що  $BM = m$ ,  $\angle ABM = \alpha$ ,  $\angle MBC = \beta$ . Знайдіть сторону  $AB$ .

**17.25.** Модуль вектора  $\vec{a} (2; m + 1; m + 5)$  дорівнює  $2\sqrt{3}$ . Чи є вектор  $\vec{a}$  колінеарним вектору  $\vec{b} (-1; m + 4; m + 2)$ ?



### ОЗНАЧЕННЯ МІНКОВСЬКОГО

Вивчаючи стереометрію, ви, можливо, звернули увагу, що в підручнику наявні два різних підходи до поняття площі поверхні тіла. Так, площі поверхонь циліндра та конуса визначено як площі їхніх розгортки на площину. Аналогічно, за суттю, визначено й площу поверхні довільного многогранника. Справді, якщо поверхню многогранника розрізати по всіх ребрах і утворені при цьому многокутники (грані многогранника) розкласти на площині без перетинів, то буде отримано розгортку многогранника на площину. Зрозуміло, що площа поверхні многогранника дорівнює площі його розгортки.

На жаль, ідея використати розгортку для обчислення площі поверхні тіла є неприйнятною в загальному випадку. Наприклад, сферу неможливо розгорнути на площину, тому площу сфери визначають інакше. Виявляється, означення площі сфери можна розвинути й узагальнити для довільних поверхонь у просторі.

Нагадаємо, що, даючи означення площі сфери, ми розглядали атмосферу — множину точок, які розташовані поза сферою та віддалені від неї на відстань, що не перевищує  $h$ .

У разі довільної поверхні використовують так званий обкутуючий шар.

**Означення.** **Обкутуючим шаром** завтовшки  $h$  поверхні  $\Phi$  називають множину точок, які розташовані від поверхні  $\Phi$  на відстані, не більшій ніж  $h$ .

Точки обкутуючого шару, на відміну від атмосфери, розміщені з обох боків поверхні. Такий підхід дає змогу не перейматися тим, з якого боку поверхні розміщено точки обкутуючого шару.

Наприклад, обкутуючим шаром завтовшки  $h$  сфери радіуса  $r$ , де  $h < r$ , із центром  $O$  буде множина точок кулі радіуса  $r + h$  із центром  $O$ , які не лежать усередині кулі радіуса  $r - h$  із тим самим центром (рис. 17.3).

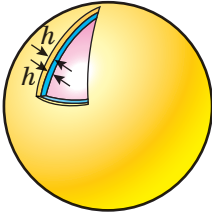


Рис. 17.3

Позначимо  $S_\Phi$  — площу поверхні  $\Phi$ ,  $V_h$  — об'єм обкутуючого шару завтовшки  $h$  поверхні  $\Phi$ . Оскільки точки обкутуючого шару розміщено з обох боків поверхні  $\Phi$ , то має місце наближена рівність

$$S_\Phi \approx \frac{V_h}{2h}.$$

Зрозуміло, що чим меншою є величина  $h$ , тим точнішою є записана наближена рівність.

Спіраючись на цю рівність, уведемо означення площі поверхні.

**Означення.** Площею поверхні  $\Phi$  називають границю відношення  $\frac{V_h}{2h}$  при  $h$ , що прямує до нуля, де  $V_h$  — об'єм обкутуючого шару завтовшки  $h$  цієї поверхні, тобто

$$S_\Phi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V_h}{2h}.$$

Це означення запропонував один із видатних математиків свого часу — Герман Мінковський.

Покажемо, що означення Мінковського узгоджується з раніше введеним означенням площі сфери.

Справді, розглянемо сферу радіуса  $r$  та її обкутуючий шар завтовшки  $h$ . Тоді об'єм  $V_h$  цього шару дорівнюватиме різниці об'ємів куль з радіусами  $r + h$  і  $r - h$ . Маємо:

$$\begin{aligned} V_h &= \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi(r-h)^3 = \frac{4}{3}\pi((r+h)^3 - (r-h)^3) = \\ &= \frac{4}{3}\pi(6r^2h + 2h^3) = \frac{8}{3}\pi h(3r^2 + h^2). \end{aligned}$$

Тому згідно з означенням Мінковського площа сфери дорівнює:

$$S_\Phi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V_h}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \cdot \frac{8}{3}\pi h(3r^2 + h^2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{3}\pi(3r^2 + h^2) = 4\pi r^2,$$

що збігається з отриманою раніше формулою площі сфери.



Розглядаючи обкутуючі шари поверхонь відомих вам тіл, наприклад циліндра, конуса, многогранників, ви самостійно можете перевірити, що означення Мінковського узгоджується також з означеннями площ поверхонь цих тіл.

Знайдемо, користуючись означенням Мінковського, площу поверхні тіла, яке за формою нагадує «бублик» або «рятівний круг» (рис. 17.4). У геометрії це тіло називають *тором*. Це тіло отримують у результаті обертання круга навколо прямої, яка лежить у площині цього круга та його не перетинає (рис. 17.5). Під час такого обертання центр круга описує коло, яке називають *осьовим колом тора* (червона лінія на рисунку 17.5).



Рис. 17.4

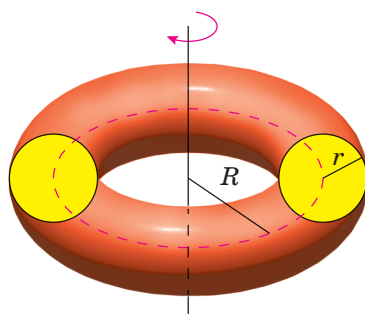


Рис. 17.5

Використовуючи формулу для обчислення об'єму тіла обертання, вивчену в курсі алгебри і початків аналізу 11 класу, можна довести, що об'єм тора обчислюють за формулою

$$V_{\text{тора}} = 2\pi^2 r^2 R,$$

де  $r$  — радіус круга,  $R$  — радіус осьового кола тора (див. рис. 17.5).

### Герман Мінковський

(1864–1909)



Народився в Алексотах (нині Каунаський район Литви). Викладав у Боннському, Кенігсберзькому, Цюрихському, Геттингенському університетах. Основні здобутки — у теорії чисел, геометрії та математичній фізиці. Був одним з основоположників сучасної геометричної теорії чисел. У 1896 р. встановив деякі важливі властивості багатовимірних опуклих многогранників і тим самим започаткував важливий розділ геометрії — теорію опуклих тіл.

Перейдемо до обчислення площі поверхні тора. Розглянемо тор, утворений обертанням круга радіуса  $r$ , з осьовим колом радіуса  $R$ . Об'єм  $V_h$  його обкутуючого шару завтовшки  $h$  дорівнює різниці об'ємів торів, утворених обертанням кругів радіусів  $r+h$  і  $r-h$ , зі спільним осьовим колом радіуса  $R$  (рис. 17.6).

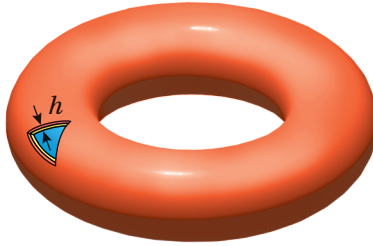


Рис. 17.6

Маємо:

$$\begin{aligned} V_h &= 2\pi^2 (r+h)^2 R - 2\pi^2 (r-h)^2 R = \\ &= 2\pi^2 R((r+h)^2 - (r-h)^2) = 8\pi^2 Rrh. \end{aligned}$$

Тому площа поверхні тора дорівнює:

$$S_{\text{тора}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V_h}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8\pi^2 Rrh}{2h} = 4\pi^2 rR.$$



8. Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом  $\alpha$ . Бічне ребро, яке проходить через вершину другого гострого кута основи, перпендикулярне до площини основи та дорівнює  $h$ , а бічна грань, яка містить катет, прилеглий до даного кута  $\alpha$ , нахилена до площини основи під кутом  $\beta$ . Знайдіть об'єм піраміди.

А)  $\frac{1}{6}h^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta$ ;

В)  $\frac{1}{6}h^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta$ ;

Б)  $\frac{1}{6}h^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta$ ;

Г)  $\frac{1}{6}h^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta$ .

9. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною  $b$  і кутом  $\beta$  при основі. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $\alpha$ . Знайдіть об'єм піраміди.

А)  $\frac{1}{6}b^3 \sin 2\beta \sin \beta \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha$ ;

В)  $\frac{1}{6}b^3 \sin 2\beta \cos \beta \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha$ ;

Б)  $\frac{1}{3}b^3 \sin 2\beta \sin \beta \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha$ ;

Г)  $\frac{1}{3}b^3 \sin 2\beta \cos \beta \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha$ .

10. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 3 см і 9 см, а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

А)  $117 \text{ см}^3$ ;

В)  $63 \text{ см}^3$ ;

Б)  $117\sqrt{2} \text{ см}^3$ ;

Г)  $63\sqrt{2} \text{ см}^3$ .

11. Обчисліть об'єм циліндра, осевим перерізом якого є квадрат зі стороною 8 см.

А)  $64\pi \text{ см}^3$ ;

В)  $128\pi \text{ см}^3$ ;

Б)  $96\pi \text{ см}^3$ ;

Г)  $512\pi \text{ см}^3$ .

12. Висота конуса дорівнює 9 см, а його об'єм —  $6\pi \text{ см}^3$ . Чому дорівнює площа основи конуса?

А)  $2 \text{ см}^2$ ;

В)  $3\pi \text{ см}^2$ ;

Б)  $2\pi \text{ см}^2$ ;

Г)  $6 \text{ см}^2$ .

13. Радіуси основ циліндра і конуса є рівними, висота циліндра дорівнює 8 см, а висота конуса — 6 см. Знайдіть відношення об'єму циліндра до об'єму конуса.

А)  $4 : 3$ ;

В)  $4 : 1$ ;

Б)  $1 : 1$ ;

Г)  $3 : 1$ .



**ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3****Об'єм тіла**

Об'ємом тіла називають додатну величину, яка має такі властивості:

- 1) рівні тіла мають рівні об'єми;
- 2) якщо тіло складене з кількох інших тіл, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих тіл;
- 3) за одиницю виміру об'єму тіла беруть одиничний куб, тобто куб з ребром, яке дорівнює одиниці виміру довжини.

**Об'єм призми**

$V = Sh$ , де  $S$  — площа основи призми,  $h$  — довжина висоти призми.

**Об'єм піраміди**

$V = \frac{1}{3}Sh$ , де  $S$  — площа основи піраміди,  $h$  — довжина висоти піраміди.

**Об'єм зрізаної піраміди**

$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$ , де  $h$  — довжина висоти зрізаної піраміди,  $S_1$  і  $S_2$  — площі основ.

**Об'єм конуса**

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ , де  $r$  — радіус основи конуса,  $h$  — довжина висоти конуса.

**Об'єм зрізаного конуса**

$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ , де  $h$  — довжина висоти зрізаного конуса,  $r_1$  і  $r_2$  — радіуси основ.

**Об'єм циліндра**

$V = \pi r^2 h$ , де  $r$  — радіус основи циліндра,  $h$  — довжина висоти циліндра.

**Об'єм кулі**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ де } r \text{ — радіус кулі.}$$

**Об'єм кульового сегмента**

$$V = \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right).$$

**Об'єм кульового сектора**

$$V = \frac{2}{3}\pi r h^2.$$

**Площа сфери**

$$S = 4\pi r^2, \text{ де } r \text{ — радіус сфери.}$$

## § 4. ПОВТОРЕННЯ

- 18.** Вправи для повторення курсу геометрії 11 класу
- 19.** Вправи для повторення курсу планіметрії



## 18. Вправи для повторення курсу геометрії 11 класу

### 1. Многогранники

- 18.1. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 25 см, а діагональ бічної грані — 20 см. Знайдіть висоту призми.
- 18.2. Сторони основи прямої трикутної призми відносяться як  $15 : 10 : 9$ . Знайдіть сторони основи, якщо площа бічної поверхні призми дорівнює  $816 \text{ см}^2$ , а бічне ребро призми — 12 см.
- 18.3. Перерізом похилої чотирикутної призми площиною, перпендикулярною до бічного ребра, є рівнобічна трапеція, у яку можна вписати коло, а основи цієї трапеції дорівнюють 5 см і 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 8 см.
- 18.4. Висота прямої призми  $ABCA_1B_1C_1$  дорівнює 12 см,  $AC = BC$ ,  $AB = 8$  см, а діагональ грані  $BB_1C_1C$  дорівнює 13 см. Знайдіть площу перерізу призми, який проходить через пряму  $AB$  і точку  $C_1$ .
- 18.5. Сторона основи правильної шестикутної призми дорівнює  $a$ , найбільша діагональ призми нахилена до площини основи під кутом  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 18.6. Дано пряму призму  $ABCA_1B_1C_1$ . Кут між площинами  $ABC$  і  $A_1BC$  дорівнює  $\beta$ . Знайдіть висоту призми, якщо  $BC = a$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .
- 18.7. Кут між діагоналлю бічної грані правильної трикутної призми та сусідньою бічною гранню дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 8 см.
- 18.8. Площа поверхні куба дорівнює  $216 \text{ см}^2$ . Знайдіть площу його діагонального перерізу.
- 18.9. Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $M$  — центр грані  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , точка  $K$  — центр грані  $AB B_1 A_1$ . Знайдіть кут між прямою  $MK$  і площиною  $ABC$ .
- 18.10. Точки  $E$ ,  $F$  і  $M$  — середини ребер  $AD$ ,  $CD$  і  $BB_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  відповідно. Знайдіть кут між площинами  $ABC$  і  $EFM$ .
- 18.11. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 9 см і 8 см, а кут між ними дорівнює  $60^\circ$ . Більша діагональ основи

- дорівнює меншій діагоналі паралелепіпеда. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 18.12.** Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною  $a$  та гострим кутом  $\alpha$ . Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.
- 18.13.** Бічне ребро похилого паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 6 см, а площа бічної поверхні —  $312 \text{ см}^2$ . Відстань між ребрами  $AA_1$  і  $BB_1$  дорівнює 5 см, а між ребрами  $BB_1$  і  $DD_1$  — 19 см. Знайдіть двогранні кути паралелепіпеда при ребрах  $AA_1$  і  $BB_1$ .
- 18.14.** Діагональним перерізом правильної чотирикутної піраміди є прямокутний трикутник, площа якого дорівнює  $S$ . Знайдіть площу основи піраміди.
- 18.15.** Бічне ребро правильної піраміди  $MABCD$  дорівнює стороні основи.
- 1) Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через середину ребра  $AB$  паралельно площині  $AMD$ .
  - 2) Знайдіть відношення площі перерізу до площі основи піраміди.
- 18.16.** Основою піраміди є прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює  $a$ . Кут між цією стороною та діагоналлю прямокутника дорівнює  $\alpha$ . Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Знайдіть висоту піраміди.
- 18.17.** Основою піраміди є рівнобічна трапеція, більша основа якої дорівнює 15 см, а бічна сторона — 10 см. Двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють  $60^\circ$ . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
- 18.18.** Основою піраміди є ромб, діагоналі якого дорівнюють 40 см і 30 см, а висота піраміди дорівнює 5 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо двогранні кути при ребрах її основи є рівними.
- 18.19.** Основою піраміди  $DABC$  є прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ). Площини  $ABD$  і  $ACD$  перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо  $AB = 26 \text{ см}$ ,  $BC = 10 \text{ см}$ ,  $AD = 18 \text{ см}$ .
- 18.20.** Основою піраміди є квадрат, а одне з бічних ребер дорівнює стороні цього квадрата й перпендикулярне до площини основи. Знайдіть двогранні кути піраміди при ребрах її основи.

