

ВИДАВНИЧИЙ ДІМ
ОСВІТА

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1),$$

$$\text{або } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_n = n!$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$



Григорій Бевз
Валентина Бевз

Математика

Алгебра і початки аналізу
та геометрія

Рівень стандарту

Math








11
клас

УДК 512/514*кл11(075.3)
Б36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 12.04.2019 № 472)

ВИДАНО ЗА ДЕРЖАВНІ КОШТИ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Умовні позначки

-  — «Здоров'я і безпека»
-  — «Підприємливість та фінансова грамотність»
-  — «Громадянська відповідальність»
-  — «Екологічна безпека і сталий розвиток»
-  — Задачі, що було запропоновано під час ЗНО

Бевз Г. П.

Б36 Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія.
Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної
середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий
дім «Освіта», 2019. — 272 с. : іл.

ISBN 978-966-983-016-6.

УДК 512/514*кл11(075.3)

ШАНОВНІ УЧНІ ТА УЧЕНИЦІ!

« Ви талановиті діти! Коли-небудь ви самі приємно здивуєтесь які ви розумні, як багато вмієте, якщо будете постійно працювати над собою, ставити перед собою мету і намагатися її досягти. »

Ж. Ж. Руссо

Настав новий навчальний рік — визначальний у вашому житті. Ви стоїте на порозі вибору майбутньої професії. Ця книжка — підручник, за яким ви будете завершувати вивчення математики в середній школі. Це інтегрований курс математики, до якого входять найважливіші теми з алгебри, початків аналізу та з геометрії. Їх вивчення сприятиме оволодінню системою математичних знань, навичок і вмінь, які потрібні у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності. Набуті математичні компетентності допоможуть у вивченні інших шкільних дисциплін та продовженні навчання в інших закладах освіти.

Окремі теми ви вже знаєте з попередніх класів, а більшість — зовсім нові. Намагайтеся опанувати їх.

Відповідаючи на запитання рубрики «Перевірте себе», ви можете краще закріпити і систематизувати нові знання.

Знати математику — це насамперед уміти користуватись нею. А для цього слід розв'язувати задачі. У підручнику задачі і вправи поділено на групи: «Виконайте усно», група А, група Б і «Задачі для повторення». У рубриці «Виконаємо разом» подається декілька задач із розв'язаннями. Радимо ознайомитись з ними, перш ніж виконувати домашнє завдання.

Особливістю цього підручника є включення задач, що в різні роки пропонувалися під час ЗНО. Ці задачі позначені знаком .

Окремі задачі, запропоновані у підручнику, — це задачі з реальними даними, що стосуються використання, збереження та примноження природних ресурсів, безпеки й охорони здоров'я громадян, кількісних показників розвитку суспільства тощо. Біля цих задач стоять умовні позначення (які розміщено на звороті титульного аркуша).

Цікаві доповнення до основного матеріалу містяться в рубриці «Історичні відомості». Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу призначено рубрики «Скарбничка досягнень і набутих компетентностей», «Самостійна робота», «Тестові завдання», «Тематичні тести».

Сподіваємося, що вивчення математики за цим підручником буде для вас цікавим і нескладним.

Бажаємо успіхів!

Автори

Томас Герріот

(1560–1621)



Відомий англійський астроном, математик, етнограф і перекладач. Основні математичні роботи стосуються алгебри. Підготував працю «Застосування аналітичного мистецтва до розв'язування алгебраїчних рівнянь», опубліковану посмертно в 1631 році. Герріот значно удосконалив алгебраїчну символіку Вієта, наблизивши її до сучасної, — для позначення чисел використовував маленькі букви, ввів загальноприйняті значки для операцій порівняння: «>» (більше) і «<» (менше).

1560

1600

1700

1800

1900

1878

Костянтин Лебединцев

(1878–1925)

Український математик і талановитий педагог-новатор, член Київського фізико-математичного товариства. Професійна діяльність стосувалася реформування математичної освіти та впровадження в систему освіти демократичних новітніх ідей. Зокрема, у його підручнику «Керівництво алгебри» функції вперше ввійшли до курсу алгебри як органічна складова. Підручник був схвалений педагогічною спільнотою, витримав 12 видань, а академік О. Ю. Шмідт назвав його «найкращим сучасним підручником з алгебри».



РОЗДІЛ 1

ПОКАЗНИКОВІ ТА
ЛОГАРИФМІЧНІ ФУНКЦІЇ

CHAPTER 1

EXPONENTIAL AND
LOGARITHMIC FUNCTIONS

« Функції потрібні не лише натуралістові, без них тепер не обійдеться і соціологія. Взагалі нині немає жодної галузі людського знання, куди не входили б поняття про функції та їх графічне зображення. »

К. Лебединцев

§ 1

СТЕПЕНЕВІ
ТА ПОКАЗНИКОВІ ФУНКЦІЇ

POWER AND EXPONENTIAL
FUNCTIONS

§ 2

ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ
ТА НЕРІВНОСТІ

EXPONENTIAL EQUATIONS
AND INEQUALITIES

§ 3

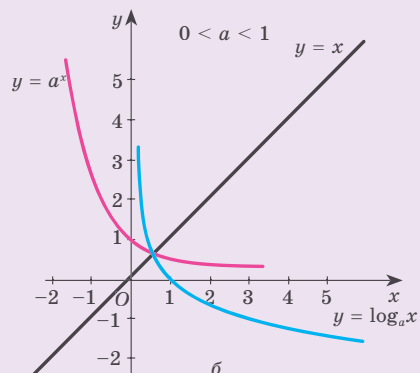
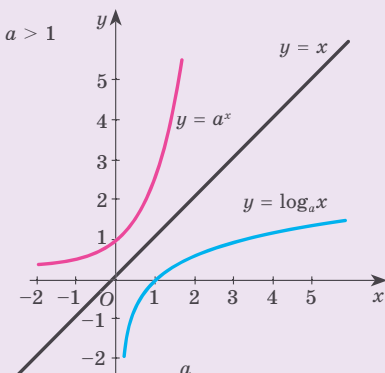
ЛОГАРИФМИ ТА
ЛОГАРИФМІЧНІ ФУНКЦІЇ

LOGARITHMS AND
LOGARITHMIC FUNCTIONS

§ 4

ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ
ТА НЕРІВНОСТІ

LOGARITHMIC EQUATIONS
AND INEQUALITIES



ЕКОНОМІКА

Організація та управління матеріальним виробництвом, ефективне використання ресурсів, розподіл, обмін, збут і споживання товарів і послуг.



Матеріальне виробництво

Товари та послуги

Використання ресурсів

Фінанси



МАТЕМАТИКА В МОЇЙ ПРОФЕСІЇ

ЕКОЛОГІЯ

Вивчення взаємодії живої і неживої природи.

Моделювання наслідків природних катаклізмів

Створення та дослідження природно-промислових систем

Вимірювання та аналіз параметрів навколишнього середовища



§ 1. СТЕПЕНЕВІ ТА ПОКАЗНИКОВІ ФУНКЦІЇ

Повторимо і дещо розширимо відомості про степені.

Вираз a^α називають *степенем*. Тут a — основа степеня, α — його показник. Показник степеня може бути будь-яким дійсним числом. Що таке степені з раціональними показниками, ви вже знаєте. Наприклад:

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \quad (a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2);$$

$$4^1 = 4; 4^0 = 1 \quad (a^1 = a; a^0 = 1, a \neq 0);$$

$$4^{-1} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad (a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in \mathbb{N});$$

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \quad (a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, a > 0).$$

Так поступово розширювалося поняття степеня: від степеня числа з натуральним показником n до степеня з довільним раціональним показником.

Математики часто використовують також степені з довільними дійсними показниками. Множина дійсних чисел складається з чисел раціональних та ірраціональних. Степені з раціональними показниками описані вище. Якщо показник степеня — число ірраціональне, значення степеня можна обчислювати, користуючись калькулятором або комп'ютером.

Наближені значення (з точністю до десятих, сотих, тисячних і т. д.) для степенів $3^{\sqrt{2}}$ і $5^{\sqrt{2}}$ подано в таблиці, виконаній за допомогою табличного процесора Excel (мал. 1).

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|----------------|-----|------|-------|--------|---------|----------|
| 1 | $\sqrt{2}$ | 1,4 | 1,41 | 1,414 | 1,4142 | 1,41421 | 1,414214 |
| 2 | $3^{\sqrt{2}}$ | 4,7 | 4,73 | 4,729 | 4,7288 | 4,72880 | 4,728804 |
| 3 | $5^{\sqrt{2}}$ | 9,7 | 9,74 | 9,739 | 9,7385 | 9,73852 | 9,738518 |
| 4 | | | | | | | |

Мал. 1

Отже, $3^{\sqrt{2}} \approx 4,73$;

$5^{\sqrt{2}} \approx 9,74$.

Якими б не були дійсні числа $a > 0$ і α , степінь a^α завжди має зміст, тобто дорівнює деякому дійсному числу.

Для таких степенів справджуються властивості:

$$1) a^r \cdot a^s = a^{r+s}; 2) a^r : a^s = a^{r-s}; 3) (a^r)^s = a^{rs}; 4) (ab)^r = a^r b^r; 5) \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Вирази з будь-якими дійсними показниками степенів і додатними основами можна перетворювати так само, як з раціональними показниками. Наприклад,

$$\frac{49^{\sqrt{2}} - a^{\frac{2}{\pi}}}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = \frac{(7^{\sqrt{2}})^2 - \left(a^{\frac{1}{\pi}}\right)^2}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = \frac{(7^{\sqrt{2}} - a^{\frac{1}{\pi}})(7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}})}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = 7^{\sqrt{2}} - a^{\frac{1}{\pi}}.$$

Степеневою називають функцію $y = x^\alpha$, де α — довільне дійсне число.

Зі степенями тісно пов'язані степеневі та показникові функції. Степенові функції ($y = x^p$, $p \in \mathbb{Q}$) ви вивчали в попередніх класах.

Приклади степеневих функцій:

$y = x^{10}$, $y = x^{-0.5}$, $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{-\pi}$. Властивості цих функцій такі самі, як і властивості степеневих функцій з раціональними показниками степенів.

Якщо α — додатне ірраціональне число, то функція $y = x^\alpha$ визначена на проміжку $[0; +\infty)$; така ж і множина її значень. Якщо ж ірраціональне число α від'ємне, то область визначення і область значень функції $y = x^\alpha$ є проміжок $(0; +\infty)$.

Функцію називають **показниковою**, якщо її можна задати формулою $y = a^x$, де a — довільне додатне число, відмінне від 1.

Далі розглянемо показникові функції.

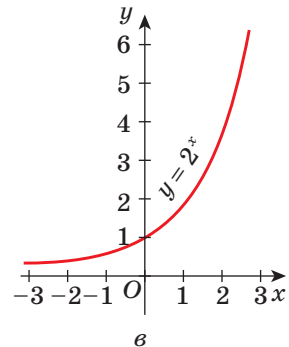
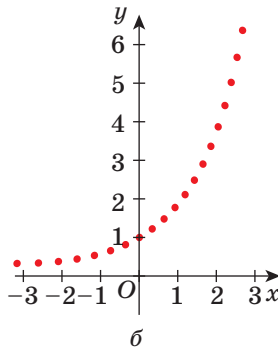
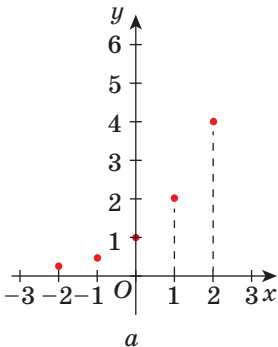
Приклади показникових функцій:

$$y = 2^x, y = 0,3^x, y = (\sqrt{2})^x.$$

Побудуємо графік функції $y = 2^x$. Складемо таблицю значень функції для кількох цілих значень аргументу x :

| | | | | | | | | | |
|-----|----------------|---------------|---------------|---------------|---|---|---|---|----|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |

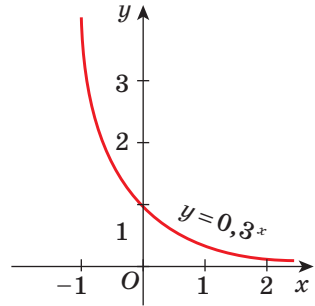
На малюнку 2, a позначено точки, координати яких x, y — пари чисел з таблиці. Позначивши на координатній площині більше точок з коорди-



Мал. 2

натами x і y , що задовольняють формулу $y = 2^x$, одержимо малюнок 2, б. А якби для кожного значення x за формулою $y = 2^x$ обчислили відповідне значення y і позначили точки з такими координатами, то дістали б неперервну криву лінію (мал. 2, в). Це — графік функції $y = 2^x$.

Як бачимо, показникова функція $y = 2^x$ визначена на всій множині дійсних чисел, має тільки додатні значення і на всій області визначення зростає. А функція $y = 0,3^x$ на всій області визначення спадає (мал. 3).



Мал. 3

Сформулюємо основні властивості показникових функцій.

1. Область визначення функції $y = a^x$ — множина R , оскільки при кожному додатному a і дійсному x вираз a^x має числове значення.

2. Функція $y = a^x$ набуває тільки додатних значень, оскільки, якщо основа a степеня додатна, то додатний і степінь a^x . Отже, область значень функції $y = a^x$ — множина $(0; +\infty)$.

3. Якщо $a > 1$, функція $y = a^x$ зростає, а якщо $0 < a < 1$ — спадає. Цю властивість добре видно на графіках функцій (див. мал. 2, 3).

4. Функція $y = a^x$ набуває кожного свого значення тільки один раз. Тобто пряму, паралельну осі x , графік показникової функції може перетнути тільки в одній точці. Це впливає з властивості 3.

5. Функція $y = a^x$ ні парна, ні непарна, ні періодична. Оскільки кожного свого значення вона набуває тільки один раз, то не може бути парною або періодичною. Не може вона бути і непарною, бо не набуває ні від'ємних, ні нульових значень.

6. Графік кожної показникової функції проходить через точку $A(0; 1)$, оскільки, якщо $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

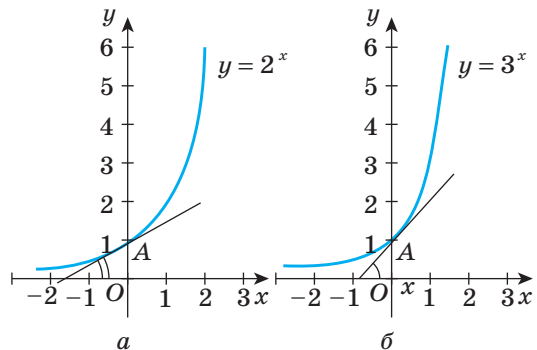
Зверніть увагу на твердження, які впливають із монотонності показникової функції:

1. Якщо $a > 0$ і $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.

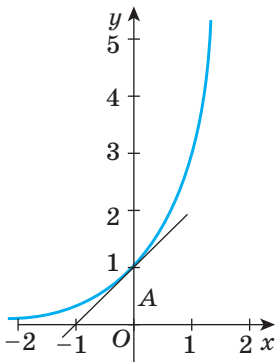
2. Якщо $a > 1$ і $a^{x_1} > a^{x_2}$, то $x_1 > x_2$.

3. Якщо $0 < a < 1$ і $a^{x_1} > a^{x_2}$, то $x_1 < x_2$.

Придивіться до графіків показникових функцій $y = 2^x$ і $y = 3^x$ (мал. 4). Кутівий коефіцієнт дотичної, проведеної в точці $A(0; 1)$ до графіка функції $y = 2^x$, менший за 1, а до графіка функції $y = 3^x$ — більший за 1. А чи існує така показникова функція, щоб кутівий коефіцієнт дотичної до її графіка в точці $A(0; 1)$ дорівнював 1?



Мал. 4



Мал. 5

Існує (мал. 5). Основа цієї показникової функції — ірраціональне число $2,71828\dots$, яке прийнято позначати буквою e .

Показникова функція $y = e^x$ в математиці і багатьох прикладних науках трапляється досить часто. Її називають *експонентою* (лат. *exponeps* — виставляти напоказ).

На багатьох калькуляторах є окрема клавіша для функції e^x . Ця функція і справді вирізняється з усіх інших функцій. За її допомогою описуються закони природного зростання чи спадання.

Наприклад, процеси новоутворення та розпаду можна описати за допомогою формули $P = P_0 e^{kt}$. Тут P — кількість новоутвореної речовини (або речовини, що розпалася) в момент часу t ; P_0 — початкова кількість речовини; k — стала, значення якої визначається для конкретної ситуації. Доберіть самостійно відповідні приклади.

Перевірте себе

- 1) Що називають степенем числа з натуральним показником?
- 2) Якими рівностями можна визначити степінь числа з цілим від'ємним показником? А з дробовим показником?
- 3) Як можна знайти степінь додатного числа з ірраціональним показником?
- 4) Які властивості мають степені з довільними дійсними показниками?
- 5) Сформулюйте означення показникової функції.
- 6) Назвіть область визначення показникової функції і область її значень.
- 7) Через яку точку проходить графік кожної показникової функції?
- 8) Чи може значення показникової функції бути від'ємним? А дорівнювати нулю?
- 9) За якої умови показникова функція зростає? А за якої — спадає?
- 10) Що називають експонентою?

Виконаємо разом

1) Спростіть вираз $\frac{5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}}{5^{\sqrt{2}}}$.

Розв'язання. $\frac{5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}}{5^{\sqrt{2}}} = \frac{5^{\sqrt{2}}(1 - 5^{-1})}{5^{\sqrt{2}}} = 1 - \frac{1}{5} = 0,8$.

- 2) Функція $f(x) = 0,5^x$ задана на проміжку $[-2; 3]$. Знайдіть її найменше та найбільше значення.

Розв'язання. Оскільки $0,5 < 1$, то дана функція спадна. Тому її найменшим і найбільшим значеннями будуть: $f(3) = 0,5^3 = 0,125$; $f(-2) = 0,5^{-2} = 4$.
Відповідь. 0,125 і 4.

3) Порівняйте з одиницею число:

а) $0,5^{1,5}$; б) $(\sqrt{5})^{-0,2}$.

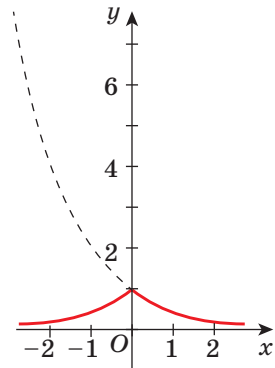
Розв'язання. а) Подамо число 1 у вигляді степеня з основою 0,5. Маємо: $1 = 0,5^0$. Оскільки функція $y = 0,5^x$ — спадна і $1,5 > 0$, то $0,5^{1,5} < 0,5^0$, звідки $0,5^{1,5} < 1$.

б) Оскільки $1 = (\sqrt{5})^0$; $y = (\sqrt{5})^x$ — зростаюча функція і $-0,2 < 0$, то $(\sqrt{5})^{-0,2} < (\sqrt{5})^0$, звідки $(\sqrt{5})^{-0,2} < 1$.

Відповідь. а) $0,5^{1,5} < 1$; б) $(\sqrt{5})^{-0,2} < 1$.

4) Побудуйте графік функції $y = 0,5^{|x|}$.

Розв'язання. Функція $y = 0,5^{|x|}$ — парна (перевірте). Графік парної функції симетричний відносно осі y , тому достатньо побудувати графік заданої функції для $x \geq 0$ і відобразити його симетрично відносно осі y . Якщо $x > 0$, то $0,5^{|x|} = 0,5^x$. Побудуємо графік функції $y = 0,5^x$ для $x \geq 0$ і відобразимо його відносно осі y (мал. 6).



Мал. 6

Виконайте усно

Обчисліть (1–3).

1. а) $81^{\frac{1}{4}}$; б) $625^{\frac{1}{4}}$; в) $0,006^{\frac{1}{4}}$; г) $1^{\frac{1}{4}}$.

2. а) $9^{0,5}$; б) $6,25^{0,5}$; в) $0,16^{0,5}$; г) $0^{0,5}$.

3. а) 4^{-1} ; б) 2^{-1} ; в) $0,5^{-1}$; г) $(-1)^{-1}$.

4. Який з поданих нижче виразів не існує:

а) $(-4)^{-1}$; б) 2^0 ; в) $(-5)^{0,5}$; г) $(-1)^0$; г) π^π ; д) $0^{-\sqrt{3}}$?

5. Які з функцій $y = x^{1,5}$; $y = x^{5-x}$; $y = \pi^x$; $y = \sqrt{2^x}$ показникові?

6. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y = 2,5^x$; б) $y = e^x$; в) $y = 0,5^x$; г) $y = 3^{-x}$; г) $y = \pi^x$?

7. Чи мають спільні точки графіки функцій:

а) $y = 2^x$ і $y = 2$; б) $y = 2^x$ і $y = 2x$; в) $y = 2^x$ і $y = -2x$; г) $y = 2^x$ і $y = -2$?

A

8. Подайте у вигляді степеня з основою 2 число:

а) 8; б) $\frac{1}{16}$; в) $\sqrt{2}$; г) 0,25; г) 1024; д) 0,5; е) $\sqrt[3]{4}$; е) 0,0625.

9. Подайте у вигляді степеня з основою 3 число:

- а) 81; б) 27; в) $9^{\sqrt{2}}$; г) 81^{-1} ; ґ) $\sqrt[3]{9}$; д) 1; е) $729^{0,25}$; є) 27^π .

10. Обчисліть:

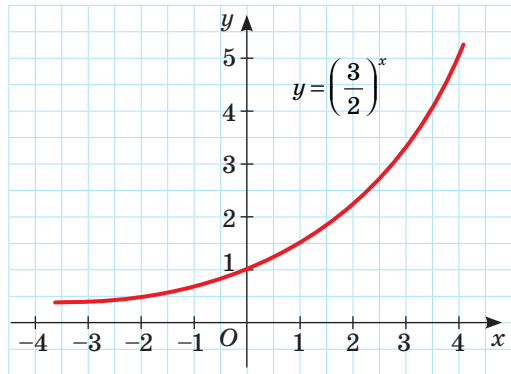
- а) $32^{0,4}$; б) $27^3 : 9^4$; в) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4}$; г) $(9^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; е) $49^{0,25} \cdot \sqrt{7}$;
 д) $25^\pi : 5^{1+2\pi}$; є) $2^\pi \cdot 0,5^\pi$.

11. Використовуючи графік функ-

ції $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ (мал. 7), знайдіть

наближене значення:

- а) функції у точці з абсцисою:
 -2; -1,5; 0; 1; 2,5; 3,5; 4;
 б) аргументу x , при якому значення функції дорівнює: 0,4; 0,5; 1,2; 1,5; 2,25; 2,8; 3,5; 4,25.



Мал. 7

Спростіть вираз (12, 13).

12. а) $(a - x^{0,5})(a + x^{0,5})$;

- б) $\left(c^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{4}}\right)\left(c^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}\right)$; в) $(a-b) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$; г) $(x-4) : (x^{0,5} + 2)$.

13. а) $\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)$;

в) $(a-8) : \left(a^{\frac{1}{3}} - 2\right)$;

б) $\left(n^{\frac{1}{3}} + 2\right)\left(n^{\frac{2}{3}} - 2n^{\frac{1}{3}} + 4\right)$;

г) $(1-x) : \left(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)$.

✓ 14. (ЗНО, 2016). Якщо $2^a = 3$, то $4^{a+1} =$

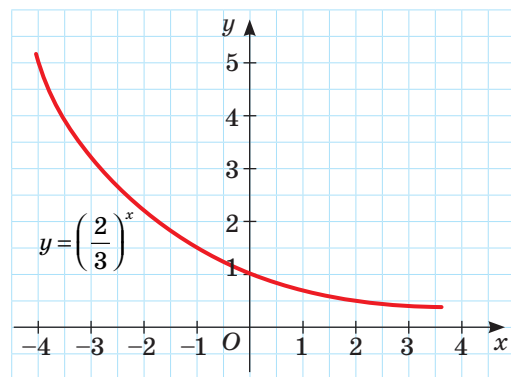
| А | Б | В | Г | Д |
|----|----|----|----|----|
| 12 | 13 | 18 | 36 | 64 |

15. Використовуючи графік функ-

ції $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ (мал. 8), знайдіть

наближене значення:

- а) функції y в точці з абсцисою:
 -4; -2; -1; 0; 1; 1,5; 2; 3;
 б) аргументу x , при якому значення функції дорівнює: 0,4; 0,5; 1,2; 1,5; 2,25; 2,8; 3,5; 4,25.



Мал. 8

16. Опишіть властивості функції:

- а) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; б) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

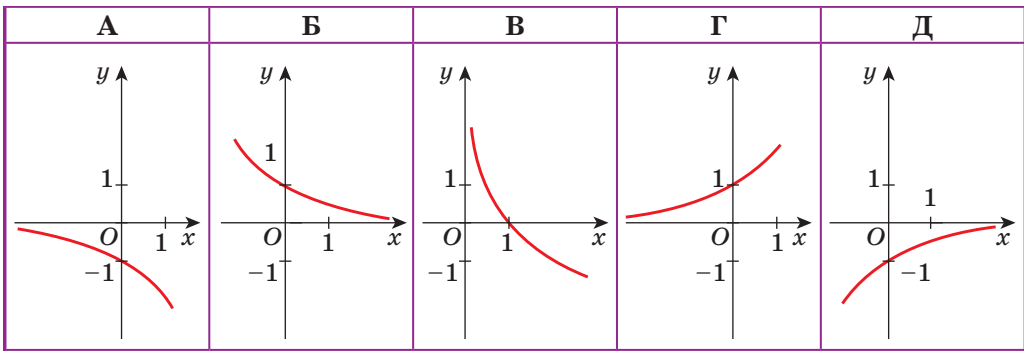
17. Побудуйте графік функції: а) $y = 4^x$; б) $y = 0,5^x$.

18. За допомогою калькулятора знайдіть з точністю до 10^{-4} значення функції $y = 1,7^x$, якщо: а) $x = 0,5$; б) $x = 1,3$; в) $x = \sqrt{3}$.

19. Накресліть у зошиті таблицю і заповніть її з точністю до 10^{-3} .

| | | | | | | |
|---------|------|------|------|-----|-----|---|
| x | -3,5 | -2,5 | -1,5 | 1,5 | 2,5 | 3 |
| 2^x | | | | | | |
| $0,5^x$ | | | | | | |

☑ 20. (ЗНО, 2015). На якому малюнку зображено ескіз графіка функції $y = 2^{-x}$?



21. Зростаючою чи спадною є функція:

- а) $y = 5^x$; в) $y = (\sqrt{2})^x$; г) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$; е) $y = (\sqrt{5} - 2)^x$;
 б) $y = \left(\frac{9}{10}\right)^x$; г) $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$; д) $y = 2^{-x}$; е) $y = \frac{1}{(\sqrt{5} - 2)^x}$?

22. Порівняйте з одиницею число:

- а) $2^{-\sqrt{5}}$; в) $0,3^2$; г) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; е) $(\sqrt{2})^3$;
 б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; г) $1,7^3$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$; е) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^e$.

23. Порівняйте числа:

- а) $4^{-\sqrt{3}}$ і $4^{-\sqrt{2}}$; в) $5^{0,2}$ і $5^{-1,2}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}$ і $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$;
 б) $2^{\sqrt{3}}$ і $2^{1,7}$; г) $\left(\frac{1}{9}\right)^\pi$ і $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$; д) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,2}$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$.

24. Чи проходить графік функції $y = 4^x$ через точку А, якщо:

- а) $A(4; 16)$; б) $A(4; 256)$; в) $A(-2; -0,5)$; г) $A(-2; 0,0625)$?

25. Чи проходить графік функції $y = (\sqrt{3})^x$ через точку М, якщо:

- а) $M(1; \sqrt{3})$; б) $M(\sqrt{3}; 3)$; в) $M(2; 3)$; г) $M(0; 0)$?

Б

26. Знайдіть a , коли відомо, що графік функції $y = a^x$ проходить через точку:
 а) $P(2; 9)$; б) $P(0,5; 0,2)$; в) $P(-1; 0,5)$.
27. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:
 а) $y = 3^x$ на проміжку $[-1; 3]$; в) $y = 4^x$ на проміжку $[-0,5; 2]$;
 б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ на проміжку $[-1; 3]$; г) $y = 0,25^x$ на проміжку $[-0,5; 2]$.

Подайте число у вигляді степеня (28, 29).

28. а) $\sqrt[4]{27}$; б) $\frac{8}{125}$; в) $\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}$; г) $5\frac{4}{9}$.
29. а) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^5}$; б) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$; в) $3\sqrt[3]{9}$; г) $7\frac{1}{5}$.

Обчисліть значення виразу (30, 31).

30. а) $243^{0,4}$; б) $(27^3)^{\frac{2}{9}}$; в) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{2}{9}}$; г) $8^{\frac{2}{3}} : 81^{0,75}$.
31. а) $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; б) $3^{-2\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{3}}$; в) $8^{\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}}$; г) $(3^{\sqrt[5]{8}})^{\sqrt[5]{4}}$.

- ✓ 32. (ЗНО, 2017). Нехай m і n — довільні дійсні числа, a — довільне додатне число, $a \neq 0$. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

- | | | | |
|---|---|---|-------------|
| 1 | Якщо $(a^m)^n = a^4$, то | А | $m + n = 4$ |
| 2 | Якщо $a^m \cdot a^n = a^4$, то | Б | $m - n = 4$ |
| 3 | Якщо $\sqrt[8]{a^m} = \sqrt{a^n}$, то | В | $mn = 4$ |
| | | Г | $m = 4n$ |
| 4 | Якщо $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^4}$, то | Д | $m = 8n$ |

Побудуйте графік функції та знайдіть її область значень (33, 34).

33. а) $y = 3^{-x}$; б) $y = -2^{-x}$; в) $y = 2^{2x}$; г) $y = -2^{-2x}$.
34. а) $y = 2^x - 3$; б) $y = 2 + 2^x$; в) $y = 2^{x-3}$; г) $y = 2 \cdot 2^x$.

35. Розв'яжіть графічно рівняння:

- а) $3^x = 4 - x$; б) $4^x + x = 5$; в) $0,5^x = \sqrt{x+5}$.

36. Використовуючи зростання функції $y = 2^x$, розв'яжіть рівняння і нерівності:

- а) $2^x = 16$; $2^x > 16$; $2^x \leq 16$;
 б) $2^x = 0,25$; $2^x \geq 0,25$; $2^x \leq 0,25$;
 в) $2^x = \sqrt{32}$; $2^x \geq \sqrt{32}$; $2^x < \sqrt{32}$.

37. Використовуючи спадання функції $y = 0,2^x$, розв'яжіть рівняння і нерівності:
- а) $0,2^x = 0,04$; $0,2^x > 0,04$; $0,2^x \leq 0,04$;
 б) $0,2^x = \frac{1}{625}$; $0,2^x \leq \frac{1}{625}$; $0,2^x > \frac{1}{625}$;
 в) $0,2^x = 25$; $0,2^x > 25$; $0,2^x \leq 25$.
38. Ентомолог, вивчаючи нашестя саранчі, дослідив, що площа (y м²), заражена саранчею, змінюється за формулою $S_n = 1000 \cdot 2^{0,2n}$, де n — кількість тижнів після зараження. Знайдіть:
- а) початкову площу зараження;
 б) яку площу заражено через 5 тижнів;
 в) яку площу заражено через 10 тижнів.
39. Коли CD-програвач вимикають, то сила струму в ньому зменшується за формулою $I(t) = 24 \cdot (0,25)^t$ (А), де I — сила струму в амперах, t — час у секундах. Знайдіть:
- а) силу струму в момент вимкнення CD-програвача;
 б) $I(t)$, якщо t дорівнює: 1 с, 2 с, 3 с, 4 с;
 в) протягом якого часу сила струму у вимкненому CD-програвачі перевищує 4 А. Скористайтеся графіком залежності $I(t) = 24 \cdot (0,25)^t$.
40. Під час вирощування бактерій маса культури змінюється за формулою $m(t) = 2 \cdot e^{\frac{t}{2}}$ (г), де t — час у годинах, пройдений після початку розмноження. Знайдіть масу культури через:
- а) 30 хв; б) 40 хв; в) 1 год; г) 3 год; ґ) 4 год; д) 6 год.
 Побудуйте відповідний графік.

Вправи для повторення

41. У геометричній прогресії $b_1 = 0,25$, $q = 2$. Знайдіть b_{10} і S_{10} .
42. *Стародавня китайська задача.* 5 волів і 2 барани коштують 10 таелів, а 2 воли і 8 баранів коштують 8 таелів. Скільки коштують окремо віл і баран?
43. Запишіть у стандартному вигляді число:
- а) 47 000 000; в) 0,000000039; г) $803 \cdot 10^9$;
 б) 308 000 000; г) 0,00000407; д) $0,067 \cdot 10^7$.

§ 2. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

Розгляньте рівняння:

$$9^x = \sqrt{3}; \quad 4^x + 2^{x+1} = 3;$$

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 2.$$

Їх називають показниковими.

Рівняння називають **показниковим**, якщо його змінні входять лише до показників степенів при сталих основах.

Існує багато видів показникових рівнянь і різних підходів до їх розв'язування. Основні з них:

- I. Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами.
- II. Метод уведення нової змінної.
- III. Функціонально-графічний метод.

Розглянемо на конкретних прикладах кожен метод детальніше.

I. Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами стосується двочленних рівнянь, які можна звести до виду $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$. Такі рівняння розв'язують на основі монотонності показникової функції. **Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ і $f(x) = \varphi(x)$ — рівносильні.**

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння: а) $4^{x-5} = 8^{2x}$; б) $3^x = 7^x$.

Розв'язання.

а) Запишемо праву та ліву частини рівняння як степені числа 2:

$$(2^2)^{x-5} = (2^3)^{2x} \text{ або } 2^{2x-10} = 2^{6x}, \text{ звідки } 2x - 10 = 6x, 4x = -10, x = -2,5.$$

б) Оскільки $7^x > 0$, то можемо поділити обидві частини рівняння $3^x = 7^x$

на 7^x . Маємо: $\frac{3^x}{7^x} = 1$, або $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$. Запишемо число 1 у вигляді степеня.

$$\text{Тоді } \left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^0, \text{ звідки } x = 0.$$

Відповідь. а) $-2,5$; б) 0 .

II. Метод уведення нової змінної.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а) } 4^x + 4 \cdot 2^x - 32 = 0; \text{ б) } 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75.$$

Розв'язання.

а) Запишемо рівняння у вигляді $(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 32 = 0$. Позначимо $2^x = y$. Дістанемо квадратне рівняння $y^2 + 4y - 32 = 0$, корені якого $y_1 = -8$ та $y_2 = 4$. Корінь y_1 — сторонній, бо $2^x \neq -8$.

Розв'яжемо рівняння $2^x = 4$: $2^x = 2^2$, звідки $x = 2$.

б) Запишемо рівняння у вигляді $3^x \cdot 3 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = 75$, або $3 \cdot 3^x - \frac{2}{9} \cdot 3^x = 75$.

Позначимо $3^x = y$; дістанемо рівняння $3y - \frac{2}{9}y = 75$. Розв'яжемо його:

$$27y - 2y = 675, 25y = 675, y = 27. \text{ Маємо: } 3^x = 27, 3^x = 3^3, \text{ звідки } x = 3.$$

Відповідь: а) 2 ; б) 3 .

Розв'язуючи друге рівняння, не обов'язково вводити нову змінну, а можна зразу виносити спільний множник 3^x за дужки. Саме тому такий спосіб називають ще *способом винесення спільного множника за дужки*.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння: $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = 120$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $2^x \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^1 + 2^x = 120$.

Винесемо спільний множник 2^x за дужки. Маємо:

$$2^x(2^3 + 2^2 + 2^1 + 1) = 120, \text{ або } 2^x \cdot 15 = 120.$$

Звідси $2^x = 8$, або $2^x = 2^3$. Отже, $x = 3$.

Відповідь: 3 .

III. Функціонально-графічний метод полягає в тому, що, знайшовши один або кілька коренів рівняння за допомогою побудови графіків (або добором), доводять, що інших коренів рівняння не має.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 + 0,5^x$.

Розв'язання. Графічно або методом спроб переконуємося, що $x = 1$ — корінь рівняння. Оскільки $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ — зростаюча функція (бо $\frac{3}{2} > 1$), а $y = 1 + 0,5^x$ — спадна ($0,5 < 1$), то інших коренів рівняння не має.

Якщо в показниковому рівнянні знак рівності змінити на знак нерівності, то дістанемо показникову нерівність.

Для розв'язування показникових нерівностей використовують ті самі методи, що й для показникових рівнянь, а також правила розв'язування найпростіших показникових нерівностей виду $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ чи $a^{f(x)} \geq a^{\varphi(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Нерівність називають **показниковою**, якщо її змінні входять *лише* до показників степенів при сталих основах.

Розв'язуючи такі нерівності, використовують монотонність (зростання чи спадання) показникової функції, а саме:

1. Якщо $a > 1$ і $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, то $f(x) > \varphi(x)$.

2. Якщо $0 < a < 1$ і $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, то $f(x) < \varphi(x)$.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність: а) $2^x \cdot 3^x > 36$; б) $3 \cdot 7^{2x} - 2 \cdot 7^x - 1 < 0$.

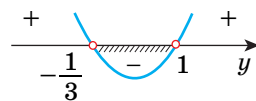
Розв'язання. а) Подамо праву й ліву частини нерівності у вигляді степеня з основою 6. Маємо: $6^x > 6^2$.

Оскільки $6 > 1$, то $x > 2$, або $x \in (2; +\infty)$.

б) Нехай $7^x = y$, тоді $7^{2x} = y^2$. Підставимо y у дану нерівність. Маємо: $3y^2 - 2y - 1 < 0$. Оскільки квадратний тричлен $3y^2 - 2y - 1$ має корені

$-\frac{1}{3}$ і 1 , то множина розв'язків відповідної нерівності буде така:

$$-\frac{1}{3} < y < 1, \text{ або } \begin{cases} y < 1, \\ y > -\frac{1}{3}. \end{cases} \text{ (мал. 9)}$$



Мал. 9

Оскільки $y = 7^x > 0$, то умова $y > -\frac{1}{3}$ виконується завжди.

Якщо $y < 1$, то $7^x < 1$, або $7^x < 7^0$. Отже, $x < 0$, або $x \in (-\infty; 0)$.

Відповідь: а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)$.

Показникові рівняння та нерівності — це окремий вид *трансцендентних* (не алгебраїчних) рівнянь і нерівностей. Ви вже знаєте, що до трансцендентних належать тригонометричні рівняння та нерівності. Крім них, трансцендентними також є рівняння та нерівності, у яких поєднуються трансцендентні вирази з алгебраїчними:

$$5^{x+1} + 5x > 10; 2^x = \sqrt{x+2}; \pi^x - 1 = \sin x.$$

Тільки для деяких із подібних рівнянь можна вказати точні розв'язки. Їх наближені корені знаходять здебільшого графічним способом.

Перевірте себе

- 1 Які рівняння називають показниковими? Наведіть приклади.
- 2 Які нерівності називають показниковими? Наведіть приклади.
- 3 Скільки розв'язків може мати рівняння $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$)?
- 4 Які методи розв'язування показникових рівнянь ви знаєте?
- 5 Які нерівності називають найпростішими показниковими нерівностями?
- 6 Як розв'язують найпростіші показникові нерівності?

Виконаємо разом

- 1) Розв'яжіть рівняння: а) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 3\frac{3}{8}$; б) $2^{5x} + 2^{5x-1} + 2^{5x+2} = 22$.

Розв'язання. а) Подамо праву частину рівняння у вигляді неправильного дробу:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{27}{8}.$$

Запишемо праву й ліву частини рівняння у вигляді степеня з основою $\frac{2}{3}$.

Маємо: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, звідки $2x = -3$, $x = -1,5$.

б) Запишемо рівняння у вигляді $2^{5x} + 2^{5x} \cdot 2^{-1} + 2^{5x} \cdot 2^2 = 22$. Винесемо за дужки спільний множник 2^{5x} і виконаємо дії в дужках. Маємо:

$$2^{5x} \cdot (1 + 2^{-1} + 2^2) = 22, \text{ або } 2^{5x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + 4\right) = 22, \text{ звідки } 2^{5x} \cdot 5,5 = 22.$$

Розв'яжемо утворене рівняння: $2^{5x} = 4$, $2^{5x} = 2^2$, $5x = 2$, $x = \frac{2}{5}$.

Відповідь. а) $-1,5$; б) $\frac{2}{5}$.

- 2) Розв'яжіть нерівність: а) $0,5^{5-3x} \leq 0,25$; б) $3^{2x+4} - 2 \cdot 3^{x+2} \leq 3$.

Розв'язання. а) Подамо праву частину нерівності у вигляді степеня з основою $0,5$. Маємо:

$$0,5^{5-3x} \leq (0,5)^2.$$

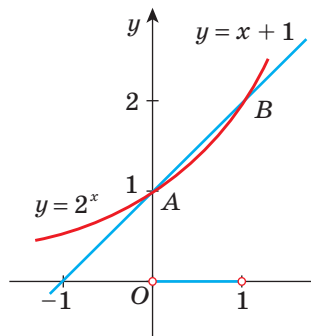
Оскільки $0,5 < 1$, то $5 - 3x \geq 2$, $-3x \geq -3$, звідки $x \leq 1$, або $x \in (-\infty; 1]$.

б) Нехай $3^{x+2} = y$. Тоді $3^{2x+4} = y^2$. Маємо квадратну нерівність $y^2 - 2y - 3 \leq 0$, множина розв'язків якої $[-1; 3]$. До того ж $y > 0$, отже, $0 < 3^{x+2} \leq 3$, звідки $x + 2 \leq 1$, $x \leq -1$, або $(-\infty; -1]$.

Відповідь. а) $(-\infty; 1]$; б) $(-\infty; -1]$.

3) Розв'яжіть графічно нерівність $2^x < x + 1$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2^x$ і $y = x + 1$ (мал. 10). Вони перетинаються в точках $A(0; 1)$ і $B(1; 2)$. Перевірка показує, що координати цих точок — числа точні, а не наближені. Отже, значення 2^x менші за відповідні значення $x + 1$, якщо $0 < x < 1$.
Відповідь. $(0; 1)$.



Мал. 10

Виконайте усно

44. Які з рівнянь показникові:

а) $2^x = 3$; б) $\sqrt{x} = 4$; в) $2 - 0,5^x = 0$; г) $x^2 = 2^2$?

45. Скільки розв'язків має рівняння:

а) $12^x = 3$; б) $1 + 2^x = 0$; в) $5^x = 0$; г) $3^{2x} = 4$?

46. Чи має розв'язок нерівність:

а) $10^x > 10$; б) $7^x < -9$; в) $5^x \leq 0,5$; г) $5^x > -5$; г) $4^x \leq 0$?

47. Знайдіть корені рівняння:

а) $3^x = 81$; б) $7^x = 1$; в) $5^x = 625$; г) $6^x = -2$; г) $4^{-x} = 16$.

48. Розв'яжіть нерівність:

а) $3^x > 1$; б) $7^x < 49$; в) $5^x \leq 125$; г) $15^x > -2$; г) $4^x < 0,25$.

A

49. Знайдіть корені рівняння:

а) $2^x = 4$; в) $5^x = 1$; г) $2^x = -4$; е) $e^x = e$;
б) $3^x = 81$; г) $5^x = 5$; д) $0,1^x = 0,01$; е) $0,5^x = 0,125$.

Розв'яжіть рівняння (50–52).

50. а) $3^{x-2} = 27$; б) $4^{2x-1} = 16$; в) $5^{x+3} + 3 = 4$; г) $2^{x+1} = 8$.

51. а) $4^{x-2} = 16$; б) $3^{4-x} = 27$; в) $2^{3x-1} = 32$; г) $5^{2x-1} = 125$.

52. а) $3^{x+3} = 81$; б) $2^{5-x} = 16$; в) $0,2^{2x+6} = 25$; г) $6^{4x-5} = 216$.

Зведіть праву та ліву частини рівняння до степеня з однією основою і розв'яжіть його (53, 54).

53. а) $2 \cdot 4^x = 8^{x+1}$; б) $27^{x-1} = 9^{x+1}$; в) $(0,1)^x = 100$; г) $0,4^{2x+1} = 0,16$.

54. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{9}{4}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -4$; г) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{x-3} = \frac{16}{25}$.