- 18.21.** Ромб  $ABCD$  є основою піраміди  $MABCD$ ,  $AB = 10$  см,  $\angle BAD = 60^\circ$ . Площини  $ABM$  і  $ADM$  перпендикулярні до площини основи піраміди, а площини  $BCM$  і  $DCM$  утворюють із площиною основи кути по  $60^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 18.22.** Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 8 см, а площа діагонального перерізу —  $28$  см<sup>2</sup>. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

## 2. Тіла обертання

- 18.23.** Як зміниться — збільшиться або зменшиться — та в скільки разів площа бічної поверхні циліндра, якщо:
- 1) радіус його основи збільшити в 3 рази, а висоту — у 4 рази;
  - 2) радіус його основи зменшити у 2 рази, а висоту збільшити в 6 разів?
- 18.24.** У циліндрі проведено переріз, який паралельний його осі та віддалений від неї на 3 см. Діагональ перерізу дорівнює 16 см і утворює з площиною основи циліндра кут  $60^\circ$ . Знайдіть радіус основи циліндра.
- 18.25.** Площа осьового перерізу циліндра дорівнює  $S$ . Знайдіть площу перерізу циліндра, який паралельний його осі та віддалений від неї на відстань, що становить:
- 1) половину радіуса основи;
  - 2)  $\frac{4}{5}$  радіуса основи.
- 18.26.** Через твірну циліндра проведено два перерізи, кожний з яких паралельний осі циліндра. Площини цих перерізів перпендикулярні. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо площа одного з даних перерізів дорівнює  $30$  см<sup>2</sup>, а другого —  $40$  см<sup>2</sup>.
- 18.27.** Через твірну  $AA_1$  циліндра проведено перерізи  $AA_1B_1B$  і  $AA_1C_1C$ , площі яких дорівнюють відповідно  $16$  см<sup>2</sup> і  $21$  см<sup>2</sup>. Двогранний кут, гранями якого є півплощини  $AA_1B$  і  $AA_1C$ , дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть площу чотирикутника  $BB_1C_1C$ .
- 18.28.** Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гіпотенузою  $c$  і гострим кутом  $\alpha$ . Діагональ бічної грані, яка містить катет основи, протилежний куту  $\alpha$ , нахилена до площини основи під кутом  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо даної призми.
- 18.29.** Площа повної поверхні циліндра, описаного навколо куба, дорівнює  $S$ . Знайдіть площу поверхні куба.

- 18.30. Основою прямої призми є ромб з тупим кутом  $\alpha$ . Кут між бічним ребром і більшою діагоналлю призми дорівнює  $\beta$ . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму, якщо її висота дорівнює  $h$ .
- 18.31. Радіус основи та висоту конуса збільшили у 2 рази. У скільки разів збільшилася площа бічної поверхні конуса?
- 18.32. Радіус основи конуса збільшили в 6 разів, а його твірну зменшили в 3 рази. Як змінилася площа бічної поверхні конуса — зменшилася або збільшилася — та в скільки разів?
- 18.33. Найбільший кут між двома твірними конуса дорівнює  $120^\circ$ . Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює  $90^\circ$ , проведено площину, що перетинає основу конуса по хорді завдовжки 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
- 18.34. Через вершину конуса та хорду основи, що стягує дугу  $60^\circ$ , проведено площину, яка утворює з площиною основи кут  $30^\circ$ . Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює 4 см.
- 18.35. Радіус більшої основи зрізаного конуса дорівнює 20 см, висота —  $8\sqrt{3}$  см, а кут між твірною та площиною більшої основи дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
- 18.36. Діагональ осьового перерізу зрізаного конуса утворює з площиною його основи кут  $30^\circ$ , а радіуси основ дорівнюють 2 см і 13 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
- 18.37. Твірна зрізаного конуса дорівнює 29 см, висота — 21 см, а радіуси основ відносяться як 5 : 9. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса.
- 18.38. Ромб зі стороною 1 см і гострим кутом  $60^\circ$  обертається навколо прямої, яка проходить через вершину гострого кута ромба перпендикулярно до його більшої діагоналі. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
- 18.39. Висота зрізаного конуса дорівнює 4 см, а кут між його твірною та площиною більшої основи становить  $60^\circ$ . Діагональ осьового перерізу зрізаного конуса перпендикулярна до бічної сторони перерізу. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
- 18.40. Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює  $a$ , а кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.

- 18.41. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $60^\circ$ , а висота піраміди —  $2\sqrt{2}$  см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.
- 18.42. Сторони основи трикутної піраміди дорівнюють 19 см, 20 см і 37 см. Двогранні кути піраміди при ребрах її основи дорівнюють  $45^\circ$ . Знайдіть площу осевого перерізу конуса, вписаного в дану піраміду.
- 18.43. Основою піраміди є ромб з діагоналями 40 см і 30 см, висота піраміди дорівнює 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.
- 18.44. Знайдіть координати центра та радіус сфери  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 8z - 4 = 0$ . Як розміщена точка  $A(1; 2; 5)$  відносно даної сфери?
- 18.45. Складіть рівняння сфери, діаметром якої є відрізок  $AB$ , якщо  $A(4; -5; 3)$  і  $B(6; 1; 5)$ .
- 18.46. Пряма  $a$  проходить через початок координат і точку  $A(1; 2; 3)$ . Знайдіть координати точок перетину прямої  $a$  та сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 56$ .
- 18.47. Що є геометричним місцем центрів сфер, які дотикаються до даної прямої в даній точці?
- 18.48. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Сторони цього трикутника дотикаються до сфери. Відстань від центра сфери до площини даного трикутника дорівнює  $2\sqrt{3}$  см. Знайдіть радіус сфери.
- 18.49. Сферу перетинає площина, яка віддалена від її центра на 24 см. Знайдіть радіус сфери, якщо довжина отриманого перерізу становить  $\frac{3}{5}$  довжини перерізу сфери площиною, що проходить через її центр.
- 18.50. У кулю, радіус якої дорівнює 3 см, вписано куб. Знайдіть відстань від центра кулі до граней куба.
- 18.51. У кулю вписано правильну шестикутну призму  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ . Радіус кулі, проведений у вершину  $A$ , утворює з площиною грані  $AA_1 B_1 B$  кут  $45^\circ$ . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо радіус кулі дорівнює 4 см.
- 18.52. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см і утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної піраміди.

- 18.53. Знайдіть площу поверхні правильного тетраедра, вписаного в кулю, радіус якої дорівнює  $R$ .
- 18.54. Центр кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, ділить її висоту у відношенні  $3 : 2$ , рахуючи від вершини піраміди. Знайдіть двогранний кут піраміди при її бічному ребрі.
- 18.55. Знайдіть відношення радіуса кулі, вписаної в правильну трикутну призму, до радіуса кулі, описаної навколо цієї призми.
- 18.56. Знайдіть площу поверхні правильного тетраедра, описаного навколо кулі, радіус якої дорівнює  $R$ .
- 18.57. Радіус кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду, дорівнює  $3$  см, а сторона основи піраміди —  $12$  см. Знайдіть площу бічної поверхні даної піраміди.
- 18.58. Основою піраміди є трикутник зі сторонами  $25$  см,  $29$  см і  $36$  см, а вершина піраміди віддалена від кожної сторони основи на  $10$  см. Знайдіть площу великого круга кулі, вписаної в дану піраміду.
- 18.59. Висота циліндра дорівнює діаметру основи. У циліндр вписано кулю. У цю кулю вписано конус, твірна якого дорівнює діаметру основи конуса. Знайдіть відношення площі бічної поверхні даного циліндра до площі бічної поверхні даного конуса.
- 18.60. Кут між твірною конуса та площиною його основи дорівнює  $\alpha$ , висота конуса дорівнює  $H$ . Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного конуса.
- 18.61. Радіус основи конуса дорівнює  $3$  см, а радіус кулі, вписаної в даний конус, —  $\sqrt{3}$  см. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса.
- 18.62. Твірна конуса дорівнює  $20$  см, а площа його бічної поверхні —  $240\pi$  см<sup>2</sup>. Знайдіть радіус сфери, вписаної в даний конус.
- 18.63. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, твірна якого дорівнює  $13$  см, якщо відомо, що в нього можна вписати кулю.

### 3. Об'єми тіл. Площа сфери

- 18.64. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат. Діагональ паралелепіпеда дорівнює  $8$  см і утворює з площиною бічної грані кут  $30^\circ$ . Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда.

- 18.65.** Сторона  $AD$  основи прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює  $a$  і утворює з діагоналлю основи кут  $\alpha$ . Площина, яка проходить через прями  $AD$  і  $B_1 C_1$ , утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда.
- 18.66.** Знайдіть об'єм куба, діагональ якого дорівнює  $d$ .
- 18.67.** Бічні грані правильної шестикутної призми є квадратами, а її більша діагональ дорівнює  $d$ . Знайдіть об'єм призми.
- 18.68.** Дано пряму призму  $ABCA_1 B_1 C_1$ . Відомо, що  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 4$  см, кут між площинами  $ABC$  і  $AB_1 C$  дорівнює  $45^\circ$ , а відстань від вершини  $B$  до площини  $AB_1 C$  —  $3\sqrt{2}$  см. Знайдіть об'єм призми.
- 18.69.** Висота прямої чотирикутної призми дорівнює  $h$ . Діагоналі призми утворюють із площиною основи кути  $\alpha$  і  $\beta$ , а кут між діагоналями основи дорівнює  $\gamma$ . Знайдіть об'єм призми.
- 18.70.** Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 10 см. Дві бічні грані призми перпендикулярні, а їхні площі дорівнюють  $50$  см<sup>2</sup> і  $120$  см<sup>2</sup>. Знайдіть об'єм призми.
- 18.71.** Основою похилої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є ромб  $ABCD$ ,  $AB = AA_1 = 4$  см,  $\angle BAD = 60^\circ$ . Відомо, що  $\angle A_1 AB = \angle A_1 AD = 45^\circ$ . Знайдіть об'єм призми.
- 18.72.** Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює  $a$ . Точки  $E, F, M$  і  $K$  — середини ребер  $AB, BC, CD$  і  $AD$  відповідно. Знайдіть об'єм піраміди  $B_1 EFMK$ .
- 18.73.** Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $S$ , а кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 18.74.** Об'єм правильного тетраедра дорівнює  $V$ . Чому дорівнює об'єм тетраедра, вершинами якого є центри граней даного тетраедра?
- 18.75.** Основою піраміди є трикутник з кутами  $\alpha$  і  $\beta$ . Радіус кола, описаного навколо основи піраміди, дорівнює  $R$ , а кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут  $\gamma$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 18.76.** Центр кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, належить площині основи піраміди. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі дорівнює  $2\sqrt{3}$  см.

- 18.77. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 10 см, 17 см і 21 см, а двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють  $45^\circ$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 18.78. Ромб  $ABCD$  є основою піраміди  $MABCD$ . Відомо, що  $AB = a$ ,  $\angle ABC = \beta$ . Грані  $ABM$  і  $CBM$  перпендикулярні до основи піраміди, а кут між гранню  $ADM$  та основою дорівнює  $\alpha$ .
- 1) Знайдіть кут між гранню  $CDM$  та основою піраміди.
  - 2) Знайдіть об'єм піраміди.
- 18.79. Основою піраміди  $DABC$  є трикутник  $ABC$ , у якому  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = \alpha$ . Грань  $ADC$  перпендикулярна до основи піраміди, а грані  $ABD$  і  $CBD$  утворюють з основою кут  $\beta$ . Відстань від основи висоти піраміди до площини  $ABD$  дорівнює  $m$ . Знайдіть об'єм піраміди.
- 18.80. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють  $a$  і  $b$ ,  $a > b$ . Двогранний кут піраміди при ребрі більшої основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
- 18.81. Знайдіть відношення об'єму циліндра, вписаного в правильну трикутну призму, до об'єму циліндра, описаного навколо цієї призми.
- 18.82. Паралельно осі циліндра проведено переріз, що відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює  $\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Знайдіть об'єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює  $R$ , а даний переріз є квадратом.
- 18.83. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, градусна міра дуги якого дорівнює  $120^\circ$ . Знайдіть об'єм конуса, якщо його висота дорівнює 6 см.
- 18.84. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $a$ , а плоский кут при вершині піраміди дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо даної піраміди.
- 18.85. Кут між твірною конуса та площиною його основи дорівнює  $\alpha$ , а радіус кулі, описаної навколо конуса, —  $R$ . Знайдіть об'єм конуса.
- 18.86. Висота й об'єм зрізаного конуса дорівнюють висоті та об'єму циліндра. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 2 см і 11 см. Знайдіть радіус основи циліндра.
- 18.87. Ромб зі стороною 4 см і кутом  $60^\circ$  обертається навколо прямої, яка проходить через вершину його тупого кута і перпендикулярна до меншої діагоналі ромба. Знайдіть об'єм утвореного тіла.



- 18.88. Об'єм циліндра дорівнює  $16\pi \text{ см}^3$ . Знайдіть об'єм кулі, вписаної в даний циліндр.
- 18.89. Площа осевого перерізу циліндра дорівнює  $S$ , а кут між діагоналлю цього перерізу та площиною основи дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу сфери, описаної навколо даного циліндра.

## 19. Вправи для повторення курсу планіметрії

### 1. Трикутники

- 19.1. Знайдіть периметр прямокутного трикутника, гіпотенуза якого на 7 см більша за один із катетів, а другий катет дорівнює 21 см.
- 19.2. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 8,5 см. Обчисліть площу даного трикутника.
- 19.3. Висота рівнобедреного трикутника ділить його бічну сторону на відрізки завдовжки 1 см і 12 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу даного трикутника.
- 19.4. Висота  $AD$  трикутника  $ABC$  ділить сторону  $BC$  на відрізки  $BD$  і  $CD$  так, що  $BD = 15$  см,  $CD = 5$  см. Знайдіть сторону  $AC$ , якщо  $\angle B = 30^\circ$ .
- 19.5. Із точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких на пряму дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть відстань від даної точки до цієї прямої, якщо одна з похилих на 2 см більша за другу.
- 19.6. Знайдіть площу трикутника  $ABC$ , зображеного на рисунку 19.1.
- 19.7. Висота рівнобедреного тупокутного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 8 см, а радіус описаного навколо нього кола — 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

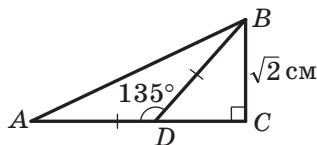


Рис. 19.1

- 19.8. Висота прямокутного трикутника з гострим кутом  $\alpha$ , проведена до гіпотенузи, дорівнює  $h$ . Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.
- 19.9. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки 8 см і 12 см. Знайдіть периметр трикутника.

- 19.10. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 100 см, а висота, опущена на основу, — 30 см. Знайдіть площу трикутника.
- 19.11. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ . Серединний перпендикуляр відрізка  $AB$  перетинає його в точці  $M$ , а сторону  $BC$  — у точці  $K$ . Доведіть, що  $MK = \frac{1}{3}BC$ .
- 19.12. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює  $15^\circ$ . Доведіть, що висота трикутника, проведена до його гіпотенузи, у 4 рази менша від гіпотенузи.
- 19.13. У прямокутному трикутнику  $MNK$  на гіпотенузу  $MK$  опущено висоту  $NF$ . Площа трикутника  $MNF$  дорівнює  $2 \text{ см}^2$ , а площа трикутника  $KNF$  —  $32 \text{ см}^2$ . Знайдіть гіпотенузу трикутника  $MNK$ .
- 19.14. Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть сторону  $AB$ , якщо  $AO = 18 \text{ см}$ ,  $BC : AD = 5 : 9$ .
- 19.15. Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $F$ ,  $AB : BF = 3 : 7$ ,  $AD$  — більша основа трапеції. Різниця основ трапеції дорівнює 6 см. Знайдіть основу  $AD$ .
- 19.16. Кут при вершині одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при вершині другого рівнобедреного трикутника. Основа та проведена до неї висота першого трикутника дорівнюють відповідно 30 см і 8 см, а бічна сторона другого трикутника — 51 см. Чому дорівнює периметр другого трикутника?
- 19.17. На стороні  $BC$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $K$  так, що  $\angle CAK = \angle ABC$ ,  $BK = 12 \text{ см}$ ,  $KC = 4 \text{ см}$ . Знайдіть сторону  $AC$ .
- 19.18. На стороні  $AC$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $D$  так, що  $\angle ABD = \angle ACB$ . Знайдіть відрізок  $AD$ , якщо  $AB = 6 \text{ см}$ ,  $AC = 18 \text{ см}$ .
- 19.19. Діагоналі трапеції  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) перетинаються в точці  $O$ ,  $BO : OD = 3 : 4$ ,  $BC = 18 \text{ см}$ . Знайдіть основу  $AD$  трапеції.
- 19.20. Діагоналі трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) перетинаються в точці  $O$ ,  $AO : OC = 7 : 3$ ,  $BD = 40 \text{ см}$ . Знайдіть відрізок  $OD$ .
- 19.21. У трикутник  $ABC$  вписано ромб  $CDEF$  так, як показано на рисунку 19.2. Знайдіть сторону  $BC$  трикутника, якщо  $AC = 15 \text{ см}$ , а сторона ромба дорівнює 10 см.

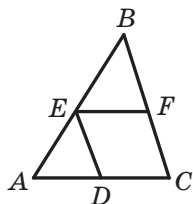


Рис. 19.2

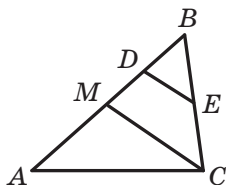


Рис. 19.3

- 19.22.** Точка  $M$  — середина сторони  $AB$  трикутника  $ABC$ , точка  $K$  — середина сторони  $AC$ . Площа трикутника  $AMK$  дорівнює  $12 \text{ см}^2$ . Чому дорівнює площа чотирикутника  $BMKC$ ?
- 19.23.** Точка  $D$  — середина сторони  $AB$  трикутника  $ABC$ , точка  $E$  — середина сторони  $BC$ . Площа чотирикутника  $ADEC$  дорівнює  $27 \text{ см}^2$ . Чому дорівнює площа трикутника  $ABC$ ?
- 19.24.** Відрізок  $CM$  — медіана трикутника  $ABC$ , зображеного на рисунку 19.3, відрізок  $DE$  — середня лінія трикутника  $MBC$ . Чому дорівнює площа чотирикутника  $MDEC$ , якщо площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $48 \text{ см}^2$ ?
- 19.25.** Пряма, паралельна стороні  $AC$  трикутника  $ABC$ , перетинає сторону  $AB$  у точці  $M$ , а сторону  $BC$  — у точці  $K$ . Знайдіть площу трикутника  $ABC$ , якщо  $BM = 3 \text{ см}$ ,  $AM = 4 \text{ см}$ , а площа чотирикутника  $AMKC$  дорівнює  $80 \text{ см}^2$ .
- 19.26.** Площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $18 \text{ см}^2$ . На стороні  $AB$  позначили точки  $K$  і  $D$  так, що  $AK = KD = DB$ , а на стороні  $AC$  — точки  $F$  і  $E$  так, що  $AF = FE = EC$ . Знайдіть площу чотирикутника  $DEFK$ .
- 19.27.** Площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $24 \text{ см}^2$ . На стороні  $AB$  позначили точки  $D$  і  $F$  так, що  $AD = BF = \frac{1}{4}AB$ , а на стороні  $BC$  — точки  $P$  і  $M$  так, що  $CM = BP = \frac{1}{4}BC$ . Знайдіть площу чотирикутника  $DFPM$ .
- 19.28.** Коло, центр якого належить гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається до більшого катета й проходить через вершину протилежного гострого кута. Знайдіть радіус кола, якщо катети дорівнюють  $5 \text{ см}$  і  $12 \text{ см}$ .

- 19.29. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 40 см, а висота, проведена до основи, —  $4\sqrt{91}$  см. Знайдіть відстань між точками перетину бісектрис кутів при основі трикутника з його бічними сторонами.
- 19.30. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 40 см, а висота, проведена до неї, — 15 см. Знайдіть відстань між точками дотику кола, вписаного в трикутник, до бічних сторін трикутника.
- 19.31. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 15 см, а висота, проведена до бічної сторони, — 24 см. Знайдіть площу цього трикутника.
- 19.32. На стороні  $BC$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $M$  так, що  $BM : MC = 3 : 10$ . У якому відношенні відрізок  $AM$  ділить медіану  $BK$  трикутника  $ABC$ ?
- 19.33. На стороні  $AB$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $M$  так, що  $AM : MB = 4 : 3$ . У якому відношенні медіана  $BK$  трикутника  $ABC$  ділить відрізок  $CM$ ?
- 19.34. Середина бічної сторони рівнобедреного трикутника віддалена від його основи на 9 см. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до його основи.
- 19.35. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  з основою  $AC$  точка перетину медіан віддалена від вершини  $B$  на 6 см. Знайдіть відстань від середини бічної сторони трикутника до його основи.
- 19.36. Відрізок  $BD$  — бісектриса трикутника  $ABC$ ,  $AB = 24$  см,  $BC = 20$  см, відрізок  $AD$  на 3 см більший за відрізок  $CD$ . Знайдіть сторону  $AC$ .
- 19.37. У трикутнику  $ABC$  відрізок  $BK$  — висота, відрізок  $AM$  — бісектриса,  $BK = 26$  см,  $AB : AC = 6 : 7$ . Із точки  $M$  опущено перпендикуляр  $MD$  на сторону  $AC$ . Знайдіть відрізок  $MD$ .
- 19.38. Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник  $ABC$  ( $AB = BC$ ), дорівнює 12 см, а відстань від центра цього кола до вершини  $B$  — 20 см. Знайдіть периметр даного трикутника.
- 19.39. Бічна сторона рівнобедреного трикутника точкою дотику вписаного кола ділиться у відношенні 8 : 9, рахуючи від вершини кута при основі трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.

- 19.40. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC = 13$  см,  $AC = 10$  см. До кола, вписаного в цей трикутник, проведено дотичну, яка паралельна основі  $AC$  і перетинає сторони  $AB$  і  $BC$  у точках  $M$  і  $K$  відповідно. Обчисліть площу трикутника  $MBK$ .
- 19.41. Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює  $60^\circ$ , відносяться як  $5 : 8$ , а третя сторона дорівнює  $21$  см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.
- 19.42. Сума двох сторін трикутника дорівнює  $16$  см, а кут між ними —  $120^\circ$ . Знайдіть меншу із цих сторін, якщо третя сторона трикутника дорівнює  $14$  см.
- 19.43. Знайдіть кут  $A$  трикутника  $ABC$ , якщо  $BC = 7$  см,  $AC = 3$  см,  $AB = 8$  см.
- 19.44. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 9$  см,  $BC = 12$  см. На стороні  $AB$  позначили точку  $D$  так, що  $AD = 5$  см. Знайдіть відрізок  $CD$ .
- 19.45. Сторони трикутника дорівнюють  $12$  см,  $15$  см і  $18$  см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини його найбільшого кута.
- 19.46. Знайдіть площу круга, описаного навколо трикутника зі сторонами  $7$  см,  $8$  см і  $9$  см.
- 19.47. Сторони трикутника дорівнюють  $6$  см,  $25$  см і  $29$  см. Знайдіть радіус вписаного кола даного трикутника.
- 19.48. Одна зі сторін трикутника дорівнює  $25$  см, а друга сторона ділиться точкою дотику вписаного кола на відрізки завдовжки  $22$  см і  $8$  см, рахуючи від кінця першої сторони. Знайдіть радіус вписаного кола.
- 19.49. Радіус кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ , дорівнює  $6$  см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника  $AOC$ , де  $O$  — точка перетину бісектрис трикутника  $ABC$ , якщо  $\angle ABC = 60^\circ$ .
- 19.50. На продовженні сторони  $AC$  трикутника  $ABC$  за точку  $C$  позначили точку  $D$  так, що  $\angle ADB = 30^\circ$ . Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника  $ABD$ , якщо  $\angle ACB = 45^\circ$ , а радіус кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ , дорівнює  $8\sqrt{2}$  см.
- 19.51. Сторони трикутника дорівнюють  $6$  см і  $8$  см. Медіана трикутника, проведена до його третьої сторони, дорівнює  $\sqrt{46}$  см. Знайдіть невідому сторону трикутника.

- 19.52. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 9 см і 13 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до його найбільшої сторони.
- 19.53. Медіана  $CM$  трикутника  $ABC$  утворює зі сторонами  $AC$  і  $BC$  кути  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно,  $BC = a$ . Знайдіть медіану  $CM$ .
- 19.54. На медіані  $BD$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $M$  так, що  $BM : MD = 3 : 1$ . Знайдіть площу трикутника  $ABC$ , якщо площа трикутника  $AMD$  дорівнює  $3 \text{ см}^2$ .
- 19.55. Площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $40 \text{ см}^2$ . На медіані  $AM$  позначили точку  $P$  таку, що  $AP : PM = 2 : 3$ . Знайдіть площу трикутника  $BPM$ .

## 2. Чотирикутники. Правильні многокутники

- 19.56. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 20 см, а кут між його висотами, проведеними з вершини тупого кута, —  $60^\circ$ . Знайдіть площу паралелограма.
- 19.57. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює 6 см і ділить сторону паралелограма навпіл. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює  $30^\circ$ .
- 19.58. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 12 см, більша діагональ — 28 см, а тупий кут —  $120^\circ$ . Знайдіть периметр паралелограма.
- 19.59. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні  $3 : 7$ , рахуючи від вершини гострого кута, який дорівнює  $45^\circ$ . Обчисліть площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює 52 см.
- 19.60. Бісектриса кута  $D$  прямокутника  $ABCD$  перетинає сторону  $AB$  у точці  $M$ ,  $BM = 5$  см,  $AD = 3$  см. Знайдіть периметр прямокутника.
- 19.61. Через середину діагоналі  $BD$  прямокутника  $ABCD$  проведено пряму, яка перетинає сторони  $BC$  і  $AD$  прямокутника в точках  $M$  і  $K$  відповідно,  $BD = 10$  см,  $BM = 6$  см,  $MC = 2$  см. Обчисліть площу чотирикутника  $AMCK$ .
- 19.62. Серединний перпендикуляр діагоналі  $AC$  прямокутника  $ABCD$  перетинає сторону  $BC$  та утворює з нею кут, рівний куту між діагоналями. Знайдіть цей кут.

- 19.63.** Серединний перпендикуляр діагоналі  $AC$  прямокутника  $ABCD$  перетинає сторону  $BC$  у точці  $M$  так, що  $BM : MC = 1 : 2$ . Знайдіть кути, на які діагональ прямокутника ділить його кут.
- 19.64.** Обчисліть площу ромба, одна з діагоналей якого дорівнює 16 см, а сторона — 10 см.
- 19.65.** Більша діагональ ромба дорівнює  $c$ , а тупий кут —  $\alpha$ . Знайдіть периметр ромба.
- 19.66.** Перпендикуляр, опущений із точки перетину діагоналей ромба на його сторону, ділить її на два відрізки, один з яких на 5 см більший за другий. Знайдіть периметр ромба, якщо довжина цього перпендикуляра дорівнює 6 см.
- 19.67.** Перпендикуляр, опущений із точки перетину діагоналей ромба на його сторону, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Знайдіть більшу діагональ ромба.
- 19.68.** Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 23 см і 17 см, а діагональ — 25 см.
- 19.69.** Знайдіть площу трапеції, зображеної на рисунку 19.4.
- 19.70.** Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює  $a$ , а один із кутів —  $60^\circ$ . Знайдіть площу трапеції.
- 19.71.** Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 16 см, а гострий кут —  $30^\circ$ . Знайдіть площу цієї трапеції, якщо в неї можна вписати коло.
- 19.72.** Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює  $R$ , а один із кутів трапеції —  $45^\circ$ . Знайдіть площу трапеції.
- 19.73.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 1 см і 17 см, а діагональ ділить її тупий кут навпіл. Знайдіть площу трапеції.
- 19.74.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 15 см і 33 см, а діагональ ділить її гострий кут навпіл. Знайдіть площу трапеції.
- 19.75.** Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 10 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює бічній стороні трапеції.

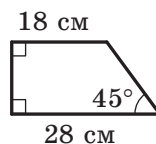


Рис. 19.4

- 19.76. Більша діагональ прямокутної трапеції ділить висоту, проведenu з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 20 см і 12 см. Більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.
- 19.77. Менша діагональ прямокутної трапеції ділить її тупий кут навпіл, а більшу діагональ — у відношенні 5 : 2, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша бічна сторона дорівнює 12 см.
- 19.78. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 18 см. Знайдіть площу трапеції.
- 19.79. Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр трапеції.
- 19.80. Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить її більшу основу на відрізки завдовжки 20 см і 25 см. Обчисліть периметр трапеції.
- 19.81. Центр кола, описаного навколо трапеції, належить більшій основі, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайдіть кути трапеції.
- 19.82. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони й утворює з основою трапеції кут  $30^\circ$ . Знайдіть площу трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо неї, дорівнює  $R$ .
- 19.83. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута й перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює  $a$ .
- 19.84. Бічні сторони та менша основа рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см, а один з її кутів дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.
- 19.85. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а діагональ — 17 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.
- 19.86. Основи трапеції дорівнюють 15 см і 36 см, а бічні сторони — 13 см і 20 см. Знайдіть площу даної трапеції.
- 19.87. Чому дорівнює кут  $BAD$  чотирикутника  $ABCD$ , вписаного в коло, якщо  $\angle ACD = 37^\circ$ ,  $\angle ADB = 43^\circ$ ?



- 19.88.** Діагональ  $BD$  чотирикутника  $ABCD$  є діаметром його описаного кола,  $M$  — точка перетину діагоналей,  $\angle ABD = 32^\circ$ ,  $\angle CBD = 64^\circ$ . Знайдіть кут  $BMC$ .
- 19.89.** Центр кола, описаного навколо чотирикутника  $ABCD$ , належить стороні  $AD$ . Знайдіть кути даного чотирикутника, якщо  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $\angle CBD = 20^\circ$ .
- 19.90.** Знайдіть діагональ  $AC$  чотирикутника  $ABCD$ , якщо навколо нього можна описати коло та  $AB = 3$  см,  $BC = 4$  см,  $CD = 5$  см,  $AD = 6$  см.
- 19.91.** Як відноситься сторона правильного трикутника, вписаного в коло, до сторони правильного трикутника, описаного навколо цього кола?
- 19.92.** Як відноситься сторона правильного шестикутника, вписаного в коло, до сторони правильного шестикутника, описаного навколо цього кола?
- 19.93.** Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною правильного трикутника, вписаного в одне коло, і стороною квадрата, вписаного в друге коло. Довжина цієї хорди дорівнює  $a$ . Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо вони лежать по різні боки від хорди.
- 19.94.** Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною правильного трикутника, вписаного в одне коло, і стороною правильного шестикутника, вписаного в друге коло. Довжина цієї хорди дорівнює  $a$ . Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо вони лежать по один бік від хорди.