✓ 55. (ЗНО, 2008). Розв'яжіть рівняння $3^x = \frac{2\sqrt{3}}{6}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------------------|----------|------------|-----------|---------|
| рівняння не має коренів | $x = -1$ | $x = -0,5$ | $x = 0,5$ | $x = 1$ |

56. При яких значеннях змінної значення виразу дорівнює одиниці:

а) $0,3^{x^2-x}$; б) 7^{x^2-4} ; в) $5^{x(x+3)}$; г) $0,5^{x^2-3x+2}$; ґ) $4^{\sqrt{x}-1}$?

Розв'яжіть рівняння, використавши спосіб винесення за дужки спільного множника (57, 58).

57. а) $3^{x+1} + 3^x = 108$; в) $2^x - 2^{x-2} = 12$;
 б) $2^{x+2} + 2^x = 5$; г) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39$.
 58. а) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+3} = 33$; в) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$;
 б) $5^{x+2} + 11 \cdot 5^x = 180$; г) $5 \cdot 0,5^{x-3} + 0,5^{x+1} = 162$.

Розв'яжіть рівняння заміною змінної (59–61).

59. а) $6^{2x} - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$; в) $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$;
 б) $64^x - 8^x - 56 = 0$; г) $7^{2x} + 7 = 8 \cdot 7^x$.
 60. а) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; в) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$;
 б) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$; г) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$.
 61. а) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$; в) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$;
 б) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$; г) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$.

Розв'яжіть рівняння і нерівність (62, 63).

62. а) $2^{x+1} = 16$, $2^{x+1} \geq 16$; в) $4^{x-1} = 32$, $4^{x-1} \leq 32$;
 б) $3^{2-x} = 27$, $3^{2-x} < 27$; г) $8^{x+2} = 128$, $8^{x+2} > 128$.
 63. а) $9^{-x} = 27$, $9^{-x} > 27$; в) $3^{8-2x} = 1$, $3^{8-2x} < 1$;
 б) $8^{-x} = 16$, $8^{-x} < 16$; г) $4^{3+5x} = 1$, $4^{3+5x} > 1$.

Розв'яжіть нерівність (64–67).

64. а) $3^x > 1$; б) $4^{2x} \leq 0,25$; в) $5^{x-1} \leq 125$; г) $5^x > -2$; ґ) $7^{-x} < 49$.

65. а) $2^x < 32$; б) $0,2^x > 0,008$; в) $10^x < 0,001$.

66. а) $5^{2x} < 25^{x+1}$; б) $0,1^{3x} < 0,1^{2x-3}$; в) $\pi^x < \pi^{2+3x}$.

67. а) $0,5^x \leq \frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} > \frac{9}{4}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < -4$; г) $\left(\frac{7}{5}\right)^{x+3} \leq 1\frac{24}{25}$.

68. (ЗНО, 2012). Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x < \left(\frac{4}{\pi}\right)^3$.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------|----------------|----------------|-----------------|-------------------------------------|
| $(-3; +\infty)$ | $(3; +\infty)$ | $(-\infty; 3)$ | $(-\infty; -3)$ | $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ |

Розв'яжіть нерівність (69–72).

69. а) $3^{x+2} - 3^x < 8$; б) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$.

70. а) $5^{x+1} + 5^x > 150$; б) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x < 15$.

71. а) $2^{2x} - 2^x < 0$; б) $0,25^x - 0,5^{x+1} - 3 < 0$.

72. а) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$; б) $3^{-2x} - 3^{-x} \geq 0$.

73. (ЗНО, 2018). Розв'яжіть нерівність $2^x + 2^{x+3} \geq 144$.

74. Розв'яжіть графічно нерівність:

а) $2^x > 4$; б) $0,5^x \geq 8$; в) $2^{-x} < 0,5$.

Б

Розв'яжіть рівняння (75–82).

75. а) $4^{x-2} = 2$;

б) $9^{3-x} = \sqrt{3}$;

в) $5^{2x-1} = 125$.

76. а) $8^{2x-1} = 2\sqrt{2}$;

б) $0,4^{2x+1} = 0,16$;

в) $(\sqrt{7})^{x+1} = 49$.

77. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{16}{27}$;

б) $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$;

в) $\frac{1}{2} \left(\frac{9}{25}\right)^x = \frac{27}{250}$.

78. а) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x} = 3^{5x-1}$;

б) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{64}{27}$;

в) $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2-x}$.

79. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = 2^{4x-1}$;

б) $\left(\frac{2}{7}\right)^x \cdot \left(\frac{49}{8}\right)^x = \frac{343}{64}$;

в) $\left(\frac{7}{3}\right)^{3-2x} = \left(\frac{3}{7}\right)^{4+3x}$.

80. а) $8^{x+1} = 5^{x+1}$; б) $13^{x-3} - 11^{3-x} = 0$; в) $5^x \cdot 2^{2x} = 400$; г) $2^x \cdot 3^{2x} = 324$.

81. а) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$; б) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17$.

82. а) $7^{3x+3} + 7^{3x+2} + 7^{3x+1} = 57$; б) $4^{4x-1} + 4^{4x-2} + 4^{4x-3} = 168$.

83. (ЗНО, 2011). Якому з наведених нижче проміжків належить корінь рівняння $5^{x+2} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$?

| А | Б | В | Г | Д |
|------------|------------|-----------|----------|----------|
| $(-3; -2]$ | $(-2; -1]$ | $(-1; 0]$ | $(0; 1]$ | $(1; 3]$ |

Розв'яжіть рівняння функціонально-графічним методом (84, 85).

84. а) $5^x = 7 - 2x$; б) $2^{x+3} = \frac{16}{x}$.

85. а) $7^x = 10 - 3x$; б) $4^{x+1} = \frac{128}{x}$.

86. При яких значеннях змінної значення виразу: 1) дорівнює одиниці; 2) не перевищує одиницю?

а) $0,3^{x^2-x}$; б) 7^{x^2-4} ; в) $5^{x(x+3)}$; г) $0,5^{x^2-3x+2}$; г) $4^{\sqrt{x}-1}$.

Розв'яжіть нерівність (87, 88).

87. а) $3^{x+0,5} \cdot 3^{x-2} \geq 3$; в) $8^x \cdot 4^{x+13} < \frac{1}{16}$;

б) $0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} \leq 2$; г) $2^{x-2} \cdot 4^{1+x} > \frac{1}{8}$.

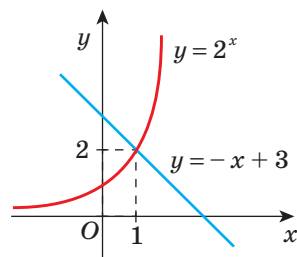
88. а) $13^{2x+1} - 13^x < 12$; в) $9^x + 3^{x+1} > 108$;

б) $3^{2x+1} > 10 \cdot 3^x - 3$; г) $4^x + 2^{x+1} > 80$.

89. Розв'яжіть графічно нерівність:

а) $2^x \leq \frac{2}{x}$; б) $0,5^x \geq x + 3$; в) $3^x + x > 4$.

90. (ЗНО, 2013). Використовуючи зображені на малюнку 11 графіки функцій, розв'яжіть нерівність $2^x > -x + 3$.



Мал. 11

91. Металеву кульку, температура якої дорівнює 120°C , помістили в приміщення з температурою повітря 20°C . Через скільки хвилин температура кульки буде 84°C , якщо закон охолодження тіла виражається формулою $D = D_0 \cdot b^{kt}$, де D — різниця між температурою тіла, яке охолоджується, і температурою навколишнього середовища; D_0 — початкова різниця температур тіла й середовища; t — час у хвиликах; b і k — сталі величини, які залежать від форми тіла і матеріалу? Для даного тіла $b = 0,8$, $k = 0,1$.

Вправи для повторення

92. Обчисліть:

а) $81^{0,75}$; б) $32^{0,6}$; в) $25^{1,5}$; г) $100^{2,5}$.

93. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = -7x + 3$; в) $y = \sqrt{x+4}$; г) $y = \frac{-1}{x^2+4}$;

б) $y = x^2 - 4$; г) $y = \frac{3}{x+9}$; д) $y = \frac{x}{1-x}$.

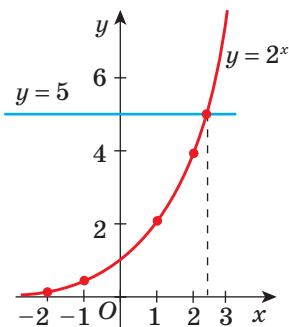
94. Власниця еко-магазину для швидшої реалізації свіжої капусти брокколи спочатку знизила її ціну на 10% , а потім ще на 5% . Якою була початкова ціна капусти, якщо в результаті обох знижок вона стала коштувати 85 грн 50 к.?

§ 3. ЛОГАРИФМИ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ ФУНКЦІЇ

1. Логарифми. Незавжно перекопатися, що рівняння $2^x = 4$ має корінь $x = 2$, а рівняння $2^x = 8$ — корінь $x = 3$. А який корінь має рівняння $2^x = 5$? За допомогою графічного методу можна перекопатися, що воно має єдиний розв'язок (мал. 12). Це число більше за 2 і менше за 3 , але як його записати?

Нехай число a додатне і відмінне від 1 . Якщо рівність $a^x = b$ правильна, то число x називають *логарифмом* числа b за основою a .

Логарифм числа b за основою a позначають $\log_a b$.



Мал. 12

Логарифмом числа b за основою a ($a > 0$ і $a \neq 1$) називають показник степеня, до якого треба піднести число a , щоб дістати b .

Приклади: $\log_2 8 = 3$, бо $2^3 = 8$;

$\log_{0,5} 16 = -4$, бо $0,5^{-4} = 16$.

Основою логарифма може бути довільне додатне число a , крім 1 . З рівності $a^x = b$ випливає, що коли число a додатне, то і b додатне. Отже, якщо число b не додатне (від'ємне або дорівнює 0), то $\log_a b$ не існує.

Іншими словами: при будь-якій основі a , де $a > 0$ і $a \neq 1$, існує логарифм кожного додатного числа. *Логарифм від'ємного числа і нуля не існує.*

Корисно пам'ятати, що для кожного $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\log_a 1 = 0 \text{ і } \log_a a = 1 \text{ (чому?)}.$$

Знаходження логарифма числа називають *логарифмуванням*. Ця операція обернена до операції піднесення до степеня з відповідною основою.

| Піднесення до степеня | Логарифмування |
|-----------------------|--------------------------|
| $2^5 = 32$ | $\log_2 32 = 5$ |
| $(\sqrt{5})^4 = 25$ | $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$ |
| $0,1^3 = 0,001$ | $\log_{0,1} 0,001 = 3$ |

За означенням логарифма, якщо $a^\alpha = b$, то $\alpha = \log_a b$. Це різні записи тієї самої залежності. З них випливає рівність $a^{\log_a b} = b$.

Вона правильна для будь-яких додатних a і b , $a \neq 1$.

Приклади: $2^{\log_2 32} = 32$; $(\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}} 25} = 25$; $0,1^{\log_{0,1} 0,001} = 0,001$.

За допомогою основної логарифмічної тотожності будь-яке додатне число можна подати у вигляді степеня, що має задану основу.

Приклади: $7 = 5^{\log_5 7}$; $7 = 12^{\log_{12} 7}$; $7 = 0,5^{\log_{0,5} 7}$.

Для будь-яких додатних значень $x, y, a, a \neq 1$, і $p \in \mathbb{R}$ виконуються рівності:

Доведемо першу з цих рівностей.

Нехай $\log_a x = m$ і $\log_a y = n$. Тоді $a^m = x$ і $a^n = y$, звідки $a^m \cdot a^n = xy$, або $a^{m+n} = xy$.

Тут $m + n$ — логарифм числа xy за основою a , тобто $\log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y$. А це й вимагалось довести.

Доведену властивість коротко формулюють так: **логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників.**

Аналогічно можна довести й інші твердження про логарифм дробу і логарифм степеня (доведіть самостійно).

Формули 1–3 можна використовувати і справа наліво.

Приклади: $\log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12}(3 \cdot 4) = \log_{12} 12 = 1$;

$$\log_5 50 - \log_5 2 = \log_5 \frac{50}{2} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2.$$

Особливо часто використовують логарифми за основами 10 і e , їх називають *десятковими* і *натуральними логарифмами*. Замість $\log_{10} a$ і $\log_e a$ пишуть відповідно $\lg a$ і $\ln a$. Тобто:

$$\log_{10} a = \lg a \text{ — десятковий логарифм};$$

$$\log_e a = \ln a \text{ — натуральний логарифм}.$$

Рівність $a^{\log_a b} = b$ називають **основною логарифмічною тотожністю**.

$$1. \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$$

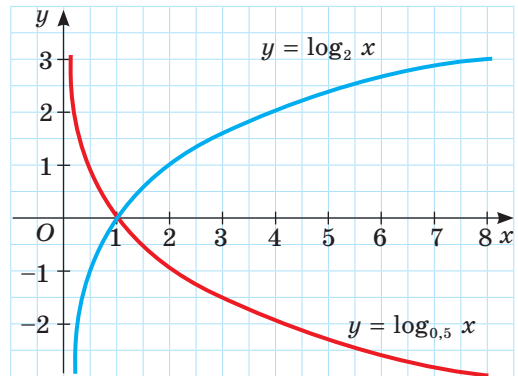
$$2. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$3. \log_a x^p = p \log_a x.$$

За допомогою властивостей логарифмів і таблиць логарифмів упродовж кількох століть учені спрощували громіздкі обчислення. Адже логарифми дають можливість множення чисел замінити додаванням їх логарифмів, ділення — відніманням, піднесення до степеня — множенням тощо. Тільки у другій половині ХХ ст., коли з'явилися калькулятори та інші ЕОМ, потреба в логарифмічних обчисленнях відпала. Відійшли в історію також спеціальні логарифмічні лінійки, якими інженери та вчені колись користувалися для обчислень. Проте логарифмічні функції й тепер використовують досить часто.

2. Логарифмічна функція. Приклади логарифмічних функцій: $y = \log_2 x$, $y = \log_{0,5} x$. Їх графіки подано на малюнку 13.

Функцію називають **логарифмічною**, якщо її можна задати формулою $y = \log_a x$, де x — аргумент, a — додатне і відмінне від 1 дане дійсне число.

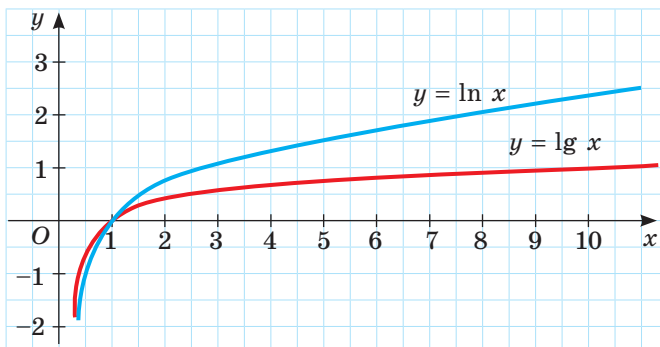


Мал. 13

Графіки логарифмічних функцій не обов'язково будувати за точками. Виявляється, що графік функції $y = \log_a x$ симетричний графіку функції $y = a^x$ відносно бісектриси першого координатного кута. Адже

рівності $y = \log_a x$ і $a^y = x$ виражають одну й ту саму залежність між змінними x і y . Якщо в другій із цих рівностей поміняти x на y , а y на x , то це рівнозначно заміні осі x віссю y і навпаки. Такі функції, як $y = \log_a x$ і $y = a^x$, називають *оберненими*. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \log_2 x$ і $y = 2^x$ та переконайтеся, що вони симетричні відносно прямої $y = x$.

Найчастіше розглядають логарифми з основами e і 10 . Графіки функцій $y = \ln x$ і $y = \lg x$ зображено на малюнку 14.



Мал. 14

Сформулюємо основні властивості логарифмічних функцій.

1. Область визначення функції $y = \log_a x$ — проміжок $(0; +\infty)$.
2. Область значень — множина R .
3. Функція зростає на всій області визначення, якщо $a > 1$, і спадає, коли $0 < a < 1$.
4. Функція ні парна, ні непарна, ні періодична.
5. Графік кожної логарифмічної функції проходить через точку $A(1; 0)$.

Зверніть увагу на твердження, які випливають з монотонності логарифмічної функції $y = \log_a x$ і виконуються для всіх x з її області визначення:

- 1) якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$;
- 2) якщо $a > 1$ і $\log_a x_1 > \log_a x_2$, то $x_1 > x_2$;
- 3) якщо $0 < a < 1$ і $\log_a x_1 > \log_a x_2$, то $x_1 < x_2$.

Показникові та логарифмічні функції досить зручні для моделювання процесів, пов'язаних зі зростанням населення, капіталу, розмноженням бактерій, зміною атмосферного тиску, радіоактивним розпадом тощо. Тому їх часто використовують для розв'язування прикладних задач.

Перевірте себе

- 1 Що називають логарифмом числа a за основою b ? Як його записують?
- 2 Якою може бути основа логарифма?
- 3 Чи існує логарифм від'ємного числа? А нуля?
- 4 Яку рівність називають основною логарифмічною тотожністю?
- 5 Чому дорівнює логарифм добутку? А частки?
- 6 Які логарифми називають десятковими? А натуральними?
- 7 Сформулюйте означення логарифмічної функції.
- 8 Яка область визначення логарифмічної функції? А область значень?
- 9 Через яку точку проходить графік кожної логарифмічної функції?
- 10 За якої умови логарифмічна функція зростає? А за якої — спадає?

Виконаємо разом

- 1) Обчисліть: а) $3\lg 5 + 0,5\lg 64$; б) $25^{1-0,5\log_5 10}$.

Розв'язання. а) $3\lg 5 + 0,5\lg 64 = \lg 5^3 + \lg 64^{0,5} = \lg 125 + \lg 8 = \lg 1000 = 3$;

$$\text{б) } 25^{1-0,5\log_5 10} = 25 \cdot (25^{0,5})^{-\log_5 10} = 25 \cdot 5^{\log_5 10} = 25 \cdot 10 = 2,5.$$

- 2) Знайдіть x за логарифмом: $\log_{0,3} x = 0,5\log_{0,3} a - 2\log_{0,3} b + \log_{0,3} c$.

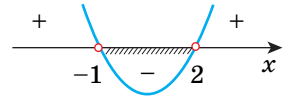
Розв'язання. $\log_{0,3} x = 0,5\log_{0,3} a - 2\log_{0,3} b + \log_{0,3} c = \log_{0,3} a^{0,5} - \log_{0,3} b^2 +$

$$+ \log_{0,3} c = \log_{0,3} \frac{\sqrt{ac}}{b^2}. \text{ Оскільки } \log_{0,3} x = \log_{0,3} \frac{\sqrt{ac}}{b^2}, \text{ то } x = \frac{\sqrt{ac}}{b^2}.$$

3) Знайдіть область визначення функції $y = \lg(2 + x - x^2)$.

Розв'язання. Областю визначення логарифмічної функції є проміжок $(0; +\infty)$, тому $2 + x - x^2 > 0$ або $x^2 - x - 2 < 0$. Корені рівняння $x^2 - x - 2 = 0$ дорівнюють -1 і 2 , тому множина розв'язків нерівності (мал. 15) така:

$$-1 < x < 2 \text{ або } (-1; 2).$$



Мал. 15

4) Порівняйте числа $\log_{0,1} 9$ і $\log_{0,1} 0,9$.

Розв'язання. Функція $y = \log_{0,1} x$ — спадна, бо $0,1 < 1$. Оскільки $9 > 0,9$, то $\log_{0,1} 9 < \log_{0,1} 0,9$.

Виконайте усно

95. Відомо, що $3^5 = 243$. Чому дорівнює $\log_3 243$?

Обчисліть (96–98).

96. а) $\log_2 4$; б) $\log_2 32$; в) $\log_2 0,5$; г) $\log_2 8$; р) $\log_2 2$.
 97. а) $\log_3 3$; б) $\log_3 81$; в) $\log_3 27$; г) $\log_3 1$; р) $\log_3 9$.
 98. а) $\log_{0,5} 2$; б) $\log_{0,5} 1$; в) $\log_{0,5} 0,5$; г) $\log_{0,5} 4$; р) $\log_{0,5} 8$.

99. Спростіть вираз:

- а) $3^{\log_3 x}$; б) $7^{\log_7 (y+1)}$; в) $3^{2\log_3 x}$; г) $49^{\log_7 (y+1)}$.

100. Знайдіть x :

- а) $\log_a x = \log_a 15 - \log_a 3$; в) $\log_2 x = \log_2 a + \log_2 c$;
 б) $\log_a x = 0,5 \log_a 64$; г) $\log_2 x = 2 \log_2 a$.

101. Зростаючою чи спадною є функція:

- а) $y = \log_{0,3} x$; б) $y = \ln x$; в) $y = \log_2 x$; г) $y = \lg x$?

102. Укажіть область визначення функції:

- а) $y = \log_3 (x - 3)$; б) $y = \ln(x + 1)$; в) $y = \log_2 x^2$.

А

103. Знайдіть логарифми чисел 1; 2; 4; 8; 16 за основою 4.

104. Обчисліть: $\lg 10$; $\lg 100$; $\lg 1000$; $\ln e$; $\ln e^3$.

105. Покажіть, що:

- а) $\log_2 16 = 4$; б) $\log_5 125 = 3$; в) $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$.

106. Запишіть за допомогою логарифмів співвідношення:

- а) $5^4 = 625$; в) $4^{1,5} = 8$; г) $10^{-3} = 0,001$;
 б) $9^{0,5} = 3$; г) $6^0 = 1$; д) $a^{3x} = c$.

107. Розв'яжіть рівняння:

- а) $3^x = 8$; б) $7^x = 5$; в) $125^x = 6$; г) $4^x = 6$.

108. Запишіть за допомогою показника степеня співвідношення:

- а) $\log_3 81 = 4$; в) $\log_{64} 2 = \frac{1}{6}$; г) $\log_5 2x = 2$;
 б) $\log_2 64 = 6$; г) $\log_4 x = 3$; д) $\log_x 49 = 2$.

109. Чи правильна рівність:

а) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$;

б) $\log_{0,5} 4 = -2$;

в) $\log_9 \sqrt{3} = 0,25$?

Обчисліть значення виразу (110, 111).

110. а) $5^{\log_5 4}$;

в) $0,3^{2\log_{0,3} 0,3}$;

г) $\lg 300 - \lg 3$;

б) $1,2^{\log_{1,2} 7}$;

г) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$;

д) $\ln 3e - \ln 3$.

111. а) $\log_3 2 + \log_3 4,5$;

в) $3\log_2 6 - \log_2 27$;

г) $\frac{\lg 27 - \lg 3}{\lg 15 - \lg 5}$;

б) $\log_5 4 - \log_5 0,8$;

г) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$;

д) $\frac{\ln 18 + \ln 8}{2\ln 2 + \ln 3}$.

✓ 112. (ЗНО, 2018). Обчисліть значення виразу $\log_3 45 + \log_3 900 - \log_3 500$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------|---|---|----|--------------|
| $\frac{1}{4}$ | 4 | 3 | 27 | $\log_3 445$ |

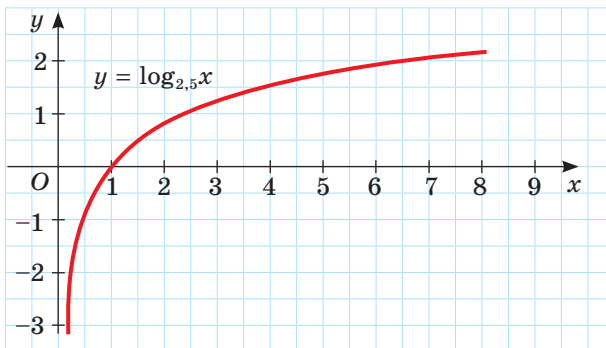
113. Заповніть таблицю і побудуйте графік функції $y = \log_8 x$.

| | | | | | | |
|----------------|------|-----|---|---|---|---|
| x | 0,25 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| $y = \log_8 x$ | | | | | | |

114. Використовуючи малюнок 16, знайдіть наближені значення функції $y = \log_{2,5} x$ у точках з абсцисами:

а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7;

б) 0,4; 1,4; 2,5; 3,8; 6,25.



Мал. 16

115. Використовуючи малюнок 16, установіть, при яких значеннях аргументу x значення функції $y = \log_{2,5} x$ дорівнює:

а) -1; -2; -3; 0; 1; 2;

б) -0,5; -2,2; 0,4; 1,4; 2; 2,2.

✓ 116. (ЗНО, 2017). Укажіть проміжок, якому належить число $\log_2 9$.

| А | Б | В | Г | Д |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (0; 1) | (1; 2) | (2; 3) | (3; 4) | (4; 5) |

117. Чи проходить графік функції $y = \log_{\sqrt{3}} x$ через точку:

- а) $A(6; 27)$; б) $B(27; 6)$; в) $C(\sqrt{3}; 1)$?

118. Знайдіть a , коли відомо, що графік функції $y = \log_a x$ проходить через точку:

- а) $M(8; 3)$; б) $M(8; -3)$; в) $M(121; 2)$; г) $M(81; -4)$.

✓ 119. (ЗНО, 2016). Обчисліть значення функції $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 7)$ у точці $x_0 = 4$.

| А | Б | В | Г | Д |
|----|----|---|---|-----|
| -1 | -2 | 2 | 3 | 0,5 |

120. Знайдіть область визначення функції:

- а) $y = \log_3 2x$; б) $y = \ln(x - 3)$; в) $y = \log_9(x + 5)$; г) $y = \ln(1 - x)$.

121. Установіть, яка з нерівностей істинна:

- а) $\log_5 5 > \log_5 3$; б) $\lg 1 < \lg 4$; г) $\log_3 9 < 2$;
 б) $\log_{\frac{1}{5}} 8 \leq \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$; г) $\ln 5 > \ln 0,5$; д) $\log_{0,4} 1 > 2$.

Б

122. Знайдіть логарифм за основою 3 числа:

- а) $\frac{1}{27}$; б) 729; в) $\sqrt[4]{9}$; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $3^{\sqrt{3}}$.

123. Подайте числа -2 ; $-\sqrt{3}$; -1 ; $-0,5$; 0 ; $0,5$; 1 ; $\sqrt{3}$; 2 у вигляді логарифма за основою:

- а) 5; б) 0,1; в) 11; г) 2,5; г) $\sqrt{5}$.

124. Спростіть вираз:

- а) $2^{4\log_2 3}$; б) $9^{\log_3 5}$; в) $8^{\log_2 7}$; г) $5^{-\log_5 4}$; г) $10^{1 - \lg 5}$; д) $e^{2 - \ln 2}$.

✓ 125. (ЗНО, 2013, 2015). Обчисліть:

- а) $(\sqrt{20})^{2 + \log_{20} 16}$; б) $\frac{1}{70} \cdot 2^{3\log_2 7}$.

Знайдіть x за даним логарифмом (126, 127).

126. а) $\log_5 27 + \log_5 \frac{1}{3} = \log_5 x$; в) $\log_3 120 - \log_3 15 = \log_3 x$;

б) $\log_5 x = \frac{1}{3} \log_5 8 - 2$; г) $\log_{20} x = 1 + \log_{20} 10$.

127. а) $\log_7 x = 1 - \log_7 2 + 0,5 \log_7 100$; б) $\log_3 x = 2 - 0,5 \log_3 4 - \log_3 5$.

128. Враховуючи, що $\log_a b = 8$, обчисліть:

- а) $\log_a(ab)$; в) $\log_a \frac{b}{a}$; г) $\log_a \sqrt{ab}$;
 б) $\log_a \frac{a}{b}$; г) $\log_a(a^2b)$; д) $\log_a(ab)^{\frac{2}{3}}$.

✓ 129. (ЗНО, 2014). Якщо додатні числа x і y задовольняють умову $\frac{x}{y} = 16$, то:

- а) $\frac{x+y}{y} = \dots$; б) $\log_2 x - \log_2 y = \dots$.

130. Прологарифмуйте основну логарифмічну тотожність і доведіть, що

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ де } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1.$$

131. Поясніть, як спростили вираз:

$$\log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 = \log_5 6 \cdot \frac{\log_5 7}{\log_5 6} \cdot \frac{\log_5 8}{\log_5 7} \cdot \frac{\log_5 9}{\log_5 8} = \log_5 9.$$

132. Обчисліть:

а) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 \cdot \log_9 10$;

б) $\lg 2 : (\log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9)$.

✓ 133. (ЗНО, 2005). Обчисліть: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

134. Доведіть, що коли $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$, то:

а) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; б) $\log_{a^n} b^n = \log_a b$; в) $a^{\lg b} = b^{\lg a}$; г) $\frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

135. Укажіть область визначення функції:

а) $\log_2(3 - 5x)$; б) $\lg(9 - x^2)$; в) $\ln(x^2 - 2x - 8)$; г) $\log_4(x^2 - 4)$.

136. Порівняйте з нулем числа:

а) $\log_{0,5} 5$; в) $\log_2 0,5$; г) $\log_{25} 7$; е) $\log_{0,5} \sqrt{3}$;

б) $\log_{0,5} 0,1$; г) $\lg 4$; д) $\log_{\sqrt{5}} 50$; е) $\ln 0,01$.

137. Порівняйте з одиницею числа:

а) $\log_{49} 3$; б) $\log_2 14$; в) $\log_{98} 128$; г) $\log_2 e$.

Порівняйте числа (138, 139).

138. а) $\log_2 0,4$ і $\log_2 0,6$;

б) $\log_2 3$ і $\log_2 \pi$;

139. а) $\log_2 0,4$ і $\log_{0,2} 0,4$;

б) $\log_2 3$ і $\ln 0,01$;

в) $\log_{0,2} 1,4$ і $\log_{0,2} 4,1$;

г) $\log_{0,5} e$ і $\log_{0,5} \pi$.

в) $\log_{0,2} 4$ і $\log_2 1,6$;

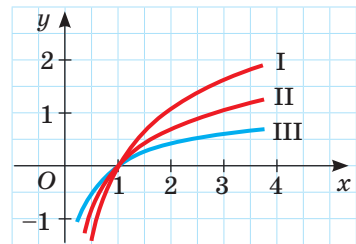
г) $\log_{25} 0,7$ і $\lg 4$.

140. На малюнку 17 зображено графіки функцій $y = \ln x$, $y = \lg x$ та $y = \log_2 x$. Установіть відповідність між цими функціями і лініями I, II, III. Побудуйте графік функції:

а) $y = 3 + \lg x$; г) $y = 2 + \ln x$;

б) $y = 2 \lg x$; г) $y = -1 + \ln x$;

в) $y = \lg|x|$; д) $y = |\ln x|$.



Мал. 17

141. Побудуйте графік функції:

а) $y = \log_4 x$; в) $y = 2 + \log_3 x$; г) $y = \log_2(x - 1)$;

б) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$; г) $y = -\log_3 x$; д) $y = \log_{0,5}(x + 2)$.

Вправи для повторення

142. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2^x$; б) $y = 2^{x+1}$; в) $y = 2^x + 1$; г) $y = 2^{|x|}$.

143. Розв'яжіть нерівність:

а) $8x - 3 > 5x + 6$; б) $7y - 13 < 5y - 9$; в) $7x^2 - 5x - 2 \geq 0$; г) $x^2 - 6x - 55 \leq 0$.

144. Ви маєте можливість покласти у банк 5000 грн під 15% з капіталізацією. Яку суму ви отримаєте через 3 роки? А через 5?

§ 4. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

Рівняння називають **логарифмічним**, якщо його змінні входять лише під знаки логарифмів.

Розглянемо рівняння: $\log_3 x = 2$; $\lg x + \lg 4 = 2$; $\ln(3x - 2) = 1 - \ln x$. Їх називають логарифмічними.

Найпростішими логарифмічними рівняннями називають рівняння виду

$$\log_a x = b, \text{ де } a > 0, a \neq 1.$$

За означенням логарифма, при будь-якому дійсному b це рівняння має єдиний розв'язок: $x = a^b$.

Розв'язування інших логарифмічних рівнянь ґрунтується на властивостях логарифмічної функції, означенні та властивостях логарифма.

Розв'язуючи логарифмічні рівняння, потрібно встановити область допустимих значень рівняння або здійснити перевірку отриманих коренів. Для найпростіших логарифмічних рівнянь, які розв'язують на основі означення логарифма, область допустимих значень можна не встановлювати (виконуються рівносильні перетворення рівнянь), а перевірку бажано робити для самоконтролю.

Для логарифмічних рівнянь немає загального методу розв'язування, проте можна виокремити кілька груп рівнянь, для розв'язування яких використовують певні способи. Розглянемо ці способи на конкретних прикладах.

I. За означенням логарифма.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння

$$\log_2(x^2 - 4x + 12) = 3.$$

Розв'язання. За означенням логарифма, $2^3 = x^2 - 4x + 12$. Отже, $x^2 - 4x + 12 = 8$, $x^2 - 4x + 4 = 0$, звідки $(x - 2)^2 = 0$ і $x = 2$.

Перевірка. $\log_2(2^2 - 4 \cdot 2 + 12) = \log_2 8 = 3$.

Відповідь. 2.

II. За властивостями логарифмів і логарифмічної функції.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння

$$\log_2(x - 3) + \log_2(x - 1) = 3 + \log_2(x - 4).$$

Розв'язання. Скористаємося властивостями логарифмів $3 = 3\log_2 2 = \log_2 2^3$, $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab)$ та запишемо рівняння у вигляді

$$\log_2((x - 3)(x - 1)) = \log_2 2^3(x - 4).$$

Використовуючи властивості логарифмічної функції, знаходимо:

$$(x - 3)(x - 1) = 8(x - 4).$$

Отже, $x^2 - 4x + 3 = 8x - 32$, або $x^2 - 12x + 35 = 0$, звідки $x_1 = 5$; $x_2 = 7$.

Перевірка. Якщо $x = 5$, то $\log_2(5 - 3) + \log_2(5 - 1) = 3 + \log_2(5 - 4)$, $\log_2 2 + \log_2 4 = 3 + \log_2 1$, $1 + 2 = 3$, $3 = 3$.

Якщо $x = 7$, то $\log_2(7 - 3) + \log_2(7 - 1) = 3 + \log_2(7 - 4)$, $\log_2 4 + \log_2 6 = 3 + \log_2 3$, $\log_2 24 = \log_2(8 \cdot 3)$, $24 = 24$.

Відповідь. 5; 7.

III. Уведення нової змінної.

Багато показникових і логарифмічних рівнянь *заміною* $a^{f(x)} = y$ або $\log_a f(x) = y$ можна звести до алгебраїчного рівняння з невідомим y .

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння

$$(\lg x - 6)^{-1} + 5(\lg x + 2)^{-1} = 1.$$

Розв'язання. Замінивши $\lg x$ на y , дістанемо рівняння $\frac{1}{y-6} + \frac{5}{y+2} = 1$, коренями якого є: $y_1 = 2$; $y_2 = 8$.

Отже, $\lg x_1 = 2$ або $\lg x_2 = 8$, звідки $x_1 = 100$; $x_2 = 10^8$.

Перевірка показує, що обидва значення задовольняють рівняння.

Відповідь. 100; 10^8 .

IV. Графічний спосіб.

Приклад 4. Розв'яжіть графічно рівняння

$$\log_4 x = 3 - \log_2 x.$$

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \log_4 x$ і $y = 3 - \log_2 x$ (мал. 18). Як бачимо, графіки цих функцій перетинаються в точці з абсцисою $x = 4$. Щоб переконатися, що $x = 4$ — корінь даного рівняння, зробимо перевірку: $\log_4 4 = 3 - \log_2 4$, $1 = 3 - 2$, $1 = 1$.

Відповідь. 4.

Якщо в логарифмічному рівнянні знак рівності змінити на знак нерівності, то дістанемо логарифмічну нерівність.

Для розв'язування логарифмічних нерівностей використовують ті самі методи, що й для розв'язування логарифмічних рівнянь.

Найпростіші логарифмічні нерівності виду $\log_a x > b$ чи $\log_a x < b$, $a > 0$, $a \neq 1$ розв'язують, використовуючи монотонність і область визначення логарифмічної функції, а саме:

- 1) якщо $a > 1$ і $\log_a x > b$, то $x > a^b$;
- 2) якщо $0 < a < 1$ і $\log_a x > b$, то $0 < x < a^b$.

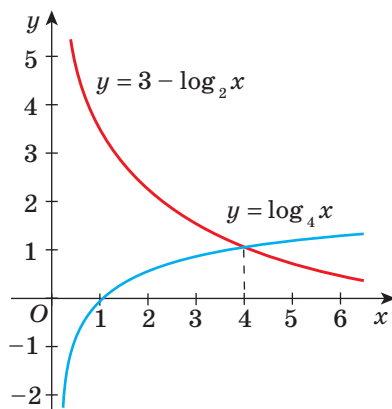
Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5} x > 3$.

Розв'язання. Оскільки $3 = \log_{0,5} 0,5^3$, то $\log_{0,5} 5x > \log_{0,5} 0,5^3$. Функція $y = \log_{0,5} x$ на всій області визначення $(0; +\infty)$ спадає, бо $0,5 < 1$. Тому $x < 0,5^3$. Враховуючи область визначення, маємо: $0 < x < 0,125$ або $(0; 0,125)$.

Відповідь. $(0; 0,125)$.

Приклад 6. Розв'яжіть нерівність $\lg(x - 1) + \lg(8 - x) < 1$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку область допустимих значень x . Система нерівностей $x - 1 > 0$ і $8 - x > 0$ має множину розв'язків $(1; 8)$. На цій множині дана нерівність рівносильна нерівності $\lg((x - 1)(8 - x)) < 1$, або $(x - 1)(8 - x) < 10$, звідки $x^2 - 9x + 18 > 0$.



Мал. 18

Нерівність називають **логарифмічною**, якщо її змінні входять лише під знаки логарифмів.

Множиною розв'язків утвореної квадратної нерівності є $(-\infty; 3) \cup (6; +\infty)$.
Враховуючи, що $x \in (1; 8)$, дістанемо: $(1; 3) \cup (6; 8)$.

Відповідь. $(1; 3) \cup (6; 8)$.

Перевірте себе

- 1) Які рівняння називають логарифмічними?
- 2) Яке рівняння називають найпростішим логарифмічним?
- 3) Скільки розв'язків має найпростіше логарифмічне рівняння?
- 4) Які способи розв'язування логарифмічних рівнянь ви знаєте?
- 5) Які нерівності називають логарифмічними?
- 6) Які способи розв'язування логарифмічних нерівностей ви знаєте?

Виконаємо разом

- 1) Розв'яжіть рівняння $\ln(x - 8) + \ln(1 - x) = 1$.

Розв'язання. Щоб $\ln(x - 8)$ і $\ln(1 - x)$ мали зміст, потрібне одночасне виконання нерівностей $x - 8 > 0$ і $1 - x > 0$. Система цих нерівностей розв'язку не має. Тому задане рівняння також не має розв'язків.

- 2) Розв'яжіть рівняння $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння так: $\log_5(\log_4 \log_3 x) = 0$.

Число, що стоїть у дужках, за означенням логарифма, дорівнює 5^0 , тобто 1. Маємо: $\log_4 \log_3 x = 1$.

Запишемо це рівняння так: $\log_4(\log_3 x) = 1$. Звідси дістаємо: $\log_3 x = 4$, або $x = 3^4 = 81$.

- 3) Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}^2 x - 4 \geq 0$.

Розв'язання. Нехай $\log_{0,5} 5x = y$. Тоді $y^2 - 4 \geq 0$ або $(y - 2)(y + 2) \geq 0$. Цю нерівність задовольняють значення $y \geq 2$, а також $y \leq -2$ (мал. 19).

Нехай $\log_{0,5} x \geq 2$, звідки $\log_{0,5} x \geq \log_{0,5} 0,5^2$, $0 < x \leq 0,25$.

Якщо $\log_{0,5} x \leq -2$, то $\log_{0,5} x < \log_{0,5} 0,5^{-2}$, $x \geq 4$.

Отже, множина розв'язків нерівності: $(0; 0,25] \cup [4; +\infty)$.

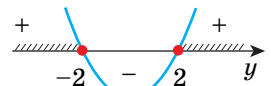
- 4) Розв'яжіть нерівність $\lg(x + 3) + \lg 2 < 2\lg x - \lg(x - 4)$.

Розв'язання. Область допустимих значень: $(4; +\infty)$. Перенесемо $\lg(x - 4)$ з правої частини нерівності в ліву та перетворимо утворену нерівність, використовуючи властивості логарифмів:

$$\lg(x + 3) + \lg 2 + \lg(x - 4) < 2\lg x, \lg(2(x + 3)(x - 4)) < \lg x^2.$$

Звідси $2(x + 3)(x - 4) < x^2$, або $x^2 - 2x - 24 < 0$. Множина розв'язків останньої нерівності — це проміжок $(-4; 6)$.

Враховавши область допустимих значень, знайдемо множину розв'язків заданої нерівності: $(-4; 6) \cap (4; +\infty) = (4; 6)$.



Мал. 19

Виконайте усно

Розв'яжіть рівняння (145–148).

145. а) $\log_3 x = 1$; б) $\ln x = 1$; в) $\log_5 x = -1$.
 146. а) $\lg x = 0$; б) $\log_4 x = 2$; в) $\log_7 x = -2$.
 147. а) $\ln x = -1$; б) $\log_{0,1} x = -2$; в) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$.
 148. а) $\log_x 16 = 2$; б) $\log_x 5 = -1$; в) $\log_x 81 = -4$.

Розв'яжіть нерівність (149–151).

149. а) $\lg x > \lg 2$; б) $\ln x < \ln 2$; в) $\lg x^2 < \lg 9$.
 150. а) $\log_2 x > 2$; б) $\log_2 x < 3$; в) $\lg x < 0$.
 151. а) $\log_{0,2} x > 1$; б) $\log_{0,2} x < 0$; в) $\log_{0,5} x \geq 2$.

A

Знайдіть корені рівняння, використовуючи означення логарифма (152–156).

152. а) $\log_2(x - 3) = 4$; б) $\lg(x + 5) = 2$; в) $\ln(2 - x) = -3$.
 153. а) $\lg 2x = 4$; б) $\lg x^2 = 4$; в) $\lg \frac{x}{2} = 3$.
 154. а) $\log_5(x - 1) = 2$; б) $\log_2(x^2 + 3x) = 2$; в) $\log_2(x^2 - 1) = 3$; г) $\log_x(x^2 - 2x + 6) = 2$.
 155. а) $\log_2(x + 5) = 1$; б) $\log_2(x^2 + x) = 1$; в) $\log_3(x^2 + 2) = 3$; г) $\log_x(16 - x^3) = 3$.
 156. а) $\log_{\frac{1}{2}}(1 - 2x) = -2$; б) $\log_{0,5}(3x - 1) = 3$;
 в) $\log_{16}(x^2 - 3x) = 0,5$; г) $\log_{17}(4x + 1) = 2$.

157. (ЗНО, 2017). Якому проміжку належить корінь рівняння:
 а) $\log_3 x = -2$; б) $\log_2 x = 2\log_2 3$?

| А | Б | В | Г | Д |
|----------|----------|----------|----------|-----------|
| $(0; 2]$ | $(2; 4]$ | $(4; 6]$ | $(6; 8]$ | $(8; 10]$ |

Використовуючи властивості логарифмів, розв'яжіть рівняння (158–161).

158. а) $\lg(3x - 17) = \lg(x + 1)$; б) $\log_6(5x + 3) = \log_6(7x + 5)$; в) $\lg(4x + 5) = \lg(5x + 2)$; г) $\log_2(6x - 8) = \log_2(3x + 1)$.
 159. а) $\lg(2x^2 + 3x) = \lg(6x + 2)$; б) $\lg(4x - 1) - \lg x = 0$; в) $\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x)$; г) $\lg(x + 4) - \lg(3x) = 0$.
 160. а) $\lg(x - 1) = \lg 2 + \lg(2x - 11)$; б) $\log_5 x + \log_5(x - 4) = 1$; в) $\lg(3x - 1) = \lg 5 + \lg(x + 5)$; г) $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$.
 161. а) $\log_{12}(x - 3) + \log_{12}(x - 2) = 1$; б) $1 + \log_5(2x - 1) = \log_5(7x + 4)$; в) $\log_2(x + 1) = 1 + \log_2(x - 3)$; г) $2\log_3 x = 1 + \log_3(2x - 3)$.

162. (ЗНО, 2009, 2014). Розв'яжіть рівняння:
 а) $\log_6(x - 3) + \log_6(x - 8) = 2$; б) $\log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x)$.

Якщо рівняння має єдиний корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповідь їхню суму.

Розв'яжіть нерівність (163–166).