### 3. Коло та круг

- 19.95.** Знайдіть градусну міру дуги кола, довжина якої дорівнює  $\pi$  см, якщо радіус кола дорівнює 12 см.
- 19.96.** Довжина дуги кола дорівнює  $2\pi$  см, а її градусна міра —  $60^\circ$ . Знайдіть радіус кола.
- 19.97.** У колі проведено хорди  $AK$  і  $BM$ , які перетинаються в точці  $C$ . Знайдіть відрізок  $KM$ , якщо  $AB = 4$  см,  $BC = 2$  см,  $KC = 8$  см.
- 19.98.** Відрізок  $AB$  — діаметр кола,  $AB = 24$  см. Точка  $A$  віддалена від дотичної до цього кола на 4 см. Знайдіть відстань від точки  $B$  до цієї дотичної.

- 19.99.** Два кола, відстань між центрами яких дорівнює 17 см, мають зовнішній дотик. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо відстань між точками дотику кіл до їхньої спільної зовнішньої дотичної дорівнює 15 см.
- 19.100.** У кут, величина якого становить  $60^\circ$ , вписано два кола, які мають зовнішній дотик одне до одного. Знайдіть радіус більшого з них, якщо радіус меншого дорівнює 6 см.
- 19.101.** Два кола із центрами  $O_1$  і  $O_2$  мають зовнішній дотик у точці  $C$ . Пряма, яка проходить через точку  $C$ , перетинає коло із центром  $O_1$  у точці  $A$ , а коло із центром  $O_2$  — у точці  $B$ . Хорда  $AC$  дорівнює 12 см, а хорда  $BC$  — 18 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо  $O_1O_2 = 20$  см.
- 19.102.** Перпендикуляр, опущений із точки кола на його діаметр, ділить діаметр на два відрізки, різниця яких дорівнює 21 см. Знайдіть довжину кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 10 см.
- 19.103.** Два кола мають зовнішній дотик у точці  $A$ , точки  $B$  і  $C$  — точки дотику до цих кіл їхньої спільної дотичної. Доведіть, що кут  $BAC$  прямий.
- 19.104.** До двох кіл, які перетинаються в точках  $M$  і  $K$ , проведено спільну дотичну,  $A$  і  $B$  — точки дотику. Доведіть, що  $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$ .
- 19.105.** Два кола перетинаються в точках  $A$  і  $B$ . Через точку  $B$  проведено пряму, яка перетинає кола в точках  $C$  і  $D$ . У точках  $C$  і  $D$  до даних кіл проведено дотичні, які перетинаються в точці  $P$ . Доведіть, що  $\angle DAC + \angle DPC = 180^\circ$ .

#### 4. Декартові координати на площині

- 19.106.** Точка  $C$  — середина відрізка  $AB$ ,  $A(-4; 3)$ ,  $C(2; 1)$ . Знайдіть координати точки  $B$ .
- 19.107.** Вершинами трикутника є точки  $A(-3; 1)$ ,  $B(2; -2)$  і  $C(-4; 6)$ . Знайдіть медіану  $AM$  трикутника  $ABC$ .
- 19.108.** Чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм,  $B(4; 1)$ ,  $C(-1; 1)$ ,  $D(-2; -2)$ . Знайдіть координати вершини  $A$ .
- 19.109.** Знайдіть координати точки, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок  $C(3; 2)$  і  $D(1; -6)$ .

- 19.110. Знайдіть координати точки, яка належить осі абсцис і рівновіддалена від точок  $A(-1; 5)$  і  $B(7; -3)$ .
- 19.111. Коло задано рівнянням  $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 12$ . Як розташована точка  $A(-2; 3)$  відносно цього кола?
- 19.112. Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок  $MK$ , якщо  $M(-3; 4)$ ,  $K(5; 10)$ .
- 19.113. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки  $A(-1; 4)$  і  $B(-3; -2)$ .
- 19.114. Відрізок  $AM$  — медіана трикутника з вершинами в точках  $A(-4; -2)$ ,  $B(5; 3)$  і  $C(-3; -7)$ . Складіть рівняння прямої  $AM$ .
- 19.115. Складіть рівняння прямої, яка проходить через центри кіл  $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 3$  і  $(x + 1)^2 + y^2 = 7$ .
- 19.116. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку  $A(\sqrt{3}; 5)$  і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут  $60^\circ$ .
- 19.117. Складіть рівняння прямої, зображеної на рисунку 19.5.
- 19.118. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку  $P(2; -5)$  і паралельна прямій  $y = -0,5x + 9$ .
- 19.119. Доведіть, що чотирикутник  $ABCD$  з вершинами в точках  $A(-1; 5)$ ,  $B(4; 6)$ ,  $C(3; 1)$  і  $D(-2; 0)$  є ромбом.
- 19.120. Доведіть, що чотирикутник  $ABCD$  з вершинами в точках  $A(2; -2)$ ,  $B(1; 2)$ ,  $C(-3; 1)$  і  $D(-2; -3)$  є прямокутником.
- 19.121. Дано точки  $A(-2; 1)$  і  $B(2; -3)$ . Знайдіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої  $AB$  і перетинає відрізок  $AB$  у точці  $N$  такій, що  $AN : NB = 3 : 1$ .

## 5. Вектори

- 19.122. Знайдіть координати суми векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , зображених на рисунку 19.6.

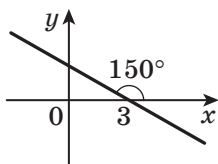


Рис. 19.5

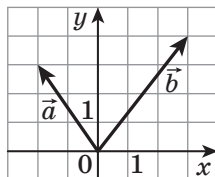


Рис. 19.6

19.123. Знайдіть координати різниці векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , зображених на рисунку 19.7.

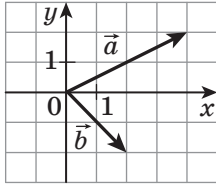


Рис. 19.7

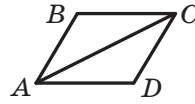


Рис. 19.8

19.124. Дано вектори  $\vec{a}(3; -1)$  і  $\vec{b}(1; -2)$ . Знайдіть координати вектора  $\vec{m}$ , якщо  $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ .

19.125. Відомо, що  $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ . Знайдіть  $|\vec{c}|$ , якщо  $\vec{a}(-1; 1)$ ,  $\vec{b}(-2; 3)$ .

19.126. Обчисліть скалярний добуток  $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$ , якщо  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ .

19.127. Дано точки  $M(4; -2)$ ,  $N(1; 1)$  і  $P(3; 3)$ . Знайдіть скалярний добуток векторів  $\overline{MN}$  і  $\overline{MP}$ .

19.128. На рисунку 19.8 зображено ромб  $ABCD$ , у якому  $AB = 2$  см,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Знайдіть скалярний добуток векторів  $\overline{AB}$  і  $\overline{AC}$ .

19.129. Сторона правильного шестикутника  $ABCDEF$  дорівнює 1. Обчисліть скалярний добуток:

- 1)  $\overline{BA} \cdot \overline{CD}$ ;      2)  $\overline{AD} \cdot \overline{CD}$ .

19.130. Знайдіть кут між векторами  $\vec{a}(-1; -1)$  і  $\vec{b}(2; 0)$ .

19.131. На стороні  $CD$  паралелограма  $ABCD$  позначили точку  $M$  так, що  $CM : MD = 2 : 3$ . Виразіть вектор  $\overline{AM}$  через вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , де  $\vec{a} = \overline{AB}$ ,  $\vec{b} = \overline{AD}$ .

19.132. На сторонах  $BC$  і  $CD$  паралелограма  $ABCD$  позначили відповідно точки  $E$  і  $F$  так, що  $BE : EC = 3 : 4$ ,  $CF : FD = 1 : 3$ . Виразіть вектор  $\overline{EF}$  через вектори  $\overline{AB} = \vec{a}$  і  $\overline{AD} = \vec{b}$ .

19.133. На сторонах  $AB$  і  $BC$  паралелограма  $ABCD$  позначили відповідно точки  $M$  і  $K$  так, що  $AM : MB = 1 : 2$ ,  $BK : KC = 2 : 3$ . Виразіть вектор  $\overline{KM}$  через вектори  $\overline{AB} = \vec{a}$  і  $\overline{AD} = \vec{b}$ .

19.134. На стороні  $BC$  і діагоналі  $AC$  паралелограма  $ABCD$  позначили точки  $K$  і  $F$  відповідно так, що  $BK : BC = 5 : 6$ ,  $AF : AC = 6 : 7$ . Доведіть, що точки  $D$ ,  $F$  і  $K$  лежать на одній прямій.

## 6. Геометричні перетворення

19.135. Скільки існує паралельних перенесень, при яких образом прямої є:

- 1) сама ця пряма;
- 2) паралельна їй пряма?

19.136. Запишіть рівняння кола, яке є образом кола  $x^2 + y^2 = 4$  при паралельному перенесенні на вектор  $\vec{a}(2; -3)$ .

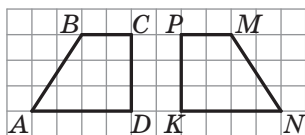


Рис. 19.9

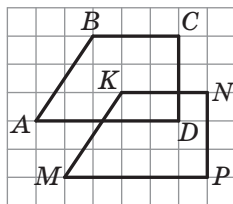


Рис. 19.10

19.137. Укажіть рух, у результаті якого образом чотирикутника  $ABCD$ , зображеного на рисунку 19.9, є чотирикутник  $MNKP$ .

19.138. Укажіть рух, у результаті якого образом чотирикутника  $ABCD$ , зображеного на рисунку 19.10, є чотирикутник  $MKNP$ .

19.139. При паралельному перенесенні на вектор  $\vec{a}$  образом точки  $A(-3; 7)$  є точка  $B(2; 3)$ . Які координати має образ точки  $C(1; -5)$  при паралельному перенесенні на вектор  $\vec{a}$ ?

19.140. При паралельному перенесенні на вектор  $\vec{a}$  образом точки  $A(-5; 6)$  є точка  $B(2; -1)$ . Які координати має прообраз точки  $D(10; -3)$  при паралельному перенесенні на вектор  $\vec{a}$ ?

19.141. Які координати має образ точки  $A(-4; 6)$  при симетрії відносно початку координат?

19.142. Які координати має точка, симетрична точці  $A(2; -4)$  відносно точки  $M(3; -1)$ ?

19.143. Які координати має образ точки  $A(-2; 5)$  при симетрії відносно:

- 1) осі абсцис;
- 2) осі ординат?

19.144. Скільки осей симетрії має прямокутник, який не є квадратом?

19.145. Точка  $O$  — центр правильного шестикутника  $ABCDEF$ , зображеного на рисунку 19.11. Укажіть образ сторони  $CD$  при повороті навколо точки  $O$  за годинниковою стрілкою на кут  $120^\circ$ .

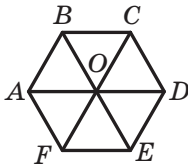


Рис. 19.11

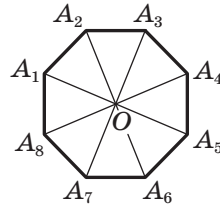


Рис. 19.12

19.146. Точка  $O$  — центр правильного восьмикутника, зображеного на рисунку 19.12. Укажіть образ сторони  $A_3A_4$  при повороті навколо точки  $O$  проти годинникової стрілки на кут  $135^\circ$ .

19.147. Точка  $O$  — центр правильного дванадцятикутника, зображеного на рисунку 19.13. Укажіть образ сторони  $A_2A_3$  при повороті навколо точки  $O$  за годинниковою стрілкою на кут  $150^\circ$ .

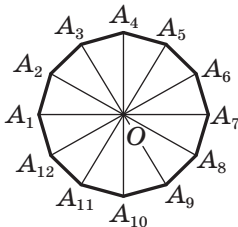


Рис. 19.13

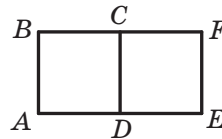


Рис. 19.14

19.148. Квадрат  $CDEF$ , зображений на рисунку 19.14, є образом квадрата  $ABCD$  при повороті за годинниковою стрілкою на кут  $90^\circ$ . Яка точка є центром повороту?

19.149. Прямокутник  $AMKP$ , зображений на рисунку 19.15, є образом прямокутника  $ABCD$  при повороті проти годинникової стрілки на кут  $90^\circ$ . Яка точка є центром повороту?

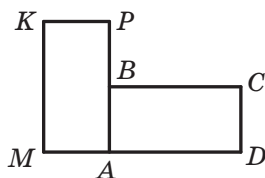


Рис. 19.15

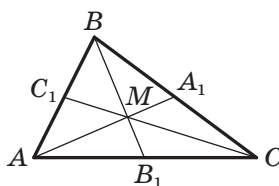


Рис. 19.16

19.150. Медіани трикутника  $ABC$ , зображеного на рисунку 19.16, перетинаються в точці  $M$ . Знайдіть коефіцієнт:

- 1) гомотетії із центром  $M$ , при якій точка  $C_1$  є образом точки  $C$ ;
- 2) гомотетії із центром  $B$ , при якій точка  $M$  є образом точки  $B_1$ .

19.151. Точка  $A_1(-1; 4)$  є образом точки  $A(2; -8)$  при гомотетії із центром у початку координат. Чому дорівнює коефіцієнт гомотетії?

19.152. Точки  $A$  і  $B$  лежать у різних півплощинах відносно прямої  $a$ . На прямій  $a$  знайдіть таку точку  $X$ , щоби пряма  $a$  містила бісектрису кута  $AXB$ .

19.153. Точки  $A$  і  $B$  лежать в одній півплощині відносно прямої  $a$ . Знайдіть на прямій  $a$  таку точку  $X$ , щоби промені  $XA$  і  $XB$  утворювали із цією прямою рівні кути.

19.154. Точки  $A$  і  $B$  лежать в одній півплощині відносно прямої  $a$ . Знайдіть на прямій  $a$  таку точку  $X$ , щоби сума  $AH + HB$  була найменшою.

19.155. Вершина  $A$  квадрата  $ABCD$  є центром повороту на кут  $90^\circ$ . Знайдіть відрізок  $BC_1$ , де точка  $C_1$  — образ точки  $C$  при вказаному повороті, якщо  $AB = 1$  см.

19.156. Нехай вершина  $A$  рівностороннього трикутника  $ABC$  є центром повороту на кут  $120^\circ$ . Знайдіть відрізок  $BC_1$ , де точка  $C_1$  — образ точки  $C$  при вказаному повороті, якщо  $AB = 1$  см.

## Дружимо з комп'ютером

У 10 класі ви вже навчилися створювати зображення стереометричних об'єктів за допомогою графічного редактора або спеціалізованих пакетів для зображення об'ємних об'єктів. Радимо в 11 класі вдосконалювати свої вміння, створюючи ілюстрації до матеріалу, що вивчається. Якщо ви плануєте обрати професію, яка потребує вміння креслити й читати креслення, — інженера, проектувальника тощо, **то вам буде корисно набути навичок роботи зі спеціалізованими пакетами інженерної графіки** (наприклад, із програмою *AutoCad*).

### **Завдання курсу стереометрії 11 класу для виконання за допомогою комп'ютера**

У цьому розділі наведено завдання, які ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Для завдань на створення алгоритмів достатньо записати алгоритм або скласти блок-схему розв'язування задачі. Для тих, хто любить програмування, пропонуємо створювати програми, які реалізують ці алгоритми.

#### **До п. 1 «Призма»**

Побудуйте в графічному редакторі зображення прямої призми, похилої призми, зображення висоти призми. Побудуйте кілька перерізів призми. Зробіть висновок про можливу форму перерізу призми залежно від розміщення січної площини. Побудуйте проєкції призми на площину, паралельну основі призми, і на площину, паралельну висоті призми.

#### **До п. 2 «Паралелепіпед»**

Побудуйте в графічному редакторі зображення паралелепіпеда, прямокутного паралелепіпеда. Які властивості цього тіла та які властивості паралельного проектування треба брати до уваги для отримання адекватного зображення?

#### **До п. 3 «Піраміда»**

Побудуйте в графічному редакторі зображення різних пірамід. Побудуйте зображення висоти піраміди, двогранного кута піраміди при ребрі основи.

Як за допомогою засобів графічного редактора з'ясувати, чи є зображена піраміда правильною?



**До п. 4 «Зрізана піраміда»**

Запишіть алгоритм, що дає змогу якнайдетальніше класифікувати многогранники, вивчені в пп. 1–4.

**До п. 5 «Циліндр»**

1. Напишіть програму, яка за даними радіусом основи й висотою циліндра:

- 1) обчислює площу його бічної поверхні та площу його повної поверхні;
- 2) будує на екрані комп'ютера зображення розгортки циліндра та підписує відповідні розміри.

2. Подайте коло як результат обертання точки навколо центра кола. Користуючись цим поданням, напишіть підпрограму для зображення кола в декартовій системі координат, якщо це коло розміщено в площині, паралельній одній із координатних площин.

3. Користуючись підпрограмою, створеною в завданні 2, напишіть програму для побудови на екрані комп'ютера «каркасного» зображення циліндра в декартовій системі координат. Передбачте якомога більше варіантів розміщення циліндра.

**До п. 6 «Комбінації циліндра та призми»**

1. Яким чином можна задати циліндр і призму в структурах мови програмування, яку ви вивчаєте, щоб створити програму для визначення, чи є одне із цих тіл вписаним у друге? Які підпрограми для цього потрібні?

2. Реалізація програм, описаних у попередньому завданні, є складною насамперед тому, що вам невідомо рівняння кола в просторі. Як можна обійти цю проблему?

*Вказівка.* Подайте коло як ГМТ, що належать даній площині та знаходяться на даній відстані від даної точки — центра кола.

**До п. 7 «Конус»**

1. Напишіть програму, яка за даними радіусом основи й висотою конуса:

- 1) обчислює площу його бічної поверхні та площу його повної поверхні;
- 2) будує на екрані комп'ютера зображення розгортки конуса та підписує відповідні розміри.

2. Користуючись підпрограмою, створеною в завданні 2 до п. 5, напишіть програму для побудови на екрані комп'ютера «каркасного» зображення конуса в декартовій системі координат. Передбачте якомога більше варіантів розміщення конуса.

**До п. 8 «Зрізаний конус»**

1. Напишіть програму, яка для даного зрізаного конуса буде його розгортку й обчислює площу його повної поверхні. Які вхідні параметри потрібні для опису зрізаного конуса?

**До п. 9 «Комбінації конуса та піраміди»**

1. Проаналізуйте, з яких графічних елементів складається зображення конуса (зрізаного конуса), вписаної в нього та описаної навколо нього піраміди (зрізаної піраміди). Зробіть висновки про те, яка інформація потрібна для побудови цих зображень на екрані комп'ютера.

**До п. 10 «Куля. Взаємне розміщення сфери та площини»**

1. Напишіть програму, яка за заданим рівнянням сфери, що обмежує кулю, і заданою точкою визначає, як розміщена точка відносно кулі: поза кулею чи належить кулі, зокрема належить поверхні кулі.

2. Напишіть програму, яка за заданими рівняннями сфери, що обмежує кулю, і площини буде на екрані комп'ютера зображення кулі та ГМТ перетину кулі та площини.

**До п. 11 «Многогранники, вписані у сферу»,****п. 12 «Многогранники, описані навколо сфери»,****п. 13 «Комбінації циліндра (конуса) та сфери»**

1. Проаналізуйте завдання, що ви виконували в попередніх пунктах, і визначте, які аналогічні завдання можете виконати для многогранників, конуса та циліндра, вписаних у сферу та описаних навколо сфери.

**До п. 14 «Об'єм тіла. Формули для обчислення об'єму призми»**

1. Напишіть програму для обчислення об'єму правильної  $n$ -кутної призми зі стороною основи  $a$  та висотою  $h$ .

2. Скориставшись класифікацією призм, напишіть програму для обчислення об'єму якомога більшої кількості різних видів призм. Візьміть до уваги, що залежно від виду призми можуть знадобитися різні параметри для її опису. Вибір виду призми реалізуйте через меню для користувача програми.

**До п. 15 «Формули для обчислення об'ємів піраміди та зрізаної піраміди»**

1. Проаналізуйте задачі, наведені в цьому пункті. Напишіть програму для обчислення об'єму піраміди (зрізаної піраміди) з використанням різних вхідних даних, що описують піраміду та її елементи. Вибір наявних даних реалізуйте через меню для користувача програми.

2. Спробуйте скласти алгоритм, за яким можна обчислити об'єм довільного опуклого многогранника за допомогою розбиття його на піраміди. Який крок цього алгоритму найскладніший?

#### **До п. 16 «Об'єми тіл обертання»**

1. Проаналізуйте задачі, наведені в цьому пункті. Напишіть програму для обчислення об'ємів тіл обертання з вибором виду тіла (конус, циліндр, зрізаний конус, куля) та наявних про нього відомостей через меню для користувача програми.

#### **До п. 17 «Площа сфери»**

1. Напишіть програму, яка за заданим радіусом кулі та товщиною атмосфери обчислює об'єм кулі й об'єм її атмосфери.

2. Побудуйте за допомогою редактора діаграм *Word* або *Excel* стовпчасту діаграму. Виберіть вид діаграми «об'ємна» та подання ряду даних у вигляді різних геометричних тіл (призм, конусів тощо). Використовуючи отримані знання про об'єми тіл, визначте, які із цих фігур дають найбільш адекватне уявлення про співвідношення поданих на діаграмі величин.

## Відповіді та вказівки до вправ

### § 1. Многогранники

#### 1. Призма

1.10.  $18 \text{ см}^2$ . 1.11.  $32\sqrt{2} \text{ см}^2$ . 1.18.  $8 \text{ см}$ . 1.21.  $2x + y - z - 10 = 0$ . 1.22.  $-x + 3y + 2z + 13 = 0$ . 1.23. 1)  $a\sqrt{2}$ ; 2)  $45^\circ$ . 1.24.  $2a$ ,  $a\sqrt{5}$ .

1.25.  $\frac{2a \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \beta}$ ,  $2a \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \text{tg}^2 \beta}$ . 1.26.  $9 \text{ см}$ . 1.27.  $48 \text{ см}^2$ .

1.28.  $1250 \text{ см}^2$ . 1.29. 1)  $\frac{a^2 \sqrt{7}}{4}$ ; 2)  $\arcsin \frac{2\sqrt{7}}{7}$ . 1.30.  $\frac{a^2 \text{ctg}^2 \beta \text{ctg} \alpha}{2 \cos \beta}$ .

1.31. 1)  $\frac{1}{2} d \text{tg} \beta$ ; 2)  $\frac{d^2 \text{tg} \frac{\alpha}{2}}{4 \cos \beta}$ . 1.32.  $60^\circ$ . 1.33.  $45^\circ$ . 1.34.  $7 \text{ см}$ . 1.35.  $6 \text{ см}$ .

1.36.  $(108 + 72\sqrt{6}) \text{ см}^2$ . 1.37.  $2S\sqrt{2}$ . 1.38.  $(18 + 12\sqrt{7}) \text{ см}^2$ .

1.39. 1)  $522 \text{ см}^2$ ; 2)  $240 \text{ см}^2$ . 1.40.  $6 \text{ см}$ ,  $8 \text{ см}$  або  $8 \text{ см}$ ,  $6 \text{ см}$ .

1.41.  $360 \text{ см}^2$ . 1.42.  $15 \text{ см}$ . 1.43.  $24\sqrt{3} \text{ см}^2$ . 1.44.  $20 \text{ см}^2$ .

1.45.  $\frac{1}{2} h^2 \text{tg} \alpha$ . 1.46.  $\frac{h^2 \sin \alpha}{2 \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}$ . 1.47. 2)  $a^2(1 + \sqrt{2})$ .

1.48. 2)  $a^2(\sqrt{3} + 1)$ . 1.49.  $60^\circ$ . *Вказівка.* Добудуйте дану призму до куба  $ADBCA_1D_1B_1C_1$ . Тоді шуканий кут дорівнює куту  $D_1AC_1$ .

#### 2. Паралелепіпед

2.5. 1)  $\text{arctg} \frac{5}{12}$ ; 2)  $\text{arctg} \frac{7}{13}$ . 2.6. 1)  $\text{arctg} \frac{12}{5}$ ; 2)  $\text{arctg} \frac{6\sqrt{74}}{37}$ .

2.7.  $7 \text{ см}$ . 2.8.  $2 \text{ см}$ ,  $4 \text{ см}$ ,  $4 \text{ см}$ . 2.9.  $a\sqrt{3}$ . 2.10.  $36\sqrt{2} \text{ см}^2$ .

2.14. 1)  $C_1(0; 9; 5)$  або  $C_1(0; 9; -5)$ ; 2)  $5\sqrt{3}$ . 2.15.  $18 \text{ см}^2$  або  $16 \text{ см}^2$ .

$$2.16. \frac{2d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad 2.17. 144\sqrt{2} \text{ см}^2. \quad 2.18. 12(\sqrt{2} + 2) \text{ см}^2.$$

$$2.19. 4(5\sqrt{3} + 4) \text{ см}^2. \quad 2.20. 21 \text{ см}. \quad 2.21. 17 \text{ см}. \quad 2.23. 1) 3\sqrt{6} \text{ см};$$

$$2) 36\sqrt{2} \text{ см}^2. \quad 2.24. 4 \text{ см}. \quad 2.25. 2d^2 \sin \alpha (\sin \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}).$$

$$2.26. \frac{2a^2 \sin \alpha (\cos \beta + \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha})}{\cos^2 \beta}. \quad 2.27. 2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}. \quad 2.28. \sqrt{\frac{S_1 S_2}{2S}}.$$

$$2.29. 32\sqrt{3} \text{ см}^2. \quad 2.30. 2 \text{ см}. \quad 2.31. 64 \text{ см}^2. \quad 2.32. 2 \text{ см}. \quad 2.33. 8\sqrt{6} \text{ см}.$$

### 3. Піраміда

$$3.13. 100(\sqrt{3} + 1) \text{ см}^2. \quad 3.14. 16\sqrt{3} \text{ см}^2. \quad 3.15. 6 \text{ см}. \quad 3.16. 20 \text{ см},$$

$$\sqrt{281} \text{ см}, 20 \text{ см}, \sqrt{281} \text{ см}. \quad 3.17. 3. \quad 3.18. 6. \quad 3.19. 1) C(5; -2; 0),$$

$$M(3,5; -0,5; 4) \text{ або } M(3,5; -0,5; -4); \quad 2) \sqrt{\frac{41}{2}}. \quad 3.20. 2) \sqrt{13}.$$

$$3.21. \frac{1}{2}b^2 \sin 2\beta. \quad 3.22. \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg} \alpha. \quad 3.24. \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} \alpha). \quad 3.25. \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha\right).$$

$$3.26. 3) 24 \text{ см}^2. \quad 3.27. 20 \text{ см}. \quad 3.28. \text{Вказівка. Доведіть, що апофема}$$

$$\text{дорівнює половині сторони основи піраміди. 3.29. 1) } \frac{a^2 \sqrt{2}}{4}; \quad 2) 45^\circ.$$

$$3.30. \frac{a^2 \sqrt{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha}. \quad 3.31. \frac{d^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}. \quad 3.32. 72 \text{ см}^2. \quad 3.33. 75\sqrt{6} \text{ см}^2.$$

$$3.35. 20 \text{ см}. \quad 3.36. 5\sqrt{3} \text{ см}. \quad 3.37. 8\sqrt{3} \text{ см}^2. \quad 3.38. 5\sqrt{2} \text{ см}.$$

$$3.40. 1) 32\sqrt{2} \text{ см}^2; \quad 2) 2 \text{ см}. \quad 3.41. 1) 20\sqrt{3} \text{ см}^2; \quad 2) \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ см}.$$

$$3.42. 1) 160 \text{ см}^2; \quad 2) 4\sqrt{3} \text{ см}. \quad 3.43. 1) 4 \text{ см}; \quad 2) (32 + 8\sqrt{10} + 24\sqrt{2}) \text{ см}^2.$$

$$3.44. 360 \text{ см}^2. \quad 3.45. 660 \text{ см}^2. \quad 3.46. 105 \text{ см}^2. \quad 3.48. 2 \arcsin \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$3.49. 2 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad 3.50. \frac{6d^2 \sqrt{3}}{\sin 2\alpha \sin \alpha}. \quad 3.51. \frac{8m^2}{\sin 2\beta \cos \beta}.$$

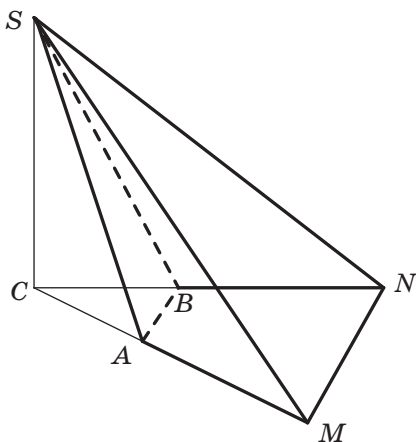
3.52. 2)  $36 \text{ см}^2$ . 3.53. 2)  $6 \text{ см}^2$ . 3.54.  $180 \text{ см}^2$ . 3.55.  $240 \text{ см}^2$ .

3.56.  $(3 + \sqrt{6} + \sqrt{3}) \text{ см}^2$ . 3.57.  $\frac{a^2 \sin \alpha (1 + \sin \beta)}{\cos \beta}$ . 3.58.  $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см}$ .

3.59.  $\frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ см}$  або  $8\sqrt{3} \text{ см}$ . 3.60.  $\frac{1}{4} \text{ см}^2$ . *Вказівка.* Доведіть, що всі

вказані в умові перерізи є прямокутниками, периметр кожного з яких дорівнює 2 см. 3.61. Існує. *Вказівка.* Розглянемо трикутну піраміду  $SABC$ , бічне ребро  $SC$  якої перпендикулярне до площини основи. На продовженні ребер  $CA$  і  $CB$  за точки  $A$  і  $B$  відповідно позначимо точки  $M$  і  $N$  (див. рисунок). Піраміда  $SMABN$  є шука-

ною. 3.62.  $1 : 9$ . 3.63.  $\frac{1701}{32} \text{ см}^2$ .