163. а) $\log_2(3 - 2x) < \log_2 13$;

б) $\log_{0,5}(1 - 3x) \geq \log_{0,5} 4$;

164. а) $\log_2(4 - x) - \log_2 8 < 0$;

б) $\lg x > \lg 7 + 1$;

165. а) $\log_3(x - 7) < 3$;

б) $\log_3(v + 1) < -2$;

166. а) $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) > 0$;

б) $\log_{\frac{1}{4}}(3 - 4x) < -1$;

в) $\log_{0,7}(2x - 7) > \log_{0,7} 5$;

г) $\log_7(3x + 8) < \log_7 5$.

в) $\log_{0,25}(2 - x) - \log_{0,25} 2 > 0$;

г) $\lg x \leq 2 - \lg 5$.

в) $\log_{\frac{1}{3}}(y - 7) > -2$;

г) $\log_{\frac{2}{3}}(2 - 5z) < -2$.

в) $\lg(12 - 5x) < 0$;

г) $\log_{16}(4x + 3) > \frac{1}{2}$.

Б

Розв'яжіть рівняння (167, 168).

167. а) $\log_7 \log_2 \log_{13} x = 0$;

б) $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$.

168. а) $\log_{2020} \log_3 \log_2 x = 0$;

б) $\lg \lg \log_5 x = 0$.

✓ 169. (ЗНО, 2005). Розв'яжіть рівняння $\lg \log_2 \log_3 x = 0$.

170. Знайдіть корені рівняння.

а) $\lg(x + 1) - \lg(x + 3) = \lg 3 - \lg(x - 1)$;

б) $\log_2(x + 3) - \log_2(x - 1) = 2 - \log_2(2x - 8)$.

Розв'яжіть рівняння заміною змінної (171–173).

171. а) $\lg^2 x - 4 \lg x + 4 = 0$;

в) $\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1$;

б) $\log_5 x \cdot (\log_5 x - 1) = 2$;

г) $\lg 10x = \frac{3}{\lg x - 1}$.

172. а) $\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$;

в) $\frac{1}{1 + \lg z} + \frac{6}{5 + \lg z} = 1$;

б) $\ln^2 x - 2 \ln x = 3$;

г) $\frac{2 \lg x}{\lg(5x - 4)} = 1$.

173. а) $\log_2^2(x - 1) - \log_2(x - 1) - 6 = 0$;

в) $2 \log_9^2(x + 5) - 3 \log_9(x + 5) + 1 = 0$;

б) $\lg^2 x + 2 \lg x - 3 = 0$;

г) $\ln^2 x - 2 \ln x = 0$.

174. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $\log_3 x = 1 - x$;

в) $\log_2 x = \sqrt{3 - x}$;

б) $x - 1 = 3 \log_4 x$;

г) $\log_{0,5} x = -\frac{2}{x}$.

Розв'яжіть рівняння (175, 176).

175. а) $\log_3 x - 2 \log_{\frac{1}{3}} x = 6$;

в) $\log_{0,5} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = 0$;

б) $4 - \lg z = 3\sqrt{\lg z}$;

г) $\log_x 2 + \log_2 x = 2,5$.

176. а) $2\lg(-x) = \lg(x + 2)$;

б) $\ln(x^2 - 2x) = \ln(2x + 12)$;

в) $\log_2 x + \log_x 16 = 5$;

г) $x^2 + \lg x = 1000$.

Розв'яжіть нерівність (177–181).

177. а) $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) > 3$; б) $\log_3(x - 2) + \log_3(x + 6) \leq 2$.

178. а) $\log_5(x + 13) < \log_5(x + 3) + \log_5(x - 5)$;

б) $\log_4(x + 32) \geq \log_4(1 - x) + \log_4(8 - x)$.

179. а) $\lg(x - 1) - \lg(2x - 11) \geq \lg 2$; б) $\lg(3x - 1) - \lg(x + 5) > \lg 5$.

180. а) $\log_3^2(4 - x) < 1$;

б) $\log_3^2 x - \log_3 x < 0$;

в) $\log_5^2(5 - x) \leq 4$;

г) $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 4 > 0$.

181. а) $\log_{0,2}^2(x - 1) > 4$;

б) $\log_{0,2}^2 x - 2\log_3 x < 3$;

в) $\log_4^2(x - 3) \geq 1$;

г) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$.

✓ 182. (ЗНО, 2006, 2008). Розв'яжіть нерівність:

а) $\log_{\frac{1}{4}} 3 \cdot \log_4 x > 0$;

б) $\log_5 0,2 \cdot \log_5 x > 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------|----------|----------------|----------|----------------|
| $(-\infty; 0)$ | $(0; 1)$ | $(0; +\infty)$ | $(1; 5)$ | $(5; +\infty)$ |

183. Розв'яжіть графічно нерівність:

а) $\log_2 x < 3 - x$;

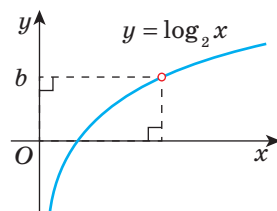
в) $\log_4 x > \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$;

б) $\ln x < x^3 + 1$;

г) $x < 11 - \lg x$.

✓ 184. (ЗНО, 2006). Розв'яжіть нерівність $\log_2 x < b$, використавши малюнок 20.

| А | Б | В | Г | Д |
|------------|----------|------------------|-----------------------|----------------|
| $(0; 2^b)$ | $(0; b)$ | $(-\infty; 2^b)$ | $(\log_2 b; +\infty)$ | $(-\infty; b)$ |



Мал. 20

185. Знайдіть з точністю до 10^{-4} корені рівняння:

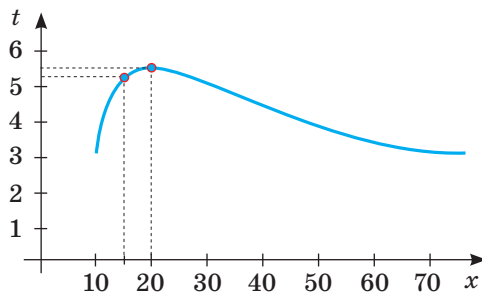
а) $\lg x = 0,4$; в) $\ln x = 3,7$; г) $\log_{0,5} x = 3$;

б) $\lg x = -1,5$; г) $\log_3 x = 2,5$; д) $\log_{\sqrt{2}} x = \sqrt{3}$.

186. Ємність легенів людини виражається функцією $t(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$,де x — вік людини в роках ($x \geq 10$); $t(x)$ — ємність легенів у літрах.За допомогою графіка функції $t(x)$, зображеного на малюнку 21, установіть:

а) у якому віці ємність легенів людини максимальна і чому вона дорівнює;

б) протягом якого часу ємність легенів більша, ніж у 15 років.



Мал. 21

Вправи для повторення

187. Катер пройшов за течією річки 80 км і повернувся назад, затративши на весь шлях 8 год 20 хв. Скільки часу катер рухався за течією річки, якщо її швидкість дорівнює 4 км/год?
188. Побудуйте графіки функцій $y = x^{\frac{1}{3}}$ і $y = \sqrt[3]{x}$.
Для кожної функції за графіком установіть:
а) область визначення функції;
б) область значень функції;
в) проміжки знакосталості.
189. Два столяри працювали над виготовленням комплекту меблів. За роботу вони отримали 14 000 грн, із якої мали заплатити податок у розмірі 10%. Скільки гривень отримав за цю роботу кожен робітник, якщо перший отримав на 50% більше, ніж другий?

Самостійна робота 1

ВАРІАНТ 1

- 1 Побудуйте графік функції:
а) $y = 3^x$; б) $y = \log_{0,5} x$.
- 2 Обчисліть:
а) $\log_2 32$; б) $\log_6 2 + \log_6 3$.
- 3 Розв'яжіть рівняння:
а) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; в) $4^{x+1} - 4^{x-1} = 60$;
б) $\log_5(2x + 3) = 2$; г) $\lg(3x + 1) + \lg x = 1$.
- 4 Розв'яжіть нерівність:
а) $3^{4x} - 9^{x+2} < 0$; б) $\log_2 4x < 3$.

ВАРІАНТ 2

- 1 Побудуйте графік функції:
а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; б) $y = \log_3 x$.
- 2 Обчисліть:
а) $\log_9 81$; б) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$.
- 3 Розв'яжіть рівняння:
а) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$; в) $6^x - 6^{x-2} = 210$;
б) $\log_3(7x - 1) = 3$; г) $\lg(2x + 4) = 1 - \lg(x - 2)$.
- 4 Розв'яжіть нерівність:
а) $2^{4x} - 4^{x-2} > 0$; б) $\log_{0,6} 3x > 2$.

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

- ✓ Знаю, що поняття степеня поступово узагальнюється такими рівностями:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n; \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

$$a^1 = a; \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0); \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0); \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0)$$

- ✓ Знаю і вмю використовувати властивості степеня:

$$a > 0, \quad b > 0, \quad r \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{lll} a^r \cdot a^s = a^{r+s}; & (a^r)^s = a^{rs}; & \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \\ a^r : a^s = a^{r-s}; & (ab)^r = a^r b^r; & \end{array}$$

- ✓ Знаю, що логарифмом числа b за основою a ($a > 0$; $a \neq 1$) називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a , щоб отримати b . Тобто якщо $a^x = b$, то $x = \log_a b$ ($b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$).

- ✓ Знаю і вмю використовувати властивості логарифмів:

$$\begin{array}{lll} \log_a 1 = 0; & \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; & \log_a x^p = p \log_a x; \\ \log_a a = 1; & \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y; & \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \\ a^{\log_a b} = b; & & \end{array}$$

Умови, за яких ці рівності правильні, вказані в тексті.

$y = x^\alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}$ — *степенева функція* з дійсним показником;

$y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$ — *показникова функція*;

$y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$ — *логарифмічна функція*.

- ✓ Знаю, що рівняння (нерівність) називають *показниковим (показниковою)*, якщо його (її) змінні входять лише до показників степенів.
- ✓ Знаю, що рівняння (нерівність) називають *логарифмічним (логарифмічною)*, якщо його (її) змінні входять лише під знаки логарифмів.
- ✓ Умію використовувати твердження, які випливають із монотонності функцій.

1. Якщо $a > 0$ і $a^{x_1} = a^{x_2}$,
то $x_1 = x_2$.

2. Якщо $a > 1$ і $a^{x_1} > a^{x_2}$,
то $x_1 > x_2$.

3. Якщо $0 < a < 1$ і
 $a^{x_1} > a^{x_2}$, то $x_1 < x_2$.

1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $\log_a x_1 = \log_a x_2$,
то $x_1 = x_2$.

2. Якщо $a > 1$ і $\log_a x_1 > \log_a x_2$,
то $x_1 > x_2 > 0$.

3. Якщо $0 < a < 1$ і $\log_a x_1 > \log_a x_2$,
то $0 < x_1 < x_2$.

Історичні відомості

Завдяки працям Р. Декарта, П. Ферма, І. Ньютона в XVII ст. в математиці з'явилося поняття функції. Термін «функція» запропонував Г. Лейбніц. Потім І. Бернуллі, А. Лопіталь, К. Гаусс та інші математики уточнювали і розширювали це поняття.

Основні властивості числових функцій, зокрема їх парність, непарність, періодичність, неперервність, диференційовність тощо, дослідив у двотомній праці «Вступ до аналізу нескінченно малих» Л. Ейлер.

Степені з невеликими натуральними показниками вавилонські вчені розглядали ще понад 4000 років тому. Степені з дробовими, нульовими і від'ємними показниками поширювалися в математиці упродовж XIV–XVII ст. поступово, вчені позначали їх кожен по-своєму. І лише після опублікування праць І. Ньютона сучасні позначення цих степенів стали загальноприйнятими. Тоді ж почали розглядати степені з довільними дійсними показниками.

Учення про логарифми було розроблене в XVI ст., але у практику ввійшло тільки після створення таблиць логарифмів. Перші такі таблиці склав шотландський математик Д. Непер. За основу логарифмів він узяв число $\frac{1}{e}$. Непер ввів і термін «логарифм» (від грец. $\lambda\omicron\gamma\omicron\zeta$ — відношення, $\alpha\rho\theta\mu\omicron\zeta$ — число).



Джон Непер
(1550–1617)

Шотландський математик і теолог, який винайшов логарифми. Можна з великою певністю припускати, що Непер був знайомий з книгою «Arithmetica integra» Михаеля Штифеля, у якій вперше знайшла свій вираз ідея логарифма. Головним предметом самостійних робіт Непера була тригонометрія, а визначальним їхнім напрямом і метою — скорочення і спрощення обчислень.

Перші таблиці десяткових логарифмів створив у 1617 р. Г. Брігс, натуральних — у 1619 р. Дж. Спейдель. Обидва — англійські математики.

У 1620 р. Вільям Отред винайшов першу логарифмічну лінійку, яка протягом тривалого часу була незамінним інструментом інженера.

Близьке до сучасного розуміння логарифмування як операції, оберненої до піднесення до степеня, вперше з'явилося у Джона Валліса та Йогана Бернуллі. Відкриття логарифмів і створення таблиць логарифмів значно спростило громіздкі обчислення, тому їх широко використовували на практиці.

До середини XX ст. логарифмічні таблиці й логарифмічні лінійки вважалися найкращими засобами обчислень. Із поширенням електронних засобів, особливо калькуляторів, логарифмічні обчислення відійшли в минуле.

Історичні відомості

Французький математик П. Лаплас казав, що винахід логарифмів подовжив життя обчислювачів.

Показникові й логарифмічні функції ґрунтовно досліджував Л. Ейлер, називаючи їх «показниковими й логарифмічними кількостями».

Леонард Ейлер (1707–1783)

Швейцарський математик та фізик, який здійснив важливі відкриття в різних галузях математики. Увів велику частину сучасної математичної термінології і позначень, зокрема поняття математичної функції. Л. Ейлер відомий також завдяки своїм роботам у механіці, динаміці рідини, оптиці та астрономії, інших прикладних науках.



У 1799 році К. Гаусс висловив думку, що існування розв'язків будь-якого рівняння в радикалах не є очевидною істиною. П. Руффіні у творі «Загальна теорія рівнянь...» (1799 р.) зробив першу спробу довести нерозв'язність у радикалах загального алгебраїчного рівняння 5-го степеня. Строге доведення нерозв'язності у радикалах рівнянь вище четвертого степеня вперше дав у 1826 р. норвезький математик Н. Абель.

Досліджуючи питання про розв'язність у радикалах загального рівняння п'ятого степеня, Н. Абель висунув принцип, який згодом стали застосовувати у всіх галузях математики: «Замість того, щоб шукати деяке співвідношення, не знаючи задалегідь, чи існує воно, слід з'ясувати, чи дійсно існує таке співвідношення». Н. Абель у розв'язанні проблеми зробив більше, ніж П. Руффіні, але П. Руффіні був першим. Тому фахівці з історії математики справедливо назвали теорему про нерозв'язність у радикалах алгебраїчного рівняння п'ятого степеня теоремою Руффіні—Абеля.

Н. Абель не встиг повністю завершити свої дослідження, а тому не зміг дати загальний критерій розв'язності рівнянь з числовими коефіцієнтами в радикалах. Це здійснив французький математик Е. Галуа.

Він не лише поставив крапку в розв'язанні у радикалах рівнянь n -го степеня, а й започаткував нові напрями розвитку алгебри. Із цього приводу видавці Галуа писали: «Його думка була не з тих, від яких відштовхуються, але з тих, до яких ще потрібно дорости».

У XVIII–XIX ст. активно розроблялася теорія систем алгебраїчних рівнянь з багатьма невідомими. Над нею працювали Г. Лейбніц, К. Маклорен, Г. Крамер, Ш. Вандермонд, П. Лаплас, К. Гаусс та інші.

З українських математиків проблемами сучасної алгебри найбільше займалася Київська алгебраїчна школа, очолювана академіком Д. О. Граве (1863–1939). Важливі результати отримали О. Ю. Шмідт (1891–1956), М. Г. Чеботарьов (1894–1947), Б. М. Делоне (1890–1980), М. П. Кравчук (1892–1942), С. М. Черніков (1912–1987).

ТЕМАТИЧНІ ТЕСТИ

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 1–12 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

- 1 Значення якого виразу є цілим числом?

| А | Б | В | Г | Д |
|------------------------|----------------|---------------------------------|--------------------------------------|-------------|
| $27^{\frac{1}{3}} : 2$ | $9^{\log_3 2}$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ | $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2$ | $\log_5 10$ |

- 2 Знайдіть значення виразу $\log_8 4^3$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 6 | 1 | 4 |

- 3 Знайдіть суму розв'язків рівняння $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 2 | 5 | 4 |

- 4 Знайдіть корінь рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{16}{27}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3$.

| А | Б | В | Г | Д |
|----|----|---|---|---|
| -1 | -3 | 1 | 3 | 0 |

- 5 Графік якої функції зображено на малюнку а?

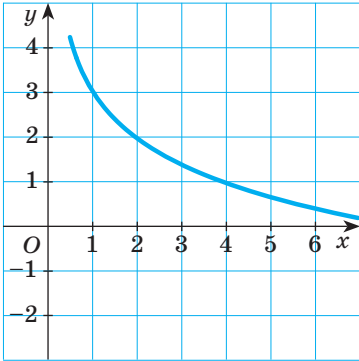
| А | Б | В | Г | Д |
|------------|----------------|--------------------|---------------|--------------|
| $y = -2^x$ | $y = \log_2 x$ | $y = 3 - \log_2 x$ | $y = 2 - 2^x$ | $y = 2^{-x}$ |

- 6 Графік якої функції зображено на малюнку б?

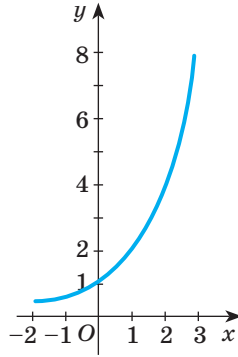
| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------|--------------------|--------------------|---------------|-----------|
| $y = \log_2(x - 3)$ | $y = 2 - \log_2 x$ | $y = 3 - \log_2 x$ | $y = 2 - 2^x$ | $y = 2^x$ |

- 7 На малюнку в зображено графік функції $y = 0,5^{|x|}$. Використайте його і вкажіть розв'язки нерівності $0,5^{|x|} < 0,5x^2$.

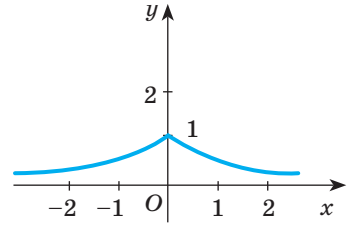
| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------------------------|-----------|-----------|-----------|----------------------|
| $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ | $(-1; 1)$ | $[-1; 1]$ | $[-9; 9]$ | $(-\infty; +\infty)$ |



Мал. а



Мал. б



Мал. в

- 8 Знайдіть кількість цілих чисел, що не є розв'язками нерівності $2^{-x^2} \leq \frac{1}{16}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|------|-----|-----|--------|----------------------|
| один | сім | три | чотири | встановити неможливо |

- 9 Розв'яжіть нерівність $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)^{-x^2} \geq \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)^9$.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------------------------|-----------|-----------|-----------|----------------------|
| $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ | $(-6; 6)$ | $[-3; 3]$ | $[-9; 9]$ | $(-\infty; +\infty)$ |

- 10 Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\log_2(x+1) = \log_2(3x)$.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------|-----------|----------|----------|----------------|
| $(-\infty; -1)$ | $(-1; 0)$ | $(0; 1)$ | $[1; 3)$ | $(3; +\infty)$ |

- 11 Знайдіть корінь рівняння $\lg x + \lg(x-2) = \lg 3$.

| А | Б | В | Г | Д |
|----|---|---|----|---|
| -2 | 3 | 2 | -3 | 0 |

- 12 Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $3^x = 8$.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------|-----------|----------|----------|----------------|
| $(-\infty; -1)$ | $(-1; 0)$ | $(0; 1)$ | $[1; 3)$ | $(3; +\infty)$ |

Михайло Остроградський

(1801–1862)



Всесвітньо відомий український математик і механік. Видатний учений, організатор наукової школи прикладної математики і механіки, популяризатор математики, прогресивний реформатор математичної освіти, великий лектор і талановитий педагог-новатор. Досліджував проблеми математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, теоретичної механіки, алгебри, теорії ймовірностей, гідромеханіки.

1801

1830

1860

1890

1960

1932

Микола Шкіль

(1932–2015)

Відомий український учений — академік НАПН України, доктор фізико-математичних наук, визнаний авторитет у царині математичних наук, талановитий керівник і чудовий організатор педагогічної освіти. Автор багатьох підручників з математики для учнів середньої загальноосвітньої школи та студентів педагогічних ВНЗ. Наукові дослідження присвячені розробці асимптотичних методів інтегрування диференціальних рівнянь та їх систем.



РОЗДІЛ 2

ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

CHAPTER 2

INTEGRAL AND ITS APPLICATIONS

« Відкриття аналізу нескінченно малих, тобто рахунку диференціального та інтегрального, — справді один із найбільших винаходів, на які коли-небудь спромігся геній людського духу. »

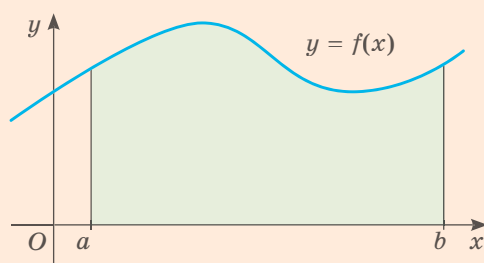
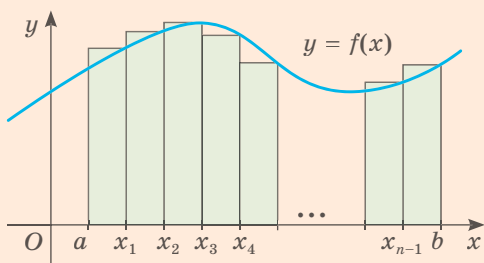
В. Левицький

§ 5 ПЕРВИСНА | PRIMITIVE

§ 6 Площа підграфіка | AREA OF HYPOGRAPH

§ 7 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ | DEFINITE INTEGRAL

§ 8 ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ | APPLICATION OF DEFINITE INTEGRALS



РОБОТОТЕХНІКА

Проектування, розробка, будівництво, експлуатація та використання роботів, а також комп'ютерних систем для їх контролю.

Робот-кухар

Космічна
робототехніка

Медична
робототехніка

Побутова
робототехніка



МАТЕМАТИКА В МОЇЙ ПРОФЕСІЇ

ІТ-ПРОФЕСІЇ

Створення, розвиток і експлуатація інформаційних систем.
Прийом, переробка, зберігання та передача інформації.

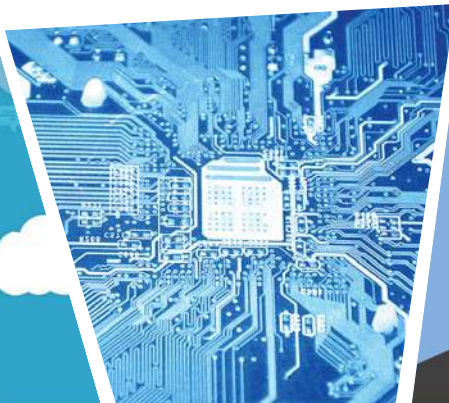
Мережеві
технології

Розробка програмного
забезпечення

Комп'ютерна графіка
та дизайн

Системне
адміністрування

Тестування



§ 5. ПЕРВІСНА

Досі ми розглядали диференціювання функцій. Не менш важливою є й обернена операція.

Нехай дано визначену і неперервну на проміжку I функцію $F(x)$ таку, що в кожній точці x деякого проміжку $F'(x) = f(x)$. У цьому разі функцію $f(x)$ називають *похідною функції $F(x)$* , а функцію $F(x)$ — *первісною* для функції $f(x)$.

Досі за даною функцією $F(x)$ ми знаходили її похідну $f(x)$. Таку операцію, як ви вже знаєте, називають *диференціюванням*. Знаходження за даною функцією $f(x)$ її первісної $F(x)$ — операція, обернена до диференціювання; її називають *інтегруванням*.

Приклади. Функція:

x^2 — первісна для $2x$, бо $(x^2)' = 2x$;

x^3 — первісна для $3x^2$, бо $(x^3)' = 3x^2$;

$\sin x$ — первісна для $\cos x$, бо $(\sin x)' = \cos x$.

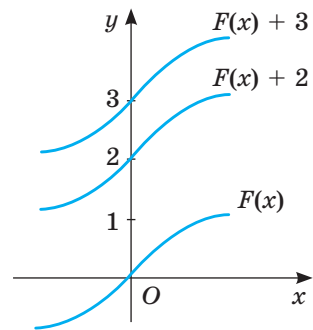
Чи лише функція x^2 є первісною для $2x$? Ні.

Адже $(x^2 + 3)' = 2x$, $(x^2 - 5)' = 2x$ і т. д. Отже, кожна з функцій $x^2 + 3$, $x^2 - 5$, $x^2 + \sqrt{3}$ є первісною для $2x$. Геометрично це означає, що графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ такі, що їх можна сумістити паралельним перенесенням уздовж осі ординат (мал. 22). Далі буквою C позначатимемо довільне дійсне число.

Використовуючи таблицю похідних (с. 255), складемо таблицю первісних. Радимо запам'ятати її.

Функцію $F(x)$ називають **первісною** для функції $f(x)$ на проміжку I , якщо для кожного значення x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Взагалі, якщо $F'(x) = f(x)$, а C — довільне число, то кожна первісна для $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$. Це **основна властивість первісної**.



Мал. 22

Таблиця 1

| | | | | | |
|--------|---------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------------|----------------------|
| $f(x)$ | k (стала) | $x^n, n \neq -1$ | $\frac{1}{x}$ | a^x | e^x |
| $F(x)$ | $kx + C$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | $\ln x + C$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ | $e^x + C$ |
| $f(x)$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| $F(x)$ | $-\cos x + C$ | $\sin x + C$ | $\operatorname{tg} x + C$ | $-\operatorname{ctg} x + C$ | $2\sqrt{x} + C$ |

Обґрунтувати цю таблицю можна диференціюванням функції, яка є в її другому рядку. Користуючись таблицею, можна одразу записати, що, наприклад, для функції x^8 первісною є $\frac{1}{9}x^9 + C$ і т. ін.

Зауваження. Кожна неперервна на проміжку функція має на цьому проміжку первісну.

Виведемо кілька правил, подібних до правил диференціювання, які полегшують знаходження первісних.

I. Якщо $F(x)$ і $G(x)$ — первісні для функцій $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первісна для функції $f(x) + g(x)$.

Справді, якщо $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$, то

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

II. Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, а k — довільне число, то $kF(x)$ — первісна для функції $kf(x)$.

Адже $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

III. Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, а k, b — довільні числа ($k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ — первісна для функції $f(kx + b)$.

$$\text{Адже } \left(\frac{1}{k}F(kx + b) \right)' = \frac{1}{k} \cdot F'(kx + b) = \frac{1}{k} \cdot kf(kx + b) = f(kx + b).$$

Приклад. Знайдіть первісну для функції:

а) $x^4 + \cos x$;

б) $5 \sin x$;

в) $(7x + 2)^3$.

Розв'язання.

а) Для функцій x^4 і $\cos x$ первісними є відповідно $\frac{x^5}{5}$ і $\sin x$. Тому

для суми даних функцій загальним виглядом первісних буде

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \sin x + C.$$

б) За правилом II, $F(x) = -5 \cos x + C$.

в) Одна з первісних для функції $(7x + 2)^3$, згідно з правилом III, є функція

$\frac{1}{7} \cdot \frac{(7x + 2)^4}{4}$. Загальний вигляд первісних для даної функції:

$$F(x) = \frac{1}{28}(7x + 2)^4 + C.$$

Перевірте себе

- 1 Що називають диференціюванням функції?
- 2 Як називають операцію, обернену до диференціювання?
- 3 Що називають первісною функції?
- 4 Чому дорівнює первісна одночлена ax^n ?
- 5 Сформулюйте теорему про первісну суми двох функцій.

Виконаємо разом

1) Знайдіть первісну для функції $f(x) = x^5 + 2x - 4$.

Розв'язання. $F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{2}{2}x^2 - 4x + C = \frac{1}{6}x^6 + x^2 - 4x + C$.

2) Доведіть, що функція $F(x) = 2\sin x + 3x$ є первісною для функції $f(x) = 2\cos x + 3$.

Доведення. $F'(x) = (2\sin x + 3x)' = 2\cos x + 3 = f(x)$.

Маємо: $F'(x) = f(x)$. Отже, за означенням, функція $F(x)$ первісна для функції $f(x)$.

3) Знайдіть для функції $y = x$ таку первісну, щоб її графік проходив через точку $P(2; 5)$.

Розв'язання. Одна з первісних для $y = x$ є функція $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Загальний

вигляд усіх її первісних — функція $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$. Оскільки графік шуканої первісної має проходити через точку $P(2; 5)$, то $5 = \frac{2^2}{2} + C$, звідки $C = 3$. Шукана первісна $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$.

4) Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 2$ м/с². Визначте швидкість руху тіла як функцію від часу t , якщо в момент $t = 0$ вона дорівнювала 3 м/с.

Розв'язання. Прискорення — похідна швидкості. Тому якщо $v(t)$ — шукана швидкість, то $v'(t) = 2$. Отже, $v(t)$ — первісна для функції 2 (сталої), тому $v(t) = 2t + C$. Оскільки $v(0) = 3$, то $3 = 2 \cdot 0 + C$, $C = 3$. Отже, $v(t) = 2t + 3$.

Виконайте усно

Знайдіть первісну функції (190–192).

190. а) $f(x) = x^9$; в) $f(x) = x^3$;
 б) $f(x) = x$; г) $f(x) = x^{0,5}$.
191. а) $f(x) = \sin x$; в) $f(x) = 5$;
 б) $f(x) = 0$; г) $f(x) = \cos x$.
192. а) $f(x) = 0,5x$; в) $f(x) = x^{-2}$;
 б) $f(x) = e^x$; г) $f(x) = -0,1$.

193. Яке з тверджень правильне:

- а) графіки двох різних первісних однієї функції збігаються;
 б) графіки двох різних первісних однієї функції перетинаються;
 в) графіки двох різних первісних однієї функції рівні фігури?

194. Для якої функції похідна є одночасно й первісною?

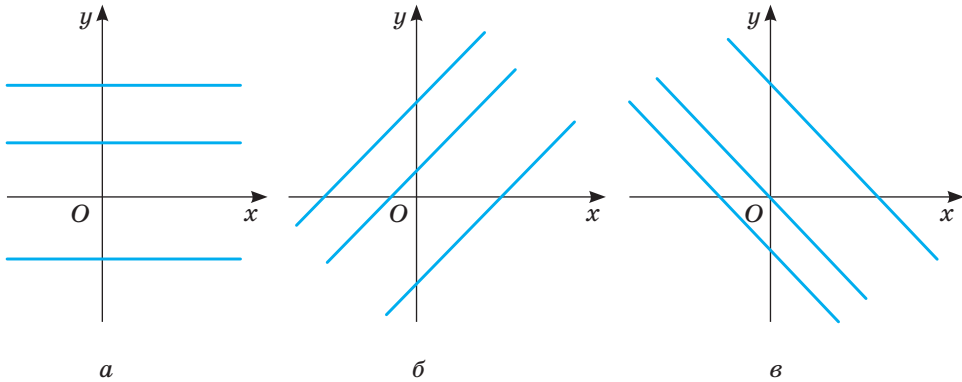
$$f(x) = x^\alpha$$

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$f(x) = e^x$$

$$F(x) = e^x + C$$

195. На якому з малюнків 23 зображено три первісні функції $y = 1$?



Мал. 23

A

196. Доведіть, що функція x^4 — первісна для функції $4x^3$. Чи є функція $x^4 - 5$ первісною для функції $4x^3$?

197. Знайдіть чотири довільні первісні для функції $4x^3$.

198. Доведіть, що функція $0,5x^2 + x$ — первісна для функції $x + 1$.

199. Який загальний вигляд мають первісні для функції $x + 1$?

200. Доведіть, що функція $\cos x$ — первісна для функції $-\sin x$.

Знайдіть загальний вигляд первісної для функції (201–203).

201. а) $f(x) = 3$; б) $f(x) = 0$; в) $f(x) = 3x^2$; г) $f(x) = 4x^3$.

202. а) $f(x) = -5x^4$; б) $f(x) = -2x$; в) $f(x) = x^3 - e^x$; г) $f(x) = -x^5 + e^x$.

203. а) $f(x) = x^3 + 2x$; в) $f(x) = 2 + \cos x$;

б) $f(x) = x^e - 4$; г) $f(x) = 3 - \sin x$.

Знайдіть первісну функції (204–206).

204. а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = 5$; в) $f(x) = x^{100}$; г) $f(x) = -3$.

205. а) $f(x) = 5^x$; б) $f(x) = 10^x$; в) $f(x) = x^{-1}$; г) $f(x) = \pi$.

206. а) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$; б) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$; в) $y = \frac{1}{x^3}$; г) $y = \frac{1}{x^{10}}$.

207. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x) = 5 + 3x^2$; в) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$;

б) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 7$; г) $f(x) = (x - 2)^2$.

208. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її первісною (А–Д).

1 $f(x) = x^2$

2 $f(x) = x^{-2}$

3 $f(x) = x^{-0,5}$

4 $f(x) = x^{0,5}$

А $F(x) = -\frac{1}{x}$

Г $F(x) = 2\sqrt{x}$

Б $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

Д $F(x) = -\frac{1}{3}x^3$

В $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

209. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну $F(x)$, що:

а) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$; б) $f(x) = \sin x$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

210. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну $F(x)$, щоб:

а) $f(x) = 1 + x^2$ і $F(-1) = 2$; б) $f(x) = 3x - 7$ і $F(0) = 12$.

211. Доведіть, що функція $y = 2x^4 + x$ є первісною для функції $y = 8x^3 + 1$.

212. Доведіть, що функція $y = e^x + ex$ є первісною для функції $y = e^x + e$.

Б

213. Доведіть, що функція $2\sqrt{x}$ — одна з первісних для функції $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

214. Доведіть, що функція $y = 1 - 2\cos x$ є первісною для функції $y = 2\sin x$. Побудуйте в одній системі координат графіки двох інших первісних функції $y = 2\sin x$.

215. Доведіть, що функція $y = 0,75x\sqrt[3]{x}$ є первісною для функції $y = \sqrt[3]{x}$.

216. Доведіть, що функція $1 + \operatorname{tg} x$ — одна з первісних для функції

$$\frac{1}{\cos^2 x} \text{ на проміжку } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Знайдіть загальний вигляд первісної для функції (217–219).

217. а) $y = 1 + x^9$; б) $y = 5 - x$; в) $y = 2x^3$; г) $y = -0,5x^5$.

218. а) $y = 2\sin x$; б) $y = \sin 3x$; в) $y = \cos 7x$; г) $y = 5 + \cos x$.

219. а) $y = 0,5 - 2x$; б) $y = e^{-x}$; в) $y = (3x)^{-2}$; г) $y = 5 + x^{-1}$.

220. Для якої функції первісною є функція: а) $3x^5$; б) $2\cos x$?

221. (ЗНО, 2007). Знайдіть первісну функції $f(x) = 2x + 2$, графік якої проходить через точку з координатами (1; 4).

| А | Б | В | Г | Д |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| $F(x) = x^2 + 2x$ | $F(x) = x^2 + 2x + 1$ | $F(x) = x^2 + 2x + 2$ | $F(x) = x^2 + 2x - 4$ | $F(x) = x^2 + 2x - 23$ |

222. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну, щоб її графік проходив через точку P , якщо:

а) $f(x) = 1 + x^2$, $P(-3; 9)$; б) $f(x) = x + \frac{1}{\cos^2 x}$, $P(0; -3)$.

223. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну $F(x)$, щоб:

а) $f(x) = x^3 + 1$, $F(1) = 2$; в) $f(x) = 2\sin 2x$, $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$;

б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F(2) = 3$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $F(4) = 2$.

224. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t)$, причому в момент часу t_0 швидкість тіла дорівнювала v_0 . Знайдіть залежність швидкості тіла від часу, якщо:

а) $a(t) = 8t$, $t_0 = 5$ с, $v_0 = 120$ м/с; б) $a(t) = 8$, $t_0 = 3$ с, $v_0 = 30$ м/с.

225. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$, причому в момент часу t_0 пройдений шлях дорівнював s_0 . Знайдіть залежність шляху, пройденого тілом, від часу, якщо:

а) $v(t) = 3t^2$, $t_0 = 2$ с, $s_0 = 12$ м; б) $v(t) = 2\sin x$, $t_0 = \pi$ с, $s_0 = 2$ м.

226. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, якщо:

а) $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + 5 + \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0; +\infty)$;

б) $F(x) = 2\sin 3x$, $f(x) = 6\cos 3x$, $x \in R$;

в) $F(x) = 4 + \operatorname{tg} 3x$, $f(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

227. Чи правильно, що функція $F(x)$ — первісна для $f(x)$, якщо:

а) $F(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$, $x \in (0; +\infty)$;

б) $F(x) = 3 - x^4$, $f(x) = 3x - 0,2x^5 + C$, $x \in R$;

в) $F(x) = \frac{1}{x^2} + 7$, $f(x) = -\frac{1}{2x^3}$, $x \in (-\infty; 0)$?

228. (ЗНО, 2017). Задано функцію $y = 3x$. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Будь-яка первісна цієї функції є парною.

II. Графік будь-якої первісної цієї функції проходить через точку $O(0; 0)$.

III. Графік будь-якої первісної цієї функції не перетинає вісь x .

| А | Б | В | Г | Д |
|--------|---------|----------|--------------|---------------|
| Лише I | Лише II | Лише III | Лише I та II | Лише I та III |

Знайдіть первісну для функції (**229–234**).

229. а) $f(x) = 8e^x$;

б) $f(x) = e^{2-3x}$;

в) $f(x) = 2e^{5x-1}$.

230. а) $f(x) = 3 \cdot 2^x$;

б) $f(x) = 3^{-5x}$;

в) $f(x) = 5 \cdot 2^{8x-1}$.

231. а) $y = 2\sin 7x \cos 7x$; б) $y = 2\sin^2 x - 1$.

232. а) $y = \sin^2 5x - \cos^2 5x$; б) $y = 1 + \operatorname{ctg}^2 3x$.

233. а) $y = \sin 2x \cos 13x - \cos 2x \sin 13x$;

б) $y = 1 + \operatorname{tg}^2 3x$.

234. а) $y = \cos 3x \cos 7x + \sin 3x \sin 7x$;

б) $y = 2\cos^2 x$.

Вправи для повторення

235. Знайдіть екстремуми функції $y = 1 - \sin x$.

236. Знайдіть точки перетину графіків функцій:

а) $y = x^2 + 3$ і $y = 4x$; б) $y = \sqrt{x}$ і $y = 0,5x - 4$.

237. У першому баку міститься 400 л бензину, а в другому — 900 л. Щогодини з першого бака виливають по 20 л бензину, а з другого — по 10 л. Через скільки годин у першому баку залишиться бензину в 4 рази менше, ніж у другому?

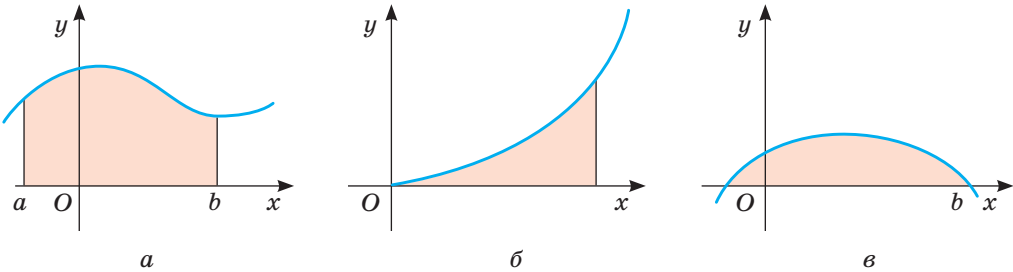
§ 6. ПЛОЩА ПІДГРАФІКА

Поняття первісної можна застосовувати для визначення площ фігур, які досить складно знаходити без цього поняття.

Нехай на площині дано графік неперервної функції $y = f(x)$, яка на проміжку $[a; b]$ набуває тільки додатних значень.

Фігуру, обмежену таким графіком, віссю абсцис і прямими $x = a$ та $x = b$, називають **підграфіком функції $f(x)$** на проміжку $[a; b]$.

Кілька таких підграфіків зображено на малюнку 24. Підграфіки функцій називають ще *криволінійними трапеціями*.



Мал. 24

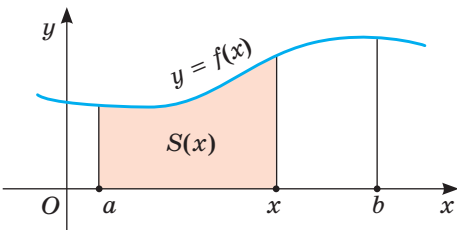
Площі підграфіків функцій можна знаходити за допомогою первісних.

ТЕОРЕМА

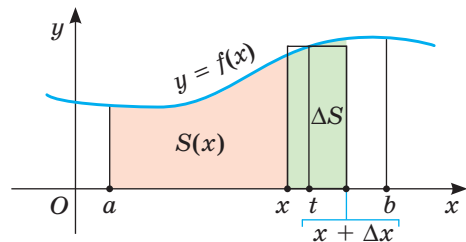
Площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на $[a; b]$.

ДОВЕДЕННЯ.

Розглянемо підграфік функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ (мал. 25).



Мал. 25



Мал. 26

Нехай x — довільна точка з проміжку $[a; b]$, а $S(x)$ — площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; x]$. Зрозуміло, що $S(x)$ залежить від x , тобто є функцією від x . Доведемо, що $S'(x) = f(x)$. Для цього надамо змінній x приріст Δx (мал. 26), від чого функція набуде приросту $S(x + \Delta x) - S(x)$. Це площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[x; x + \Delta x]$. Вона дорівнює площі прямокутника, у якого основа — Δx , а висота — $f(t)$, де t — деяке число з проміжку $[x; x + \Delta x]$. Отже, $S(x + \Delta x) - S(x) = \Delta x \cdot f(t)$, звідки

$$\frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(t).$$

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $t \rightarrow x$ і $f(t) \rightarrow f(x)$. Тоді $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x)$, тобто $S'(x) = f(x)$.

Як бачимо, функція $S(x)$ — первісна для $f(x)$. І якщо $F(x)$ — яка-небудь інша первісна для $f(x)$, то $S(x) = F(x) + C$, де C — якесь число. Щоб визначити це число, врахуємо, що $S(a) = 0$, бо при $x = a$ підграфік функції $f(x)$ на проміжку $[a; x]$ вироджується у відрізок, площа якого дорівнює 0. Маємо: $0 = F(a) + C$, звідки $C = -F(a)$. Отже, $S(x) = F(x) - F(a)$. \square

Якщо в знайдену рівність підставимо значення $x = b$, то матимемо рівність, яку треба було довести: площа S підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює $F(b) - F(a)$.

Значення різниці $F(b) - F(a)$ доводиться обчислювати досить часто, тому для зручності її записують ще й так:

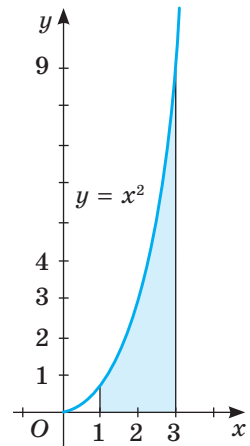
$$S = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад. Знайдіть площу підграфіка функції x^2 на проміжку $[1; 3]$.

Розв'язання. Для функції x^2 первісною є $\frac{x^3}{3}$ (мал. 27).

$$\text{Тому шукана площа } S = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = 8 \frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

Строге доведення теореми про площу підграфіка функції досить складне. Але воно варте уваги, адже в ньому — найбільше відкриття XVII ст. Детальніше про це йтиметься далі.



Мал. 27

Перевірте себе

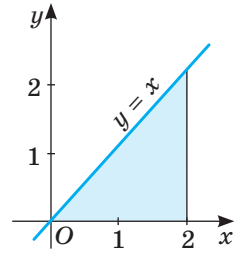
- 1 Що називають підграфіком функції? Як його називають інакше?
- 2 Сформулюйте теорему про площу підграфіка функції.
- 3 Чим є підграфік функції $y = x$ на проміжку $[0; 1]$?
- 4 Чим є підграфік функції $y = 2$ на проміжку $[0; 2]$?

Виконаємо разом

- 1) Знайдіть площу підграфіка функції $y = x$ на проміжку $[0; 2]$.