До задачі 3.61

#### 4. Площі поверхонь подібних многогранників. Зрізана піраміда

4.1. 8 см, 12 см. 4.2. 7 см. 4.3.  $45\sqrt{6} \text{ см}^2$ . 4.4.  $90 \text{ см}^2$ . 4.5. 1) 12 см;

2)  $32\sqrt{2} \text{ см}^2$ ; 3)  $64\sqrt{5} \text{ см}^2$ . 4.6. 1)  $2\sqrt{6} \text{ см}$ ; 2)  $168\sqrt{15} \text{ см}^2$ . 4.7. 2 см.

4.8. 1 см. 4.9.  $24 \text{ см}^2$ . 4.10.  $12\sqrt{10} \text{ см}^2$ . 4.11.  $(104 + 65\sqrt{3}) \text{ см}^2$ .

4.12.  $6(2 + \sqrt{13} + \sqrt{3}) \text{ см}^2$ . 4.13.  $2H^2 \operatorname{ctg} \beta \sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ .

4.14.  $\frac{(a-b)\sqrt{-\cos 2\alpha}}{2\cos \alpha}$ . 4.15.  $25\pi \text{ см}^2$ . 4.16.  $60^\circ, 75^\circ$  або  $120^\circ, 15^\circ$ .

## § 2. Тіла обертання

### 5. Циліндр

5.8.  $18\pi\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. 5.9. 13 см. 5.10.  $\frac{1}{2}d^2 \sin 2\alpha$ . 5.11.  $2\pi$  см<sup>2</sup>.

5.13.  $4S \operatorname{Stg} \frac{\alpha}{2}$ . 5.14.  $\frac{S}{\pi}$ . 5.15.  $24\pi\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>. 5.16.  $128\pi$  см<sup>2</sup>.

5.17.  $\frac{2\pi a^2 \operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ . 5.18.  $\frac{\pi m^2 \sin 2\alpha}{\cos \frac{\beta}{2}}$ . 5.19. 1) Площа бічної поверхні

циліндра, отриманого в результаті обертання прямокутника, не залежить від того, навколо якої сторони здійснюється обертання;

2) навколо меншої сторони. 5.20. 8 см. 5.21.  $2R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ .

5.22. 48 см<sup>2</sup>. 5.23. *Вказівка.* Побудуйте осьовий переріз циліндра, який проходить через точку  $A$ . 5.24. 16 см. 5.25. 10 см.

5.26.  $2\operatorname{arctg} \frac{1}{\pi}$ . 5.27.  $\operatorname{arctg}(\pi \operatorname{tg} \alpha)$ . 5.28.  $2\sqrt{7}$  см. 5.29.  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ .

5.30. *Вказівка.* Через точку  $A$  проведіть пряму  $m$ , паралельну прямій  $MM_1$ . Нехай вона перетинає нижню основу циліндра в точці  $A_1$  ( $AA_1 = MM_1$ ), а  $K$  — точка перетину прямих  $A_1B$  і  $MN$ . Шукана точка — точка перетину прямих  $AB$  і  $KK_1$ , де  $KK_1 \parallel MM_1$

і  $KK_1 = MM_1$ . 5.32.  $4S \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ . 5.33.  $\frac{\pi S}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ . 5.34. 256 см<sup>2</sup> або

400 см<sup>2</sup>. *Вказівка.* Розгляньте два випадки: 1) площина прямокутника паралельна осі циліндра; 2) площина прямокутника перетинає вісь циліндра. У другому випадку треба довести, що проекція прямокутника  $ABCD$  на площину основи циліндра також є прямокутником.

5.35.  $4\sqrt{2}$  см. 5.36.  $h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)$ . 5.37. 6 см.

5.38.  $4\sqrt{13}$  см.

### 6. Комбінації циліндра та призми

6.7. Так. 6.8. Ні. 6.10.  $\pi a^2(\sqrt{2} + 1)$ . 6.11.  $170\pi$  см<sup>2</sup>. 6.12. 162 см<sup>2</sup>.

6.13.  $24\sqrt{6}$  см<sup>2</sup>. 6.14.  $2a^2 \operatorname{ctg} \alpha$ . 6.15. 48 см<sup>2</sup>. 6.16.  $10\pi\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.

$$6.17. \frac{3\pi a^2}{2}. \quad 6.18. 120\pi \text{ см}^2. \quad 6.19. 40 \text{ см}^2. \quad 6.20. 2 : \sqrt{3}. \quad 6.21. 2 : 1.$$

$$6.22. \frac{\pi a^2 \operatorname{tg} \beta}{\sin^2 \alpha}. \quad 6.23. \frac{2S\sqrt{3}}{9}. \quad 6.24. \frac{S(\sqrt{2}-1)}{2h}. \quad 6.25. \pi m^2 \sin 2\beta \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$6.26. \frac{1}{2} \pi d^2 \sin 2\beta \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right). \quad 6.27. \frac{1}{4} \pi S \sin \alpha. \quad 6.28. \frac{1}{6} \pi S \sqrt{3}.$$

$$6.29. \frac{1}{4} d^2 \sin 2\alpha. \quad 6.30. 2R^2. \quad 6.31. 3,6 \text{ см}^2. \quad 6.32. 8\pi \text{ см}. \quad 6.33. 1000 \text{ см}^2.$$

### 7. Конус

$$7.7. \quad 1) H^2 \operatorname{ctg} \alpha; \quad 2) \frac{\pi H^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha}. \quad 7.8. \quad 1) \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha; \quad 2) \pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$7.11. 25 \text{ см}, 20 \text{ см}. \quad 7.12. 160\pi \text{ см}^2. \quad 7.14. \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad 7.15. 2m \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta.$$

$$7.16. \frac{H^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha}. \quad 7.17. 32\pi \sqrt{2} \text{ см}^2. \quad 7.18. \frac{1020\pi}{13} \text{ см}^2.$$

$$7.19. \frac{1}{2} \pi a^2 \operatorname{tg} \alpha (2 \cos \alpha + 1). \quad 7.20. \frac{\pi a^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad 7.21. 84\pi \text{ см}^2.$$

$$7.22. \pi(9 + \sqrt{2}) \text{ см}^2. \quad 7.23. 200\pi \sqrt{3} \text{ см}^2. \quad 7.24. 240\pi \text{ см}^2. \quad 7.25. 8 \text{ см}.$$

$$7.26. 60^\circ. \quad 7.27. 216^\circ. \quad 7.28. \frac{a \operatorname{ctg} \beta}{\cos \alpha}. \quad 7.29. \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ см}.$$

$$7.30. \frac{R^2 \operatorname{tg} \beta \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\sin \alpha}. \quad 7.31. \frac{\pi H^2 \sqrt{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta}.$$

$$7.32. 3\pi \sqrt{6} \text{ см}^2. \quad 7.33. 252\pi \text{ см}^2. \quad 7.34. \frac{5}{4} \pi a^2 \sqrt{3}. \quad 7.35. 10 \text{ см}. \quad 7.36. 8 \text{ см}.$$

$$7.37. 12\sqrt{3} \text{ см}.$$



## 8. Зрізаний конус

- 8.1.  $64\pi \text{ см}^2$ . 8.2.  $2 : 1$ . 8.7.  $24\pi\sqrt{2} \text{ см}^2$ . 8.8.  $120\pi \text{ см}^2$ . 8.9.  $\frac{9}{16}S$ .
- 8.10.  $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ . 8.11.  $9 \text{ см}^2$ . 8.12.  $5 : 7$ . 8.13.  $(R^2 - r^2)\text{tg } \alpha$ . 8.14.  $520\pi \text{ см}^2$ .
- 8.17.  $24\pi\sqrt{3} \text{ см}^2$ . 8.18.  $\frac{m}{2\cos \alpha}$ ,  $-\frac{m \cos 2\alpha}{2\cos \alpha}$ . 8.19.  $\frac{h(\text{ctg } \beta + \text{ctg } \alpha)}{2}$ ,
- $\frac{h(\text{ctg } \beta - \text{ctg } \alpha)}{2}$ . 8.20.  $\frac{1}{6}\pi\sqrt{6}(a^2 - b^2)$ . 8.21.  $\frac{(R^2 - r^2)\sin \alpha}{2\cos \beta}$ .
- 8.22.  $8\pi a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ . 8.23.  $\frac{1}{2}\pi a^2 \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(2\sin \frac{\alpha}{2} + 1\right)$ . 8.24.  $\frac{4\pi S \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ .
- 8.25.  $\frac{9\pi}{4} \text{ см}^2$ . 8.26.  $8\sqrt{10} \text{ см}$ . 8.27.  $32\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2) \text{ см}^2$ .

## 9. Комбінації конуса та піраміди

- 9.1.  $16\sqrt{3} \text{ см}^2$ . 9.2.  $25\sqrt{2} \text{ см}^2$ . 9.3.  $\frac{a \text{tg } \beta}{2\sin \alpha}$ ,  $\frac{a}{2\sin \alpha \cos \beta}$ .
- 9.4.  $65\pi \text{ см}^2$ . 9.5.  $120 \text{ см}^2$ . 9.6.  $2\sqrt{10} \text{ см}$ . 9.7.  $3\sqrt{6} \text{ см}$ . 9.8.  $\frac{\pi a^2}{12\cos \alpha}$ .
- 9.9.  $\frac{1}{4}a^2 \text{tg } \alpha$ . 9.10.  $\frac{\pi a^2 \sqrt{2 - \cos^2 \alpha}}{4\cos \alpha}$ . 9.11.  $\frac{\pi a^2 \sqrt{4 - 3\cos^2 \alpha}}{12\cos \alpha}$ .
- 9.12.  $\frac{\pi a^2}{4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \beta}$ . 9.13.  $\frac{\pi b^2}{4\cos^2 \alpha \cos \varphi}$ . 9.14.  $\frac{\pi a^2}{4\sin^2 2\alpha \cos \beta}$ .
- 9.15.  $\frac{325\pi}{4} \text{ см}^2$ . 9.17.  $\frac{\pi m^2}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}$ . 9.18.  $\frac{2d^2}{\sin 2\beta}$ . 9.19.  $\frac{1}{4}a^2 \sin^2 \alpha \text{tg } \beta$ .
- 9.20.  $\frac{\pi a^2 \cos^2 \alpha \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \beta}$ . 9.21.  $8\pi \text{ см}^2$ . 9.22.  $12\pi \text{ см}^2$ . 9.23.  $108\sqrt{39} \text{ см}^2$ .
- 9.24.  $60\pi\sqrt{2} \text{ см}^2$ . 9.25.  $96\sqrt{2} \text{ см}^2$ . 9.26.  $63\pi \text{ см}^2$ . 9.27.  $162 \text{ см}^2$ .
- 9.28.  $45\pi \text{ см}$ . 9.29.  $\sqrt{62}$ .

### 10. Куля. Взаємне розміщення сфери та площини

- 10.13.  $\pi R^2 \cos^2 \alpha$ . 10.14.  $4\pi\sqrt{3}$  см. 10.18.  $48\pi$  см<sup>2</sup>. 10.20. 24 см.  
 10.21. 8 см. 10.22. 7 см. 10.23.  $144\pi$  см<sup>2</sup>. 10.24. 15 см. 10.26. 1 см.  
 10.27. 15 см. 10.28.  $32\pi$  см<sup>2</sup>. 10.29.  $(x - 6)^2 + (y + 6)^2 + (z - 6)^2 = 36$   
 або  $(x - 22)^2 + (y + 22)^2 + (z - 22)^2 = 484$ . 10.30.  $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 +$   
 $(z - 4)^2 = 16$ . 10.31. Куля радіуса 1 із центром у точці  $O(1; 0; 0)$ .  
 10.32. Фігура складається з усіх точок простору, що не належать  
 кулі радіуса  $\sqrt{13}$  із центром у точці  $O(3; -2; 0)$ . 10.35.  $48\pi$  см.  
 10.36. 13 см. 10.37.  $\frac{1}{2}a \cos \alpha$ . 10.38.  $8\sqrt{2}$  см. 10.39. 6 см.  
 10.40.  $2\sqrt{10}$  см. 10.41. 4 см. 10.42.  $\pi \left( R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)$  або  
 $\pi \left( R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)$ . 10.43. 1 : 2. 10.44. 25 см. 10.45. 35 см<sup>2</sup>.

### 11. Многогранники, вписані у сферу

- 11.1. 7 см. 11.2.  $8R^2$ . 11.3. 7 см. 11.4.  $4a\sqrt{4R^2 - 2a^2}$ . 11.5. 11 см.  
 11.6. 24 см. 11.7. 17 см. 11.8. 2,25 см. 11.9.  $2R \sin^2 \alpha$ .  
 11.10.  $\frac{a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}}$ . 11.11.  $\frac{a(\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} \alpha)}{4}$ . 11.12.  $\frac{\sqrt{29}}{2}$ . 11.13.  $\frac{\sqrt{21}}{2}$ .  
 11.14. 4 см. 11.15. 9 см. 11.16.  $\frac{2R}{4 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}$ . 11.17.  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ . 11.19. Якщо  
 $b \geq h\sqrt{2}$ , то центр сфери належить піраміді; якщо  $b < h\sqrt{2}$ ,  
 то центр сфери не належить піраміді. 11.20.  $2R^2 \sin^2 2\beta \sin \alpha$ .  
 11.21. 13 см. 11.22.  $\frac{7}{6}$  см. 11.23. 40 см або 30 см. 11.24.  $2\sqrt{3}$  см.  
 11.25. 2 см. 11.26.  $\frac{a\sqrt{27 \operatorname{tg}^2 \alpha + 48}}{12}$ . 11.27. 13 см. 11.28. 10 см.  
 11.29. 7 см. *Вказівка.* Розгляньте прямокутний паралелепіпед  
 з вимірами 4 см, 6 см і 12 см. Половина його діагоналі дорівнює  
 шуканому радіусу. 11.30. 15 см. 11.31.  $56\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. 11.32. 300 см<sup>2</sup>.  
 11.33.  $2\sqrt{2}$ .

## 12. Многогранники, описані навколо сфери

12.2.  $18R^2\sqrt{3}$ .

12.3.  $12R^2\sqrt{3}$ .

12.4.  $\frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$ .

12.5.  $2htg \alpha \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ .

12.6.  $216 \text{ см}^2$ .

12.7.  $384 \text{ см}^2$ .

12.8.  $\arctg \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)$ .

12.9.  $\frac{1}{2}a\sqrt{3}\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

12.10.  $\frac{1}{2}a\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

12.11.  $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ .

12.12.  $1 \text{ см}$ .

12.13.  $\frac{1}{2}a \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .

12.14.  $\frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .

12.15.  $3S$ .

12.16.  $\sqrt{2} : 1$ .

12.17.  $12\pi \text{ см}^2$ .

12.18.  $2\pi \text{ см}$ .

12.19.  $\frac{a\sqrt{3}}{6} \sqrt{\frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}$ .

12.20.  $\frac{a}{2} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}$ .

12.22.  $\frac{a(3 - \sqrt{3})}{6}$ .

12.23.  $81\sqrt{3} \text{ см}^2$ . Вказівка.