Розв'язання. Для функції $y = x$ первісною на проміжку $[0; 2]$ є $\frac{x^2}{2}$. Тому $S = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2 - 0 = 2$. Інакше:

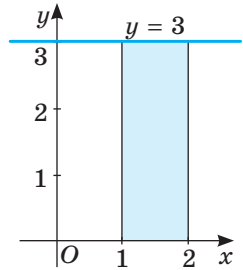
підграфік цієї функції — прямокутний трикутник з катетами 2 і 2 (мал. 28). Його площа $S = 0,5 \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (кв. од.).



Мал. 28

- 2) Знайдіть площу підграфіка функції $y = 3$ на проміжку $[1; 2]$.

Розв'язання. Підграфік цієї функції — прямокутник з вимірами 1 і 3 (мал. 29). Його площа $S = 1 \cdot 3 = 3$ (кв. од.).



Мал. 29

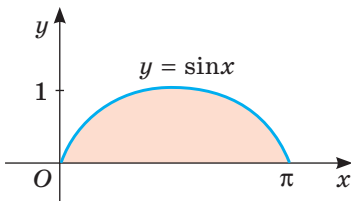
- 3) Знайдіть площу підграфіка функції $f(x) = \sin x$ на $[0; \pi]$.

Розв'язання. Первісною для функції $\sin x$ є $-\cos x$,

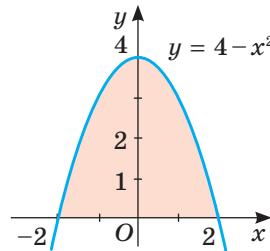
адже $(-\cos x)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$.

Тому шукана площа S (мал. 30) дорівнює:

$$S = -\cos x \Big|_0^\pi = 1 - (-1) = 2 \text{ (кв. од.)}$$



Мал. 30



Мал. 31

- 4) Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 4 - x^2$ і віссю абсцис.

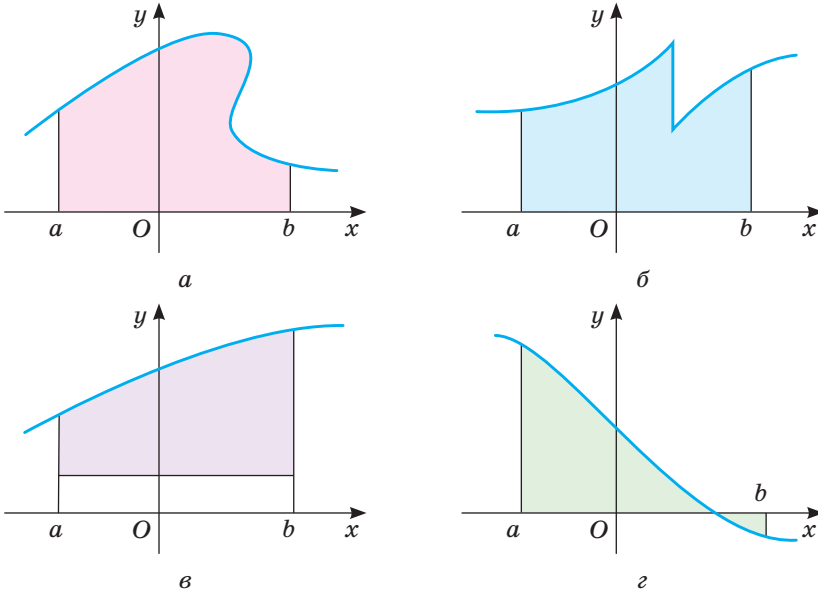
Розв'язання. Знайдемо абсциси точок перетину графіка даної функції з віссю абсцис (мал. 31). У цих точках ординати дорівнюють 0; $0 = 4 - x^2$, звідки $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$. Отже, треба знайти площу підграфіка функції

$y = 4 - x^2$ на проміжку $[-2; 2]$. Первісна для даної функції $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$.

Тому шукана площа $S = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 10 \frac{2}{3}$ (кв. од.).

Виконайте усно

238. Які із зафарбованих на малюнку 32 фігур є підграфіком функції $y = f(x)$?



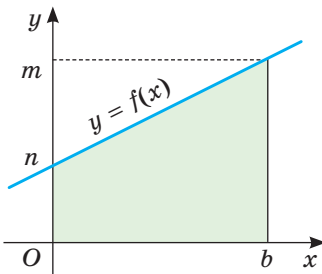
Мал. 32

239. Укажіть кілька способів знаходження площі фігури, зображеної на малюнку 33.

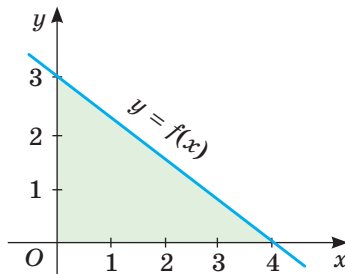
A

240. Дивлячись на малюнок 34, скажіть, чому дорівнює площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку: $[0; 4]$; $[2; 4]$; $[0; 2]$.

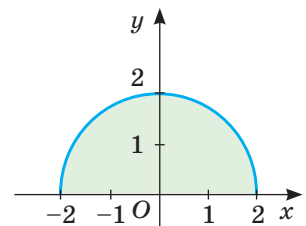
241. Дивлячись на малюнок 35, скажіть, чому дорівнює площа підграфіка функції $y = \sqrt{4 - x^2}$ на проміжку: $[-2; 2]$; $[0; 2]$.



Мал. 33



Мал. 34



Мал. 35

Зобразіть на малюнку підграфік функції (242–244).

242. а) $f(x) = x^2$ на $[1; 2]$;

б) $f(x) = 0,2x^3$ на $[0; 3]$.

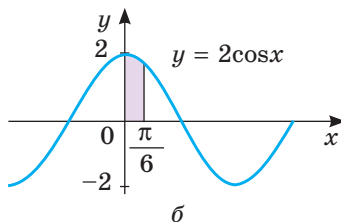
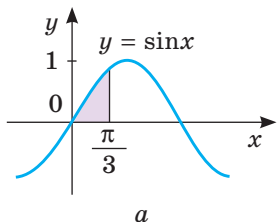
243. а) $f(x) = \sin x$ на $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$ на $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

244. а) $f(x) = x^2 + 1$ на $[-1; 2]$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0; 5]$.

- ☑ 245. (ЗНО, 2010, 2018). Обчисліть площу зафарбованої фігури, зображеної на малюнку 36.



Мал. 36

Знайдіть площу підграфіка функції (246–249).

246. а) $y = x^3$ на $[0; 2]$;

б) $y = x^3 + 1$ на $[0; 1]$.

247. а) $f(x) = x^2 + 3$ на $[-1; 1]$;

б) $f(x) = 5 - x^2$ на $[-1; 2]$.

248. а) $f(x) = x(x + 4)$ на $[0; 3]$;

б) $f(x) = (x - 1)^2$ на $[-2; 0]$.

249. а) $f(x) = \sin x$ на $[0; \pi]$;

б) $f(x) = 2\sin x$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

250. На малюнку 37 задано графік функції $y = 2 - x^3$. Установіть відповідність між графіками функції (1–4) та їх площами S (у кв. од.) (А–Д).

1 $y = 2 - x^3$ на $[-1; 0]$

А $S = 1,75$

2 $y = 2 - x^3$ на $[-1; 1]$

Б $S = 2,25$

3 $y = 2 - x^3$ на $[-2; -1]$

В $S = 3,25$

4 $y = 2 - x^3$ на $[0; 1]$

Г $S = 4$

Д $S = 5,75$

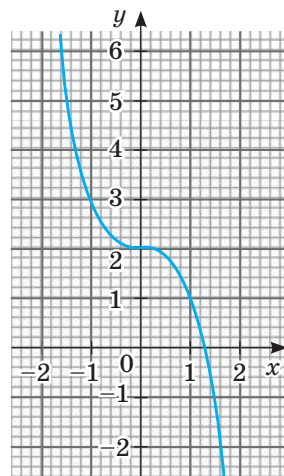
251. Знайдіть площу підграфіків, зображених вами для вправ 242–244.

Знайдіть площу підграфіка функції (252–254).

252. $f(x) = x^2 + 3$: а) на $[0; 2]$; б) на $[-2; 0]$.

253. $f(x) = \cos x$: а) на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

254. $f(x) = x^3 + 1$: а) на $[0; 2]$; б) на $[-1; 1]$.



Мал. 37

Б

Знайдіть площу підграфіка функції (255, 256).

255. $f(x) = 1 + 2\sin x$: а) на $[0; \pi]$; б) на $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

256. $f(x) = (x + 2)^4$: а) на $[-2; 0]$; б) на $[-1; 0]$.

257. Обчисліть двома способами площу підграфіка функції $y = 3 + \frac{x}{2}$ на проміжку $[2; 6]$.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (258–260).

258. а) $y = -(x - 1)^3$, $y = 0$ і $x = 0$;

б) $y = 1 + \frac{1}{2} \cos x$, $y = 0$; $x = -\frac{\pi}{2}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

259. а) $y = -\frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = -3$; б) $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

260. а) $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $y = e^x$; б) $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $y = e^{-x}$.

261. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 3 + 2x - x^2$ і віссю абсцис.

262. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 3 - 2x - x^2$ і віссю абсцис.

Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій (263–266).

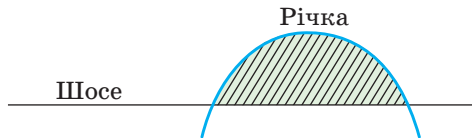
263. а) $y = x^3$, $y = 10 - x$, $y = 0$; б) $y = 2^x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 0$.

264. а) $y = -x^3$, $y = 5 + 4x$, $y = 0$; б) $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 4$.

265. а) $y = 4 - x^2$ і $y = x + 2$; б) $y = x^2$ і $y = 2x$.

266. а) $y = x^2$, $y = 6 - x$, $y = 0$; б) $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$.

- ✓ 267. (ЗНО, 2006). Річка тече лугом і двічі перетинає шосе, утворюючи криву $y = 3x - x^2$. Яка площа луку між шосе та річкою, якщо вважати, що лінія шосе збігається з віссю OX (мал. 38)? Одиниця довжини — 1 км.



Мал. 38

Вправи для повторення

268. Знайдіть похідну функції:

а) $y = \sin(1 + 3x)$;

в) $y = \sqrt{x^2 - x}$;

б) $y = xe^{-x}$;

г) $y = \cos 2x$.

269. Розв'яжіть рівняння:

а) $\lg^2 x - 3 \lg x + 2 = 0$;

б) $\ln(x + 3) + \ln 2 = 2 \ln x - \ln(x - 4)$.

270. У класі 40 учнів. З математики в першому семестрі четверо учнів отримали 12 балів, двоє — 10 балів, десятеро — 9 балів, п'ятеро — 7 балів, а решта — 6 балів. Побудуйте відповідні стовпчасту й секторну діаграми.

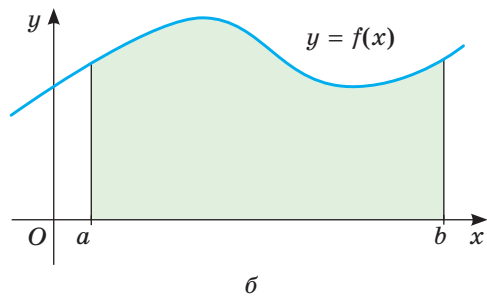
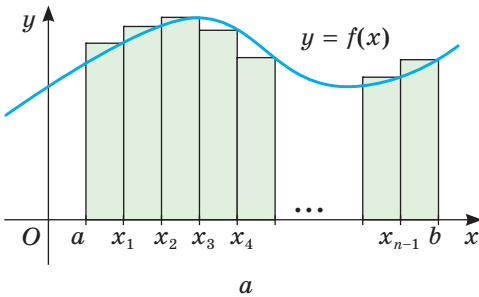
§ 7. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Розглянемо інший спосіб визначення площі підграфіка функції.

Нехай дано підграфік деякої функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ (мал. 39). Поділимо відрізок $[a; b]$ точками $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ на n рівних відрізків: $[a; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; b]$. Побудуємо на першому відрізку прямокутник висотою $f(x_1)$, на другому — прямокутник висотою $f(x_2)$ і т. д. Нарешті, на n -му відрізку побудуємо прямокутник висотою $f(b)$. Утвориться східчастий багатокутник, складений з n побудованих прямокутників (мал. 39, а). Якщо основа кожного такого прямокутника дорівнює Δx , то площа всього східчастого багатокутника

$$S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(b).$$

Суми вигляду $S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \dots + \Delta x \cdot f(b)$ називають **інтегральними сумами функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$** .



Мал. 39

Знайдену інтегральну суму можна вважати наближеним значенням площі S підграфіка функції $f(x)$ на $[a; b]$. Якщо число n прямує до нескінченності, то S_n прямує до точного значення S площі підграфіка даної функції (мал. 39, б). Пишуть:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Не лише задачі про знаходження площ підграфіків, але й багато інших досить цікавих і важливих прикладних задач зводяться до обчислення границь подібних інтегральних сум. Тому для цього поняття ввели спеціальну назву та позначення. Границю такої інтегральної суми S_n функції $f(x)$ на $[a; b]$ при необмеженому збільшенні числа n називають *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ від a до b . Її позначають символом $\int_a^b f(x) dx$ (читають: інтеграл від a до b еф від ікс де ікс). Тут a і b — *межі інтегрування*, \int — *знак інтеграла*, $f(x)$ — *підінтегральна функція*, x — *змінна інтегрування*. Отже,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(b)) = \int_a^b f(x) dx.$$

Із цього випливає, що площею підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ є $\int_a^b f(x) dx$. Оскільки вона дорівнює також $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, то $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.



$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Це — **формула Ньютона—Лейбніца**, її називають ще **основною формулою математичного аналізу**.

Ця формула дає змогу розв'язувати багато важливих задач не обчисленням границь інтегральних сум, що досить важко, а за допомогою первісної.

Раціоналізувати обчислення часто допомагає така *властивість інтеграла*:

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

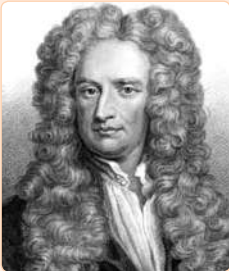
Справедливість цієї формули впливає з таких перетворень:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) - g(x)) dx &= (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)) = \\ &= (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$



Готфрід Вільгельм Лейбніц
(1646–1716)

Видатний німецький математик, фізик, філософ, організатор наукових установ. Разом з Ньютоном поділяє славу відкриття диференціального та інтегрального числень. Увів багато загальноновживаних тепер математичних алгоритмів, термінів і символів.



Ісаак Ньютон
(1643–1727)

Видатний англійський фізик, астроном, математик. Сформулював основні закони механіки, закон всесвітнього тяжіння. Незалежно від Лейбніца започаткував математичний аналіз.

У вивченні наук приклади корисніші від правил.

І. Ньютон

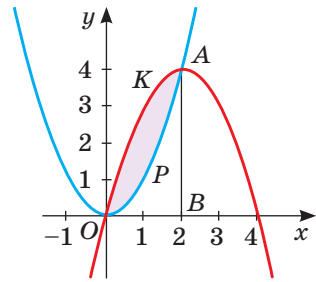
Ньютон був найвидатніший геній з усіх, що будь-коли існували.

Ж. Лагранж

Приклад. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$.

Розв'язання. Побудуємо графіки даних функцій (мал. 40). Треба знайти площу зафарбованої фігури. Вона дорівнює різниці площ підграфіків *ОВАК* і *ОВАР*.

Межі інтегрування — абсциси точок O і A , у яких перетинаються графіки функцій, тобто значення x , що задовольняють систему рівнянь $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$. Із цієї системи випливає рівняння $x^2 = 4x - x^2$, коренями якого є: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$. Отже, шукана площа



Мал. 40

$$S \int_0^2 (4x - x^2) dx - \int_0^2 x^2 dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = 8 - 5\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $2\frac{2}{3}$ (кв. од.).

Зауваження. Прочитавши цей параграф, ви дізналися, що називають *визначеним інтегралом*. У повніших курсах математичного аналізу розглядається ще й *невизначений інтеграл* $\int f(x) dx$, яким вважають загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$:

$$\text{якщо } F'(x) = f(x), \text{ то } \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Ось чому операцію знаходження первісної називають також інтегруванням.

Перевірте себе

- 1 Що називають інтегральною сумою? Наведіть приклад.
- 2 Що називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ від a до b ?
- 3 Як читають вираз $\int_a^b f(x) dx$? Назвіть його складові частини.
- 4 Дайте визначення формули Ньютона—Лейбніца.
- 5 Яке відкриття XVII ст. вважають найважливішим?

Виконаємо разом

- 1) Обчисліть: а) $\int_0^1 (x^2 + 2x) dx$; б) $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$.

Розв'язання. а) Первісною для функції $f(x) = x^2$ є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$, а для функції $f(x) = 2x$ — функція $F(x) = x^2$. Отже,

$$\int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 2x dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 + 1 - 0 = 1 \frac{1}{3}.$$

б) Первісною для функції $f(x) = \sin x$ є функція $F(x) = -\cos x$,

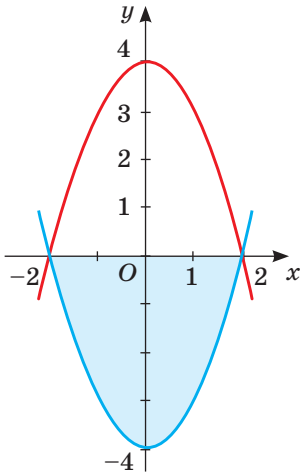
а для $f(x) = \sin 2x$ — функція $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$. Тому

$$\int_0^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2} \cos 2\pi - \left(-\frac{1}{2} \cos 0\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

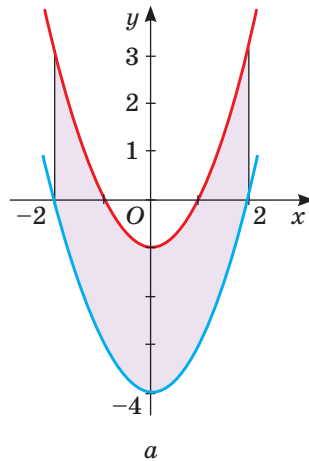
2) Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 4$ і $y = 0$.

Розв'язання. Фігура, про яку йдеться в задачі, розміщена нижче від осі x (мал. 41), тому не відповідає означенню підграфіка функції. Проте вона симетрична відносно осі x підграфіку функції $y = 4 - x^2$ на проміжку $[-2; 2]$. Площі цих фігур рівні, тому

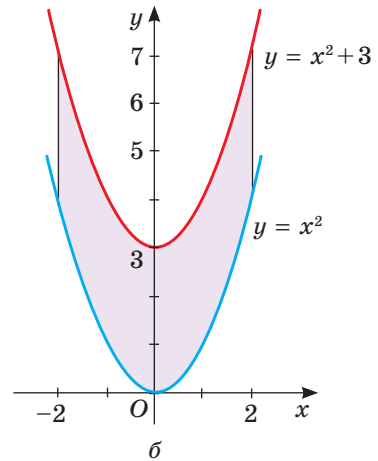
$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 10 \frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}.$$



Мал. 41



а



б

Мал. 42

3) Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 - 4$, $y = x^2 - 1$, $x = -2$, $x = 2$.

Розв'язання. Ця фігура розміщена по різні боки від осі x (мал. 42, а). Перенесемо її паралельно на 4 одиниці в напрямі осі y (мал. 42, б). Утворена фігура обмежена лініями: $y = x^2$, $y = x^2 + 3$, $x = -2$, $x = 2$. Її площа, а отже, і площа даної фігури

$$S = \int_{-2}^2 (x^2 + 3) dx - \int_{-2}^2 x^2 dx = \int_{-2}^2 3 dx = 3x \Big|_{-2}^2 = 12 \text{ (кв. од.)}.$$

Виконайте усно

271. Відомо, що $\int_0^1 f(x) dx = 5$, $\int_1^3 f(x) dx = 5$. Знайдіть:

а) $\int_0^1 3f(x) dx$;

б) $\int_0^3 f(x) dx$;

в) $\int_0^3 0,5f(x) dx$.

272. Відомо, що $\int_{-1}^1 f(x) dx = a$, $\int_{-1}^1 g(x) dx = b$. Знайдіть:

а) $\int_{-1}^1 2f(x) dx$;

б) $\int_{-1}^1 (f(x) + g(x)) dx$;

в) $\int_{-1}^1 5g(x) dx$.

A

273. Обчисліть:

а) $\int_0^1 x dx$;

в) $\int_0^1 x^2 dx$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$;

е) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;

б) $\int_{-1}^1 x dx$;

г) $\int_{-1}^1 x^2 dx$;

д) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$;

е) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$.

274. Використовуючи малюнок 43, порівняйте числа a і b , якщо: $a = \int_1^3 f(x) dx$, $b = \int_1^3 g(x) dx$.

275. Не обчислюючи інтеграл, порівняйте його з нулем:

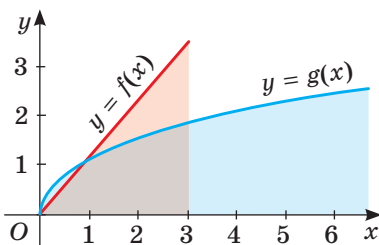
а) $\int_0^1 0,5x dx$;

б) $\int_{-1}^0 x dx$;

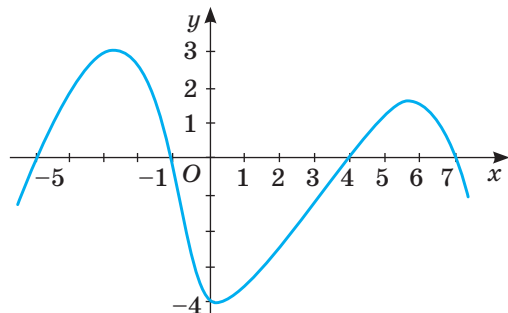
в) $\int_0^1 (1-x^2) dx$;

г) $\int_{-\pi}^0 \sin x dx$.

276. На малюнку 44 подано графік функції $y = f(x)$. Запишіть числа a , b і c в порядку зростання, якщо: $a = \int_{-5}^{-1} f(x) dx$, $b = \int_{-1}^4 f(x) dx$, $c = \int_4^7 f(x) dx$.



Мал. 43



Мал. 44

✓ 277. (ЗНО, 2016). Використовуючи формулу Ньютона—Лейбніца, обчисліть

$$\int_1^2 6x^2 dx.$$

| А | Б | В | Г | Д |
|----|----|----|----|----|
| 12 | 14 | 18 | 22 | 42 |

Обчисліть інтеграл (278–281).

278. а) $\int_0^1 2x dx;$

б) $\int_{-1}^2 x^2 dx;$

в) $\int_0^{1,5} 3x^3 dx.$

279. а) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx;$

б) $\int_0^{\pi} \sin x dx;$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

280. а) $\int_0^2 \frac{x^3}{6} dx;$

б) $\int_{-1}^1 (4-x^2) dx;$

в) $\int_{-2}^0 (3x^2+1) dx.$

281. а) $\int_0^1 e^x dx;$

б) $\int_0^1 2^x dx;$

в) $\int_1^e 2x^{-1} dx.$

Користуючись формулою Ньютона—Лейбніца, знайдіть площу підграфіка функції (282–284).

282. а) $f(x) = x$ на $[1; 2];$

в) $f(x) = x^3 + 1$ на $[-1; 1];$

б) $f(x) = \cos x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right];$

г) $f(x) = 2\sin x$ на $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right].$

283. а) $f(x) = x^3$ на $[1; 2];$

в) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на $[1; 9];$

б) $f(x) = \cos 2x$ на $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right];$

г) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right].$

284. а) $y = 2e^x$ на $[0; 1];$

в) $y = \frac{4}{x} + 3$ на $[2; 6];$

б) $y = 2^x$ на $[-1; 2];$

г) $y = 4 - \frac{1}{x}$ на $[-6; -3].$

Б

Обчисліть (285–288).

285. а) $\int_0^2 \frac{dx}{3x+1};$

б) $\int_0^1 (1+\sqrt[3]{x}) dx;$

в) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx.$

286. а) $\int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{3} dx;$

б) $\int_{-3}^{-1} (2+x)^2 dx;$

в) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}.$

287. а) $\int_1^2 \frac{x^3+3x^2+1}{x} dx;$

б) $\int_1^3 \frac{x^2+4x+4}{x+2} dx;$

в) $\int_0^1 \frac{2x+3}{2x+1} dx.$

288. а) $\int_0^{\pi} \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$; б) $\int_0^{\pi} 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx$; в) $\int_0^{\pi} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$.

289. (ЗНО, 2012). Обчисліть $\int_2^3 \frac{x^9 - 1}{x^6 + x^3 + 1} dx$.

290. Доведіть рівність:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

291. На малюнку 45 задано графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$. Установіть відповідність між інтегралами (1–4) та багатокутниками (А–Д), площі яких визначаються заданими інтегралами.

1 $\int_{-3}^3 f(x) dx$

3 $\int_0^3 f(x) dx$

А Трикутник OMH

Б Трапеція $OBCH$

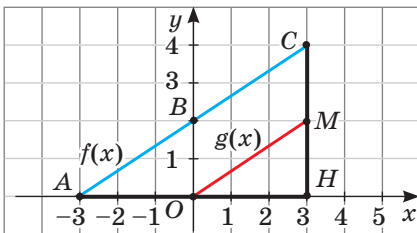
В Паралелограм $OBCH$

Г Трапеція $OACM$

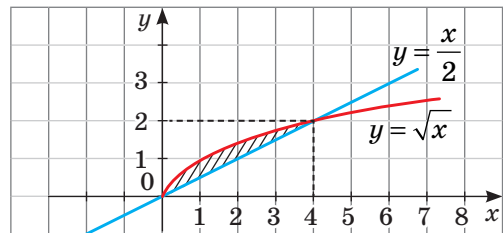
Д Трикутник ACH

2 $\int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$

4 $\int_0^3 g(x) dx$



Мал. 45



Мал. 46

292. (ЗНО, 2008). На малюнку 46 зображено графіки функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = \frac{x}{2}$. Укажіть формулу для обчислення площі заштрихованої фігури.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2} \right) dx$ | $\int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx$ | $\int_4^0 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx$ | $\int_4^0 \left(\frac{x}{2} + \sqrt{x} \right) dx$ | $\int_0^4 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} \right) dx$ |

293. (ЗНО, 2009). Задано функції $f(x) = x^2 + 1$ і $g(x) = 7 - x$.

1. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій $f(x)$ і $g(x)$. У прямокутній системі координат зобразіть фігуру, обмежену цими графіками.

2. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $f(x)$ і $g(x)$.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (294–296).

294. а) $y = x^2$ і $y = 2x$;

в) $y = 6 + x - x^2$ і $y = 6 - 2x$;

б) $y = x^2$ і $y = 2$;

г) $y = 4x + x^2$ і $y = 4 + x$.

295. а) $y = 4x - x^2$ і $y = 4 - x$; в) $y = x^3$, $y = 8$ і $x = 1$;
 б) $y = x^3$ і $y = x$; г) $y = 2x - x^2$ і $y = x^2$.
296. а) $y = 0,5^x$, $y = 1$, $x = -2$; в) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = e$;
 б) $y = 3^{-x}$, $y = 3$, $x = 1$; г) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = x^{-1}$, $x = 0,5$.
297. Чи при кожному дійсному $t > 1$ справджується рівність $\int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln t$?
 Проілюструйте її геометрично.
298. Доведіть: якщо при кожному $x \in [a; b]$ $f(x) > g(x)$, то фігура, обмежена лініями $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$, $y = g(x)$, має площу $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.
299. Доведіть, що:
- а) $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx$;
 б) $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ для кожного $k > 0$;
 в) $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ для $a < c < b$.
300. (ЗНО, 2017). Обчисліть інтеграл $\int_0^2 (f(x) + 6) dx$, якщо $\int_0^2 f(x) dx = 8$.

| А | Б | В | Г | Д |
|----|----|---|----|---|
| 20 | 14 | 2 | 28 | 8 |

301. Доведіть, що площа фігури 1 дорівнює площі фігури 2 (мал. 47).

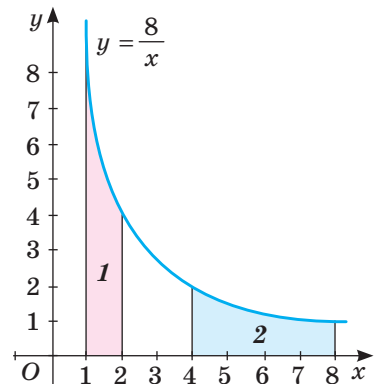
Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (302, 303).

302. $y = x^2 + 4x$, $y = x^2 + 4x + 3$, $x = -2$, $x = 0$.

303. $y = x^2 - 4x$, $y = x^2 - 4x + 3$, $x = 0$, $x = 4$.

Вправи для повторення

304. Знайдіть первісну функції:
 а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; б) $y = e^{-x} + x$.
305. Розв'яжіть рівняння:
 а) $0,5^{x^2-3x+2} = 1$;
 б) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$;
 в) $2^{x-1} - 3^x = 3^{x+1} - 2^{x+2}$.
306. Родина отримала нове житло у 100-квартирному будинку. Яка ймовірність того, що номер нової квартири не буде містити цифру 5?



Мал. 47

§ 8. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

За допомогою інтегралів можна визначати не тільки площі фігур, а й багато інших величин, наближені значення яких виражаються інтегральними сумами, тобто сумами виду $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n)$. Такі суми коротко позначають $\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$. Підграфік функції $f(x)$ — математична модель кожної такої величини, тому обчислювати границі цих сум також можна за формулою Ньютона—Лейбніца. Розглянемо три приклади таких задач.

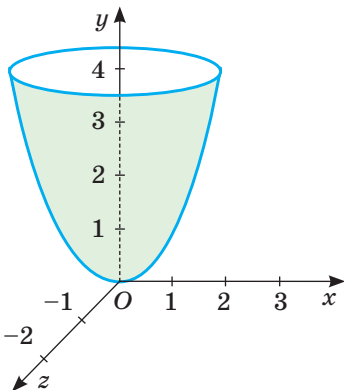
Об'єм тіла обертання. Кожне тіло обертання можна уявити складеним з дуже великої кількості круглих пластинок чи циліндрів з малими висотами Δx (мал. 48).

Радіус кожного такого циліндра залежить від змінної x і дорівнює $f(x)$. Об'єм одного циліндрика, що відповідає змінній x , дорівнює $\pi f^2(x) \Delta x$. Усьому тілу обертання відповідає інтегральна сума $\pi f^2(x_1) \Delta x + \pi f^2(x_2) \Delta x + \dots + \pi f^2(x_n) \Delta x$.

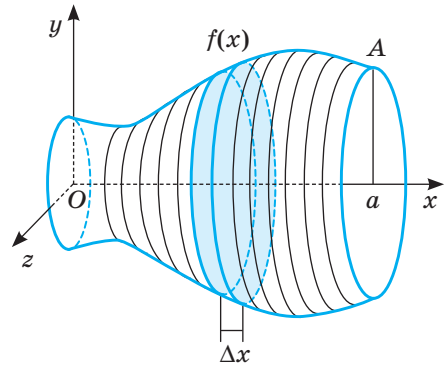
Отже, його об'єм $V = \int_0^a \pi f^2(x) dx$ або

$$V = \pi \int_0^a f^2(x) dx.$$

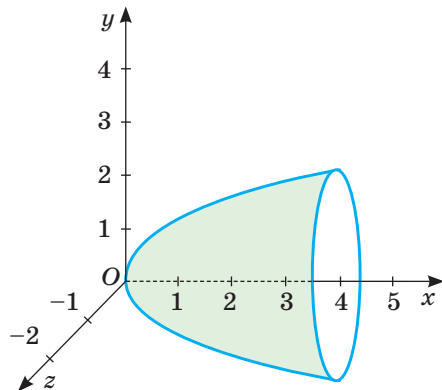
Приклад. Нехай треба знайти місткість посудини заввишки 4 дм, осьовий переріз якої — графік функції $y = x^2$ (мал. 49).



Мал. 49



Мал. 48



Мал. 50

Для невід'ємних значень x графік такої функції симетричний відносно бісектриси першого координатного кута графіка функції $y = \sqrt{x}$. Тому шуканий об'єм посудини дорівнює об'єму тіла, утвореного обертанням підграфіка функції $y = \sqrt{x}$ на проміжку $[0; 4]$ навколо осі x (мал. 50).

$$\text{Отже, шуканий об'єм } V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi \text{ (дм}^3\text{)}.$$

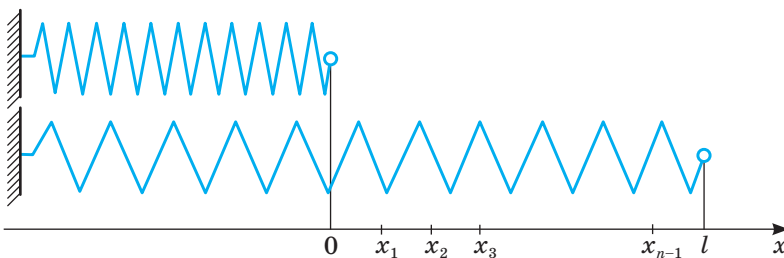
За допомогою визначених інтегралів можна обчислити об'єми не лише тіл обертання, але й багатьох інших тіл — пірамід, зрізаних пірамід тощо.

Робота змінної сили. Якщо внаслідок дії сталої сили F тіло переміщується в напрямі сили на відстань s , то виконується робота $A = Fs$. А якщо на тіло діє сила не стала, а змінна?

Приклад. Щоб розтягнути пружину на 1 см, на 2 см і т. д., треба прикладати дедалі більшу й більшу силу. Згідно із законом Гука, сила $f(x)$, яку треба прикласти, щоб розтягнути пружину на відстань x , пропорційна цій відстані (для допустимих значень x), тобто $f(x) = kx$. Коефіцієнт k різний для різних пружин. Наприклад, якщо для розтягнення пружини на 1 м треба прикласти силу в 50 Н, то $k = 50$.

Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути таку пружину на відстань $l = 2$ м?

Поділимо відрізок $[0; l]$, на який розтягується пружина, точками $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ на n рівних частин (мал. 51). Нехай $l = x_n$, а Δx — довжина кожної частини. Щоб розтягнути пружину на відстань $[0; x_1]$, тобто перемістити її кінець з точки 0 в x_1 , треба прикласти силу $f(x_1)$. У цьому разі виконана робота наближено дорівнюватиме $\Delta x \cdot f(x_1)$. Щоб розтягнути пружину на відстань $[x_1, x_2]$, треба прикласти силу $f(x_2)$ та виконати роботу, яка приблизно дорівнює $\Delta x \cdot f(x_2)$ і т. д. Отже, щоб розтягнути пружину на відстань $[0; l]$, треба виконати роботу, значення якої приблизно дорівнює інтегральній сумі $A_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n)$.



Мал. 51

Значення A_n зі збільшенням n (і відповідним зменшенням Δx) дедалі менше відрізнятиметься від точного значення шуканої роботи A , тобто

$$\text{якщо } n \rightarrow \infty, \text{ то } A_n \rightarrow A. \text{ Отже, } A = \int_0^l f(x) dx = \int_0^l kx dx = \frac{1}{2} kl^2.$$

Якщо $k = 50$, $l = 2$ м, то $A = 100$ Дж.

Економічний зміст інтеграла. Нехай функція $y = f(x)$ описує зміну продуктивності деякого підприємства протягом певного часу. Знайдемо обсяг продукції U , виробленої за проміжок часу $[0; T]$.

Зазначимо, що коли продуктивність не змінюється протягом часу ($f(t)$ — стала функція), то обсяг продукції ΔU , виробленої за деякий проміжок часу $[t; t + \Delta t]$ визначається формулою $\Delta U = f(t)\Delta t$. У загальному випадку справедлива наближена рівність $\Delta U \approx f(t)\Delta t$, де $t \in [t; t + \Delta t]$, яка буде тим точніша, чим менше Δt .

Поділимо відрізок $[0; T]$ на n рівних частин точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Для обсягу продукції ΔU_k , виробленої за проміжок часу $\Delta t = [t_{k-1}; t_k]$, маємо: $\Delta U_k \approx f(t_k)\Delta t$, де $t_k \in [t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Отже,

$$U \approx \sum_{k=1}^n \Delta U_k = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta t.$$

Якщо $\Delta t \rightarrow 0$, то кожна з використаних наближених рівностей стає точнішою, отже,

$$U = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta t.$$

Якщо $f(t)$ — продуктивність праці в момент часу t , то обсяг виробленої продукції за проміжок $[0; T]$ можна обчислити за формулою

$$U = \int_0^T f(t) dt.$$

Перевірте себе

- 1 Які застосування інтегралів ви знаєте?
- 2 Як за допомогою інтеграла визначити об'єм тіла обертання?
- 3 Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на l м?
- 4 Яким є економічний зміст інтеграла?

Виконаємо разом

- 1) Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни визначається формулою $f(t) = -2,53t^2 + 24,75t + 111,1$, де t — робочий час у годинах. Визначте обсяг продукції, виготовленої за 5 робочих годин.

Розв'язання. Обсяг випуску продукції протягом зміни є первісною від функції, що виражає продуктивність праці. Тому

$$U = \int_0^5 f(t) dx = \int_0^5 (-2,53t^2 + 24,75t + 111,1) dt =$$

$$= \left(-\frac{2,53t^3}{3} + \frac{24,75t^2}{2} + 111,1t \right) \Big|_0^5 = -\frac{2,53 \cdot 125}{3} + \frac{24,75 \cdot 25}{2} + 111,1 \cdot 5 =$$

$$= -\frac{316,25}{3} + \frac{618,75}{2} + 555,5 \approx 759 \text{ (од.)}.$$

- 2) Точка рухається прямолінійно зі змінною швидкістю $v = 10t$ м/с; за перші 4 с вона пройшла 80 м. Знайдіть закон руху точки.

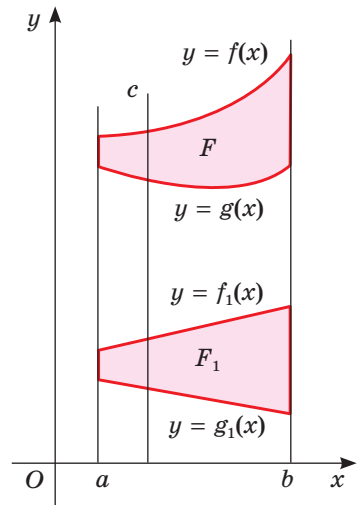
Розв'язання. Шуканий закон руху виражається такою функцією $s = s(t)$, що $s'(t) = 10t$. Тут $s(t)$ — первісна для функції $v = 10t$. Загальний вигляд таких первісних — $s(t) = 5t^2 + C$. Оскільки за 4 с точка пройшла 80 м, то $80 = 5 \cdot 16 + C$, звідки $C = 0$. Шуканий закон руху точки $s(t) = 5t^2$, де t — час у секундах, $s(t)$ — відстань у метрах.

- 3) Доведіть твердження Кавальєрі. Якщо дві фігури можна розмістити на площині так, що кожна січна, паралельна даній прямій, перетинаючи одну з них, перетинає і другу по відрізку такої самої довжини, то площі цих фігур рівні.

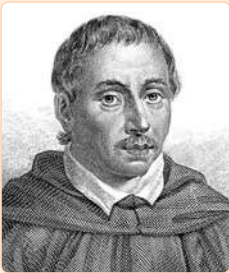
Розв'язання. Нехай фігуру F обмежують лінії $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ і $y = g(x)$, а фігуру F_1 — лінії $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ і $y = g_1(x)$ (мал. 52). Якщо кожна січна c , паралельна осі y , перетинає фігури F і F_1 по відрізках рівної довжини, то $f(x) - g(x) = f_1(x) - g_1(x)$ для кожного $x \in [a; b]$. Тоді

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x)) dx,$$

тобто площі фігур F і F_1 рівні.



Мал. 52



Бонавентура Кавальєрі (1598–1647)

Італійський математик, викладач Болонського університету, автор «Геометрії», у якій викладено метод неподільних. Умів розв'язувати задачі, які тепер розв'язують, обчислюючи інтеграли $\int_a^b x^n dx$

при натуральних $n < 10$. Інші його праці: «Сто різних задач...», «Тригонометрія плоска і сферична, лінійна й логарифмічна».

А

Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої заданими лініями (307–309).

307. $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

308. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.

309. $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$.

310. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої дугою кола $x^2 + y^2 = 16$, яка лежить у першій чверті, та прямими $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

Тіло рухається зі швидкістю $v(x)$. Знайдіть шлях (у м), пройдений тілом за проміжок часу (у с) від t_1 до t_2 (311–313).

311. $v(t) = 3t + 2t^2$, $t_1 = 0$, $t_2 = 6$.

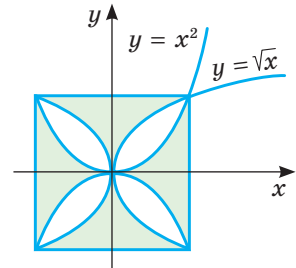
312. $v(t) = 10t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.

313. $v(t) = 3t^2 - 2t + 3$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$.



314. Продуктивність праці робітника протягом дня визначається функцією $z(t) = -0,00645t^2 + 0,05t + 0,5$ (грош. од./год), де t — час у годинах від початку роботи, $0 \leq t \leq 8$. Знайдіть обсяг продукції (у грошових одиницях), виготовленої за робочий день.

315. Знайдіть площу зафарбованої частини фігури, зображеної на малюнку 53.



Мал. 53

Б

Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої заданими лініями (316, 317).

316. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

317. $y^2 - 4x = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $y = 0$.

318. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 1 Н розтягує її на 1 см?

319. Для стиснення пружини на 1 см треба прикласти силу 9,8 Н. Яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину на 4 см?

320. Швидкість матеріальної точки змінюється за законом $y = v(t)$ (у м/с). Установіть відповідність між законом швидкості (1–4), з якою рухалася точка, і шляхом (А–Д), пройденим даною точкою за перші 2 секунди.

1 $v(t) = 1 + 4t$

А 2 м

2 $v(t) = 2t$

Б 8 м

3 $v(t) = 1$

В 4 м

4 $v(t) = 3t^2$

Г 6 м

Д 10 м

321. Для кращого обслуговування заїзду гонок серії «Формула-1» майстри визначили найкращий закон зміни швидкості руху автомобіля прямою

трасою: $v(t) = 2(t + 2)^{2,5}$. Який шлях проїде пілот цієї гонки з 2-ї до 7-ї секунди від початку руху?

- 322.** Знайдіть шлях, який пройде тіло від початку руху до зупинки, якщо його швидкість $v(t) = 18t - 6t^2$.
- 323.** Швидкість руху тіла $v(t)$ з часом t змінюється за законом $v = 20 - 3t$ (м/с). Знайдіть шлях, який пройшло тіло за 4-ту секунду свого руху.
- 324.** Сила струму в провіднику з часом змінюється за законом $I(t) = 4 + 2t$. Яка кількість електрики пройде через поперечний переріз провідника за час від 2-ї до 6-ї секунди?

Вправи для повторення

- 325.** Скільки різних трицифрових чисел можна скласти із цифр 0; 1; 2 так, щоб цифри не повторювалися? А із цифр 1; 2; 3?
- 326.** Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії з першим членом 4,5 і знаменником 0,75.
- 327.** Спростіть вираз: а) $3^{\log_3(1-2x)}$; б) $7^{\log_7(y+1)}$; в) $9^{\log_9 x}$; г) $7^{2\log_7(y-1)}$.

Самостійна робота 2

ВАРІАНТ 1

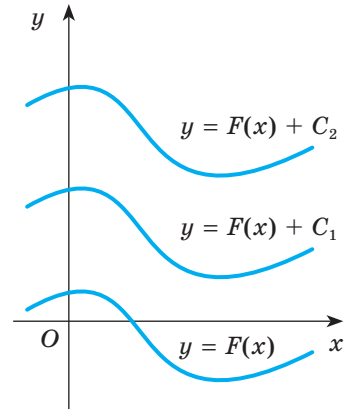
- 1** Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:
а) $(x) = x^4 - 3x$; б) $f(x) = \cos x$.
- 2** Знайдіть для функції $f(x) = 3x^2 - 2$ таку первісну, графік якої проходить через точку (0; 2).
- 3** Намалюйте підграфік функції $f(x) = x^3$ на проміжку [0; 2] та знайдіть його площу.
- 4** Обчисліть інтеграл $\int_1^2 3x^3 dx$.

ВАРІАНТ 2

- 1** Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:
а) $f(x) = x^5 + 2x$; б) $f(x) = \sin x$.
- 2** Знайдіть для функції $f(x) = 2x + 3$ таку первісну, графік якої проходить через точку (0; 1).
- 3** Намалюйте підграфік функції $f(x) = x^2$ на проміжку [0; 3] та знайдіть його площу.
- 4** Обчисліть інтеграл $\int_0^3 4x^2 dx$.

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

- ✓ Знаю, що функцію $F(x)$ називають *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку I , якщо для кожного значення x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.
- ✓ Знаю, що кожна первісна для функції $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$, де $F(x)$ — одна із цих первісних, а C — довільне число. Графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ такі, що їх можна сумістити паралельним перенесенням уздовж осі ординат.
- ✓ Знаю, що операцію знаходження первісних називають *інтегруванням* функції. Ця операція обернена до диференціювання.
- ✓ За формулами, вказаними в таблиці, умію знаходити первісні та невідзначені інтеграли функції $f(x)$.



| | | | | | |
|--------------|---------------|-------------------------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Дана функція | k (стала) | $x^\alpha, \alpha \neq -1$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | e^x |
| Її первісна | $kx + C$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | $\ln x + C$ | $2\sqrt{x} + C$ | $e^x + C$ |
| Дана функція | $\sin x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\frac{1}{\sin^2 x}$ | a^x |
| Її первісна | $-\cos x + C$ | $\sin x + C$ | $\operatorname{tg} x + C$ | $-\operatorname{ctg} x + C$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |

- ✓ Знаю і вмію використовувати правила інтегрування, які полегшують знаходження первісних.
 - Якщо $F(x)$ і $G(x)$ — первісні для функції $f(x)$ і $g(x)$, то:
 - $F(x) + G(x)$ — первісна для $f(x) + g(x)$.
 - Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, а $k \neq 0$, b — стала, то:
 - $kF(x)$ — первісна для функції $kf(x)$;
 - $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.
- ✓ Знаю, що площа криволінійної трапеції, утвореної графіком функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$, дорівнює $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на $[a; b]$.
- ✓ Знаю і вмію використовувати основну формулу математичного аналізу.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ — формула Ньютона—Лейбніца.}$$

Історичні відомості

Введенню поняття інтеграла передувала робота багатьох математиків. Зокрема, Архімед ще в III ст. до н. е. розробив методи для обчислення площ і об'ємів геометричних фігур, які досить схожі з методами інтегрального числення. Він розв'язував такі задачі, які тепер розв'язують, обчислюючи інтеграли

$$\int_0^a x dx, \int_0^a x^2 dx, \int_0^a (x^2 + bx) dx, \int_0^a \sin \phi d\phi.$$

Подібними методами користувався також Й. Кеплер (1571–1630). Вважаючи, що кожне тіло обертання складається з безлічі «найтонших кружечків», він визначив об'єми 92 таких тіл.

Ще далі пішов італійський математик Б. Кавальєрі. Уявляючи кожен фігуру складеною з «неподільних» (плоска фігура з відрізків, а тіло — з плоских фігур), він сформулював свої принципи. Аналогічне твердження правильне і для об'ємів тіл. Сам Кавальєрі вважав ці твердження очевидними та приймав їх без доведення, як принципи (лат. *principium* — початок, основа, те саме, що й аксіома). Методами сучасної математики їх можна довести як теореми.

Взагалі питання диференціального й інтегрального числення були сферою багатьох провідних математиків ще задовго до Ньютона та Лейбніца, але всі вони ці дві частини математичної науки розглядали ізольовано одна від одної. Тому ті задачі, які за допомогою формули Ньютона—Лейбніца можна розв'язати в один рядок, вони розв'язували досить громіздкими штучними методами, а багато задач і не могли розв'язати. Основна заслуга Ньютона та Лейбніца в тому, що вони пов'язали диференціальне числення з інтегральним, створивши найважливішу науку — математичний аналіз. Їх відкриття дало математикам і прикладникам найзручніший метод розв'язування великого класу важливих задач і створило передумови для багатьох нових відкриттів. Спеціалісти вважають відкриття математичного аналізу найбільшим у XVII ст. відкриттям людства.

Ось що писали про відкриття математичного аналізу люди різних переконань, національностей і епох.

«З усіх теоретичних успіхів знання навряд чи який-небудь вважається таким великим тріумфом людського духу, як винайдення числення нескінченно малих у другій половині XVII століття» (Ф. Енгельс).

«Аналіз нескінченно малих, безперечно, стоїть поряд з найвидатнішими завоюваннями людської культури» (О. Хінчин).

З українських учених найбільше зробили для розвитку математичного аналізу Михайло Васильович Остроградський (1801–1862) і Віктор Якович Буняковський (1804–1889). Обидва народилися в Україні, навчалися в Парижі, працювали в Петербурзі й були найвідомішими математиками Російської імперії XIX ст. Зокрема, М. Остроградський розробив загальний метод інтегрування раціональних функцій, обґрунтував відомі тепер математикам усього світу правило Остроградського та формулу Остроградського.

Історичні відомості

Михайло Остроградський

Талантами багата Україна.
 Хай навіть відбиваючись від орд,
 Долаючи неволю і руїни,
 Все ж геніїв народжує народ.
 Один із них — Михайло Остроградський —
 Великий тілом, духом і умом,
 Найперший вчений у Краю Козацькім,
 Властитель теорем і аксіом.
 Нью-йоркський академік і туринський,
 Паризький, римський — між усіх широт
 Відомий математик український,
 Славетний український патріот.
 Ген-ген аж де від батьківської хати
 Полтавець за морями побував,
 Чужому навчався плідно і багато,
 А мови й земляків не забував.
 Як брата, обіймав він Кобзаря Тараса,
 З ним — українства молодий порив;
 Науку вивів на найвищу трасу,
 Потрібне, вічне і святе творив.
 Чудовий дав інтегрування метод —
 На всі часи, для всіх земель і рас;
 Явився, наче ясно сяюча комета,
 Що за віки являється лиш раз.
 Його творіння в світі добре знані:
 Десятки теорем, і формул, і думки...
 Давно немає генія між нами,
 Та в пам'яті він буде навіки!

В. Буняковський, крім іншого, перший довів нерівність

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x) dx,$$

яку тепер називають нерівністю Буняковського.

У ХХ ст. в галузі математичного аналізу успішно працювали наші провідні математики С. Н. Бернштейн (1880–1963), М. П. Кравчук (1892–1942) та ін.

ТЕМАТИЧНІ ТЕСТИ

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 1–12 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

- 1 Яка з функцій є первісною функції $f(x) = 3^x$?

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------------------|--------------------|--------------|------------------------------|------------------|
| $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3}$ | $F(x) = 3^x \ln 3$ | $F(x) = 3^x$ | $F(x) = \frac{3^{x+1}}{x+1}$ | $F(x) = 3^x + 1$ |

- 2 Укажіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \cos 5x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------------|------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------|
| $F(x) = \sin 5x + C$ | $F(x) = 5 \sin 5x + C$ | $F(x) = \frac{1}{5} \sin 5x + C$ | $F(x) = -\frac{1}{5} \sin 5x + C$ | $F(x) = -5 \sin 5x + C$ |

- 3 Укажіть первісну функції $f(x) = 8x^3$, графік якої проходить через точку $A(1; 2)$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------|----------------|-------------------|------------------|-------------------|
| $F(x) = 2x^4$ | $F(x) = 24x^2$ | $F(x) = 2x^4 - 1$ | $F(x) = x^4 + 1$ | $F(x) = 2x^4 - 2$ |

- 4 Укажіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \frac{4}{x^5}$.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|------------------------|
| $F(x) = -\frac{1}{x^4} + C$ | $F(x) = -\frac{20}{x^6} + C$ | $F(x) = -\frac{2}{3x^6} + C$ | $F(x) = -\frac{1}{x^4}$ | $F(x) = \frac{1}{x^4}$ |

- 5 Укажіть первісну функції $f(x) = \cos x$, графік якої проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{2}; 6\right)$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|------------------|
| $F(x) = \sin x + 5$ | $F(x) = -\sin x + 7$ | $F(x) = \sin x + 6$ | $F(x) = -\sin x + 6$ | $F(x) = -\sin x$ |

- 6 Укажіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = 3x^2 + 4x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------|-------------------------|---------------------|--------------------------|-----------------------|
| $F(x) = x^3 + 2x^2$ | $F(x) = x^3 + 2x^2 + C$ | $F(x) = 6x + 4 + C$ | $F(x) = 3x^3 + 4x^2 + C$ | $F(x) = 6x^2 + 4 + C$ |

- 7 Обчисліть інтеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|----|----|
| 0 | 1 | 2 | -1 | -2 |

- 8 Установіть, який з інтегралів дорівнює нулю.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------------|-------------------------|--------------------|----------------------|-----------------------|
| $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ | $\int_0^2 (x^3 - 1) dx$ | $\int_{-2}^2 x dx$ | $\int_{-1}^1 x^2 dx$ | $\int_0^1 (x-1)^2 dx$ |

- 9 Знайдіть інтеграл $\int_0^2 (x-1) dx$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | 4 | 5 |

- 10 Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на малюнку а.

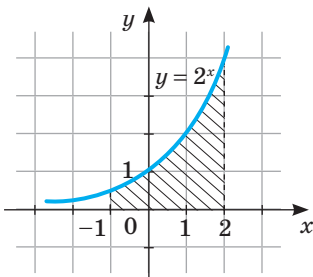
| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------|
| $\frac{7}{2 \ln 2}$ | $\frac{7}{2} \ln 2$ | $\frac{9}{2 \ln 2}$ | $\frac{9}{2} \ln 2$ | $\ln 2$ |

- 11 На малюнку б зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Порівняйте значення виразів $m = \int_a^b f(x) dx$ і $n = \int_a^b g(x) dx$.

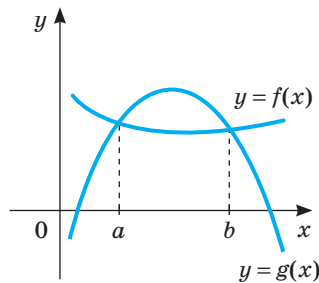
| А | Б | В | Г | Д |
|---------|---------|---------|---------------------|----------------|
| $m < n$ | $m > n$ | $m = n$ | порівняти неможливо | інша відповідь |

- 12 Укажіть формулу, за якою можна обчислити площу S заштрихованої фігури, зображеної на малюнку в.

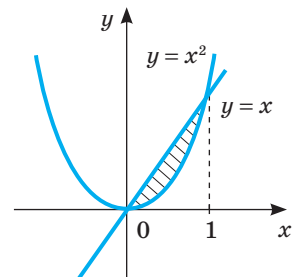
| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------|
| $S = \int_0^1 x^2 dx$ | $S = \int_0^1 (x^2 - x) dx$ | $S = \int_0^1 (x^2 - 1) dx$ | $S = \int_0^1 (x - x^2) dx$ | $S = \int_0^1 x dx$ |



Мал. а



Мал. б



Мал. в

Віктор Буняковський

(1804–1889)



Відомий український математик, педагог, історик математики. Фахівець з теорії ймовірностей та математичного аналізу. Автор монографії «Основи математичної теорії ймовірностей». Цей великий трактат, крім теорії, містив історію виникнення і розвитку теорії ймовірностей; у ньому зазначено багато практичних застосувань теорії ймовірностей, зокрема приклади її застосування у страхуванні та демографії.

1801



1830

1860

1890

1960

1932

Михайло Ядренко

(1932–2004)

Видатний український математик і педагог, професор, доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент Національної академії наук України, заслужений діяч науки і техніки України, лауреат Державної премії України. Фахівець у галузі теорії ймовірностей та математичної статистики. Автор багатьох підручників і посібників. Організатор математичних олімпіад різних рівнів та математичних гуртків. Засновник олімпіадного та турнірного руху юних математиків України.



РОЗДІЛ 3

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ
ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

CHAPTER 3

ELEMENTS OF PROBABILITY
THEORY AND MATHEMATICAL
STATISTICS



« Знаменна річ, що наука (теорія ймовірностей), яка почалася з вивчення ігор, піднеслася до найважливіших об'єктів людського пізнання. »

П. Лаплас

§ 9

Множини та підмножини

SETS AND SUBSETS

§ 10

КОМБІНАТОРИКА
ТА ПРАВИЛО ДОБУТКУ

COMBINATORICS AND
RULE OF PRODUCT

§ 11

РОЗМІЩЕННЯ,
ПЕРЕСТАНОВКИ ТА КОМБІНАЦІЇ

PERMUTATIONS, TRANSPOSITIONS
AND COMBINATIONS

§ 12

ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ

ELEMENTS OF STATISTIC

§ 13

ГРАФІЧНІ ПОДАННЯ
ІНФОРМАЦІЇ ПРО ВИБІРКИ

GRAPHICAL REPRESENTATIONS
OF SAMPLING INFORMATION

§ 14

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ЇХ
ІМОВІРНОСТІ

RANDOM EVENTS
AND THEIR PROBABILITIES

§ 15

ВІДНОСНА ЧАСТОТА ПОДІЇ
ТА ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

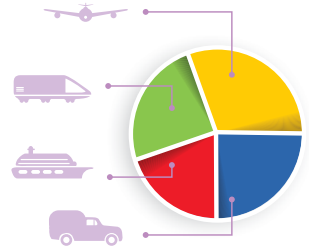
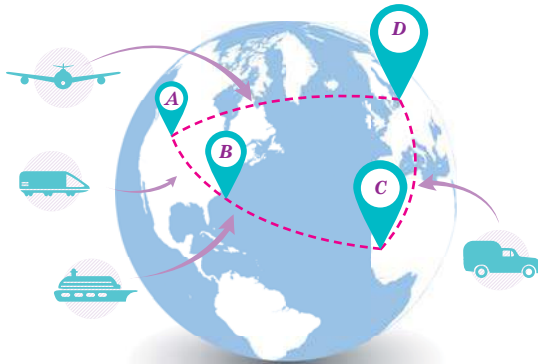
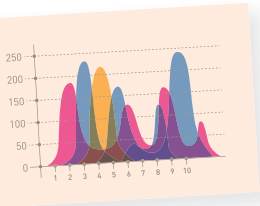
RELATIVE FREQUENCY
AND RANDOM VARIABLES

ЛОГІСТИКА

logistikos — обчислювати, міркувати.



Регулювання переміщення матеріальних та інформаційних потоків



МАТЕМАТИКА В МОЇЙ ПРОФЕСІЇ

АКТУАРНА СПРАВА

Актуарій — це експерт із математики страхування: спеціаліст з оцінки ризиків і фінансовий аналітик.

Ризикове страхування

Ризик-менеджмент

Тарифікація

Страхування життя

Фінансовий аналіз

Оцінка резервів



§ 9. Множини та підмножини

Ви знаєте, що таке бригада, табун, рій, набір, комплект тощо.

Можна говорити, наприклад, про множини планет, держав, пісень, партій, рівнянь, функцій, точок, чисел, фігур тощо. Об'єкти, які входять до множини, називають її *елементами*. Якщо a — елемент множини M , то пишуть: $a \in M$. Запис $b \notin M$ означає, що b не є елементом множини M . Множини часто записують за допомогою фігурних дужок. Наприклад: $\{\triangle, \square, \circ\}$ — множина фігур $\triangle, \square, \circ$; $\{0, 1, 2, 3\}$ — множина цифр 0, 1, 2, 3.

Це — приклади *скінченних множин*.

Нескінченними є, наприклад, множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел. Їх позначають відповідно буквами N, Z, Q, R . Нескінченними є також множини точок на прямій чи відрізку, множини дійсних чисел на проміжках $[2; 3]$, $(-6; +\infty)$ та ін.

Вважають, що елементи множини — різні.

$\{1; 3; 5\}$ і $\{3; 1; 5\}$ — різні записи однієї й тієї самої множини.

У математиці часто розглядаються множини, які мають тільки один елемент або й зовсім не мають елементів. Наприклад, можна говорити про множину коренів рівняння $3x + 5 = 17$ або множину розв'язків нерівності $x^2 + 3 < 0$.

У математиці будь-які сукупності називають одним словом: **множина**.

Якщо множина має нескінченну кількість елементів, її називають **нескінченною множиною**.

Дві множини називають **рівними**, якщо вони складаються з однакових елементів.

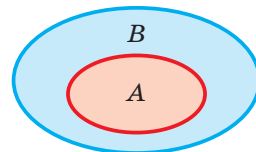
Якщо множина не містить жодного елемента, її називають **порожньою множиною** і позначають символом \emptyset .

Якщо A — частина множини B , то її називають **підмножиною** множини B і записують: $A \subset B$.

Наочно це зображають за допомогою діаграми Ейлера (мал. 54). Правильними є співвідношення:

$$N \subset Z, N \subset Q, N \subset R, Z \subset Q, Z \subset R, Q \subset R.$$

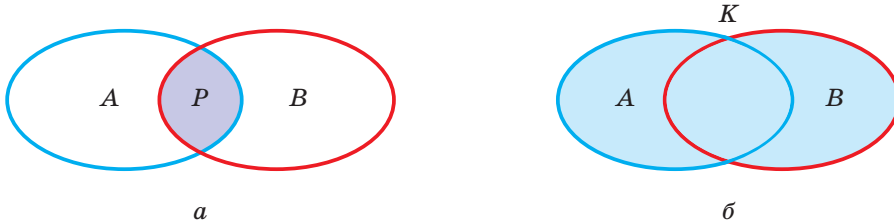
Трапляється, що множини A і B мають спільні елементи.



Мал. 54

Якщо множина P містить усі спільні елементи множин A і B і тільки їх, то множину P називають **перерізом множин A і B** .

Записують це так: $A \cap B = P$; діаграмою Ейлера зображають, як показано на малюнку 55, а.



Мал. 55

Множину, яка містить кожен елемент кожної з множин A і B і тільки ці елементи, називають **об'єднанням множин A і B** .

Якщо K — об'єднання множин A і B , то пишуть: $A \cup B = K$ (мал. 55, б).

Різницею множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів множини A , які не належать множині B .

Її позначають: $A \setminus B$. Наприклад, якщо $A = \{1; 2; 3; 4\}$ і $B = \{1; 4; 5; 7; 8\}$, то $A \setminus B = \{2; 3\}$.

Перевірте себе

- 1 Наведіть приклад множини.
- 2 Як позначають множини та їх елементи?
- 3 Які бувають множини?
- 4 Які множини називають рівними?
- 5 Що називають підмножиною?
- 6 Що називають об'єднанням двох множин?
- 7 Що називають перерізом двох множин?

Виконаємо разом

1) Запишіть усі підмножини множини $M = \{c, d, k\}$.

Розв'язання. Підмножинами цієї множини будуть множини:

$\{c\}, \{d\}, \{k\}, \{c, d\}, \{c, k\}, \{d, k\}, \{c, d, k\}, \emptyset$.

- 2) Знайдіть переріз та об'єднання множин A і B , якщо $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Розв'язання. Оскільки $A \subset B$, то $A \cap B = A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

$$A \cup B = B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

- 3) A і B — множини розв'язків рівнянь $x^3 - x = 0$ та $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$. Знайдіть: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$.

Розв'язання. Розв'яжемо кожне рівняння:

$$x^3 - x = 0, \quad x(x - 1)(x + 1) = 0, \quad \text{звідки } x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1;$$

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0, \quad x^2(x - 3) - (x - 3) = 0, \quad (x^2 - 1)(x - 3) = 0, \quad \text{звідки}$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

$$\text{Отже, } A = \{0, -1, 1\}, \quad B = \{-1, 1, 3\}.$$

$$\text{Тоді: а) } A \cup B = \{-1, 0, 1, 3\}; \quad \text{б) } A \cap B = \{-1, 1\}.$$

Виконайте усно

328. Скільки елементів має множина: а) $\{7, 8, 9\}$; б) $\{a, b, c, d\}$?
329. Скільки елементів має множина двоцифрових чисел, кратних 10? Назвіть її елементи.
330. Скільки елементів має множина квадратів? А ромбів з кутами 60° ?
331. Скільки елементів має множина коренів рівняння: а) $x^2 = 2$; б) $x^2 + 27 = 8$; в) $|x| = 0$?
332. Чим є переріз та об'єднання множин: а) натуральних і цілих чисел; б) раціональних та ірраціональних чисел?
333. Як називають: а) множину коренів; б) множину людей, яких обслуговує банк; в) множину квітів у вазі; г) множину музикантів, які виступають разом?

A

334. Випишіть усі елементи кожної множини:
 A — множина днів тижня; B — множина кольорів світлофора; C — множина материків; D — множина цифр; E — множина кольорів веселки.
335. Наведіть приклади множини, яка має: а) два елементи; б) п'ять елементів; в) один елемент.
336. Запишіть множину букв, якими записують ваше ім'я та прізвище.
337. Запишіть множину цифр, якими записують дату вашого народження.
338. Задайте переліком елементів множину одноцифрових чисел, які діляться: а) на 3; б) на 5; в) на 15.
339. Випишіть усі підмножини для кожної множини: а) $\{\bullet, \blacksquare\}$; б) $\{*, \triangle, \#\}$.
340. Запишіть множину голосних звуків українського алфавіту.
341. Напишіть множину цілих чисел, які:
 а) більші за 3 та менші від 13;
 б) не більші за 12 і не менші від -2 .

342. Позначте на координатній прямій множину точок, яким відповідають числа: $-3, -1, 2, 3, 4, 5$.
343. Запишіть множину натуральних дільників числа: а) 60; б) 73.
344. Запишіть множину спільних дільників чисел 120 і 150.
345. Запишіть множину розв'язків рівняння:
а) $x(x^2 - 4) = 0$; б) $x^2 + 6 = 0$; в) $x^2 = \sqrt{x}$.
346. Запишіть множину розв'язків нерівності:
а) $2x - 1 < 7$; б) $x^2 - 2x \leq 0$; в) $|x - 3| < 2$.
347. Які висловлення правильні:
а) $7 \in \mathbb{Q}$; б) $-5 \in \mathbb{R}$; в) $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$; г) $2\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$?
348. Чи є множина голубів підмножиною множини птахів? Зобразіть це діаграмою Ейлера.

Б

349. Знайдіть множину значень функції:
а) $y = x^2$, заданої на проміжку $[-2; 7]$;
б) $y = 1^x$, якщо $x \in [1; 8]$.
350. Дано множини: $K = \{a, b, c, 2\}$, $P = \{1, 2, a, c, x\}$. Знайдіть їх переріз, об'єднання та різницю.

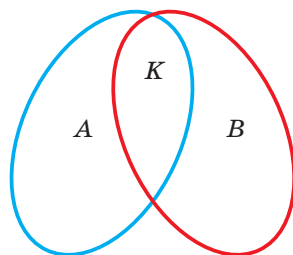
Знайдіть $A \cap B$ і $A \cup B$ (351, 352).

351. а) $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{5, 7, 3\}$;
б) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, -1, 2, -3\}$;
в) $A = \{\blacklozenge, \blacktriangle, \bullet\}$, $B = \{\blacktriangle, \circ, \blacksquare\}$;
г) $A = \{\square, \odot, \blacktriangle\}$, $B = \{\odot, \triangle, \square\}$.
352. а) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$;
б) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{\delta, \nu, \beta, \gamma, \Gamma\}$;
в) $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{7, 6, 5, 4\}$;
г) $A = \{2, 3\}$, $B = \{22, 33\}$.
353. Серед названих нижче множин укажіть скінченні та нескінченні:
а) множина від'ємних чисел;
б) множина цифр у записі числа π ;
в) множина чисел, які належать відріzkу $[0; 1]$;
г) множина розв'язків рівняння $2x + 3y = 5$;
г) множина розв'язків нерівності $x^2 - 2y + 1 \leq 0$.
354. Запишіть переліком множину: а) спільних дільників чисел 60 і 126;
б) простих чисел першої сотні; в) розв'язків рівняння $x^2 + y^2 = 0$.

Знайдіть об'єднання та переріз числових проміжків (355, 356).

355. а) $(-\infty; 5)$ і $(1; +\infty)$; б) $(1; 3)$ і $[1; +\infty)$; в) $[0; 2]$ і $(-\infty; 0)$.
356. а) $(-7; 7)$ і $(-\infty; -1)$; б) $[0; 3)$ і $[-3; 0]$; в) $[4; +\infty)$ і $[1; 2)$.
357. A і B — множини розв'язків рівнянь $2x + 3y = 5$ та $x - 5y = 9$. Запишіть множину $A \cap B$. Як інакше за даних умов називають елементи цієї множини?

358. A — множина чисел, кратних 2; B — множина чисел, кратних 3. Якою є множина $A \cap B$? Скільки елементів вона має?
359. A — множина парних натуральних чисел; B — множина непарних натуральних чисел. Якими є множини $A \cap B$, $A \cup B$ та $A \setminus B$?
360. На малюнку 56 зображені: A — множина прямокутників, B — множина ромбів, $K = A \cap B$. Опишіть множину K . Чи правильно, що $K \cap A = K$, $K \cup A = A$? Опишіть множини $A \setminus B$ та $B \setminus A$.
361. а) Нехай A — множина всіх квадратних рівнянь, а B — множина рівнянь, які мають два корені. Чи рівні ці множини? Зобразіть їх діаграмою Ейлера.
б) Дано множину $\{\triangle, \square, \circ\}$. Складіть усі двохелементні підмножини. Скільки їх?
362. Дано множину $A = \{a, b, c, d\}$. Складіть усі трьохелементні підмножини множини A . Скільки їх?
363. Скільки підмножин має множина, яка містить: а) один елемент; б) два елементи; в) три елементи; г) чотири елементи? Перевірте твердження: «Множина, що складається з n елементів, містить 2^n підмножин» для $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 364*. Покажіть, що кожна п'ятиелементна множина має стільки трьохелементних підмножин, скільки й двохелементних.



Мал. 56

Вправи для повторення

365. Порівняйте числа: а) $\frac{4}{9}$ і $\frac{5}{11}$; б) $\frac{5}{22}$ і $0,2(27)$.
366. Побудуйте графік функції: а) $y = (x + 1)^2$; б) $y = x^2 + 1$.
367. Розв'яжіть нерівність: а) $\frac{(x-3)(x+5)}{(x-1)} \geq 0$; б) $\frac{x(x^2 - 2x + 1)}{(4x+4)} < 0$.

§ 10. КОМБІНАТОРИКА ТА ПРАВИЛО ДОБУТКУ

Говорячи «множина», «підмножина», на порядок розміщення їх елементів не зважають. Кажуть, що вони не впорядковані. Крім них, нерідко розглядають і *впорядковані множини*. Так називають множини з фіксованим порядком елементів. Їх позначають не фігурними, а круглими дужками. Наприклад, з елементів множини $\{a, b, c\}$ можна утворити 6 трьохелементних упорядкованих множин:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Як множини, всі вони рівні, як упорядковані множини — різні.

Існують задачі, у яких треба визначити, скільки різних підмножин або впорядкованих підмножин можна утворити з елементів даної множини. Їх називають **комбінаторними задачами**. А розділ математики про розв'язування комбінаторних задач називають **комбінаторикою**.

Розглянемо два основні правила, за допомогою яких розв'язується багато задач з комбінаторики.

Приклад 1. Випускниця школи склала ЗНО з української мови на 190 балів, математики — на 195 балів і англійської мови — на 185 балів. З такими сертифікатами вона може гарантовано вступити на чотири факультети в політехнічному університеті і два — в економічному. Скільки можливостей має абітурієнтка для вступу до університету?

Розв'язання. Позначимо буквою A множини факультетів, які обрала абітурієнтка у політехнічному університеті, а буквою B — в економічному. Тоді $A = \{m, n, k, l\}$,

$B = \{p, s\}$. Оскільки ці множини не мають спільних елементів, то загалом абітурієнтка має $4 + 2 = 6$ можливостей вступати до університету.

Описану ситуацію можна узагальнити у вигляді твердження, яке називають *правилом суми*.

Якщо елемент деякої множини A можна вибрати m способами, а елемент множини B — n способами, то елемент з множини A або з множини B можна вибрати $m + n$ способами.

Правило суми поширюється й на більшу кількість множин.

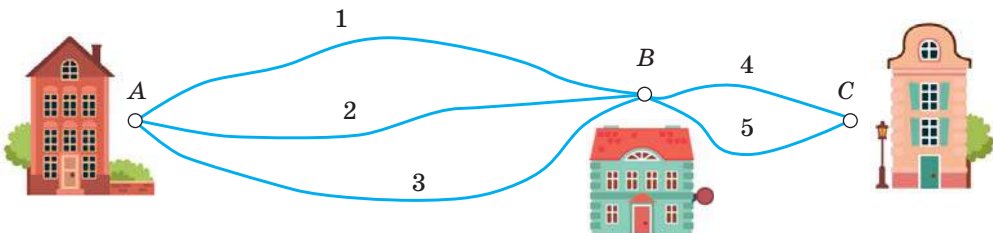
Приклад 2. Учасників театральної студії преміювали екскурсійними поїздками у різні місця України. Серед них: у Київ — 1, біля моря — 2, у Карпати — 4, в Асканію Нова — 1. Скільки можливостей вибору першої екскурсії мають діти?

Розв'язання. Оскільки всі екскурсійні поїздки різні, то для розв'язання задачі досить знайти суму елементів усіх множин, про які йдеться: $1 + 2 + 4 + 1 = 8$. Отже, учасники театральної студії можуть обирати екскурсію з 8 можливих.

Приклад 3. Від селища A до селища B можна доїхати трьома дорогами, а від B до C — двома. Скільки існує маршрутів, щоб дістатися від A до C ?

Розв'язання. Щоб проїхати від A до B , треба вибрати одну з трьох доріг: 1, 2 або 3 (мал. 57). Після цього треба вибрати одну з двох інших доріг: 4 чи 5. Усього від A до C ведуть 6 маршрутів, бо $3 \cdot 2 = 6$. Усі ці маршрути можна позначити за допомогою пар:

$(1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5)$.



Мал. 57

Узагальнимо описану ситуацію.

Якщо перший компонент пари можна вибрати t способами, а другий — n способами, то таку пару можна вибрати tn способами.

Це — *правило добутку*, яке часто називають основним правилом комбінаторики.

Зверніть увагу! Йдеться про впорядковані пари, складені з різних компонентів.

Правило добутку поширюється і на впорядковані трійки, четвірки та будь-які інші впорядковані скінченні множини. Зокрема, якщо перший компонент упорядкованої трійки можна вибрати t способами, другий — n способами, а третій — k способами, то таку впорядковану трійку можна вибрати tnk способами.

Розглянемо приклад.

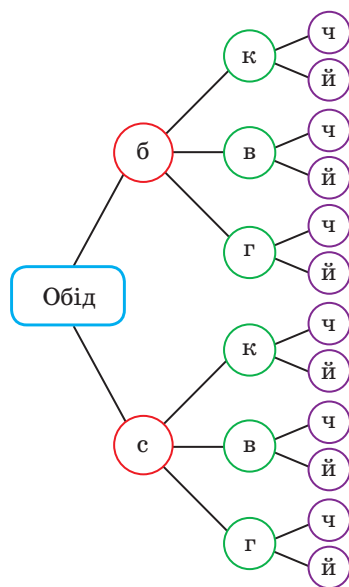
Приклад 4. У новій шкільній їдальні старшокласники можуть обирати страви на обід. Скільки різних варіантів обіду пропонують учням цієї школи, якщо їдальня на обід приготувала 2 перші страви — борщ (б) і суп (с), 3 другі — котлети (к), вареники (в), голубці (г) і 2 напої — чай (ч) і йогурт (й).

Розв'язання. Для обіду з трьох страв їдальня може запропонувати 12 різних наборів, бо $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Описаній ситуації відповідає діаграма, зображена на малюнку 58. Такі діаграми називають *деревами*.

Приклад 5. У міжнародних змаганнях з художньої гімнастики беруть участь 7 команд з різних країн. Організатори вирішили зробити інсталяцію державних прапорів кожної команди учасниці (мал. 59).

Скільки різних варіантів розташування прапорів існує, якщо кожен можна поставити на будь-якому місці?



Мал. 58



Мал. 59

Розв'язання. Першим можна закріпити будь-який із 7 прапорів. Маємо 7 варіантів вибору. Другий прапор можна вибрати з решти 6 прапорів. Тому, згідно з правилом добутку, два перші прапори можна вибрати $7 \cdot 6$ способами. Третій прапор можна вибрати з 5 прапорів, що залишилися. Тому три перші прапори можна вибрати $7 \cdot 6 \cdot 5$ способами. Продовжуючи подібні міркування, приходимо до відповіді: всього можна скласти $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ різних наборів прапорів для інсталяції.



Добуток усіх натуральних чисел від 1 до n називають **n -факторіалом** і позначають $n!$

Зверніть увагу на розв'язання останньої задачі. Воно звелось до обчислення добутку всіх натуральних чисел від 1 до 6. У комбінаториці подібні добутки обчислюють часто.

Наприклад, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$;
 $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Домовилися вважати, що $1! = 1$ і $0! = 1$.

Перевірте себе

- 1 Які задачі називають комбінаторними?
- 2 Що називають комбінаторикою?
- 3 Сформулюйте правило суми.
- 4 Сформулюйте основне правило комбінаторики.
- 5 Наведіть приклад діаграми-дерева.
- 6 Що називають факторіалом? Як його позначають?

Виконаємо разом

- 1) Інвестиційний фонд «Майбутнє країни» з 10 переможців дистанційного конкурсу обирає три особи для надання грантів на навчання в найкращих університетах України — Київський національний університет ім. Тараса Шевченка (КНУ), Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського (КПІ) і Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна (ХНУ). Скількома способами можуть бути розподілені ці гранти?

Розв'язання. Один грант може одержати один із 10 переможців. Після того як визначено володаря цього гранту, обирають одного з 9 решти переможців для вручення другого гранту. Третій грант може отримати один із 8 переможців, що залишилися. Отже, загальна кількість способів, якими можна розподілити три гранти на навчання, дорівнює $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

- 2) Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 2, 4, 6, 8, якщо жодна цифра не повторюється?

Розв'язання. Першою цифрою числа може бути одна з чотирьох цифр 2, 4, 6, 8. Якщо першу цифру обрано, то другу можна обрати 4 способами, третю — 3, четверту — 2. Згідно з правилом добутку, загальна кількість способів дорівнює $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$.

- 3) Скільки можна утворити парних чотирицифрових чисел із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо жодна цифра не повторюється?

Розв'язання. Парні числа можуть закінчуватися цифрами 0, 2 або 4. Розділимо множину всіх парних чотирицифрових чисел, які можна утворити за умовою задачі, на дві групи: 1) числа, які закінчуються нулем, і 2) числа, які не закінчуються нулем.

У першій множині міститься $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ чисел (усі цифри, крім останньої, вибираються з 5 можливих).



У другій множині міститься $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96$ чисел. Останньою цифрою числа може бути одна з двох цифр: 2 або 4. Якщо останню цифру обрано, то першу можна обрати 4 способами (не нуль), другу — також 4 способами, а третю — 3. Згідно з правилом додавання, загальна кількість способів дорівнює $60 + 96 = 156$.

Виконайте усно

368. Студентська група складається з 15 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна обрати старосту групи та його заступника?
369. Студентська група складається з 15 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати одного студента в стипендіальну комісію?
370. Студентська група складається з 15 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати одну дівчину та одного хлопця для участі в конкурсі «Найрозумніший»?
371. Обчисліть: а) $2!$; б) $3!$; в) $4!$; г) $5!$.
372. Спростіть вираз: а) $10! \cdot 11$; б) $5! : 4!$; в) $144! \cdot 145$; г) $95! : 95$.

А

373. У притулок для тварин волонтери закупили три види сухого корму і два види м'ясних консервів. Скільки існує варіантів організувати для тварин вечерю, що складається з однієї страви?
374. Одинадятикласник має обрати для пробного ЗНО два навчальні предмети. На початку березня проводитиметься пробне ЗНО з української мови і літератури, а наприкінці (в один день) — з історії України, математики, біології, географії, фізики, хімії, іноземної мови. У день проведення пробного тестування кожний зареєстрований учасник може пройти тест з одного навчального предмета. Скільки всього існує варіантів вибору учнем двох предметів для проходження пробного ЗНО?
375. Для завершення формування експедиції на космічну станцію додатково розглядалися заявки 10 претендентів на посаду лікаря-дослідника, 5 претендентів на посаду біолога і 3 претендентів на посаду техника. Жоден кандидат не претендував одночасно на дві чи більше посад. Скількома способами можна заповнити одне вільне місце в експедиції?

- 376.** У магазині є три види мінеральної води і п'ять видів соку. Тарас хоче купити собі воду або сік. Скількома способами він може це зробити?
- 377.** На футбольний матч одна з команд заявила 4 запасних. Скількома способами тренер може посадити цих чотирьох запасних на лавці?
- 378.**  Групі туристів пропонується піднятися на одну з вершин Українських Карпат. Туди ведуть 4 стежки. Скількома маршрутами туристи можуть піднятися на гору та спуститися з неї, обираючи для спуску й підйому різні стежки?
- 379.** У готелі на сніданок пропонують 3 другі страви (A, B, C) і два напої (M, K). Скільки різних наборів із двох страв можна вибрати на сніданок? Складіть відповідну діаграму-дерево.
- 380.**  Київський річковий трамвай — один із видів міського річкового транспорту в м. Києві. Скількома способами 5 осіб можуть утворити чергу, щоб зайти до такого трамвая?
- 381.** Скільки різних речень можна написати словами «співати», «ми», «любимо»? А словами «ми», «дуже», «любимо», «співати»?
- 382.** Скількома способами можна розмалювати букви в слові «Україна», якщо використати усі кольори райдуги без повторень.
- 383.** Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб цифри не повторювалися?
- 384.** (ЗНО, 2014). Студент на першому курсі повинен вибрати одну з трьох іноземних мов, яку вивчатиме, та одну з п'яти спортивних секцій, що відвідуватиме. Скільки всього існує варіантів вибору студентом іноземної мови та спортивної секції?

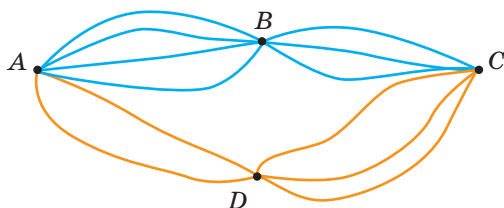
| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|----|----|----|
| 5 | 8 | 10 | 15 | 28 |

- 385.** Обчисліть: а) $5!$; б) $8!$; в) $10!$; г) $13!$.
- 386.** Спростіть вираз: а) $n! \cdot (n + 1)$; б) $n \cdot (n - 1)!$; в) $(n + 1)! : n!$; г) $n! : n$.

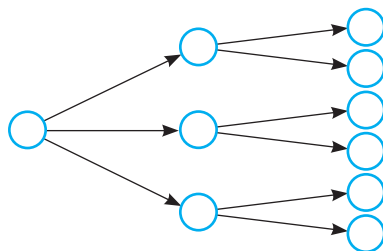
Б

- 387.** Скількома способами можна нанизати 8 різних грибів на: а) один шампур; б) одну нитку?
- 388.** Вісім друзів вирішили провести турнір з тенісу так, щоб кожен зіграв з кожним одну партію. Скільки партій буде зіграно?
- 389.** Олег обирає одяг для зустрічі. Він розглядає 3 пари взуття (A, B, C), 2 пари брюк (a, b) і 3 сорочки (x, p, y). Скільки різних наборів одягу можна утворити? Складіть відповідну діаграму-дерево.
- 390.** Від готелю до солоного озера ведуть 7 доріг. Скількома способами відпочивальник може дістатися озера і повернутися назад? Розгляньте випадки, коли рух до озера та від нього відбувається: а) однією дорогою; б) різними шляхами; в) одним із двох попередніх способів.
- 391.** Скільки різних «кортежів» можна створити на міському карнавалі із чотирьох автомобілів — білого, жовтого, синього та зеленого? Складіть відповідну діаграму-дерево.

392. Обчисліть: а) $10! : 5!$; б) $15! : 10!$; в) $(6! \cdot 17!) : 20!$; г) $100! : (97! \cdot 7!)$.
393. Спростіть вираз: а) $n! : (n - 1)!$; б) $(n - 1)! : n!$; в) $(n + 1)! : (n - 1)!$.
394. Обчисліть $(2n)! : n!$, якщо: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 10$.
395. Знайдіть значення n , якщо: а) $n! = (n - 1)! \cdot 8$; б) $(n + 2)! = 132 \cdot n!$.
396. Скільки непарних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри не можуть повторюватися?
397. Задано цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, із яких утворюють двоцифрові числа. Установіть відповідність між запитаннями (1–4) і числами (А–Д), які є відповідями на ці запитання.
- | | |
|---|------|
| 1 Скільки існує чисел, складених з парних цифр, що не повторюються | А 20 |
| 2 Скільки існує чисел, складених з непарних цифр, що не повторюються | Б 25 |
| 3 Скільки існує чисел, складених з непарних цифр, що можуть повторюватися | В 16 |
| 4 Скільки існує чисел, складених з парних цифр, що можуть повторюватися | Г 12 |
| | Д 18 |
398. У середу за розкладом в 11-А класі 7 різних уроків, серед яких алгебра та геометрія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб алгебра й геометрія не стояли поруч?
399. У вівторок за розкладом в 11-Б класі 6 різних уроків, серед яких фізика та астрономія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб фізика й астрономія стояли поруч?
400. (ЗНО, 2012). Скільки існує різних дробів $\frac{m}{n}$, якщо m набуває значень 1; 2 або 4, а n набуває значень 5; 7; 11; 13 або 17?
401. Скільки різних упорядкованих трійок можна утворити з чотирьох елементів — \diamond , \blacksquare , \odot , \blacktriangle ?
402. У «Домашній пекарні» готують великі й малі струдлі з листового та дріжджового тіста. Скільки різних видів струдлів можна замовити в цій пекарні, якщо для листових струдлів використовують три види начинки, а для дріжджових — чотири?
403. Складіть дві комбінаторні задачі, що відповідають малюнкам 60 і 61, та розв'яжіть їх.



Мал. 60



Мал. 61

404. Практичне завдання. Створіть логотип класу, основою якого має бути многокутник певного кольору. Скільки основ логотипів можна створити, якщо розглядати три фігури (трикутник, квадрат, шестикутник) і 4 кольори (синій, зелений, жовтий, червоний)? Перевірте теоретичні знання на практиці.

Вправи для повторення

405. Знайдіть похідну функції:

а) $y = 2x^3 - 3$; б) $y = 2x(x - 3)$; в) $y = 2\sin x - 3$; г) $y = 2 - 3e^x$.

406. Розв'яжіть рівняння: а) $\sqrt{2x-3} = 5$; б) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.

407. Спростіть вираз: а) $1 - \sin^2 x$; б) $1 + \operatorname{tg}^2 x$; в) $1 + \cos 2x$.

§ 11. Розміщення, ПЕРЕСТАНОВКИ ТА КОМБІНАЦІЇ

Щоб розв'язувати складніші задачі на визначення ймовірностей подій, корисно навчитися обчислювати раціональним способом кількість різних вибірок з даної множини елементів. Нехай дано множину з m елементів — a, b, c, \dots, k . Вибираючи тим чи іншим способом елементи з цієї множини, можна утворити різні вибірки, тобто підмножини даної множини або впо-

рядковані підмножини. Залежно від того, чим відрізняється одна вибірка від інших, їх називають по-різному.

Наприклад, з 3 елементів a, b, c можна утворити такі розміщення по 2 елементи:

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$$

Вважають, що існує 6 різних розміщень з 3 елементів по 2.

Тому можна записати: $A_3^2 = 6$. У виразі A_m^n завжди $n \leq m$.

Як обчислити A_m^n при різних натуральних значеннях m і n ? Нехай маємо множину з m елементів. Перший елемент можна вибрати m способами: взяти будь-який з m елементів. Другий елемент, щоб записати за першим, доведеться вибирати

з решти $m - 1$ елементів, тобто $m - 1$ способами. Тому впорядковані пари двох перших елементів потрібної вибірки можна вибрати $m(m - 1)$ способами.

Вибірки, які відрізняються одна від одної або елементами, або порядком їх розміщення, називають **розміщеннями**.

Упорядковану n -елементну підмножину m -елементної множини називають **розміщенням з m елементів по n** . Число розміщень з m елементів по n позначають A_m^n .