Апофема даної зрізаної піраміди дорівнює сумі радіусів кіл, вписаних у її основи. 12.24.  $32R^2$ . 12.25.  $96 \text{ см}^2$ . 12.26.  $150 \text{ см}^2$ . 12.27. Так,  $\vec{k}(-12; 15; -9)$  або  $\vec{k}(12; -15; 9)$ .

## 13. Комбінації циліндра (конуса) та сфери

13.6.  $4\pi R^2$ .

13.7.  $1 : 2$ .

13.8.  $2\sqrt{2} \text{ см}$ .

13.9. У 2 рази.

13.10.  $2\pi R^2 \sin 2\alpha$ .

13.11.  $4\pi r \sqrt{R^2 - r^2}$ .

13.12.  $\frac{b^2}{2h}$ .

13.13.  $2\pi R^2 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}$ .

13.14.  $\frac{25}{3} \text{ см}$ .

13.15.  $2\sqrt{3} \text{ см}$ .

13.16.  $3 \text{ см}$ .

13.17.  $b \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$ .

13.18.  $64\pi \text{ см}^2$ .

13.19.  $49\pi \text{ см}^2$ .

13.20.  $\sqrt{Rr}$ .

13.21.  $\frac{1}{2}b \sin \alpha$ .

$b \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ .

$b \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ .

13.22.  $16\pi\sqrt{5} \text{ см}^2$  або

- $8\pi\sqrt{5}$  см<sup>2</sup>. 13.23. 7 см або 1 см. 13.24.  $-\frac{\pi r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$ . 13.25.  $\pi R^2(5\sqrt{2} + 7)$ .  
 13.26.  $7,2\pi$  см<sup>2</sup>. 13.27.  $2R \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ . 13.28.  $\frac{4\pi R^2}{\sin^2 \alpha}$ . 13.29.  $\frac{288\pi}{13}$  см.  
 13.30. 6 см. 13.31. 2 см. 13.32.  $18\sqrt{2}$ .

### § 3. Об'єми тіл. Площа сфери

#### 14. Об'єм тіла. Формула для обчислення об'єму призми

- 14.2.  $\frac{d^3 \sqrt{2}}{4}$ . 14.5.  $\frac{3a^3 \sqrt{3}}{2}$ . 14.7.  $\frac{h^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4}$ . 14.8. 6 см.  
 14.9. 288 см<sup>3</sup>. 14.10. 36 800 м<sup>3</sup>. 14.11.  $h = \frac{ab}{S}$ . 14.12. 456 м<sup>3</sup>.  
 14.13.  $480\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>. 14.14. 1152 см<sup>3</sup>. 14.17.  $162\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>.  
 14.18.  $d^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$ . 14.19.  $d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$ .  
 14.20.  $\frac{225\sqrt{23}}{2}$  см<sup>2</sup>. 14.21.  $\frac{1}{4} d^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ . 14.22.  $\frac{1}{4} c^3 \sin 2\beta \sin \beta \operatorname{tg} \alpha$ .  
 14.23.  $\sqrt{S_1 S_2 S_3}$ . 14.24.  $\sqrt{\frac{SS_1 S_2}{2}}$ . 14.25. 4080 см<sup>3</sup>. 14.26. 240 см<sup>3</sup>.  
 14.27.  $\frac{1}{4} a^3 \operatorname{tg} \alpha$ . 14.28.  $\frac{a^3}{2}$ . 14.29.  $128\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>. 14.30.  $72\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>.  
 14.31.  $19200\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>. 14.32.  $\frac{640}{3}$  см<sup>3</sup>. 14.33.  $1560\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>.  
 14.34.  $36\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>. 14.35.  $5\sqrt{2}$  см<sup>3</sup>. 14.36.  $\frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$ . 14.37.  $3\sqrt{15}$  см<sup>3</sup>.  
 Вказівка. Нехай  $AA_1C_1C$  — грань призми  $ABCA_1B_1C_1$ , яка є ромбом.  $AC = 3$  см,  $A_1C = 4$  см, тоді  $AC_1 = 2\sqrt{5}$  см. Висота ромба, опущена з вершини  $A_1$  на сторону  $AC$ , є також висотою призми.  
 14.38. 108 см<sup>3</sup>. 14.39. 16 см, 12 см. 14.40. 3,5 см. 14.41. 1)  $p = 4$ ;  
 2)  $p = 0$ .

### 15. Формули для обчислення об'ємів піраміди та зрізаної піраміди

$$15.6. \frac{a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}. \quad 15.7. \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ см}^3. \quad 15.8. 18 \text{ см}^3. \quad 15.9. \frac{V}{6}.$$

$$15.10. 1692 \text{ см}^3. \quad 15.11. 504 \text{ см}^3. \quad 15.12. \frac{525\sqrt{3}}{4} \text{ см}^3.$$

$$15.13. \frac{2}{3}b^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha. \quad 15.14. \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}. \quad 15.15. \frac{\sqrt{3}}{4}b^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha.$$

$$15.16. \frac{1}{3}b^3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{3 - 4\sin^2 \frac{\beta}{2}}. \quad 15.17. \frac{4}{3}b^3 \cos^2 \alpha \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

$$15.18. 108 \text{ см}^3. \quad 15.19. 2880 \text{ см}^3. \quad 15.20. \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{12 \cos \alpha}. \quad 15.21. \frac{1}{6}b^3 \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$15.22. \frac{1}{6}a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta. \quad 15.23. 2\sqrt{5} \text{ см}. \quad 15.24. 40\sqrt{3} \text{ см}^3. \quad 15.25. \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}.$$

$$15.26. 27\sqrt{3} \text{ см}^3. \quad 15.27. \frac{1}{6}m^3 \sin^2 2\alpha \operatorname{tg} \beta. \quad 15.28. \frac{(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha}{24}.$$

$$15.29. 7,84 \text{ т}. \quad 15.30. \frac{(a^3 - b^3) \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{6}. \quad 15.31. 336\sqrt{3} \text{ см}^3.$$

$$15.32. 1330 \text{ см}^3. \quad 15.34. \frac{a(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}. \quad 15.35. 2 \text{ см}. \quad 15.36. \frac{d^3 \sqrt{3}}{27 \sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

$$15.37. \frac{a^3 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{6 \sqrt{-\cos \alpha}}. \quad 15.38. \frac{H^3 \sqrt{3} \left( 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)}{4}. \quad 15.39. \frac{1}{12}a^3 \sin^2 2\alpha \operatorname{tg} \beta.$$

$$15.40. \frac{a^3 \sqrt{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{12 \cos(45^\circ - \alpha)}. \quad 15.41. \frac{(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \beta}{24}. \quad 15.42. \frac{(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha}{3}.$$

$$15.43. \frac{(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha}{16}. \quad 15.44. 64\sqrt{3} \text{ см}^2. \quad 15.45. 936 \text{ см}^2. \quad 15.46. 9.$$

### 16. Об'єми тіл обертання

$$16.4. \pi a^2 b. \quad 16.5. \frac{\pi H^3}{4}. \quad 16.6. 750\pi \text{ см}^3. \quad 16.11. 39 \text{ т}. \quad 16.12. \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}.$$

$$16.13. 64\pi \text{ см}^3. \quad 16.14. 125\pi \text{ см}^3. \quad 16.15. 240\pi \text{ см}^3. \quad 16.16. 744\pi \text{ см}^3.$$

- 16.17.  $\frac{52\pi}{3} \text{ см}^3$ . 16.22.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$ . 16.23.  $\frac{\pi a^3}{6}$ . 16.24. 1)  $63\pi \text{ см}^3$ ;  
2)  $128\pi \text{ см}^3$ . 16.25. 1)  $12 \text{ см}$ ; 2)  $576\pi \text{ см}^3$ . 16.26.  $80 \text{ м}$ . 16.27.  $77 \text{ кг}$ .
- 16.28.  $\frac{\pi m^3 \text{ ctg}^2 \beta}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ . 16.29.  $\pi R^3$ . 16.30.  $3380\pi \text{ см}^3$ . 16.31.  $\frac{2\pi d^3 \text{ tg} \frac{\alpha}{2} \text{ ctg} \beta}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ .
- 16.32.  $\frac{\pi m^3}{3 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ . 16.33.  $\frac{\pi a^3 \text{ tg} \beta}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}$ . 16.34.  $\frac{4\pi \sqrt{3}}{9} \text{ см}^3$ .
- 16.35.  $\frac{1}{3} \pi b^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \beta \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta\right)$ . 16.36.  $\frac{1}{3} \pi R^3 \cos \frac{\alpha}{2} \text{ tg} \beta$ .
- 16.37.  $448\pi \text{ см}^3$ . 16.38.  $225\pi \text{ см}^3$ . 16.39.  $\frac{1}{3} \pi a^3 \sin \beta \text{ tg} \beta$ .
- 16.40.  $2\pi \sqrt{6} \text{ см}^3$ . 16.41.  $\frac{64\pi \sqrt{3}}{3} \text{ см}^3$ . 16.42.  $96\pi \text{ см}^3$ .
- 16.43.  $\frac{1}{3} \pi r^3 \text{ ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \text{ tg} \alpha$ . 16.44.  $6 \text{ см}$ . 16.45.  $1,6 \text{ т}$ . 16.46.  $\frac{R^3 - r^3}{R^3}$ .
- 16.47.  $\frac{760\pi \sqrt{3}}{9} \text{ см}^3$ . 16.48.  $504\pi \text{ см}^3$ . 16.49.  $162\pi \sqrt{3} \text{ см}^3$ .
- 16.50.  $576\pi \text{ см}^3$ . 16.51.  $125 \text{ куль}$ . 16.52.  $6 \text{ см}$ . 16.53.  $36\pi \text{ см}^3$ .
- 16.54.  $\frac{4\pi}{3} \text{ см}^3$ . 16.55.  $\frac{32\pi H^3}{81}$ . 16.56.  $\frac{\pi a^3}{6 \sin^3 \alpha}$ . 16.57.  $\frac{\pi}{6} \text{ см}^3$ .
- 16.58.  $\frac{6766\pi}{3} \text{ см}^3$  або  $\frac{1946\pi}{3} \text{ см}^3$ . 16.59.  $\frac{\pi V \sqrt{3}}{9}$ . 16.60.  $28\pi \text{ см}^3$ .
- 16.61.  $\frac{1}{3} \pi b^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha$ . 16.62.  $64\pi \text{ см}^3$ . 16.63.  $\frac{1}{24} \pi a^3 \sin^3 \alpha \text{ tg} \beta$ .
- 16.64.  $\frac{8\pi \sqrt{3}}{3} \text{ см}^3$ . 16.65.  $\frac{1}{12} \pi a^3 \sin \alpha (2 - \cos 2\alpha)$ .
- 16.66.  $\frac{2}{3} \pi r^3 \left( \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right)$ . 16.67.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{216}$ . 16.68.  $\frac{\pi a^3}{6 \sin^3 \alpha}$ .
- 16.69.  $1 : 7$ . 16.70.  $a(2 - \sqrt{2})$ . 16.71.  $\overline{OM} = -\frac{1}{12} \overline{AC} - \frac{1}{3} \overline{AB} + \frac{3}{4} \overline{AD}$ .

### 17. Площа сфери

- 17.6.  $9 : 25$ . 17.8.  $232\pi \text{ см}^2$ . 17.9.  $160\pi \text{ см}^2$ . 17.10.  $55,3 \text{ м}$ .  
 17.12.  $2500\pi \text{ см}^2$ . 17.13.  $676\pi \text{ см}^2$ . 17.14.  $136\pi \text{ см}^2$ . 17.15.  $1 : 3$ .  
 17.16.  $49\pi \text{ см}^2$ . 17.17.  $\frac{4S}{3}$ . 17.18.  $1 : 4$ . 17.19.  $S_1 + S_2$ .  
 17.20.  $S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}$ . 17.21.  $\frac{\pi a^2}{\cos^2 \alpha \sin^2 2\beta}$ . 17.22.  $4\pi H^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ .  
 17.23.  $153^\circ$ . 17.24.  $\frac{2m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ . 17.25. Так.

## § 4. Повторення

### 18. Вправи для повторення курсу геометрії 11 класу

- 18.1.  $5\sqrt{7} \text{ см}$ . 18.2.  $30 \text{ см}$ ,  $20 \text{ см}$ ,  $18 \text{ см}$ . 18.3.  $192 \text{ см}^2$ .  
 18.4.  $12\sqrt{17} \text{ см}^2$ . 18.5.  $12a^2 \operatorname{tg} \alpha$ . 18.6.  $a \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ . 18.7.  $96\sqrt{2} \text{ см}^2$ .  
 18.8.  $36\sqrt{2} \text{ см}^2$ . 18.9.  $45^\circ$ . 18.10.  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{3}$ . 18.11.  $408 \text{ см}^2$ .  
 18.12.  $2a^2 \left( 4\sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta + \sin \alpha \right)$ . 18.13.  $120^\circ$ ,  $60^\circ$ . 18.14.  $2S$ .  
 18.15.  $2) \frac{3\sqrt{3}}{16}$ . 18.16.  $\frac{a \operatorname{tg} \beta}{2\cos \alpha}$ . 18.17.  $150\sqrt{3} \text{ см}^2$ . 18.18.  $1250 \text{ см}^2$ .  
 18.19.  $600 \text{ см}^2$ . 18.20.  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ . 18.21.  $50(3 + 2\sqrt{3}) \text{ см}^2$ .  
 18.22.  $84 \text{ см}^2$ . 18.24.  $5 \text{ см}$ . 18.25. 1)  $\frac{S\sqrt{3}}{2}$ ; 2)  $\frac{3S}{5}$ . 18.26.  $50 \text{ см}^2$ .  
 18.27.  $19 \text{ см}^2$ . 18.28.  $\pi c^2 \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$ . 18.29.  $\frac{6S(\sqrt{2} - 1)}{\pi}$ .  
 18.30.  $\pi h^2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ . 18.33.  $9\pi\sqrt{3} \text{ см}^2$ . 18.34.  $8 \text{ см}^2$ . 18.35.  $512\pi \text{ см}^2$ .  
 18.36.  $210\pi \text{ см}^2$ . 18.37.  $1470\pi \text{ см}^2$ . 18.38.  $4\pi\sqrt{3} \text{ см}^2$ . 18.39.  $32\pi \text{ см}^2$ .  
 18.40.  $a^2 \operatorname{tg} \alpha$ . 18.41.  $8\pi\sqrt{2} \text{ см}^2$ . 18.42.  $9 \text{ см}^2$ . 18.43.  $156\pi \text{ см}^2$ .  
 18.45.  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 11$ . 18.46.  $(2; 4; 6)$ ,  $(-2; -4; -6)$ .