Третій елемент, щоб записати його після другого, доведеться вибирати з решти $m - 2$ елементів. Якщо за кожною з $m(m - 1)$ різних пар даних елементів записати $m - 2$ способами третій елемент, то утвориться $m(m - 1)(m - 2)$ різних упорядкованих трійок елементів. Аналогічно можна вибрати $m(m - 1)(m - 2)(m - 3)$ упорядкованих четвірок і т. д. Продовжуючи такі міркування, доходимо до висновку, що для будь-яких натуральних чисел m і n

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-(n-1)).$$

У правій частині рівності — n множників, тому результат можна сформулювати у вигляді такого правила.

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-(n-1)).$$

Наприклад, $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Приклад 1. Скількома способами збори з 20 осіб можуть обрати голову та секретаря?

Розв'язання. Йдеться про впорядковані 2-елементні підмножини множини, що складається з 20 елементів. Таким розміщенням буде $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$.

Якщо розглянути розміщення за умови, що $n = m$, то отримаємо множини, які відрізняються лише порядком.

Наприклад, з трьох елементів a, b, c можна утворити 6 різних перестановок:
 $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Отже, $P_3 = 6$. А взагалі кількість перестановок з m елементів дорівнює кількості розміщень з m елементів по m .

Підставивши у формулу числа розміщень $m = n$, дістанемо, що

$$P_m = m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ тобто } P_m = m!$$

Число перестановок з m елементів дорівнює $m!$

Наприклад,

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Приклад 2. Скількома способами можна скласти список із 10 прізвищ?

Розв'язання. $P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$.

Нехай дано множину з трьох елементів: $\{a, b, c\}$. Її двоелементних підмножин (не впорядкованих) існує всього три: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Говорять, що існує 3 комбінації з трьох елементів по два. Пишуть: $C_3^2 = 3$.

Кількість розміщень з m елементів по n дорівнює добутку n послідовних натуральних чисел, найбільше з яких — m .

Розміщення з m елементів по m називають **перестановками**.

Кількість перестановок з m елементів позначають символом P_m .

Вибірки, які відрізняються одна від одної принаймні одним елементом, а не порядком їх розміщення, називають **комбінаціями**.

Комбінацією з m елементів по n називають будь-яку n -елементну підмножину m -елементної множини.

Число комбінацій з m елементів по n позначають C_m^n , $n \leq m$.

На відміну від розміщень, комбінації — підмножини невпорядковані.

Порівняйте: $C_3^2 = 3$, а $A_3^2 = 6$. За тих самих значень m і n значення C_m^n менше від A_m^n . Можна навіть вказати, у скільки разів менше.

Наприклад, із чотирьох елементів a, b, c, d по три можна скласти 4 комбінації:
 abc, abd, acd, bcd .

Якщо з кожної комбінації з m елементів по n зробити P_n перестановок, то дістанемо

A_m^n розміщень. Тому $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$, звідки

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}.$$

Якщо помножимо чисельник і знаменник здобутого дроби на $(m-n)!$, то дістанемо формулу для обчислення кількості комбінацій з m елементів по n :

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Наприклад, $C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 15$.

Зверніть увагу! $C_m^m = 1$, $C_m^1 = m$. Вважають також, що $C_m^0 = 1$ для будь-якого $m \in \mathbb{N}$.

Приклад 3. Обчисліть: а) C_7^3 ; б) C_{20}^{18} .

Розв'язання. а) $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$; б) $C_{20}^{18} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{2! \cdot 18!} = 190$.

Приклад 4. Скількома способами з 25 учнів можна вибрати на збори 2 делегати?

Розв'язання. Тут $m = 25$, $n = 2$ і порядок не має значення. Тому

$$C_{25}^2 = \frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 300.$$

Перевірте себе

- 1 Що називають комбінаторикою?
- 2 Що називають перестановками? Як обчислюють P_n ?
- 3 Сформулюйте означення факторіала.
- 4 Що називають розміщенням? За якою формулою обчислюють кількість розміщень з m елементів по n ?
- 5 Що називають комбінацією? За якою формулою обчислюють кількість комбінацій з m елементів по n ?

Виконаємо разом

- 1) Скількома способами можна скласти денний розклад із 5 різних уроків, якщо клас вивчає 10 різних предметів?

Розв'язання. Йдеться про впорядковані 5-елементні підмножини множини, що складається з 10 елементів. Це — розміщення:

$$A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240.$$

- 2) Скількома способами можна розмістити на полиці 5 дисків?

Розв'язання. Йдеться про впорядковані 5-елементні множини. Шукана кількість способів дорівнює

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

- 3) Обчисліть: а) A_7^3 ; б) C_{20}^2 .

Розв'язання. а) $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$; б) $C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{2! \cdot 18!} = 190$.

- 4) На колі розміщено 9 точок. Скільки існує відрізків, які з'єднують кожную точку з іншою?

Розв'язання. Таких відрізків існує стільки, скільки різних комбінацій з 9 точок можна утворити по 2, бо відрізок з'єднує дві точки, а саме:

$$C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36.$$

- 5) Для чергування в їдальні запрошують трьох учнів з 7 класу і двох учнів з 10 класу. Скількома способами це можна зробити, якщо в 7 класі навчається 24 учні, а в 10 класі — 18.

Розв'язання. Йдеться про невпорядковані підмножини двох різних множин. Це — комбінації:

$$C_{24}^3 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2024; \quad C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153.$$

За правилом добутку маємо: $2024 \cdot 153 = 309\,672$ способи вибрати учнів для чергування.

Виконайте усно

408. Складіть усі можливі перестановки з букв α , β , γ .

409. Обчисліть P_2 , P_3 , P_4 .

410. Обчисліть C_5^1 , C_5^5 , C_5^0 .

411. Скількома способами 4 учні можуть розміститися за двома двомісними партами?

412. Скількома способами з трьох різних цукерок можна вибрати дві?

А

413. Запишіть усі комбінації з елементів x, y, z, t по 2.
 414. Запишіть усі розміщення з елементів x, y, z, t по 2.
 415. Складіть усі можливі перестановки з елементів A, B, C .
 416. Обчисліть: а) $5!$; б) $6!$; в) P_4 ; г) P_7 .
 417. Обчисліть P_n , якщо n дорівнює 6, 7, 8, 9.
 418. Скількома способами 6 учнів можуть розміститися за трьома двоми-ними партами?
 419. На тарілці є 7 груш. 5 дітей мають взяти з тарілки по одній груші. Скількома способами це можна зробити?
 420. Скільки різних трицифрових чисел можна утворити з цифр 6, 7 і 8 так, щоб усі цифри кожного числа були різні?
 421. Скільки різних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3 так, щоб усі цифри кожного числа були різні?
 422. Випишіть усі розміщення з букв A, B, C, D по 2.
 423. Скількома способами можна розсадити 5 учнів на 10 місцях?
 424. Обчисліть: а) A_5^3 ; б) A_8^4 ; в) A_9^8 ; г) A_{50}^2 .
 425. Обчисліть: а) A_6^3 ; б) A_{10}^4 ; в) C_5^3 ; г) C_{10}^8 .
 426. Що більше: C_7^4 чи C_7^3 ?
 427. Обчисліть: а) C_9^3 ; б) C_{10}^7 ; в) $C_{12}^{10} : P_3$; г) $A_{10}^2 - C_{10}^2$.
 428. Установіть відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

| | | | |
|---|-------------------|---|------|
| 1 | $0,5 \cdot A_6^4$ | А | 360 |
| 2 | $5 \cdot A_8^3$ | Б | 9 |
| 3 | $0,5 \cdot P_6$ | В | 72 |
| 4 | $P_9 \cdot A_8^7$ | Г | 1680 |
| | | Д | 180 |

429. На полиці є 20 книжок. Скількома способами можна вибрати дві з них?
 430. У класі 32 учні. Скількома способами можна вибрати з них двох чергових?
 431. Скільки різних правильних дробів можна утворити так, щоб одне з чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 було чисельником, а друге — знаменником?
 432. Скільки існує відрізків, кінцями яких є n даних точок?
 433. Скільки діагоналей має опуклий 10-кутник; n -кутник?
 434. (ЗНО, 2010). Кодовий замок на дверях має 10 кнопок, на яких нанесено 10 різних цифр (мал. 62). Щоб відчинити двері, потрібно одночасно натиснути дві кнопки, цифри на яких складають код замка. Скільки всього існує різних варіантів коду замка? Уважайте, що коди, утворені перестановкою цифр (наприклад, 1–2 і 2–1), є однаковими.



Мал. 62

| А | Б | В | Г | Д |
|-----|----|----|----|----|
| 100 | 90 | 45 | 20 | 10 |

Б

435. На кожній із п'яти карток написано одну з цифр 1, 2, 3, 4, 5. Скільки з цих карток можна скласти різних чисел: а) двоцифрових; б) трицифрових; в) чотирицифрових?
436. Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких різні? А чотирицифрових?
437. Скільки існує таких трицифрових чисел, у яких кожна цифра не менша від 5 і цифри в кожному числі не повторюються?
438. Скільки словників треба мати, щоб безпосередньо перекладати з п'яти різних мов на кожному з них?
439. (ЗНО, 2014). Блок соціальної реклами складається з 4 рекламних роликів: про шкідливість паління, про охорону навколишнього середовища, про дотримання правил дорожнього руху та про велосипедне місто. Ролик про шкідливість паління заплановано показати двічі — першим і останнім, а інші три ролики — по одному разу. Скільки всього існує варіантів формування цього блоку соціальної реклами за вказаним порядком рекламних роликів?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|----|----|-----|
| 6 | 8 | 12 | 24 | 120 |

440. Доведіть, що для кожного натурального n :
а) $P_{n+1} = nP_n$; б) $A_m^{m-1} = P_m$; в) $A_n^k = nA_{n-1}^{k-1}$.
441. Знайдіть n , якщо: а) $P_n = 42 \cdot P_{n-2}$; б) $P_n = 720 \cdot P_{n-3}$.
442. Яке число менше і в скільки разів:
а) A_8^5 чи P_8 ; б) A_9^8 чи P_9 ; в) C_{20}^2 чи C_{20}^3 ; г) C_{30}^2 чи C_{30}^{28} ?
443. Розв'яжіть рівняння:
а) $A_x^4 = 56 \cdot A_x^2$; б) $A_x^5 = 72 \cdot A_{x-2}^3$; в) $C_x^2 = 21$; г) $C_x^2 = 20 + x$.
444. Доведіть, що коли числа m, n — натуральні та $m > n$, то:
а) $C_m^n = C_m^{m-n}$; б) $C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$.
445. У баскетбольній команді, яка складається з 15 чоловік, треба обрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?
446. Скількома способами можна заповнити картку «Спортлото» — закреслити 6 номерів із 49?
447. Для досліду треба взяти 3 білих, 5 червоних і 7 рожевих квіток гороху з наявних 10-ти білих, 10-ти червоних і 10-ти рожевих квіток. Скількома способами це можна зробити?
- 448*. Скількома способами можна роздати 28 кісточок доміно чотирьом гравцям, щоб кожному дісталася 7 кісточок?

Вправи для повторення

449. Знайдіть первісну функції:

а) $y = 2x^2 - 5$; б) $y = 2^x$; в) $y = 2\sin x$; г) $y = \cos 3x$.

450. Розв'яжіть рівняння:

а) $5^{2x+3} = 5$; б) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$.

451. Запишіть у вигляді логарифма вираз:

а) $1 + 2\ln x$; б) $3\lg x - \lg 2x$; в) $2 + \log_2 2x$.

§ 12. ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ

Статистика — це наука про збирання, обробку та вивчення різноманітних даних, пов'язаних з масовими явищами, процесами й подіями.

Найчастіше статистику використовують в економіці, політиці та експериментальних дослідженнях. Статистичну інформацію збирають за допомогою спостережень, зокрема перепису, опитувань, обліків тощо.

Статистичні відомості про велику сукупність об'єктів (генеральну сукупність) отримують внаслідок аналізу її незначної частини — *вибірки*. Щоб дізнатися, на-

приклад, про найпоширеніші розміри чоловічого взуття, досить опитати кілька десятків чоловіків. Припустимо, що, опитавши 60 чоловіків, здобули результати, подані в таблиці.

| Розмір взуття | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Кількість чоловіків | 1 | 2 | 3 | 7 | 10 | 9 | 8 | 8 | 6 | 4 | 1 | 1 |

Це — *частотна таблиця*, у якій числа другого рядка — частоти. Наприклад, частота взуття розміру 32 дорівнює 6. Відносна частота цього розміру — $6 : 60 = 0,1 = 10\%$.

Проаналізувавши таку вибірку, роблять загальний висновок: приблизно 10% чоловічого взуття треба виготовляти 32-го розміру і вдвічі менше — 26-го розміру. Це — наближені відношення, але на практиці таких наближень достатньо.

Математичний аналіз різних вибірок — сфера *математичної статистики*. Її основне завдання — розробляти ефективні методи вивчення великих сукупностей об'єктів на основі порівняно невеликих вибірок. Кожен елемент вибірки називають її *варіантою*. Вибірка, отримана внаслідок спостережень, буває неупорядкованою. Упорядкувавши її, дістають *варіаційний ряд*. Різниця між крайніми членами варіаційного ряду — *розмах вибірки*. Нехай дано вибірку

$$4, 3, 7, 9, 6, 8, 2, 6, 1, 7, 7, 3, 2, 5.$$

Упорядкувавши її за зростанням варіант, маємо варіаційний ряд:
1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9.

Мода вибірки — її варіанта з найбільшою частотою. Позначають M_o .
Медіана вибірки — число, яке поділяє відповідний варіаційний ряд навпіл. Позначають M_e .

Розмах даної вибірки $r = 9 - 1 = 8$.

Розглядувана вибірка має моду 7, а медіану 5,5, бо $\frac{1}{2}(5+6)=5,5$.

Середнім арифметичним n чисел називають n -ну частину їх суми. Якщо дано n чисел x_1, x_2, \dots, x_n , то їх середнє арифметичне

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне усіх її варіант. Позначають \bar{x}, \bar{S} .

Наприклад, для вибірки 1, 2, 3, 3, 5, 6, 8 середнє значення визначають так:

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(1+2+3+3+5+6+8) = 4.$$

Якщо варіанти вибірки повторюються, то суми рівних доданків можна замінити добутками.

Приклад 1. 7 робітників бригади щомісяця одержують по 12 300 грн, 8 — по 12 450 грн, а 5 — по 12 500 грн. Визначте середню місячну зарплату робітника цієї бригади.

Розв'язання. Всього робітників у бригаді $7 + 8 + 5 = 20$. Тому шукана середня зарплата

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(12\,300 \cdot 7 + 12\,450 \cdot 8 + 12\,500 \cdot 5) = 12\,410.$$

У статистиці часто використовують також середнє квадратичне. Якщо дано n чисел x_1, x_2, \dots, x_n , то їх середнє квадратичне σ визначається за формулою

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}.$$

За допомогою середнього квадратичного найчастіше оцінюють сукупності похибок або відхилень від норми.

Приклад 2. Виточуючи циліндричну деталь радіуса R , токар практично виточує деталь радіуса $R + \alpha$, де α — деяке відхилення (додатне або від'ємне). Нехай два токарі, виточивши по 6 деталей, допустили такі похибки (у десятих частках міліметра):

перший: 2, -5, 4, -3, -3, 5;

другий: 3, -1, 4, 1, 1, 2.

Хто з них виконав завдання якісніше?

Розв'язання. Щоб відповісти на це запитання, обчислюють середні квадратичні допущених відхилень:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{6}(4+25+16+9+9+25)} \approx 14,7;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{6}(9+1+16+1+1+4)} \approx 5,3.$$

Отже, якісніше роботу виконав другий токар.

Перевірте себе

- 1 Що називають статистикою? А математичною статистикою?
- 2 Поясніть, що називають вибіркою. Наведіть приклад.
- 3 Що називають варіантою вибірки? А варіаційним рядом?
- 4 Що називають розмахом; модою; медіаною; середнім значенням вибірки?
- 5 Що називають середнім арифметичним; середнім геометричним; середнім квадратичним кількох чисел?

Виконаємо разом

- 1) Внаслідок вибіркового аналізу виручки (у тис. грн) туристичної фірми за день дістали вибірку обсягом $n = 40$:

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 87 | 94 | 99 | 90 | 90 | 87 | 85 | 87 |
| 90 | 94 | 87 | 87 | 82 | 90 | 94 | 90 |
| 85 | 85 | 87 | 94 | 81 | 82 | 87 | 97 |
| 90 | 94 | 85 | 81 | 87 | 85 | 90 | 82 |
| 94 | 90 | 94 | 82 | 97 | 81 | 85 | 87 |

За цими даними: а) знайдіть розмах вибірки; б) складіть частотну таблицю.

Розв'язання. а) Випишемо різні значення варіант, які потрапили у вибірку: 87; 94; 99; 90; 85; 82; 81; 97.

Щоб знайти розмах вибірки, розмістимо варіанти в порядку зростання: 81; 82; 85; 87; 90; 94; 97; 99.

Тоді $r = 99 - 81 = 18$.

б) Обчислимо частоту кожної варіанти і складемо частотну таблицю:

| | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 81 | 82 | 85 | 87 | 90 | 94 | 97 | 99 |
| n_i | 3 | 4 | 6 | 9 | 8 | 7 | 2 | 1 |

- 2) За результатами аналізу виробництва м'яса (у тис. т) за деякий період в усіх областях України отримали таку сукупність даних:
166; 73; 90; 206; 115; 52; 50; 63; 73; 211; 47; 47; 129; 34; 50; 52; 55;
44; 41; 90; 55; 50; 363; 47; 47.

Знайдіть: моду, медіану та розмах вибірки.

Розв'язання. Розмістимо варіанти вибірки в порядку зростання:

34; 41; 44; 47; 47; 47; 47; 50; 50; 50; 52; 52; 55; 55; 63; 73; 73; 90; 90;
115; 129; 166; 206; 211; 363.

Тоді мода вибірки дорівнює 47 (трапляється 4 рази), медіана — 55 (має 13-й порядковий номер з 25), а розмах — 329 (363 – 34).

Виконайте усно

452. Знайдіть моду та медіану вибірки з 20 варіант:

а) –1; –1; 0; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 8;

б) 3; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 11; 11; 11.

453. Знайдіть середнє значення вибірки:

а) –10; –9; –8; –7; 0; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

б) 0; 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 0.

454. У таблиці подано середні значення вологості (у %) у місті Києві. Знайдіть розмах даної вибірки.

| Січень | Лютий | Березень | Квітень | Травень | Червень |
|--------|-------|----------|---------|---------|---------|
| 82 | 80 | 76 | 67 | 63 | 69 |

| Липень | Серпень | Вересень | Жовтень | Листопад | Грудень |
|--------|---------|----------|---------|----------|---------|
| 72 | 70 | 75 | 78 | 84 | 86 |

A

455. Знайдіть моду та медіану вибірки: 28, 29, 29, 30, 31, 32, 32, 32, 33.

456. Дано вибірку 3, 1, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 1, 2, 1. Побудуйте відповідний їй варіаційний ряд, знайдіть розмах, моду та медіану вибірки.

457. (ЗНО, 2018). У таблиці відображено інформацію щодо кількості відвідувачів кінотеатру протягом семи днів тижня.

| День тижня | Пн | Вт | Ср | Чт | Пт | Сб | Нд |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Кількість відвідувачів | 124 | 140 | 140 | 170 | 163 | 195 | 168 |

Укажіть медіану кількості відвідувачів кінотеатру.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 140 | 155 | 163 | 170 | 195 |

- 458.** Користуючись наведеною на с. 96 частотною таблицею, визначте:
 а) частоту й відносну частоту варіанти, яка відповідає розміру 26;
 б) у скільки разів взуття розміру 26 слід виробляти менше, ніж розміру 29.
- 459.** Вибірка містить усі натуральні числа, менші від 10, а крім того, числа 6, 8, 8 і 13. Побудуйте її варіаційний ряд. Знайдіть розмах вибірки, її моду та медіану.
- 460.** Варіанти 1, 2, 3, 4, 5 вибірки мають частоти 3, 4, 6, 2 і 3 відповідно, а всього вибірка має 18 варіант. Знайдіть її розмах, моду та медіану.
- 461.** Щоб з'ясувати кількість кишенькових грошей, які учні беруть у школу, провели опитування учнів 11 класу. Відповіді утворили певний ряд даних, на основі якого склали його статистичний розподіл частот:



| | | | | | | | | | | |
|------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Кількість грошей, грн | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 85 | 90 | 100 | 130 |
| Частота | 1 | 4 | 4 | 2 | 2 | 5 | 2 | 2 | 2 | 1 |

За цим статистичним розподілом частот установіть відповідність між характеристикою ряду даних (1–4) та її числовим значенням (А–Д).

- | | |
|--------------------|-------|
| 1 Середнє значення | А 110 |
| 2 Мода | Б 50 |
| 3 Медіана | В 60 |
| 4 Розмах | Г 70 |
| | Д 62 |

- 462.** За контрольну роботу з математики отримали 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 і 12 балів відповідно 2, 9, 8, 10, 20, 17, 4, 6 і 4 учнів. Складіть частотну таблицю й обчисліть відносні частоти балів, які траплялися найрідше і найчастіше.
- 463.** Під час медичного обстеження кров'яного тиску в курсантів (в умовах навчального навантаження) одержано такі результати:

| | | | | | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 112 | 114 | 116 | 118 | 120 | 122 | 124 | 126 | 128 | 130 |
| n_i | 5 | 20 | 30 | 40 | 40 | 30 | 20 | 10 | 3 | 2 |

Знайдіть моду, медіану та розмах вибірки.

Б

- 464.** Знайдіть середнє арифметичне: а) усіх натуральних чисел, не більших за 100; б) усіх цілих чисел x таких, що $-110 \leq x \leq 110$.
- 465.** Вибірка містить 60 чисел; з них число 3 трапляється 10 разів, 4 — 20 разів і 5 — 30 разів. Знайдіть її середнє значення, моду та медіану.
- 466.** Вибірка містить усі натуральні числа, більші за 20, але менші за 50, а крім того, числа 13, 31, 31 і 32. Знайдіть її моду, медіану й середнє значення.

467. Михайлина отримала з математики в першому семестрі такі оцінки: «8», «7», «9», «8». Яку кількість оцінок «10» протягом цього семестру треба отримати Михайлині з математики, щоб середнє арифметичне всіх отриманих у першому семестрі оцінок з цього предмета дорівнювало 9,5? Уважайте, що інших оцінок з математики, крім «10», Михайлина отримувати не буде.

468. (ЗНО, 2018). Учень з понеділка до п'ятниці записував час (у хвилинах), який він витрачав на дорогу до школи та зі школи.

| Дорога \ Дні | Понеділок | Вівторок | Середа | Четвер | П'ятниця |
|--------------|-----------|----------|--------|--------|----------|
| до школи | 19 | 20 | 21 | 17 | 23 |
| зі школи | 28 | 22 | 20 | 25 | 30 |

На скільки хвилин у середньому дорога зі школи триваліша за дорогу до школи?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

469. Під час випробувань літака «Антей» були зафіксовані, залежно від напрямку та швидкості вітру, такі результати швидкості (км/год) відриву літака:

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 235 | 231 | 234 | 239 | 238 | 232 | 237 | 239 | 230 | 240 |
| 231 | 238 | 239 | 235 | 233 | 233 | 240 | 234 | 239 | 240 |
| 230 | 230 | 232 | 240 | 230 | 234 | 240 | 235 | 239 | 236 |


Побудуйте варіаційний ряд і частотну таблицю цієї вибірки.

- 470.** Виберіть по уривку (1 сторінка) художнього твору двох різних авторів, прочитайте їх. Для букв «а», «б», «н», «о», «ч», «я» складіть частотні таблиці їх наявності в обраних уривках. Порівняйте їх.
- 471.** Чи правильно, що сума різниць між усіма варіантами вибірки та її середнім значенням дорівнює нулю? Наведіть приклади. Обґрунтуйте.
- 472.** Знайдіть середній відсоток бракованих виробів, користуючись такою таблицею.

| Партія товару | Кількість виробів, шт. | Відсоток бракованих виробів | Кількість бракованих виробів, шт. |
|---------------|------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| I | 2000 | 3,4 | 68 |
| II | 1420 | 2,46 | 35 |
| III | 408 | 0,49 | 2 |
| Разом | 3828 | | 105 |

473. Протягом 5 днів маси десяти бичків збільшилися відповідно на 2,5; 3,0; 2,8; 2,7; 2,7; 2,8; 2,0; 2,4; 2,6 і 2,9 кілограма. Знайдіть середній денний приріст маси одного бичка.
474. Суму n чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ позначають символом $\sum_{i=1}^n a_i$ (знак суми Σ — сигма велика). Запишіть за допомогою цього знака середнє арифметичне та середнє квадратичне даних n чисел.
475. Три фрезерувальники виготовили по 5 однакових деталей завдовжки 235 мм, допустивши відповідно такі похибки (у мм):
 перший: 0,2, -0,2, -0,5, 0,3, 0,4;
 другий: 0,1, 0,5, -0,2, -0,4, 0,5;
 третій: 0,5, -0,1, -0,4, 0,3, 0,4.
 Знайдіть середні квадратичні допущених ними похибок. Який фрезерувальник виконав завдання найкраще?

Вправи для повторення

476. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = 2x^3 + 1$ у точці $x_0 = 1$.
-  477. Ціна на автомобіль спочатку підвищилася на 10 %, а потім знизилася на 10 %. Як змінилася ціна після двох переоцінок?
478. Побудуйте графік функції: а) $y = x + 2$; б) $y = x^2 + 2$; в) $y = -x + 2$; г) $y = -x^2 + 2$.

§ 13. ГРАФІЧНІ ПОДАННЯ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ВИБІРКИ

Статистична таблиця — це особлива форма раціонального і систематизованого викладу узагальнюючих характеристик статистичної сукупності.

Статистичні дані зводять у таблиці. Як і графічне речення, статистична таблиця має *підмет* і *присудок*. У підметі наводиться перелік елементів, явищ, ознак, про які йдеться в таблиці. У присудку таблиці подаються кількісні характеристики. Наприклад, у таблиці 2 про урожайність зернових в Україні підметом є лівий стовпчик. Числові дані в інших комірках — присудок таблиці.

Урожайність зернових в Україні (у ц/га)

Таблиця 2

| Зернові культури \ Роки | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 |
|-------------------------|------|------|------|------|
| Пшениця | 40,1 | 38,8 | 42,1 | 41,1 |
| Жито | 25,8 | 25,9 | 27,3 | 29,6 |
| Ячмінь | 30,1 | 29,5 | 33,0 | 33,1 |

Інформацію про ту чи іншу вибірку часто подають графічно, найчастіше у формі діаграм. Слово *діаграма* у перекладі з грецької означає малюнок, креслення. Правда, тепер цим словом називають не будь-який малюнок, а схематичне зображення відношень між множинами, різні структури, алгоритми дій тощо. Відношення (співвідношення) між множинами й обсягами понять найчастіше зображають у вигляді діаграм-дерев або діаграм Ейлера.

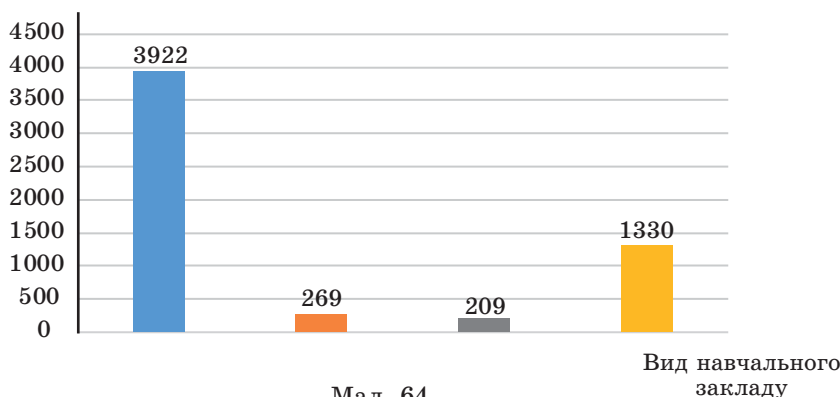
Структури моделей, різні діаграми класів, станів зручно подавати у вигляді кругових (секторних) діаграм.

На малюнках 63 і 64 на секторній і стовпчастій діаграмах зображені співвідношення між чисельністю осіб, які в 2017 році навчалися у різних навчальних закладах України (у тисячах осіб).



Мал. 63

Чисельність осіб



Мал. 64

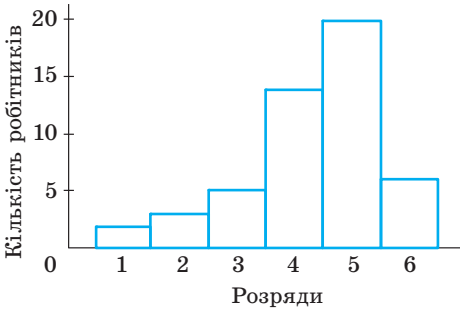
Стовпчасту діаграму із з'єднаних прямокутників називають **гістограмою**.

На малюнку 65 зображено гістограму, яка відповідає наведеній нижче таблиці 3 розподілу робітників цеху за тарифними розрядами.

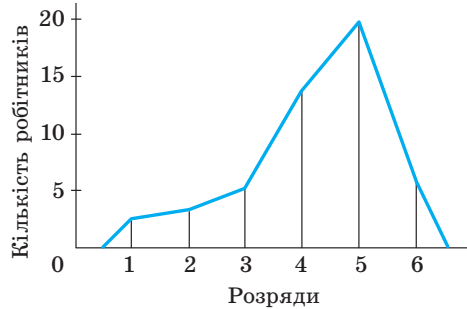
Таблиця 3

| Тарифний розряд | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Усього |
|----------------------|---|---|---|----|----|---|--------|
| Кількість робітників | 2 | 3 | 5 | 14 | 20 | 6 | 50 |

Іноді замість гістограми будують *полігон розподілу*, з'єднуючи відрізками середини верхніх основ послідовних прямокутників гістограми (мал. 66). Бувають також інші діаграми.

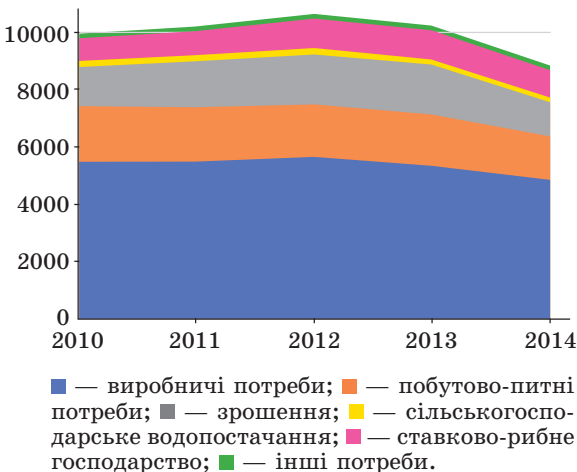


Мал. 65



Мал. 66

Наприклад, на малюнку 67 наведено діаграму споживання води в Україні, а на малюнку 68 — обсяг споживання води на господарсько-побутові потреби в розрахунку на 1 людину, літрів на добу в 4 країнах (Білорусь, Казахстан, Молдова, Україна). (Примітка: на діаграмі під аббревіатурою країни вказано приріст показника в 2010 році порівняно з 2000 роком).



Мал. 67



Мал. 68

Перевірте себе

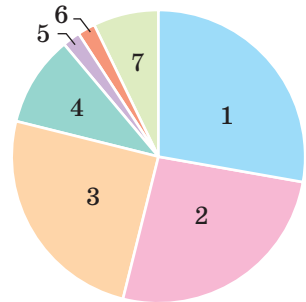
- 1 Які способи подання відомостей ви знаєте?
- 2 Опишіть структуру статистичної таблиці.
- 3 Які види діаграм ви знаєте?
- 4 Що називають гістограмою?
- 5 Що називають полігоном?
- 6 Що використовують для побудови таблиць, графіків і діаграм?

Виконаємо разом

- 1) За даними таблиці «Структура валового збору зернових культур у світі (%)» побудуйте секторну діаграму.

| Пшениця | Рис | Кукурудза | Ячмінь | Овес | Жито | Інші |
|---------|-----|-----------|--------|------|------|------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 28 | 26 | 25 | 10 | 2 | 2 | 7 |

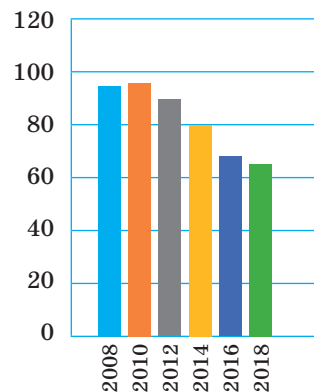
Розв'язання. На 100 % припадає 360° , а на 1 % — $3,6^\circ$. Помноживши $3,6^\circ$ на дані таблиці, отримаємо: $100,8^\circ$; $93,6^\circ$; 90° ; 36° ; $7,2^\circ$; $7,2^\circ$; $25,2^\circ$. Побудувавши центральні кути з відповідними градусними мірами, отримаємо потрібну діаграму (мал. 69). Досить просто побудувати таку діаграму за допомогою програми Microsoft Graf (через команди Вставка/Об'єкт/ Діаграма Microsoft Graf) або програми Excel.



Мал. 69

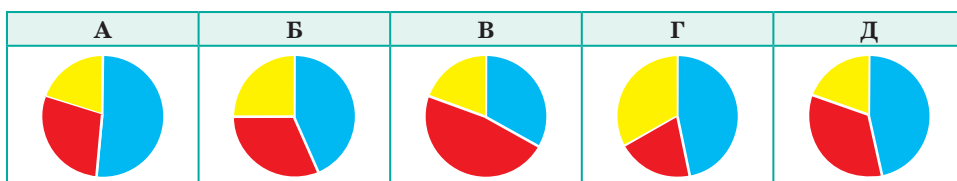
Виконайте усно

479. На малюнку 70 зображено діаграму, що подає динаміку споживання води на одну людину (літрів на добу) в одному з житлових комплексів, що об'єднані в ОСББ. Як називають таку діаграму? Чому, на вашу думку, зменшується споживання питної води? Які заходи слід використати, щоб зменшити споживання води у вашому будинку та школі?



Мал. 70

- ✓ 480. (ЗНО, 2019). У саду ростуть 60 дерев: 28 яблунь, 20 вишень і 12 абрикос. На одній із діаграм правильно зображено розподіл дерев у саду. Укажіть цю діаграму.



■ — яблуні ■ — вишні ■ — абрикоси

481. Проаналізуйте таблицю, у якій подано результати переможців на зимових параолімпійських іграх 2018 року. Дайте відповіді на запитання:
- скільки медалей отримали спортсмени України;
 - спортсмени яких країн отримали однакову кількість срібних (бронзових) медалей;
 - спортсмени яких країн отримали найменшу кількість срібних (бронзових) медалей?

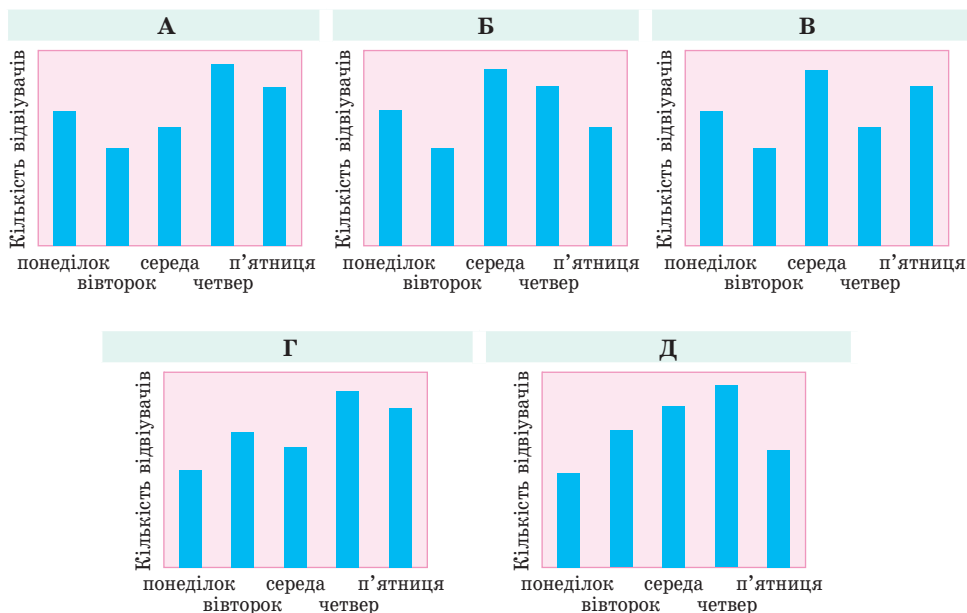
| Місце | Країна | Золото | Срібло | Бронза | Усього |
|-------|----------------------------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | США | 13 | 15 | 8 | 36 |
| 2 | Олімпійські атлети з Росії | 8 | 10 | 6 | 24 |
| 3 | Канада | 8 | 4 | 16 | 28 |
| 4 | Франція | 7 | 8 | 5 | 20 |
| 5 | Німеччина | 7 | 8 | 4 | 19 |
| 6 | Україна | 7 | 7 | 8 | 22 |
| 7 | Словакія | 6 | 4 | 1 | 11 |
| 8 | Білорусь | 4 | 4 | 4 | 12 |
| 9 | Японія | 3 | 4 | 3 | 10 |
| 10 | Нідерланди | 3 | 3 | 1 | 7 |

А

482. Побудуйте таблицю за даними малюнка 70. Укажіть її підмет і присудок. Складіть таблицю про споживання води у вашій родині протягом останніх 6 місяців. Зробіть висновок.
- ✓ 483. (ЗНО, 2017). У таблиці наведено дані про кількість глядачів, які відвідали кінотеатр протягом п'яти днів.

| День тижня | Понеділок | Вівторок | Середа | Четвер | П'ятниця |
|------------------------|-----------|----------|--------|--------|----------|
| Кількість відвідувачів | 82 | 116 | 102 | 140 | 130 |

На діаграмах немає шкали (градації) кількості глядачів. Визначте, на якій діаграмі правильно відображено дані, наведені в таблиці.



- 484.** У таблиці наведено результати виступів кращих команд на 59-й міжнародній математичній олімпіаді (2018 р., Румунія, понад 100 країн світу). Проаналізуйте дані таблиці. Для кожної з шести олімпіадних задач установіть середнє значення результатів. За отриманими даними побудуйте графік.

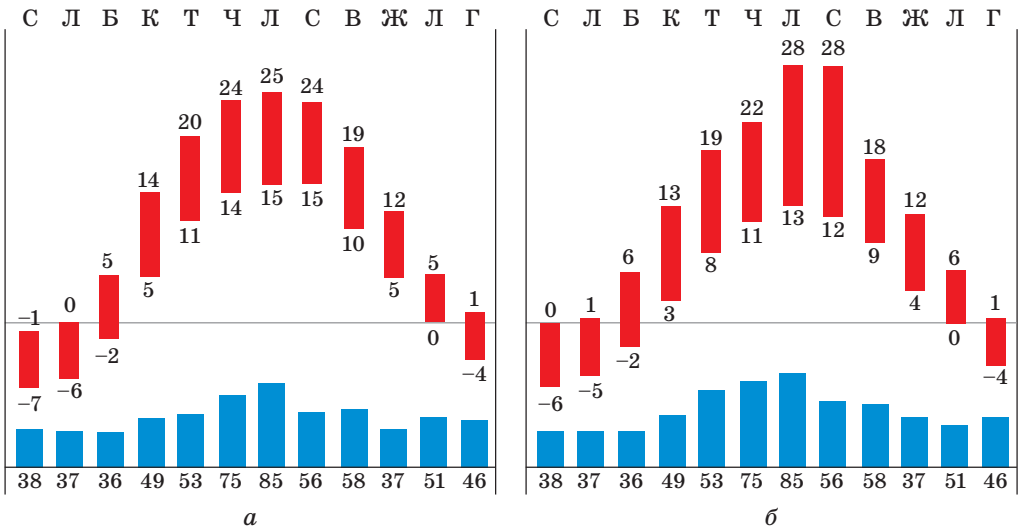
| Країна | Медалі | | | Результати по задачах | | | | | | Σ |
|------------------|--------|---|---|-----------------------|----|----|----|----|----|-----|
| | З | С | Б | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| США | 5 | 1 | — | 42 | 41 | 14 | 42 | 42 | 31 | 212 |
| Росія | 5 | 1 | | 42 | 42 | 11 | 42 | 41 | 23 | 201 |
| Китай | 4 | 2 | — | 42 | 37 | 17 | 42 | 42 | 19 | 199 |
| Україна | 4 | 2 | — | 42 | 34 | 12 | 42 | 42 | 14 | 186 |
| Таїланд | 3 | 3 | | 42 | 38 | 3 | 42 | 42 | 16 | 183 |
| Тайвань | 3 | 1 | 2 | 42 | 42 | 15 | 37 | 25 | 18 | 179 |
| Республіка Корея | 3 | 3 | — | 42 | 42 | 3 | 42 | 36 | 12 | 177 |
| Сінгапур | 2 | 3 | 1 | 41 | 42 | 3 | 42 | 37 | 10 | 175 |
| Польща | 1 | 5 | | 42 | 39 | 7 | 42 | 37 | 7 | 174 |
| Індонезія | 1 | 5 | | 42 | 38 | 3 | 42 | 36 | 10 | 171 |
| Австралія | 2 | 3 | 1 | 42 | 34 | 13 | 42 | 31 | 7 | 169 |
| Великобританія | 1 | 4 | — | 42 | 30 | 7 | 37 | 33 | 12 | 161 |

- 485.** Складіть таблицю, яка відображає вашу успішність за перше півріччя:
а) 10 класу; б) 11 класу. Побудуйте відповідну діаграму.
- 486.** В Україні дотримуються приблизно такої структури посівних площ:
озима пшениця — 23 %, інші зернові культури — 22 %, кормові культури — 37 %, технічні культури — 12 %, картопля й овочі — 6 %. Побудуйте відповідну секторну діаграму.
- 487.** Побудуйте стовпчасту діаграму за даними (в тис. осіб) про кількість мешканців найбільших міст України (2014 р.):
Київ — 2869; Дніпро — 993;
Харків — 1451; Запоріжжя — 766;
Одеса — 1017; Львів — 729.
- 488.** Юнаки-старшокласники однієї школи за зростом розподілені так:

| Зріст, см | 150 | 155 | 160 | 165 | 170 | 175 | 180 |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Кількість юнаків | 1 | 4 | 5 | 15 | 25 | 8 | 2 |

Побудуйте відповідну гістограму і полігон.

- 489.** На малюнку 71 зображено кліматограми для Києва (а) і Львова (б), на яких для кожного місяця подано інформацію про суму опадів (у мм, блакитний колір) і середню температуру (у °С, червоний колір). Схарактеризуйте ці діаграми. Укажіть якнайбільше спільних і відмінних ознак. Порівняйте їх за окремі місяці. Установіть, у якому місяці різниця між найвищою і найнижчою температурами у цих містах: а) найбільша; б) найменша.



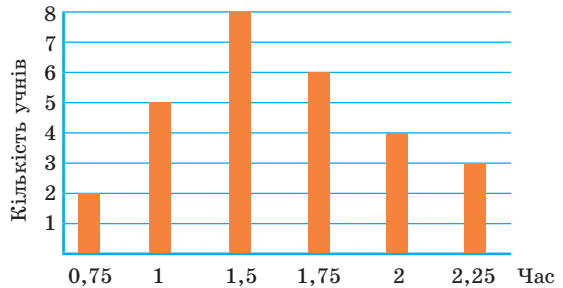
Мал. 71

- 490.** Порівняйте кількість опадів, що випадають протягом відповідних місяців у Києві і Львові (скористайтесь малюнком 71). Визначте розмах і середнє значення кожної вибірки. Установіть, у якому місяці різниця опадів у цих містах: а) найбільша; б) найменша.

491. На основі відомостей, поданих в таблиці 2, побудуйте кілька стовпчастих діаграм і дайте назву кожній з них. Складіть аналогічну таблицю та відповідні діаграми про врожайність кукурудзи і сояшника. Знайдіть середнє значення для кожної з вибірок.

Б

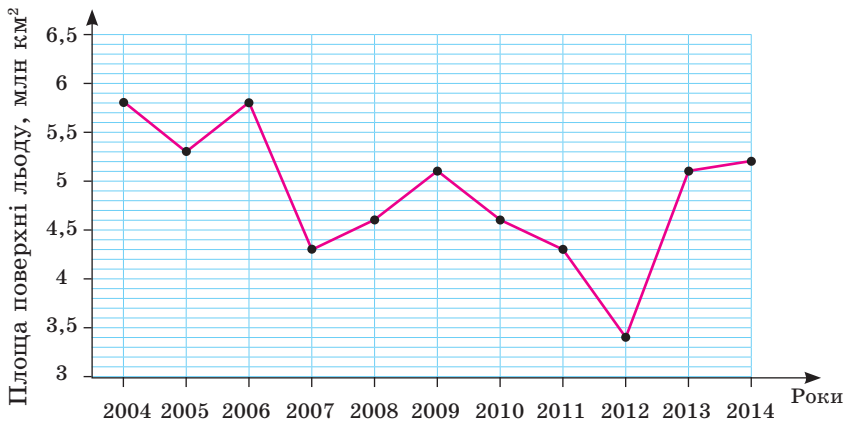
492. Серед учнів 10 класу провели опитування: скільки часу (у годинах) витрачають вони щодня на виконання домашніх завдань. Результати опитування подано у вигляді діаграми, зображеної на малюнку 72. Укажіть розмах і моду даної вибірки. Установіть, скільки часу в середньому учень цього класу готує домашнє завдання.



Мал. 72

493. За допомогою програми Microsoft Graf чи Excel на основі даних таблиці №481 побудуйте гістограму, яка для кожної країни задає кількість: а) бронзових медалей; б) срібних медалей. Для кожної діаграми встановіть розмах вибірки.

494. (ЗНО, 2016). На малюнку 73 жирними точками позначено річні мінімуми площі поверхні арктичного льоду, що спостерігалися в період з 2004 по 2014 р. (для наочності точки з'єднано відрізками). По горизонталі відмічено роки, а по вертикалі — площу поверхні льоду (у млн км²). Користуючись наведеною інформацією, визначте із вказаного періоду рік, у якому величина річного мінімуму площі поверхні льоду змінилася *найбільше* порівняно з попереднім роком.



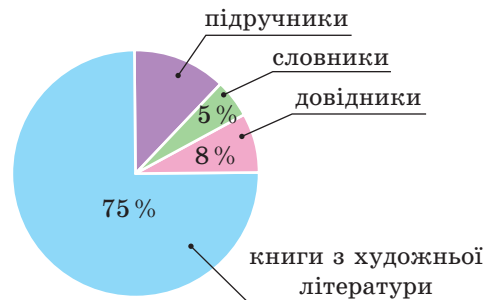
Мал. 73

| А | Б | В | Г | Д |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 2006 р. | 2007 р. | 2009 р. | 2012 р. | 2013 р. |

- 495.** За допомогою програми Microsoft Graf чи Excel на основі даних таблиці № 484 побудуйте графік, який для кожної країни задає загальну кількість балів переможців.
- 496.** За допомогою програми Microsoft Graf чи Excel на основі даних таблиці № 484 побудуйте діаграми, які для кожної країни задають кількість балів, отриманих за розв'язання задач 3 і 6.
- 497.** Головними складовими частинами повітря (недалеко від земної поверхні) є азот — 78,08 % об'єму, кисень — 20,96 % об'єму й інертні гази — 0,94 % об'єму. Кількість цих газів у повітрі не змінюється, тому їх називають постійними складовими частинами повітря. Побудуйте секторну діаграму складу повітря. Установіть, який відсоток об'єму займають інші гази.
- 498.** У таблиці наведено склад молока деяких ссавців. Для кожного виду ссавців побудуйте секторну діаграму. Який вид графічного подання інформації найкраще покаже відмінності у складі молока? Виконайте таке зображення.

| Складники (%) | Корова | Вівця | Коза | Кобила | Самка оленя |
|---------------|---------|-------|------|--------|-------------|
| Вода | 87,5 | 82,7 | 86,6 | 90,1 | 66,9 |
| Вуглеводи | 4,8 | 6,3 | 3,9 | 5,9 | 2,8 |
| Жир | 3,5–4,2 | 5,3 | 3,7 | 1,5 | 16,9 |
| Білок | 3,5 | 4,6 | 4,2 | 2,1 | 11,9 |
| Мікроелементи | 0,7 | 0,9 | 0,8 | 0,4 | 1,5 |

- 499.** (ЗНО, 2016). У бібліотеці є лише підручники, словники, довідники та книги з художньої літератури. Відсотковий розподіл кількості цих книг у бібліотеці відображено на діаграмі (мал. 74).



Мал. 74

- а) Визначте загальну кількість книг у цій бібліотеці, якщо кількість підручників дорівнює 72.
- б) Скільки потрібно придбати додатково підручників, щоб отримана після цього їхня сумарна кількість відносилася до кількості довідників, як 4:1?

- 500.** За даними таблиці № 484 складіть вибірку, яка для кожної країни з таблиці задає кількість балів за розв'язання кожної задачі. Побудуйте варіаційний ряд і частотну таблицю для цієї вибірки. Знайдіть моду, медіану і розмах вибірки.

501. Урожайність пшениці (у ц/га) на різних частинах поля (у %) ферми подано в таблиці.

| Урожайність | 20–25 | 26–30 | 31–35 | 36–40 | 41–45 | 46–50 |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Частка площі | 6 | 15 | 33 | 21 | 20 | 5 |

Побудуйте відповідну гістограму і полігон. Знайдіть середню врожайність пшениці для даної ферми.

502. На малюнку 75 зображено структуру генерації електроенергії в Європі і деталізовано частку відновлювальної енергетики. Користуючись цією діаграмою, установіть, які з наведених тверджень, що стосуються джерел енергії в Європі за 2016 рік, є правильними.

а) Розвиток відновлювальних джерел енергії (ВДЕ) випереджує інші окремо взяті джерела.

б) Вископні джерела разом перевищують атомну енергію.

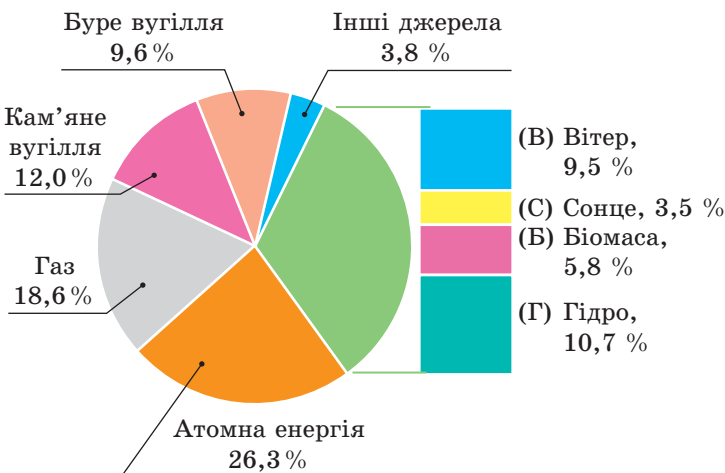
в) Газ у якості джерела електроенергії використовується на 36 % менше порівняно з відновлювальними джерелами енергії.

503. Побудуйте окремо секторну діаграму, яка відображає структуру відновлювальної енергетики в Європі за 2016 рік. Порівняйте її зі структурою виробництва електроенергії з відновлювальних джерел в Україні (мал. 76). Доповніть речення, щоб сформульовані твердження стали істинними.

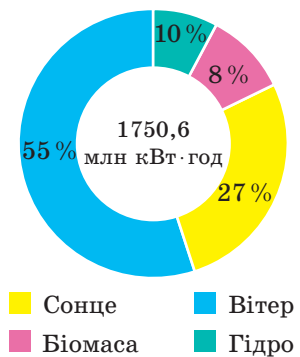
а) У складі ВДЕ в ... переважає енергетика з вітрових електростанцій.

б) Сонячна енергетика займає останнє місце у ВДЕ ...

в) У ... використання біомаси і малих гідроелектростанцій займає більшу частину всіх ВДЕ.



Мал. 75



Мал. 76

Вправи для повторення

504. Знайдіть одну з первісних функцій:

а) $y = 2x^3 - x$; б) $y = 2 - x^2$; в) $y = 2\sin x$; г) $y = \sin 2x$.

505. Доведіть, що функція $y = 2x^3 - x$ — непарна, а функція $y = 2 - x^2$ — парна.

506. Яке двоцифрове число у 4 рази більше за суму своїх цифр і у 2 рази більше за їх добуток?

§ 14. Випадкові події та їх імовірності

Побудова та дослідження моделей різних процесів, пов'язаних з поняттям випадковості, — сфера математичної статистики й теорії ймовірностей. До таких процесів, наприклад, належать ризики (ризиковані операції) на виробництві та в банківській справі, масові захворювання серед рослин, тварин чи людей, азартні ігри.

Попередні параграфи дали вам певні уявлення про математичну статистику, а тепер дещо розширимо відомості про теорію ймовірностей.

З 9-го класу ви знаєте, що найважливішими поняттями теорії ймовірностей є: *ймовірнісний експеримент* (випробування, спостереження), *подія* (наслідок випробування) та *ймовірність події*. Наведемо приклади випробувань та їх окремих наслідків — деяких подій.

| | Випробування | Подія |
|---|----------------------|---------------------|
| 1 | Падає монета | Упала догори гербом |
| 2 | Грають команди А і С | Виграла команда С |
| 3 | Людина чекає ранку | Настав ранок |
| 4 | Падає гральний кубик | Випало 0 очок |

Остання подія неможлива, бо на гранях грального кубика немає нуля. Подія 3 достовірна (вірогідна), бо після ночі завжди настає ранок. Події 1 і 2 випадкові.



Подію називають **неможливою**, якщо вона ніколи не може відбутися, **достовірною** — якщо вона завжди відбувається. Якщо подія може відбутися або не відбутися, її називають **випадковою**.

Прийнято вважати, що неможлива й вірогідна події — окремі випадки випадкової події.

Події позначають великими латинськими буквами A, B, C, \dots або однією латинською буквою з індексом: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Зміст події подають у фігурних дужках. Наприклад, третю подію з таблиці можна записати так: $A_3 = \{\text{настав ранок}\}$.

Сказати наперед про випадкову подію, що вона відбудеться чи не відбудеться, неможливо. Якщо ця подія масова, тобто виконується багато разів і за однакових умов, то ймовірність її настання можна охарактеризувати деяким числом.

Це можна зробити тоді, коли наслідки випробувань становлять скінченну множину і є рівноможливими. Тобто в умовах проведеного випробування немає підстав вважати появу одного з наслідків більш чи менш можливим за інші.

Приклад 1. Кидають один раз правильний однорідний гральний кубик (мал. 77) і фіксують суму очок на грані, що випала догори. Результатом такого випробування можуть бути 6 різних подій:

$$E_1 = \{\text{випаде одне очко}\};$$

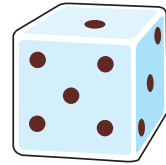
$$E_2 = \{\text{випаде два очки}\};$$

$$E_3 = \{\text{випаде три очки}\};$$

$$E_4 = \{\text{випаде чотири очки}\};$$

$$E_5 = \{\text{випаде п'ять очок}\};$$

$$E_6 = \{\text{випаде шість очок}\}.$$



Мал. 77

Ці шість подій охоплюють і вичерпують усі можливі наслідки експерименту. Вони *попарно несумісні*, бо щоразу випадає тільки одна кількість очок. Усі шість подій *однаково можливі*, бо йдеться про однорідний кубик правильної форми, і спритність гравця виключається. У такому разі вважають, що для здійснення кожної події існує один шанс із шести.

Кожну з подій $E_1 - E_6$ для наведеного вище випробування називають *елементарною*, а всю їх множину — *простором елементарних подій*.

Якщо простір елементарних подій для деякого випробування складається з n рівноможливих несумісних подій, то ймовірність кожної з них дорівнює $\frac{1}{n}$.

Наприклад, імовірність того, що на підкинутому гральному кубуку випаде 5 очок, дорівнює $\frac{1}{6}$. А ймовірність того,

що підкинута монета впаде догори гербом, дорівнює $\frac{1}{2}$. Ймовірність події

A позначають $P(A)$. Якщо першу подію позначити буквою A , а другу — B ,

$$\text{то } P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{2}.$$

Існують події *неелементарні*.

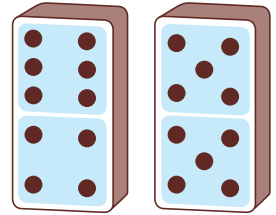
Елементарною подією називають кожен можливий наслідок імовірнісного експерименту. Множину всіх можливих наслідків експерименту називають **простором елементарних подій** і позначають грецькою буквою Ω (омега).

Приклад 2. Розглянемо подію $C = \{\text{поява кісточки доміно з 10 очками}\}$.

Оскільки кісточок доміно всього 28, то випробування, пов'язане з вибором однієї кісточки, вичерпується 28 рівноможливими й незалежними наслідками. Отже, простір елементарних подій для даного випробування з 28 елементарних подій становить E_i , де $i = 1, 2, \dots, 28$. Подія C може відбутися, якщо відбудеться одна з двох елементарних подій (мал. 78):

$$1) E_1 = \{\text{поява пластинки } \frac{4}{6}\};$$

$$2) E_2 = \{\text{поява пластинки } \frac{5}{5}\}.$$



Мал. 78

Оскільки події C сприяють дві елементарні події (E_1, E_2) з можливих 28, то $P(C) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$.

Розглянемо загальний випадок. Нехай випробування має скінченну кількість (n) рівноможливих та несумісних наслідків і A — деяка випадкова подія, пов'язана з даним випробуванням.

Назвемо елементарну подію E_n *сприятливою для випадкової події A* , якщо настання події E_n внаслідок випробування приводить до настання події A .

Якщо кількість наслідків (елементарних подій), сприятливих події A , позначити через $n(A)$, то ймовірність випадкової події A визначиться формулою:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Ймовірністю випадкової події A називають відношення кількості елементарних подій $n(A)$, сприятливих для події A , до кількості всіх рівноможливих і попарно несумісних елементарних подій, які утворюють простір елементарних подій для певного випробування. Таке означення ймовірності називають **класичним**.

Назвемо важливі *властивості ймовірності випадкової події*:

- якщо C — подія неможлива, то $P(C) = 0$;
- якщо B — подія достовірна, то $P(B) = 1$;
- якщо X — подія випадкова, то $0 \leq P(X) \leq 1$;
- якщо $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ — елементарні події, що вичерпують деяке випробування, то

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots + P(E_n) = 1.$$

Приклад 3. Під час тестування пральної машини з'ясувалося, що одна з п'яти деталей a, b, c, d, e має дефект. Є можливість за один раз перевірити три деталі, які механік довільно обирає з визначених. Чому дорівнює ймовірність того, що:

- а) буде перевірена деталь a (подія M);
 б) будуть перевірені деталі a і b (подія N);
 в) буде перевірена хоча б одна з деталей a і b (подія K)?

Розв'язання. Побудуємо простір елементарних подій для цього випробування (з 5 деталей обрано 3). Маємо:

$$abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cbe.$$

а) Події M сприяють 6 елементарних подій з 10: $abc, abd, abe, acd, ace, ade$. Можемо знайти ймовірність події A :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

б) Події N сприяють 3 елементарні події з 10 (abe, abd, abe), тому ймовірність події N дорівнює $\frac{3}{10}$.

в) Події K сприяють 9 елементарних подій з 10 (усі, крім cde), тому ймовірність події K дорівнює $\frac{9}{10}$.

Обчислювати ймовірності подій часто допомагають правила та формули комбінаторики.

Приклад 4. На вершину гори ведуть 4 однаково зручні стежки. Яка ймовірність того, що ви підніметеся на гору та спуститеся з неї тим самим маршрутом, яким проходив тут колись ваш товариш?

Розв'язання. Усього існує $4 \cdot 4 = 16$ різних маршрутів. Оскільки всі вони однаково зручні, то ймовірність пройти по одному з них дорівнює $\frac{1}{16}$.

Приклад 5. Учениця цифрами 1, 2, 3, 4, 5 написала невідоме вам п'ятицифрове число. Яка ймовірність того, що ви одразу відгадаєте це число?

Розв'язання. Усього таких чисел є $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Ймовірність угадати одне з них дорівнює $\frac{1}{120}$.

Приклад 6. У кошику є 20 яблук, однакових на вигляд: 15 — солодких, а 5 — кислих. Яка ймовірність того, що взяті навмання два яблука виявляться кислими?

Розв'язання. Вибрати пару з усіх 20 яблук можна C_{20}^2 способами, а з 5 яблук — C_5^2 способами:

$$C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190; \quad C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Отже, шукана ймовірність $P = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$.

Перевірте себе

- 1 Які події називають випадковими?
- 2 Наведіть приклади випадкових подій.
- 3 Які події називають неможливими; достовірними?
- 4 Наведіть приклад простору елементарних подій.
- 5 Які події називають елементарними? Наведіть приклади.
- 6 Чому дорівнює ймовірність достовірної події? А неможливої?
- 7 Сформулюйте класичне означення ймовірності.
- 8 Як обчислюють імовірності, використовуючи формули комбінаторики?

Виконаємо разом

- 1) З перевернутих 28 кісточок доміно навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на одній з її частин виявиться одне очко (подія A)?

Розв'язання. Підрахуємо, скільки існує кісточок доміно, які містять

одне очко: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}$. Усього — 7. Можливостей

вибору маємо 28, бо взяти можна будь-яку з 28 кісточок. Отже,

$$P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

- 2) На кожній із чотирьох карток написано одну букву: А, Й, Р, К. Картки перемішують і розкладають у ряд. Яка ймовірність того, що утвориться слово КРАЙ?

Розв'язання. З чотирьох написаних букв можна утворити $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ перестановки, але умову задачі задовольняє тільки одна. Отже, шукана

$$\text{ймовірність } P = \frac{1}{24}.$$

- 3) На 1000 білетів лотереї припадає 1 виграш 5000 грн, 10 виграшів — по 1000 грн, 50 — по 200 грн, 100 — по 50 грн. Решта білетів — невиграшні. Знайдіть імовірність виграшу на один білет, не меншого за 200 грн.

Розв'язання. Білетів, на які припадають виграші, не менші за 200 грн, всього $1 + 10 + 50 = 61$. Загальна кількість білетів — 1000. Тому шукана ймовірність дорівнює $61 : 1000 = 0,061$.

- 4) Студент прийшов на екзамен, знаючи відповіді лише на 20 з 25 запитань програми. Знайдіть імовірність того, що він із трьох запропонованих запитань знатиме відповіді принаймні на два.

Розв'язання. Усього варіантів трійок запитань C_{25}^3 . З них C_{20}^3 таких, на які студент може відповісти повністю. Він може відповісти також C_{20}^2 на пар запитань.

Якщо до кожної такої пари запитань приєднати одне з 5 запитань, яких він не знає, дістанемо ще $5 \cdot C_{20}^2$ трійок.

Отже, шукана ймовірність

$$P = (C_{20}^3 + 5 \cdot C_{20}^2) : C_{25}^3 = (1140 + 950) : 2300 = \frac{209}{230}.$$

Виконайте усно

507. Якою, з погляду теорії ймовірностей, є подія:
- а) під час падіння грального кубика випануть шість очок;
 - б) лампочка перегорить у кухні;
 - в) побудований графік непарної функції виявиться симетричним відносно початку координат;
 - г) вибране навмання двоцифрове число виявиться парним;
 - г) температура на Сонці нижча за температуру на Землі?
508. Опишіть простір елементарних подій для експерименту:
- а) встановлення дня народження довільно обраного мешканця України;
 - б) визначення кількості різних коренів квадратного рівняння;
 - в) встановлення кількості спільних точок кола та параболи, побудованих в одній системі координат;
 - г) визначення одного додаткового вихідного дня за умови 6-денного робочого тижня.
509. Яка ймовірність того, що під час падіння грального кубика випаде парне число очок?
510. Яка ймовірність того, що під час падіння монети випаде цифра; герб?
511. Візьміть навмання кісточку доміно. Яка ймовірність того, що вона:
- а) дубль; б) не дубль?
512. У класі навчається 10 хлопців і 20 дівчат. Яка ймовірність того, що до дошки першим викличуть: а) дівчину; б) хлопця; в) вас; г) дівчину або хлопця?

A

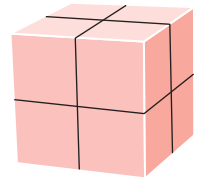


513. Волонтери екологічної організації проводили у супермаркеті акцію щодо використання багаторазових торбинок для овочів. Бажаючим дарували одну торбинку, яку діставали з коробки. Яка ймовірність того, що витягнута торбинка буде не червоною, якщо в коробці залишилося 2 білі, 3 зелені і 5 червоних торбинок?
514. Яка ймовірність того, що під час падіння грального кубика випаде:
- а) два очки; б) парна кількість очок; в) кількість очок, кратна 3?
515. З перевернутих 28 пластинок доміно навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на ній виявиться всього:
- а) 2 очки (подія A); б) 5 очок (подія B); в) 12 очок (подія C)?

516. З перевернутих 28 кісточок доміно навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на одній з її частин виявиться 6 очок (подія A)?
517. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибране натуральне одноцифрове число: а) є число 7; б) ділиться на 3.
- ✓ 518. (ЗНО, 2010). Пасічник зберігає мед в однакових закритих металевих бідонах. Їх у нього дванадцять: у трьох бідонах міститься квітковий мед, у чотирьох — мед із липи, у п'яти — мед із гречки. Знайдіть ймовірність того, що перший навмання відкритий бідон буде містити квітковий мед.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------|----------------|----------------|---------------|---------------|
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{3}$ |

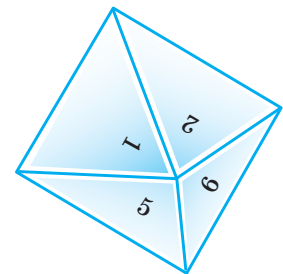
519. Пофарбований з усіх боків дерев'яний кубик розпиляли на 8 рівних кубиків (мал. 79) і зсипали їх у коробку. Яка ймовірність того, що вийнятий навмання з коробки кубик матиме зафарбовану: а) тільки одну грань; б) дві грані; в) не менше трьох граней?



Мал. 79

520. Пофарбований з усіх боків дерев'яний кубик розпиляли на 64 рівні кубики і зсипали їх у коробку. Яка ймовірність того, що вийнятий навмання з коробки кубик матиме зафарбовану: а) тільки одну грань; б) дві грані; в) не менше трьох граней?
521. Пофарбований дерев'яний кубик розпиляли на 125 рівних кубиків і зсипали їх у торбину. Яка ймовірність того, що, беручи з торбини навмання один кубик, ви візьмете такий, що має: а) тільки одну пофарбовану грань; б) тільки дві пофарбовані грані; в) не менше трьох граней?
522. З букв, написаних на окремих квадратних картках, склали слово МАТЕМАТИКА. Потім ці картки перевернули, перемішали і навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на ній написано: а) букву А; б) букву М?

523. Уявіть, що на кожній грані правильного октаедра написано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (мал. 80). Яка ймовірність того, що під час падіння такого грального октаедра випаде: а) цифра 7; б) цифра 8; в) цифра 9?

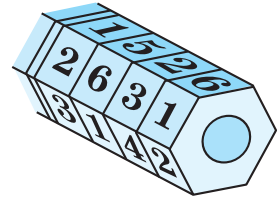


Мал. 80

524. У торбині міститься 5 білих і 7 чорних кульок. Яка ймовірність того, що, беручи навмання, ви виймете: а) білу кульку; б) чорну кульку?
525. Їдальня на обід приготувала: 3 перші страви — борщ, суп, капуста; 4 другі — вареники, голубці, котлети, рагу; 2 десертні — морозиво й тістечка. Яка ймовірність того, що хтось, не знаючи смаків товариша, замовить для нього борщ, котлети й морозиво?

- ✓ 526. (ЗНО, 2014). З усіх натуральних чисел, більших за 9 і менших від 20, навмання вибирають одне число. Установіть відповідність між подією (1–4) та ймовірністю її появи (А–Д).
- | | | | |
|---|--|---|-----|
| 1 | Вибране число буде простим | А | 0 |
| 2 | Вибране число буде двоцифровим | Б | 0,2 |
| 3 | Вибране число буде дільником числа 5 | В | 0,3 |
| 4 | Сума цифр вибраного числа буде ділитися на 3 | Г | 0,4 |
| | | Д | 1 |

527. Замок із «секретом» містить 4 шестикутні призми, які можуть повертатися незалежно одна від одної навколо спільної осі (мал. 81). На кожній бічній грані призми написано цифру від 1 до 6. Повертаючи призми, у прорізі замка можна встановити будь-яке чотирицифрове число, записане такими цифрами. Замок відмикається тільки тоді, коли буде набрано число, яке становить «секрет» замка. Яка ймовірність того, що людина, яка не знає цього «секрету», відкриє замок за один набір числа навмання?



Мал. 81

528. На полицю навмання поставили чотиритомний словник. Яка ймовірність того, що книжки поставлено в належній послідовності?
529. Дівчинка хотіла нанизати на нитку 7 різних намистин. Це зробив її братик. Яка ймовірність того, що він зробив саме так, як хотіла дівчинка?
530. На столі лежать 5 перевернутих і перетасованих карток, на кожній з яких написано одну з букв — А, Е, О, Р, Т. Яка ймовірність того, що:
а) першою візьмуть картку з буквою О, другою — з буквою Р, третьою — з буквою Т;
б) з трьох узятих навмання карток буде складено слово ОРТ?
531. Із 32 карток із буквами українського алфавіту беруть навмання 4 картки. Яка ймовірність того, що з них можна скласти слово РОМБ?

Б

532. Із 10 металевих конструкцій дві — високої якості. Знайдіть ймовірність того, що серед взятих навмання п'яти конструкцій тільки одна високої якості.
533. У класі 10 учнів вивчають англійську мову, 8 — німецьку, 6 — французьку. Навмання складено групу з 3 учнів. Знайдіть ймовірність того, що:
а) всі 3 учні групи вивчають різні іноземні мови;
б) всі 3 учні вивчають англійську мову;
в) всі 3 учні вивчають одну з названих мов.
534. Зі 100 деталей, серед яких виявлено 2 браковані, навмання вибрали 6 деталей. Знайдіть ймовірність того, що серед вибраних 6 деталей бракованими виявляться 2 деталі.

- ✓ 535. (ЗНО, 2017). У торбинці лежать три цукерки з молочного шоколаду та t цукерок з чорного шоколаду. Усі цукерки однакової форми й розміру. Якого *найменшого значення* може набувати t , якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду менша від 0,25?
536. Студент прийшов на екзамен, знаючи відповіді на 45 запитань із 60. Кожен білет містить 2 запитання з 60. Студент узяв білет навмання. Знайдіть імовірність того, що він знає відповідь: а) на обидва запитання; б) тільки на одне запитання.
537. У магазин надходять лампи з двох заводів: 30 % — з одного і 70 % — з другого. Серед ламп першого заводу стандартних 85 %, а другого — 75 %. Яка ймовірність того, що куплена в цьому магазині лампа виявиться стандартною?
538. Знайдіть імовірність того, що вибраний навмання член послідовності $a_n = 3n + 2$, де $n \leq 100$, ділиться на 5. А якщо $n \leq 1000$?
539. Серед 10 лотерейних білетів виграшних 2. Знайдіть імовірність того, що серед узятих навмання 5 білетів виграшним виявиться: а) тільки 1; б) принаймні 1.
540. Учасник «Спортлото» має назвати 6 чисел із запропонованих 49. Він виграє, якщо вгадає 3, 4, 5 або 6 чисел. Знайдіть імовірності вгадування цієї кількості чисел.
541. Що ймовірніше вгадати:
 а) 3 числа з 49 чи 4 числа з 36;
 б) 7 чисел з 15 чи 8 чисел з 15;
 в) 3 числа з 15 чи 13 чисел з 15?

Вправи для повторення

542. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 6 - x$ і віссю абсцис.
543. Знайдіть похідну функції:
 а) $y = 2x^3 + 6x^2 - 5x$; б) $y = 2x^3(x^2 - 5)$; в) $y = (x^2 - 5) : (2x^3)$.
544. Стрілець у незмінних умовах робить 5 серій пострілів по мішені. У кожній серії — 100 пострілів. Результати стрільби занесено в таблицю. Знайдіть відносну частоту попадання в мішень у кожній серії. Побудуйте відповідну стовпчасту діаграму.

| Номер серії | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------------------|----|----|----|----|----|
| Кількість попадань у мішень | 69 | 64 | 72 | 78 | 65 |

§ 15. Відносна частота події ТА ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ*

Досі ми обчислювали ймовірності здійснення елементарних подій, не дуже замислюючись над поняттям «однаково можливі події». А це поняття не таке просте, як здається. Розглянемо приклад про ймовірність народження дитини певної статі. Народження хлопчика чи дівчинки — події, здається, однаково можливі (як і падіння монети — гербом догори чи донизу). Але це суперечить істині. Багаторічні спостереження переконливо свідчать, що хлопчики народжуються частіше. На 1000 новонароджених у середньому припадає 517 хлопчиків і 483 дівчинки. Тому вважати, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,5 — означає суперечити реальності. У таких випадках користуються поняттям *статистичної ймовірності*. Вважають, що статистична ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,517, а дівчинки — 0,483.

Уявіть: гральний кубик зроблено так, що його грань з 6 очками розміщена далі від центра мас, ніж протилежна грань. Такий кубик падає догори гранню з 6 очками частіше. Тут простежується цікава й дуже важлива закономірність. Якби хтось підкинув такий кубик 1000 разів і він упав, наприклад, 300 разів догори гранню з 6 очками, то й інші експериментатори мали б приблизно такі самі результати.

Багато масових випадкових подій мають властивість стійкості. За досить великої кількості незалежних випробувань частота появи спостережуваної події коливається близько одного й того самого числа. У справедливості цього багато спеціалістів переконалися експериментально. А математики Я. Бернуллі, П. Чебишов та ін. обґрунтували це твердження і теоретично (закон великих чисел). Тому для таких (статистично стійких) подій раціонально ввести поняття ймовірності.

Якщо в n випробуваннях подія A відбувається m разів, то дріб $\frac{m}{n}$ визначає відносну частоту події A .

У багатьох реальних випадках зі збільшенням n відносна частота події стабілізується й дедалі менше відрізняється від деякого числа p (коли $n \rightarrow \infty$, то $\frac{m}{n} \rightarrow p$). Це число p називають *ймовірністю події A* .

Таким є **статистичне означення** ймовірності. Обсяг означуваного ним поняття набагато ширший від того, що відповідає класичному означенню (див. с. 114). Класичну ймовірність обчислюють математичними методами, а статистичну здебільшого визначають експериментально.

* Для тих, хто хоче знати більше

Якщо йдеться про ймовірність, то спеціалісти найчастіше мають на увазі статистичну ймовірність. Тому сучасна теорія ймовірностей тісно пов'язується з математичною статистикою.

Об'єднання математичної статистики та теорії ймовірностей називають **стохастикою**. Стохастичний — означає випадковий, імовірний.

Одне з найважливіших понять стохастики — *випадкова величина*. Величину називають випадковою, якщо вона може набувати наперед невідомих числових значень, що залежать від випадкових обставин. Наприклад:

- виграш на лотерейний білет;
- відстань від точки влучання кулі до центра мішені.

Значення першої випадкової величини — деякі цілі числа.

Такі величини називають *дискретними*. Множина значень другої величини — деякий неперервний відрізок числової прямої. Такі величини називають *неперервними*.

Приклад. Випущено 100 лотерейних білетів, із яких 5 мають виграти по 10 грн, 10 — по 5 грн, 40 — по 1 грн, решта — безвиграшні. Який середній виграш припадає на один білет?

Розв'язання. Розв'язати цю задачу можна арифметичним способом:

$$(5 \cdot 10 \text{ грн} + 10 \cdot 5 \text{ грн} + 40 \cdot 1 \text{ грн}) : 100 = 1,4 \text{ грн.}$$

Проілюструємо на цій задачі поняття випадкової величини. Тут виграш — випадкова величина, яка може набувати значень 0, 1, 5, 10 (грн) відповідно з імовірностями 0,45; 0,4; 0,1 і 0,05. Це — дискретна випадкова величина ξ . Описаній ситуації відповідає така таблиця:

| | | | | |
|-------|------|-----|-----|------|
| ξ | 0 | 1 | 5 | 10 |
| p | 0,45 | 0,4 | 0,1 | 0,05 |

Зверніть увагу! Сума ймовірностей, наявних у другому рядку таблиці, дорівнює 1. Вважають, що таку випадкову величину ξ *розподілено за ймовірностями*.

Якщо випадкова величина ξ набуває значень x_1, x_2, \dots, x_n з імовірностями відповідно p_1, p_2, \dots, p_n , то це означає, що величину ξ розподілено за таким законом:

| | | | | |
|-------|-------|-------|-----|-------|
| ξ | | x_2 | ... | x_n |
| p_i | p_1 | p_2 | ... | p_n |

Середнє значення такої величини називають *математичним сподіванням* і позначають $M(\xi)$:

$$M(\xi) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n.$$

Наприклад, для попередньої задачі $M(\xi) = 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,05 = 1,4$.

Дисперсію випадкової величини x позначають символом $D(x)$ і обчислюють за формулою $D(x) = M(x - Mx)^2$, де Mx — математичне сподівання величини x ; $(x - Mx)^2$ — квадрати відхилень значень x від Mx . Величина $(x - Mx)^2$ також випадкова. Її математичне сподівання $M(x - Mx)^2$ — дисперсія випадкової величини x .

Міру розсіювань випадкової величини навколо її математичного сподівання називають **дисперсією**.

Щоб знайти дисперсію розглянутої вище випадкової величини ξ , спочатку знайдемо відхилення всіх її значень від математичного сподівання:

$$0 - 1,4 = -1,4; \quad 1 - 1,4 = -0,4; \quad 5 - 1,4 = 3,6; \quad 10 - 1,4 = 8,6.$$

Квадрати цих відхилень: 1,96; 0,16; 12,96; 73,96. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини:

| | | | | |
|--------------|------|------|-------|-------|
| $(x - Mx)^2$ | 1,96 | 0,16 | 12,96 | 73,96 |
| p | 0,45 | 0,4 | 0,1 | 0,05 |

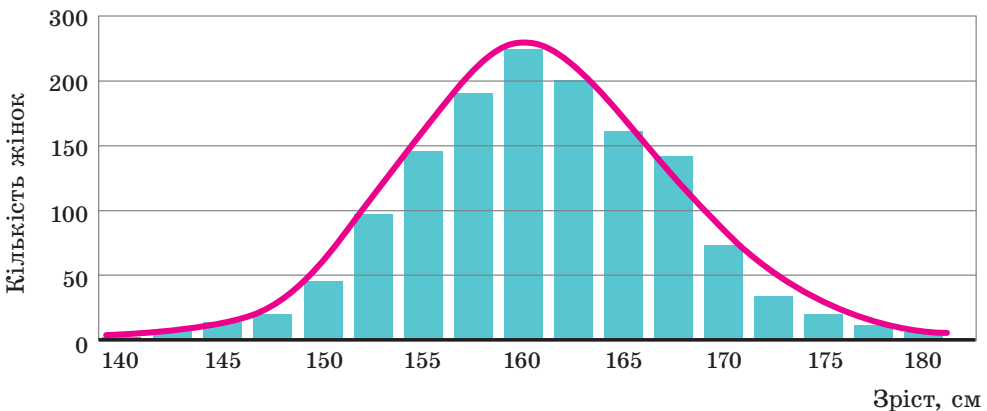
$$1,96 \cdot 0,45 + 0,16 \cdot 0,4 + 12,96 \cdot 0,1 + 73,96 \cdot 0,05 = 5,94.$$

Це і є дисперсія розглядуваної випадкової величини: $D(\xi) = 5,94$.

Якщо випадкова величина дискретна і ймовірності усіх її значень рівні, то говорять, що вона має *рівномірний дискретний розподіл* ймовірностей. За рівномірним розподілом випадає число очок при підкиданні правильного грального кубика. А бувають інші розподіли.

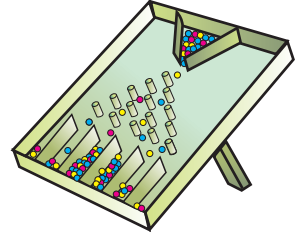
Для багатьох природних і суспільних явищ характерні *біномні розподіли* ймовірностей. Біномний розподіл виникає при послідовному проведенні в однакових незалежних умовах випадкових дослідів.

Англійський математик А. Муавр ще у XVIII ст. виміряв зріст 1375 на-вмання вибраних жінок. На малюнку 82 зображено діаграму, яка відпо-відає результатам його вимірювань. Якщо «успіхом» назвати той факт,



Мал. 82

що наступна зустрінута жінка має зріст, який знаходиться у певних межах, то число жінок такої категорії серед 1375 зустрінутих є випадковою величиною з біномним розподілом. Стосовно параметра p можна стверджувати, що цим числом може служити відносна частота жінок виділеної категорії зросту, оскільки число проведених дослідів досить велике і ця частота стабілізувалася. Англійський психолог Ф. Гальтон сконструював прилад (дошку Гальтона), який наочно показує, як формується випадкова величина, розподілена за біномним законом $p = \frac{1}{2}$ (мал. 83).



Мал. 83

У верхній резервуар насипаються кульки. Скочучись похилою дошкою й обминаючи рівномірно забиті в неї кілочки, кульки заповнюють нижні комірки відповідно до біномного розподілу ймовірностей.

Якщо кульок достатньо багато, то внизу вони утворюють симетричну гірку дзвіноподібної форми. Верхня межа цієї гірки утворює полігон, який при зростанні числа кульок наближається до кривої Гаусса — так званої кривої щільності стандартного нормального закону.



У розглянутому вище прикладі результати вимірювання зросту жінок розбито на 18 груп з різницею $d = 2,5$ см. Якби розбили їх на більшу кількість груп, щоб ця різниця дорівнювала, наприклад, 0,5 см, і побудували відповідний полігон, то утворилась би ламана з багатьох відрізків. А коли б різницю d продовжували зменшувати, то відповідний полігон наближався б до неперервної кривої, зображеної на малюнку 82. Це — крива щільності нормального розподілу ймовірностей. Приблизно так розподіляються ймовірності мас новонароджених, швидкостей газових молекул і багатьох інших випадкових величин фізичної, біологічної чи соціальної природи. Біномний розподіл характерний для багатьох дискретних випадкових величин, а нормальний — для неперервних. Якщо відомо, що розподіл імовірностей випадкової величини нормальний, то досить знати тільки дві її числові характеристики (математичне сподівання і дисперсію), щоб повністю описати розподіл імовірностей.

Розуміння суті нормального розподілу потрібне для всіх науковців, які досліджують закономірності живої чи неживої природи і особливо — людського суспільства. Не випадково цей розподіл називають нормальним, він — природний. Саме так найчастіше розподіляються не тільки маси, зрости, фізичні можливості людей і людських спільнот, а й багато інших їх характеристик. Не розуміючи цього, не можна бути справжнім науковцем.

Перевірте себе

- 1 Що називають відносною частотою події?
- 2 Дайте статистичне означення ймовірності.
- 3 Що називають стохастикою?
- 4 Що означає розподілити випадкову величину за ймовірностями?
- 5 Що називають математичним сподіванням?
- 6 Що називають дисперсією?

Виконаємо разом

- 1) Що називають екзит-полем? На яких підставах йому довіряють?

Розв'язання. Екзит-пол — це опитування виборців соціологічними службами на виході з виборчих дільниць з метою передбачити результати виборів перед отриманням їх від виборчих комісій. Йому довіряють на основі стійкості відносно частоти події. Якщо за якусь партію чи кандидата з вибраних 100 виборців проголосували, наприклад, 20%, то можна сподіватися (з похибкою близько 5%), що так проголосували і всі виборці дільниці.

- 2) Знайдіть математичне сподівання випадкової величини x , закон розподілу якої подано в таблиці.

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 1 | 5 | 10 | 15 |
| p | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

Розв'язання. $M(x) = 1 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,4 + 15 \cdot 0,1 = 7,2$.

Виконайте усно

545. Яка з таблиць задає закон розподілу випадкової величини?

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| p | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| p | 0,5 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 0 | 1 | 3 | 4 |
| p | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,3 |

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 10 | 20 | 30 | 40 |
| p | 0,4 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

546. Відомо, що серед 1000 новонароджених зазвичай буває 517 хлопчиків і 483 дівчинки. Знайдіть імовірність народження хлопчика.

547. Учень вирізав з дерева гральний кубик — такий, що, підкинувши його 100 разів, одержав результати:

| | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ξ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| p | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |

Які результати можна очікувати, якщо цей самий гральний кубик хто-небудь інший підкине 1000 разів?

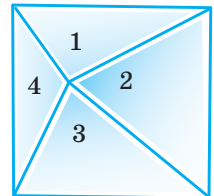
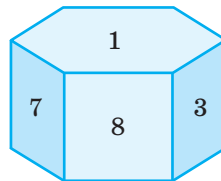
548. Уявіть гральну кісточку у формі правильної шестикутної призми, усі ребра якої рівні і на основах якої написано цифри 1 і 2, а на решті граней — 3, 4, 5, 6, 7 і 8 (мал. 84, а). Як, на ваш погляд, могли б розподілитися ймовірності випадання тих чи інших очок за багаторазового підкидання такої гральної кісточки?

A

549. Розподіліть за ймовірностями випадкову величину кількості очок, які випадають під час підкидання правильного грального кубика. Знайдіть математичне сподівання цієї випадкової величини.

550. Тільки одну грань правильного однорідного кубика пофарбовано жовтим кольором. Із якою відносною частотою падатиме цей кубик догори жовтою гранню, якщо його кидати багато разів?

551. На гранях правильного октаедра нанесено очки від 1 до 8 (мал. 84, б). Задайте таблицею випадкову кількість очок, які випадають під час кидання такого октаедра. Знайдіть середнє значення цієї величини.



а

б

Мал. 84

552. Випадкову кількість очок, які випадають під час підкидання неправильного грального кубика, розподілено за таким законом:

| | | | | | | |
|-------|---------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---|
| ξ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| p | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | |

Заповніть останню клітинку таблиці. Визначте математичне сподівання величини ξ .

553. Випущено 1000 лотерейних білетів, на один із яких має випасти виграш 100 грн, на 10 — по 20 грн, на 50 — по 1 грн. Задайте таблицею випадковий виграш. Знайдіть математичне сподівання цієї величини.

Б

554. Знайдіть математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, розподіленої за таким законом:

| | | | | | | |
|-----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| φ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| p | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

| | | | | | | | | |
|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| ψ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| p | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

Придумайте реальні ситуації, математичними моделями яких були б випадкові величини φ і ψ .

555. Підкидають одразу два гральні кубики й підраховують суму очок на їх верхніх гранях. Задайте випадкову величину цієї суми та знайдіть її математичне сподівання.

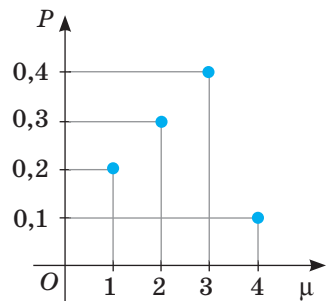
556. З повного набору кісточок доміно, перевернутих донизу очками, взяли навмання одну й підраховали суму очок на обох її половинках. Задайте таблично випадкову величину цієї суми та накресліть відповідну діаграму.

557. Побудуйте графік функції $y = C_9^x$. Перелічіть її найважливіші властивості. Проведіть через точки графіка плавну лінію, подібну до кривої Гаусса.

558. Побудуйте графік функції $y = C_6^x$. Укажіть її область визначення та область значень.

559. На малюнку 85 показано розподіл випадкової величини μ . Запишіть закон її розподілу у вигляді таблиці. Знайдіть її математичне сподівання та дисперсію.

560. Уявіть, що гральний кубик зроблено з однорідного матеріалу у формі правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює 2 см, а висота — 1,9 см. Нехай на його основи нанесено цифри 1 і 6, а на інші грані — 2, 3, 4 і 5. Яким, на ваш погляд, може бути розподіл імовірностей під час багаторазового підкидання такого кубика? Спробуйте перевірити свою здогадку експериментально.



Мал. 85

Вправи для повторення

561. Розв'яжіть методом інтервалів нерівність:

а) $(x - 4)(x + 7) < 0$; б) $(x + 5)(x - 0,5) > 0$.

562. Чи проходить графік функції $y = 2^x$ через точку A , якщо:

а) $A(4; 16)$; б) $A(4; 256)$; в) $A(-2; -0,5)$; г) $A(-2; 0,0625)$?

563. Дано $f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x}$. Обчисліть $f'(1)$ та $f'(2)$.