- 18.48. 4 см. 18.49. 30 см. 18.50.  $\sqrt{3}$  см. 18.51.  $64\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>.  
 18.52.  $2\sqrt{3}$  см. 18.53.  $\frac{8R^2\sqrt{3}}{3}$ . 18.54.  $2\arctg\frac{\sqrt{30}}{5}$ . 18.55.  $1:\sqrt{5}$ .  
 18.56.  $24R^2\sqrt{3}$ . 18.57. 240 см<sup>2</sup>. 18.58.  $\frac{64\pi}{9}$  см<sup>2</sup>. 18.59. 8 : 3.  
 18.60.  $\frac{H}{2\sin^2\alpha}$ . 18.61. 60°. 18.62. 6 см. 18.63.  $169\pi$  см<sup>2</sup>.  
 18.64.  $64\sqrt{2}$  см<sup>3</sup>. 18.65.  $a^3\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta$ . 18.66.  $\frac{d^3\sqrt{3}}{9}$ . 18.67.  $\frac{3d^3\sqrt{15}}{50}$ .  
 18.68. 72 см<sup>3</sup>. 18.69.  $\frac{1}{2}h^3\sin\gamma\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$ . 18.70. 300 см<sup>2</sup>. 18.71. 32 см<sup>3</sup>.  
 18.72.  $\frac{a^3}{6}$ . 18.73.  $\frac{2S\sqrt{S}}{3}$ . 18.74.  $\frac{V}{27}$ . 18.75.  $\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma$ .  
 18.76. 18 см<sup>3</sup>. 18.77. 98 см<sup>3</sup>. 18.78. 2)  $\frac{1}{3}a^3\sin^2\beta\operatorname{tg}\alpha$ .  
 18.79.  $\frac{2m^3}{3\sin\alpha\sin^2\beta\cos\beta}$ . 18.80.  $\frac{(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha}{6}$ . 18.81. 1 : 4.  
 18.82.  $2\pi R^3\sin\frac{\alpha}{2}$ . 18.83. 9π см<sup>3</sup>. 18.84.  $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$ .  
 18.85.  $\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha$ . 18.86. 7 см. 18.87.  $32\pi\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>.  
 18.88.  $\frac{32\pi}{3}$  см<sup>3</sup>. 18.89.  $\frac{2\pi S}{\sin 2\alpha}$ .

### 19. Вправи для повторення курсу планіметрії

- 19.1. 84 см. 19.2. 60 см<sup>2</sup>. 19.3.  $\sqrt{26}$  см. 19.4. 10 см. 19.5. 12 см.  
 19.6.  $(\sqrt{2}+1)$  см<sup>2</sup>. 19.7.  $4\sqrt{13}$  см. 19.8.  $\frac{2h}{\sin 2\alpha}$ . 19.9. 48 см.  
 19.10. 480 см<sup>2</sup>. 19.13. 17 см. 19.14. 8 см. 19.15. 20 см. 19.16. 192 см.  
 19.17. 8 см. 19.18. 2 см. 19.19. 24 см. 19.20. 28 см. 19.21. 30 см.  
 19.22. 36 см<sup>2</sup>. 19.23. 36 см<sup>2</sup>. 19.24. 18 см<sup>2</sup>. 19.25. 98 см<sup>2</sup>. 19.26. 6 см<sup>2</sup>.



- 19.27.  $12 \text{ см}^2$ . 19.28.  $\frac{65}{18} \text{ см}$ . 19.29.  $15 \text{ см}$ . 19.30.  $8 \text{ см}$ . 19.31.  $300 \text{ см}^2$ .  
 19.32.  $3 : 5$ . 19.33.  $7 : 3$ . 19.34.  $6 \text{ см}$ . 19.35.  $4,5 \text{ см}$ . 19.36.  $33 \text{ см}$ .  
 19.37.  $14 \text{ см}$ . 19.38.  $128 \text{ см}$ . 19.39.  $\frac{4000}{3} \text{ см}^2$ . 19.40.  $\frac{320}{27} \text{ см}^2$ .  
 19.41.  $15 \text{ см}$ ,  $24 \text{ см}$ . 19.42.  $6 \text{ см}$ . 19.43.  $60^\circ$ . 19.44.  $2\sqrt{13} \text{ см}$ .  
 19.45.  $10 \text{ см}$ . 19.46.  $\frac{441\pi}{20} \text{ см}^2$ . 19.47.  $2 \text{ см}$ . 19.48.  $4 \text{ см}$ . 19.49.  $6 \text{ см}$ .  
 19.50.  $16 \text{ см}$ . 19.51.  $4 \text{ см}$ . 19.52.  $5,5 \text{ см}$ . 19.53.  $\frac{a \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha}$ .  
 19.54.  $24 \text{ см}^2$ . 19.55.  $12 \text{ см}^2$ . 19.56.  $120\sqrt{3} \text{ см}^2$ . 19.57.  $12 \text{ см}$ .  
 19.58.  $64 \text{ см}$ . 19.59.  $60\sqrt{2} \text{ см}^2$ . 19.60.  $22 \text{ см}$ . 19.61.  $12 \text{ см}^2$ . 19.62.  $60^\circ$ .  
 19.63.  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ . 19.64.  $96 \text{ см}^2$ . 19.65.  $\frac{2c}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ . 19.66.  $52 \text{ см}$ .  
 19.67.  $12\sqrt{5} \text{ см}$ . 19.68.  $15 \text{ см}$ . 19.69.  $230 \text{ см}^2$ . 19.70.  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .  
 19.71.  $96 \text{ см}^2$ . 19.72.  $4R^2 \sqrt{2}$ . 19.73.  $135 \text{ см}^2$ . 19.74.  $288 \text{ см}^2$ .  
 19.75.  $972 \text{ см}^2$ . 19.76.  $1664 \text{ см}^2$ . 19.77.  $48 \text{ см}$ . 19.78.  $624 \text{ см}^2$ .  
 19.79.  $196 \text{ см}$ . 19.80.  $162 \text{ см}$ . 19.81.  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ .  
 19.82.  $\frac{3R^2 \sqrt{3}}{4}$ . 19.83.  $\frac{3a^2 \sqrt{3}}{4}$ . 19.84.  $10 \text{ см}$ . 19.85.  $\frac{85}{8} \text{ см}$ .  
 19.86.  $306 \text{ см}^2$ . 19.87.  $100^\circ$ . 19.88.  $58^\circ$ . 19.89.  $60^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $70^\circ$ .  
 19.90.  $\sqrt{\frac{247}{7}} \text{ см}$ . 19.91.  $1 : 2$ . 19.92.  $\sqrt{3} : 2$ . 19.93.  $\frac{a(3 + \sqrt{3})}{6}$ .  
 19.94.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ . 19.95.  $15^\circ$ . 19.96.  $6 \text{ см}$ . 19.97.  $16 \text{ см}$ . 19.98.  $20 \text{ см}$ .  
 19.99.  $12,5 \text{ см}$ ,  $4,5 \text{ см}$ . 19.100.  $18 \text{ см}$ . 19.101.  $8 \text{ см}$ ,  $12 \text{ см}$ .  
 19.102.  $29\pi \text{ см}$ . 19.107.  $\sqrt{5}$ . 19.108.  $A(3; -2)$ . 19.109.  $(0; -1,5)$ .  
 19.110.  $(2; 0)$ . 19.112.  $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 25$ . 19.113.  $y = 3x + 7$ .  
 19.114.  $y = -2$ . 19.115.  $y = 3x + 3$ . 19.116.  $y = x\sqrt{3} + 2$ .  
 19.117.  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ . 19.118.  $y = -0,5x - 4$ . 19.121.  $y = x - 3$ .

19.124.  $\overline{m}(7; 1)$ . 19.125.  $\sqrt{65}$ . 19.126. 1. 19.127. 18. 19.128. 6.

19.129. 1)  $\frac{1}{2}$ ; 2) 1. 19.130.  $135^\circ$ . 19.131.  $\overline{AM} = \frac{3}{5}\overline{a} + \overline{b}$ .

19.132.  $\overline{EF} = \frac{4}{7}\overline{b} - \frac{1}{4}\overline{a}$ . 19.133.  $\overline{KM} = -\frac{2}{3}\overline{a} - \frac{2}{5}\overline{b}$ . 19.139. (6; -9).

19.140. (3; 4). 19.152. *Вказівка.* Нехай точка  $A_1$  — образ точки  $A$  при симетрії відносно прямої  $a$ . Тоді точка  $X$  перетину прямих  $a$  і  $A_1B$  є шуканою. Якщо точки  $A_1$  і  $B$  збігаються, то за шукану точку  $X$  можна взяти будь-яку точку прямої  $a$ . Якщо прямі  $a$  та  $A_1B$  паралельні, то задача розв'язків не має. 19.153. *Вказівка.* Нехай  $A_1$  — образ точки  $A$  при симетрії відносно прямої  $a$ . Тоді точка перетину прямих  $a$  і  $BA_1$  є шуканою. Справді,  $\angle AXK = \angle KXA_1$ , оскільки  $XK$  — бісектриса кута  $AXA_1$ , а  $\angle KXA_1 = \angle BXD$  як вертикальні. 19.154. *Вказівка.* Нехай точка  $A_1$  — образ точки  $A$  при симетрії відносно прямої  $a$ . Шукана точка  $X$  — це точка перетину прямих  $A_1B$  і  $a$ . 19.155. 1 см або  $\sqrt{5}$  см. *Вказівка.* Розгляньте два випадки: поворот за годинниковою стрілкою та проти годинникової стрілки. 19.156. 2 см або 1 см.

## Предметний покажчик

- А**пофема зрізаної піраміди 2  
 — — правильної піраміди 24  
 Атмосфера кулі 148
- Б**ічна поверхня зрізаного конуса 72  
 — — конуса 65  
 — — циліндра 50
- В**елике коло сфери 85  
 Великий круг кулі 85  
 Вершина конуса 65  
 — кульового сегмента 139  
 — многогранного кута 7  
 Виміри прямокутного паралелепіпеда 18  
 Висота зрізаного конуса 72  
 — зрізаної піраміди 34  
 — конуса 65  
 — кульового сегмента 139  
 — піраміди 23  
 — призми 9  
 — циліндра 50  
 Вісь зрізаного конуса 72  
 — конуса 65  
 — обертання 50  
 — циліндра 50
- Г**ексаедр 37  
 Геометричне тіло 5  
 Грані многогранника сусідні 5  
 — паралелепіпеда протилежні 17  
 Грань зрізаної піраміди бічна 33  
 — многогранного кута 7
- Д**іагональ многогранника 7  
 Діагональний переріз піраміди 24  
 — — призми 9  
 Діаметр кулі 84  
 Додекаедр 37  
 Дотична площина до сфери 85  
 — пряма до сфери 85
- З**різана піраміда, вписана в зрізаний конус 79  
 — —, описана навколо зрізаного конуса 79  
 Зрізаний конус 71  
 — —, вписаний у зрізану піраміду 79  
 — —, — — сферу 106  
 — —, описаний навколо зрізаної піраміди 79  
 — —, — — сфери 108
- І**косаедр 38
- К**онус 65  
 —, вписаний у піраміду 78  
 —, — у сферу 105  
 —, описаний навколо піраміди 78  
 —, — — сфери 107  
 Куб 18  
 Кульовий сегмент 139  
 — сектор 140  
 — шар 140  
 Куля 83  
 —, вписана в многогранник 99  
 —, описана навколо многогранника 92  
 Кут двогранний многогранника при ребрі 7  
 — многогранний 7  
 — плоский многогранника при вершині 7

**Многогранник 5**

- , вписаний у кулю 92
- , — — сферу 91
- , описаний навколо кулі 99
- , — — сфери 99
- опуклий 8
- — правильний 37

**Об'єм зрізаного конуса 138**

- зрізаної піраміди 132
- конуса 138
- кулі 139
- кульового сегмента 140
- кульового сектора 141
- піраміди 129
- призми 123
- тіла 121
- циліндра 139

**Обкутуючий шар 151****Октаедр 38****Основа зрізаного конуса 71**

- зрізаної піраміди 33
- конуса 65
- кульового сегмента 139
- циліндра 50

**Осьове коло тора 153****Осьовий переріз зрізаного конуса 72**

- — конуса 66
- — циліндра 52

**Паралелепіпед 17**

- прямий 17
- прямокутний 17

**Піраміда, вписана в конус 78****Піраміда  $n$ -кутна 23**

- зрізана 33
- , описана навколо конуса 78
- правильна 24
- — зрізана 34

**Площа бічної поверхні зрізано-го конуса 74**

- — — зрізаної піраміди 34
- — — конуса 67
- — — піраміди 25
- — — призми 9
- — — циліндра 53
- поверхні 152
- — кулі 148
- — многогранника 8
- — тора 154
- повної поверхні конуса 67
- — — зрізаної піраміди 34
- — — піраміди 25
- — — призми 9
- — — циліндра 53
- сфери 149

**Поверхня кулі 83**

- фігури 42

**Призма, вписана в циліндр 59**

- $n$ -кутна 8
- , описана навколо циліндра 60
- похила 9
- правильна 9
- пряма 9

**Радіус кулі 83****Ребро бічне зрізаної піраміди 33**

- многогранного кута 71
- основи зрізаної піраміди 33

**Розгортка бічної поверхні зрізаного конуса 73**

- — — конуса 66
- зрізаного конуса на площину 73
- конуса на площину 66
- циліндра на площину 52

- Сфера**, вписана в зрізаний конус 108
- , — — конус 107
  - , — — многогранник 99
  - , — — циліндр 107
  - , описана навколо зрізаного конуса 106
  - , — — конуса 105
  - , — — многогранника 91
  - , — — циліндра 105
- Твірна зрізаного конуса** 72
- конуса 65
  - циліндра 50
- Тетраедр правильний** 24
- Тіло** 5, 42
- обертання 50
- Тор** 153
- Точка дотикання фігури** 42
- дотику сфери та кулі 85
- Фігура відкрита** 41
- зв'язна 42
  - обмежена 41
  - , яка дотикається до сфери 85
- Центр кулі** 83
- Циліндр** 50
- , вписаний у призму 60
  - , — — сферу 105
  - , описаний навколо призми 59
  - , — — сфери 107

## ЗМІСТ

<i>Від авторів</i> .....	3
<i>Умовні позначення</i> .....	4
<b>§ 1. Многогранники</b> .....	5
1. Призма.....	6
2. Паралелепіпед.....	17
3. Піраміда.....	23
4. Площі поверхонь подібних многогранників. Зрізана піраміда.....	33
• Платонові тіла .....	37
• Геометричне тіло .....	41
<i>Завдання № 1 «Перевірте себе» в тестовій формі</i> .....	44
<i>Головне в параграфі 1</i> .....	47
<b>§ 2. Тіла обертання</b> .....	49
5. Циліндр .....	50
6. Комбінації циліндра та призми .....	59
7. Конус.....	65
8. Зрізаний конус.....	71
9. Комбінації конуса та піраміди .....	78
10. Куля. Взаємне розміщення сфери та площини .....	83
11. Многогранники, вписані у сферу.....	91
12. Многогранники, описані навколо сфери .....	99
13. Комбінації циліндра (конуса) та сфери .....	105
• Краса та розум України.....	112
<i>Завдання № 2 «Перевірте себе» в тестовій формі</i> .....	113
<i>Головне в параграфі 2</i> .....	116

---

<b>§ 3. Об'єми тіл. Площа сфери .....</b>	<b>120</b>
14. Об'єм тіла. Формули для обчислення об'єму призми .....	121
15. Формули для обчислення об'ємів піраміди та зрізаної піраміди .....	129
16. Об'єми тіл обертання.....	137
17. Площа сфери .....	148
• <b>Означення Мінковського.....</b>	<b>151</b>
<i>Завдання № 3 «Перевірте себе» в тестовій формі .....</i>	<i>155</i>
<i>Головне в параграфі 3 .....</i>	<i>158</i>
<b>§ 4. Повторення.....</b>	<b>160</b>
18. Вправи для повторення курсу геометрії 11 класу .....	161
19. Вправи для повторення курсу планіметрії .....	169
<i>Дружимо з комп'ютером .....</i>	<i>184</i>
<i>Відповіді та вказівки до вправ .....</i>	<i>188</i>
<i>Предметний покажчик .....</i>	<i>203</i>