Самостійна робота 3

ВАРІАНТ 1

- Вибірка містить усі натуральні числа від 1 до 10 і, крім них, числа 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8. Запишіть відповідний варіаційний ряд; знайдіть розмах, моду, медіану та середнє значення вибірки; побудуйте відповідну гістограму.
- Яка ймовірність того, що підкинутий гральний кубик упаде догори гранню: а) з непарним числом очок; б) з числом очок, більшим за 3?
- Що ймовірніше: вгадати 2 числа з 9 чи 3 з 8?
- В урні є картки з номерами від 1 до 100. Яка ймовірність того, що ви́нята навмання картка не міститиме цифри 5?
- Обчисліть математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, розподіленої за законом:

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| p | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

ВАРІАНТ 2

- Вибірка містить усі цілі числа від 0 до 9 і, крім них, числа 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7. Запишіть відповідний варіаційний ряд; знайдіть розмах, моду, медіану та середнє значення вибірки; побудуйте відповідну гістограму.
- Яка ймовірність того, що підкинутий гральний кубик упаде догори гранню з числом очок: а) більшим за 4; б) меншим від 4?
- Що ймовірніше: вгадати 3 числа з 9 чи 4 з 8?
- В урні є картки з номерами від 1 до 100. Яка ймовірність того, що ви́нята навмання картка матиме число, сума цифр якого дорівнює 7?
- Обчисліть математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, розподіленої за законом:

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| p | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |

Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

- ✓ Можу формулювати та використовувати правило суми і правило добутку.
 - Якщо елемент деякої множини A можна вибрати m способами, а елемент множини B — n способами, то елемент із множини A або ж із множини B можна вибрати $m + n$ способами. Це — *правило суми*.
 - Якщо перший компонент пари можна вибрати m способами, а другий — n способами, то таку пару можна вибрати $m \cdot n$ способами. Це — *правило добутку*.
- ✓ Розумію, що таке n -факторіал.
 - Добуток усіх натуральних чисел від 1 до n називають n -факторіалом і позначають $n!$.
- ✓ Знаю і вмію використовувати наступні поняття.
 - Упорядковану k -елементну підмножину n -елементної множини називають *розміщенням з n елементів по k* . Їх число позначають A_n^k . Для будь-яких натуральних n і k ($n > k$) правильні рівності:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1), \text{ або } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- Розміщення з n елементів по n називають *перестановками з n елементів*. Їх число позначають P_n .

$$P_n = n!$$

- *Комбінацією з n елементів по k* називають будь-яку k -елементну підмножину n -елементної множини. Число комбінацій з n елементів по k позначають C_n^k і обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

- ✓ Розумію сутність понять:
 - *Мода вибірки* — її варіанта з найбільшою частотою.
 - *Медіана вибірки* — число, яке «поділяє» відповідний варіаційний ряд навпіл.
 - *Середнім значенням вибірки* називають середнє арифметичне усіх її варіант.
 - *Елементарною подією* називають кожний можливий наслідок імовірного експерименту. Множину всіх можливих наслідків експерименту називають *простором елементарних подій* і позначають грецькою буквою Ω (омега).
 - *Імовірністю випадкової події A* називають відношення числа $n(A)$ сприятливих для події A елементарних подій до числа усіх рівноможливих і попарно несумісних елементарних подій, які утворюють простір елементарних подій для даного випробування:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Такий підхід у трактуванні ймовірності називають *класичним*.

- Якщо в n випробуваннях подія A відбувається m разів, то дріб $\frac{m}{n}$ визначає *відносну частоту події A* .

Історичні відомості

Збирати й аналізувати статистичні дані люди почали віддавна. У Китаї населення переписували ще понад 4 тисячі років тому. У Київській Русі перепис здійснювався, починаючи з 1245 р.

У Європі в XVII ст. виникла окрема наука — «Політична арифметика», яку започаткувала надрукована в 1662 р. книжка Дж. Граунта «Природні й політичні спостереження, зроблені за бюлетнями смертності... відносно управління, релігії, торгівлі, росту, повітря, хвороб і різних змін...». У цій праці вперше введено поняття частоти події, виявлено, що хлопчики народжуються частіше, ніж дівчатка (у відношенні 14 : 13). Автор книжки дослідив, що в той час у Лондоні з кожних 100 новонароджених жили до:

| | | |
|----------------|----------------|---------------|
| 6 років — 64, | 36 років — 16, | 66 років — 3, |
| 16 років — 40, | 46 років — 10, | 76 років — 1, |
| 26 років — 25, | 56 років — 6, | 86 років — 0. |

Згодом суттєвий внесок у розвиток математичної статистики зробили В. Петті, А. Муавр, Л. Ейлер, Я. Бернуллі, П. Лаплас, С. Пуассон та ін. У Російській імперії в XIX ст. проблеми статистики найбільше досліджували українські математики М. Остроградський і В. Буняковський. Зокрема, Остроградський розробив статистичні методи бракування товарів, склав «Таблиці для полегшення обчислення траєкторії тіла в середовищі з опором». Буняковський досліджував статистичні характеристики народонаселення, ймовірних контингентів російської армії, пенсій, правдоподібності показів у судочинстві, похибок у спостереженнях тощо.

Сучасна держава не може функціонувати без статистики. В Україні існує Комітет статистики, тисячі спеціалістів якого збирають, аналізують і використовують різні статистичні відомості.

Деякі властивості випадкових подій виявили італійські математики Л. Пачіолі (1445–1514), Д. Кардано (1501–1576) у зв'язку з дослідженнями азартних ігор. Теорію ймовірностей як галузь математики започаткували французькі математики Б. Паскаль (1623–1662) і П. Ферма (1601–1665). Згодом значний внесок у її розвиток зробив Я. Бернуллі (1654–1705). Проте доки теорія ймовірностей пов'язувалась майже виключно з азартними іграми, вона розвивалася повільно. А згодом, ввівши поняття статистичної ймовірності, вчені переконалися, що ця нова галузь математики досить перспективна, особливо в дослідженнях проблем статистики, демографії, теорії стрільби, фізики, біології, соціології. Теорія ймовірностей мов би набула другого дихання.



Блез Паскаль
(1623–1662)

Видатний французький математик, фізик, філософ. Перший трактат з геометрії написав у 16 років. У ньому сформулював основну теорему проєктивної геометрії. Як один із творців теорії ймовірностей розробив нові методи в комбінаториці та численні нескінченно малих. Як філософ на перше місце ставив науку, на друге — людину, на третє — віру.

Історичні відомості

« Ми осягаємо істину не лише розумом, але й серцем. »

Б. Паскаль

« Паскаль — людина великого розуму та великого серця ...
один із тих, кого називають пророками. »

Л. Толстой

Поняття статистичної ймовірності тісно пов'язане з теорією ймовірностей і математичною статистикою. У цьому підручнику немає можливості заглиблюватись у ці науки. Зазначимо тільки одну досить важливу закономірність, яка в них досліджується, — закон нормального розподілу. Ще на початку XVIII ст. проведено таке дослідження: виміряли зріст 1375 жінок і підраховали, скільки з них мають зріст 140 см, 145 см, 150 см і т. д. За отриманими результатами побудували гістограму (стовпчасту діаграму) та виявили, що їй відповідає графік функції, схожий на контур капелюха. Згодом з'ясувалося, що так само розподіляються швидкості руху газових молекул, маси новонароджених дітей і багато інших величин у природі. Функція, яка відповідає закону нормального розподілу, задається формулою

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Михайло Кравчук (1892–1942)

Український математик, академік. Народився в с. Човниці на Волині. Працював у галузях алгебри, теорії чисел, теорії функцій, теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. Брав активну участь у створенні сучасної української математичної термінології. Безпідставно репресований, загинув на Колимі.



Поняття статистичної ймовірності, закон нормального розподілу та інші поняття теорії ймовірностей використовуються в багатьох теоретичних і прикладних дослідженнях. А починалось усе це з гри в кості.

З математиків, які народилися в Україні, найрезультативніше працювали в галузі теорії ймовірностей і математичної статистики: В. Я. Буняковський (1804–1889), С. Н. Бернштейн (1880–1968), М. П. Кравчук (1892–1942), В. І. Гливенко (1897–1940), В. Ю. Лінник (1915–1972), Й. Гіхман (1918–1985), М. Й. Ядренко (1932–2004) та ін.

ТЕМАТИЧНІ ТЕСТИ

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 1–12 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

- 1 У меню їдальні є 3 перші страви, 6 — других страв і 4 — треті страви. Скількома способами можна вибрати обід, який містить по одній страві кожного виду?

| А | Б | В | Г | Д |
|----|----|----|----|----|
| 72 | 54 | 36 | 24 | 13 |

- 2 Телефонна станція обслуговує абонентів, номери телефонів яких містять 7 цифр і починаються з 257. На яку кількість абонентів розрахована ця станція?

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------|---------|--------|------|------|
| 1 000 000 | 100 000 | 10 000 | 1000 | 4000 |

- 3 Скільки діагоналей має правильний 12-кутник?

| А | Б | В | Г | Д |
|-----|----|----|----|-----|
| 120 | 30 | 54 | 60 | 108 |

- 4 Скільки можна скласти різних неправильних дробів, у яких чисельниками і знаменниками є числа 3, 5, 7, 11, 13, 17?

| А | Б | В | Г | Д |
|----|----|----|----|----|
| 30 | 21 | 15 | 42 | 36 |

- 5 Провівши опитування 10 жінок про розмір їхнього взуття, отримали такі дані: 38; 39; 37; 39; 38; 38; 40; 37; 35; 38. Знайдіть моду отриманих даних.

| А | Б | В | Г | Д |
|----|----|----|----|----|
| 37 | 39 | 40 | 38 | 36 |

- 6 Восьмеро учнів на розв'язування задачі витратили час: 12 хв; 8 хв; 9 хв; 17 хв; 10 хв; 11 хв; 7 хв; x хв. Визначте x , якщо в середньому один учень на розв'язування задачі витрачав 10 хв.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|----|---|---|----------------|
| 8 | 10 | 7 | 6 | інша відповідь |

- 7 У коробці було 6 зелених куль і кілька синіх. Скільки синіх куль у коробці, якщо ймовірність того, що вибрана навмання куля виявиться зеленою, дорівнює $\frac{3}{5}$?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|----|---|---|
| 4 | 8 | 10 | 2 | 6 |

- 8 На малюнку *a* точками показано найвищу і найнижчу температури повітря протягом перших п'яти днів березня у місті А. По горизонталі відмічені дати, а по вертикалі — температуру повітря в градусах Цельсія. Коли різниця між найвищою і найнижчою температурами повітря була найбільшою?

| А | Б | В | Г | Д |
|------|------|------|------|------|
| 1.03 | 2.03 | 3.03 | 4.03 | 5.03 |

- 9 За умовою завдання 8 з'ясуйте середню температуру (у °С) в перші п'ять днів березня в місті А.

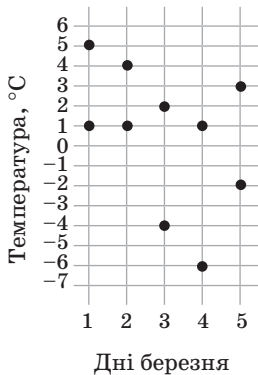
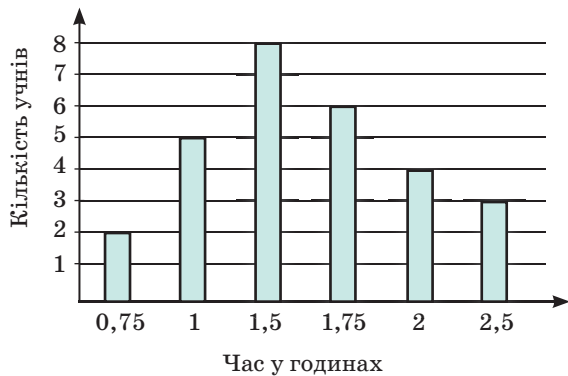
| А | Б | В | Г | Д |
|-----|---|-----|---|-----|
| 1,5 | 2 | 0,5 | 3 | 3,5 |

- 10 Серед учнів 9 класу провели опитування: скільки часу витрачають вони щодня на виконання домашнього завдання. Результати опитування подано у вигляді гістограми, зображеної на малюнку *б*. Укажіть моду даної вибірки.

| А | Б | В | Г | Д |
|-------|-------------|-------------|-------|-------------|
| 1 год | 1 год 30 хв | 1 год 45 хв | 2 год | 2 год 30 хв |

- 11 За умовою завдання 10 з'ясуйте розмах вибірки.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|------|---|---|-----|
| 6 | 1,75 | 3 | 2 | 2,5 |

Мал. *a*Мал. *б*

- 12 Із 10 учнів, що брали участь у районній олімпіаді, троє посіли призові місця. Із цих 10 учнів навмання вибирають одного. Яка ймовірність того, що він став призером олімпіади?

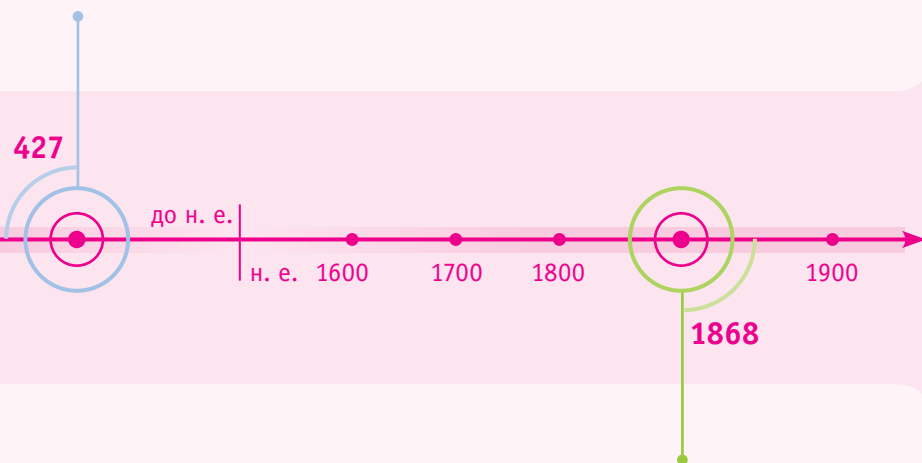
| А | Б | В | Г | Д |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0,3 | 0,7 | 0,1 | 0,5 | 0,4 |



Платон

(427 р. до н. е. — 348 р. до н. е.)

Давньогрецький мислитель, засновник філософської школи, відомої як Академія Платона. Один з основоположників європейської філософії. У творі «Тімей» надав містичного змісту правильним многогранникам, які тепер називають його ім'ям (хоча були відомі й до Платона).



Георгій Вороний

(1868–1908)

Відомий український математик. У роботі «Дослідження про примітивні паралеледри» розглянув заповнення n -вимірного евклідового простору однаковими паралельно розміщеними опуклими многогранниками — паралеледромами. Сьогодні розподілення простору на основі діаграм Вороного використовують у комп'ютерній графіці, біоінженерії, робототехніці, кристалографії, картографії, програмуванні тощо.

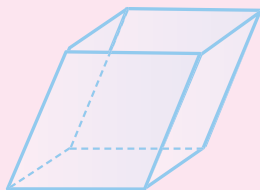


РОЗДІЛ 4

МНОГОГРАННИКИ

CHAPTER 4

POLYHEDRONS



« Многогранники становлять, можна сказати, центральний предмет стереометрії. »

О. Александров

§ 16

**МНОГОГРАННИКИ
ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТИ.
ОПУКЛІ МНОГОГРАННИКИ**

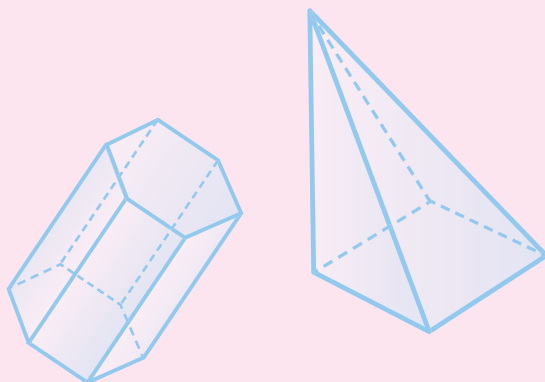
**POLYHEDRONS AND
THEIR COMPONENTS.
POLYTOPES**

§ 17

ПРИЗМИ | PRISMS

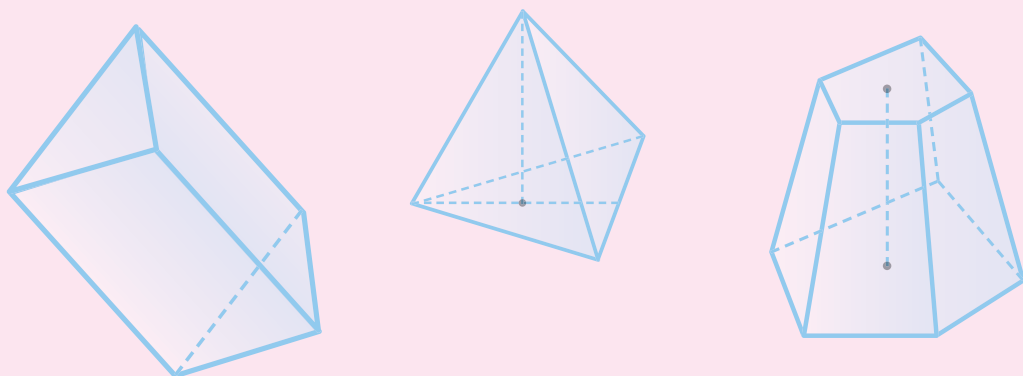
§ 18

ПІРАМІДИ | PYRAMIDS



§ 19

ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ | REGULAR POLYHEDRONS



Будівництво

Створення основних фондів виробничого і невиробничого призначення.

Промислове
будівництво

Житлово-цивільне
будівництво

Транспортне
будівництво



МАТЕМАТИКА В МОЇЙ ПРОФЕСІЇ

ЕНЕРГЕТИКА І ТЕПЛОТЕХНІКА

Вивчення та використання енергетичних і теплових ресурсів з метою вироблення, перетворення, передачі й розподілу енергії та тепла.

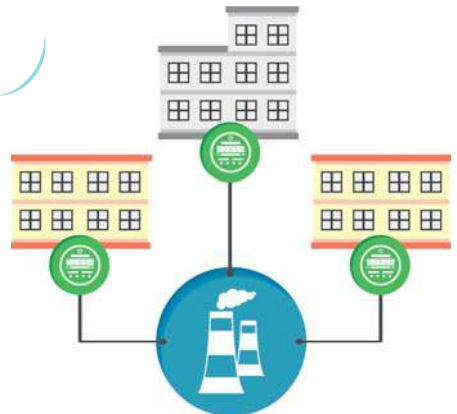
Проектування
електромереж

Енергоменеджмент

Транспортування
теплової енергії



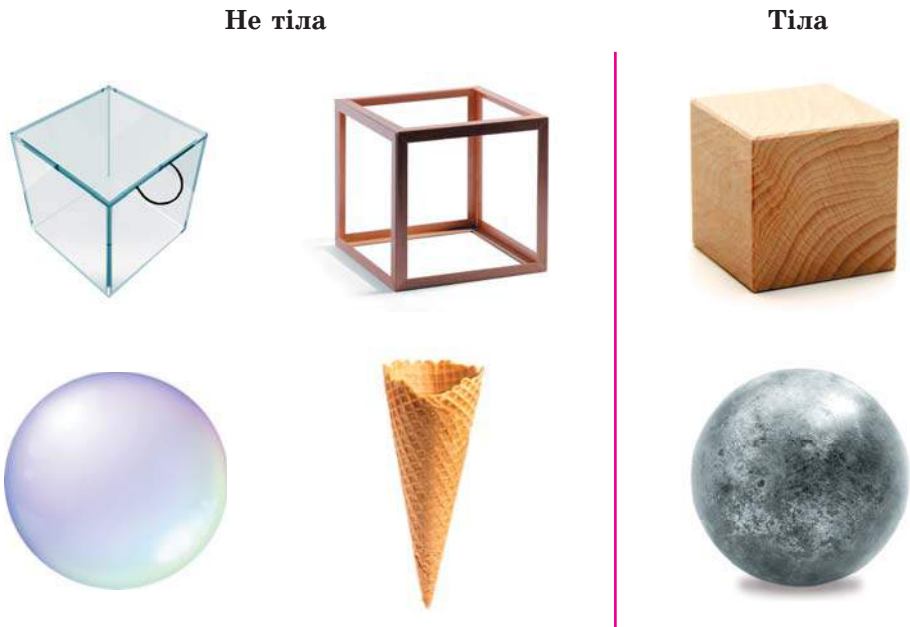
Відновлювана
енергетика



§ 16. МНОГОГРАННИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. ОПУКЛІ МНОГОГРАННИКИ

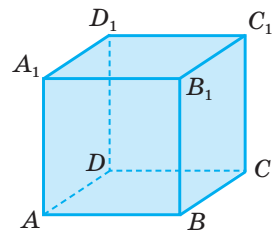
Ви вже знаєте, що геометрична фігура — будь-яка множина точок: скінченна або нескінченна, на площині або в просторі. Надалі вивчатимемо властивості фігур, які називають *геометричними тілами*.

На інтуїтивному рівні поняття *тіла* розкривають такі малюнки (мал. 86).



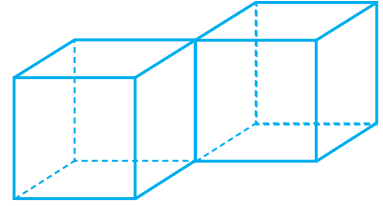
Мал. 86

Прикладом геометричного тіла є *куб* (мал. 87). Його поверхня складається з шести рівних квадратів. Поверхня куба поділяє весь простір на дві просторові області: внутрішню (обмежену) та зовнішню (необмежену). Куб є об'єднанням його поверхні й обмеженої нею внутрішньої просторової області. Кожне геометричне тіло має деяку поверхню та обмежену нею внутрішню просторову область. Вважається, що просторова область геометричного тіла складається з одного «шматка», а кожна точка геометричного тіла належить його просторовій області або поверхні.



Мал. 87

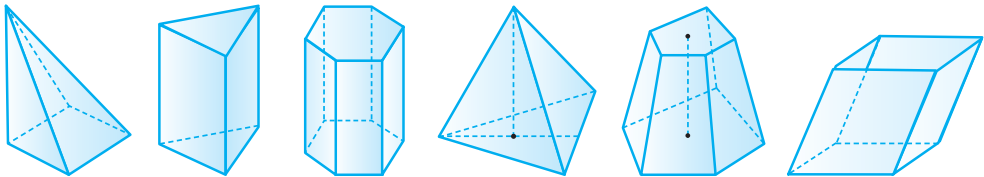
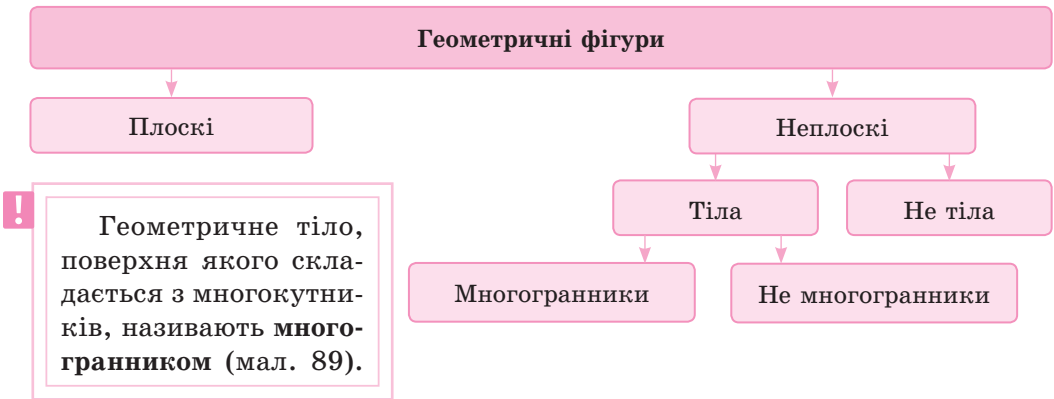
Кожна призма, піраміда, циліндр, конус, куля — це геометричні тіла. А плоска фігура, лінія, поверхня — не тіла, бо вони не мають просторових областей. Не вважають геометричним тілом також об'єднання двох кубів зі спільним ребром (мал. 88), бо ця фігура містить дві роз'єднані просторові області, а не одну.



Мал. 88

Оскільки в геометрії не розглядають інших тіл, крім геометричних, то їх часто називають просто *тілами*.

Усі геометричні фігури можна класифікувати так.

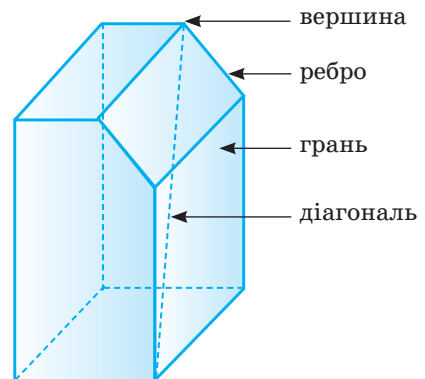


Мал. 89

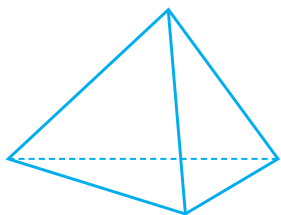
Многокутники, які обмежують многогранник, називають *гранями*, сторони граней — *ребрами*, а їхні кінці — *вершинами многогранника*. Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, — *діагональ многогранника* (мал. 90).

Найменше число граней многогранника — чотири.

Як і багато інших геометричних фігур, многогранники бувають *опуклі* та *неопуклі*. Опуклий многогранник розміщений з одного боку від площини будь-якої його грані. Куб і тетраедр — опуклі многогранники.



Мал. 90

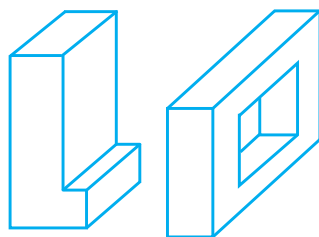


Мал. 91

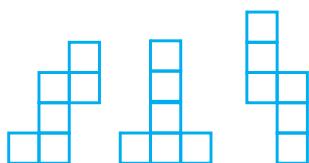
Многогранник, який має лише чотири грані, називають **тетраедром** (грец. тетраζ — чотири, едра — грань). Якщо всі ребра тетраедра рівні, його називають **правильним тетраедром** (мал. 91).

Приклади неопуклих многогранників наведені на малюнку 92.

Якщо поверхню многогранника розрізати по кількох його ребрах і розгорнути на площині, то матимемо *розгортку* многогранника. Поверхню одного й того самого многогранника можна розгорнути по-різному. На малюнку 93 подані деякі розгортки куба.



Мал. 92



Мал. 93

Площею поверхні многогранника називають суму площ усіх його граней; вона дорівнює площі розгортки даного многогранника.

Проведемо дослідження, яке колись здійснив Л. Ейлер. Визначимо для многогранників, зображених у таблиці 4, кількість вершин (B), граней (Γ) і ребер (P). Продовжте аналогічні дослідження для інших многогранників, виконуючи завдання № 572 на с. 145.

Таблиця 4

| Фігури | Вершин (B) | Граней (Γ) | Ребер (P) | $B + \Gamma - P$ |
|---|----------------|---------------------|---------------|------------------|
|  | 8 | 6 | 12 | 2 |
|  | 10 | 7 | 15 | 2 |

Помічене вами співвідношення між числом вершин B , граней Γ і ребер P Л. Ейлер сформулював у вигляді теореми, що стала однією з перших теорем топології — важливої галузі математики.

Перевірте це твердження для куба й тетраедра. Чи правильним є це твердження для многогранників, зображених на малюнку 92?

Для будь-якого опуклого многогранника
 $B + \Gamma - P = 2$.

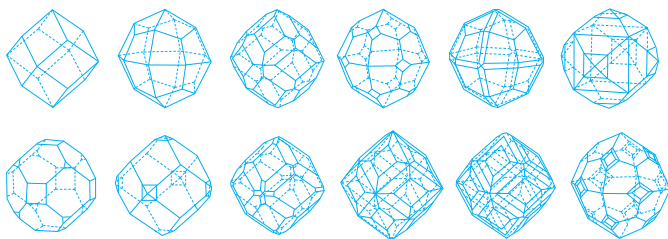
З різними, іноді дуже складними, матеріальними моделями многогранників мають справу каменярі, теслі, шліфувальники, стругальники, гранувальники, мінералоги, кристалोगрафи та інші спеціалісти.

Наприклад, столяр щодня робить десятки деталей у вигляді найрізноманітніших многогранників. Екскаваторники риють різні траншеї, котловани та інші виїмки також переважно у вигляді многогранників. Фахівці харчової промисловості у формі різних видів многогранників готують страви та подають їх до столу (мал. 94).



Мал. 94

На малюнку 95 зображено природні форми кристалів гранату.



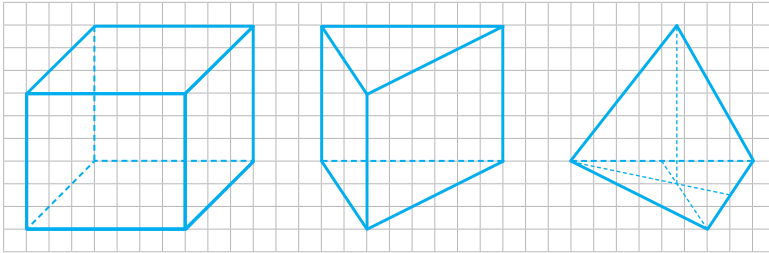
Мал. 95



Мал. 96

Відомий чеський письменник Карел Чапек, ознайомившись із кристалами та зрозумівши їх роль у житті людей, проспівав їм великий гімн — словом і малюнком (мал. 96): «І в людині захована сила кристалізації... Число і фантазія, закон і достаток — ось живі, творчі сили природи: не сидіти під землею деревом, а створювати кристали й ідеї, ось що означає бути разом із природою!»

Щоб навчитися правильно, наочно і швидко креслити многогранники (куб, правильну трикутну призму і правильну трикутну піраміду), можна виконати кілька зображень за готовими шаблонами, наведеними на мал. 97.



Мал. 97

Різні способи зображення просторових фігур на площині розглядають у кресленні і в нарисній геометрії. Їх використовують архітектори, інженери, будівельники, дизайнери та інші фахівці. Досить часто їм доводиться об'єднувати декілька многогранників або роз'єднувати їх чи розрізати.

У побуті ми також часто виконуємо аналогічні дії, наприклад, розрізаємо масло чи торт (мал. 98), поролон чи пінопласт (мал. 99).



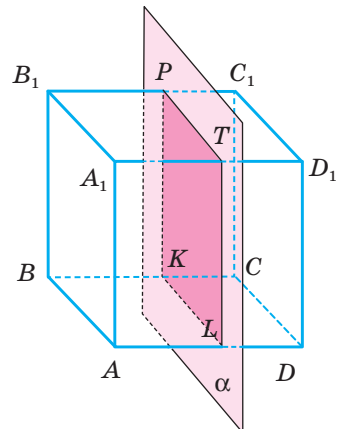
Мал. 98



Мал. 99

У 10 класі ви навчилися будувати перерізи паралелепіпеда і тетраедра різними площинами. Згадаємо, що називають перерізом многогранника.

Якщо принаймні дві точки многогранника розміщені по різні боки від деякої площини, то ця площина перетинає цей многогранник. Її називають *січною площиною*, а множину точок, спільних для многогранника та січної площини, — *перерізом многогранника* цією площиною. На малюнку 100 зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і січну площину α . Плоский чотирикутник $KPTL$ — переріз даного многогранника площиною α . На малюнку 101, а січна площина α перетинає куб по трикутнику KPT .



Мал. 100

На малюнку 101, б зображено тетраедр $ABCD$ і січну площину ω ; їх переріз — чотирикутник $KPTL$.

Простіші перерізи виконують, використовуючи аксіоми стереометрії та теореми про паралельність прямих і площин. Для складніших випадків використовують спеціальні методи побудови перерізів, зокрема метод слідів.

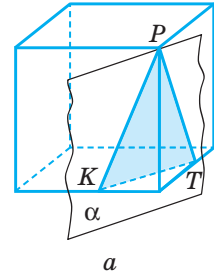
Метод слідів. Нагадаємо, що пряму, по якій січна площина перетинає площину P , називають слідом січної площини в площині P . Точка, у якій січна площина перетинає пряму, — слід січної площини на цій прямій.

Приклад. Побудуйте переріз многогранника $ABCD$ площиною, що проходить через внутрішні точки M, N, P ребер AD, AB, DC відповідно (мал. 102).

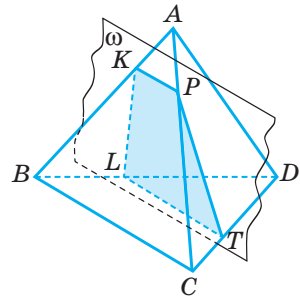
Розв'язання. Оскільки точки M і P лежать в одній площині (грані ADC), то можемо сполучити їх відрізком MP і отримаємо лінію перетину січної площини з площиною ADC . Аналогічно відрізок MN — лінія перетину січної площини з площиною ADB (мал. 103).

Щоб побудувати інші сторони шуканого перерізу, знайдемо точку, у якій січна площина MNP перетинає ребро CB .

Прямі MN і DB лежать в одній площині (грані ABD) і перетинаються в точці O . Оскільки точка O і точка P лежать в одній площині (грані BDC), то їх можна сполучити відрізком OP . Маємо слід січної площини в площині BCD — пряму PO . Вона перетинає ребро BC многогранника в точці K (мал. 104). Сполучимо точки K і N , що лежать в грані ABC . Чотирикутник $MNKP$ — переріз даного многогранника площиною, що проходить через точки M, N, P (мал. 105).

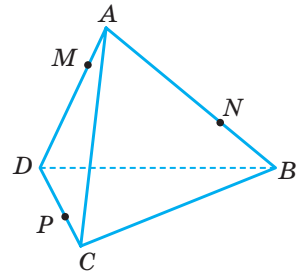


а

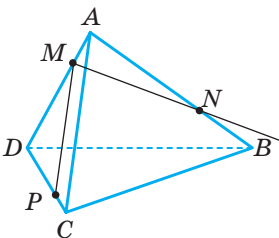


б

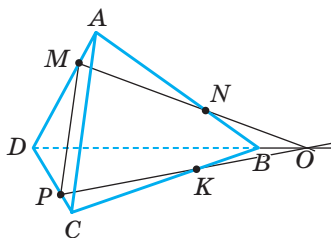
Мал. 101



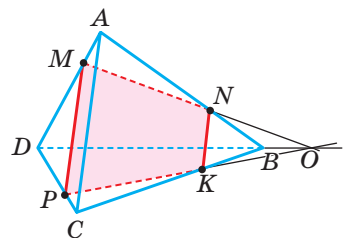
Мал. 102



Мал. 103



Мал. 104



Мал. 105

Зверніть увагу! Точки перетину січної площини з ребрами многогранника є вершинами многокутника, що утворюється в перерізі многогранника даною площиною. Сторонами цього многокутника будуть відрізки, що належать граням многогранника.

Для многогранників, що мають більшу кількість ребер, для знаходження сліду січної площини в основі многогранника доцільно використовувати паралельне чи центральне проектування заданих точок на ребра основи.

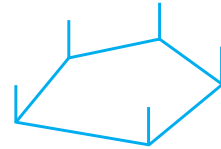
Перевірте себе

- 1 Що називають многогранником? Назвіть його елементи.
- 2 Які види многогранників вам відомі?
- 3 Які многогранники називають опуклими, а які — неопуклими?
- 4 Що називають площею поверхні многогранника?
- 5 Сформулюйте теорему Ейлера про многогранники.

Виконаємо разом

- 1) Многогранник має 9 ребер. Доведіть, що його гранню не може бути п'ятикутник.

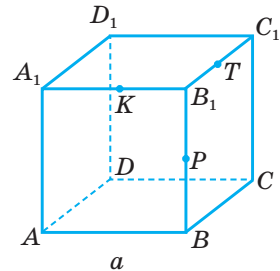
Розв'язання. Припустимо, що многогранник має п'ятикутну грань, тоді з кожної вершини цієї грані виходить принаймні по одному ребру (мал. 106).



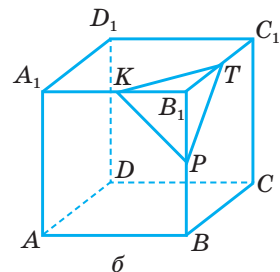
Мал. 106

Такий многогранник має не менше 10 ребер (5 основ та 5 бічних). Тобто, якщо многогранник має тільки 9 ребер, то його гранню не може бути п'ятикутник.

- 2) Побудуйте переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки K, P, T — середини ребер $A_1 B_1, B B_1$ і $B_1 C_1$ (мал. 107, а).



Розв'язання. Точки K і P лежать у площині грані $ABB_1 A_1$ куба і в січній площині (мал. 107, б). Отже, ці площини перетинаються по прямій KP . Січна площина перетинає квадрат $ABB_1 A_1$ по відрізку KP . Аналогічно переконуємося, що дві інші грані куба січна площина перетинає по відрізках KT і TP . Побудувавши їх, дістанемо трикутник KPT . Це і є шуканий переріз.



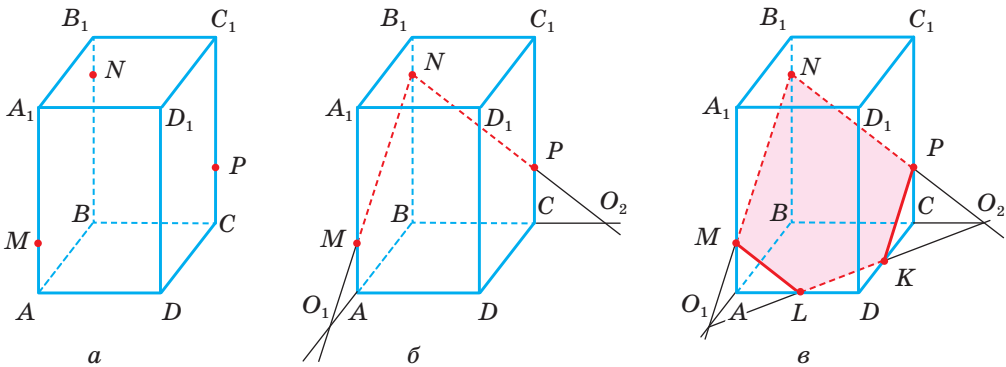
Мал. 107

- 3) На бічних ребрах AA_1, BB_1 і CC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дано точки

M , N і P відповідно (мал. 108, а). Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точки M , N і P .

Розв'язання. Побудуємо слід січної площини на площині нижньої основи призми.

- Точки M і N лежать у грані AA_1B_1B . Проведемо пряму MN до перетину з прямою AB . Отримаємо точку O_1 , що належить сліду (мал. 108, б).
- Точки N і P лежать у грані CC_1B_1B . Проведемо пряму NP до перетину з прямою BC . Отримаємо точку O_2 , що належить сліду.
- Проведемо пряму O_1O_2 — слід січної площини на площині нижньої основи призми.
- Пряма O_1O_2 перетинає сторону AD в точці L , а сторону CD — в точці K (мал. 108, в). З'єднаємо точки L і K , оскільки вони лежать в одній грані $ABCD$. Аналогічно отримуємо відрізки LM і KP . Маємо п'ятикутник $KLMNP$ — шуканий переріз.



Мал. 108

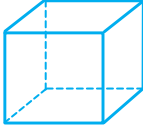
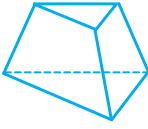

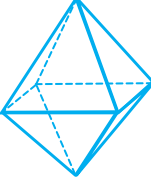
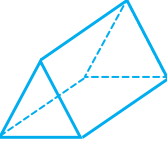
Виконайте усно

564. Наведіть приклади многогранників з навколишнього середовища. Які з них опуклі, а які — неопуклі?
565. Чи завжди об'єднання опуклих фігур є фігурою опуклою?
566. Назвіть многогранник, який має найменшу кількість граней. Скільки у нього вершин; ребер?
567. Скільки вершин, ребер і граней має куб?
568. Ребро куба дорівнює a . Чому дорівнює площа його поверхні?
569. Площа поверхні куба дорівнює 6 дм^2 . Знайдіть довжину його ребра.

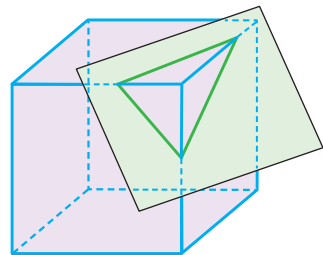
А

570. Зобразіть куб, ребро якого дорівнює 4 см. Проведіть діагоналі однієї основи і однієї бічної грані. Знайдіть їх довжини. Побудуйте діагональ куба і знайдіть її довжину.

571. Побудуйте прямокутний паралелепіпед, у якого висота менша від кожного ребра основи. Побудуйте його діагональ. Заштрихуйте його найбільшу грань.
572. Перемалюйте в зошит таблицю. Укажіть кількість граней, ребер і вершин для відповідних многогранників і переконайтеся у справедливості теореми Ейлера для кожного з них.

| | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|--|
| Фігура |  |  |  |  |  |
| Вершини | | | | | |
| Грані | | | | | |
| Ребра | | | | | |
| $V + G - P$ | | | | | |

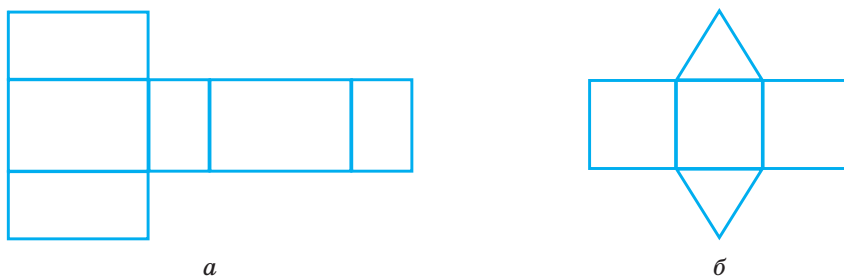
573. Намалуйте многогранник, який має 4 грані. Скільки ребер і вершин він має? Як називають такий многогранник?
574. Намалуйте многогранник, який має 5 граней і 5 вершин. Скільки ребер він має?
575. Намалуйте многогранник, який має 5 граней і 6 вершин. Скільки ребер він має?
576. Від дерев'яного куба відпиляли один тригранний кут (мал. 109). Установіть, скільки вершин, ребер і граней має кожен з утворених многогранників. Перевірте, чи виконується для них теорема Ейлера.
577. Тетраедр має чотири тригранні кути. Скільки тригранних кутів залишиться, якщо від тетраедра відрізати: а) один тригранний кут; б) два тригранні кути; в) три тригранні кути. Намалуйте хоча б один з утворених многогранників.



Мал. 109

578. У вас є 100 маленьких кубиків. Скільки кубиків потрібно використати, щоб скласти з них один куб найбільшого розміру?
579. Намалуйте розгортку правильного тетраедра, довжина ребра якого дорівнює 2 см. Знайдіть площу розгортки.

- ✓ 580. (ЗНО, 2010). На малюнку 110 зображено розгортку многогранника. Визначте кількість його ребер.



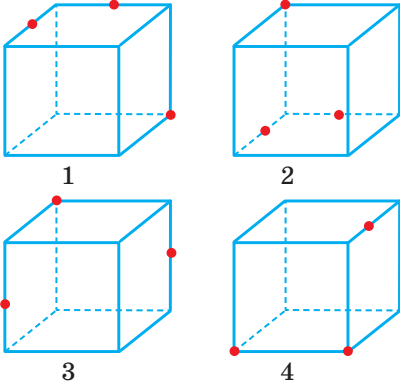
Мал. 110

581. Площа поверхні правильного тетраедра — $36\sqrt{3}$ см². Знайдіть довжину його ребра.
582. Ребро куба дорівнює a . Знайдіть відстань між його: а) протилежними гранями; б) протилежними ребрами; в) найближчими вершинами; г) найвіддаленішими вершинами.
583. Ребро куба дорівнює a . Знайдіть довжину його діагоналі.
584. Площі трьох граней паралелепіпеда дорівнюють відповідно 2 м², 3 м² і 4 м². Знайдіть площу його поверхні.
585. Ребро одного куба в 3 рази більше за ребро другого. Як відносяться площі поверхонь цих кубів?
586. Як відносяться довжини ребер двох правильних тетраедрів, якщо площі їх поверхонь дорівнюють S_1 і S_2 ?

Б

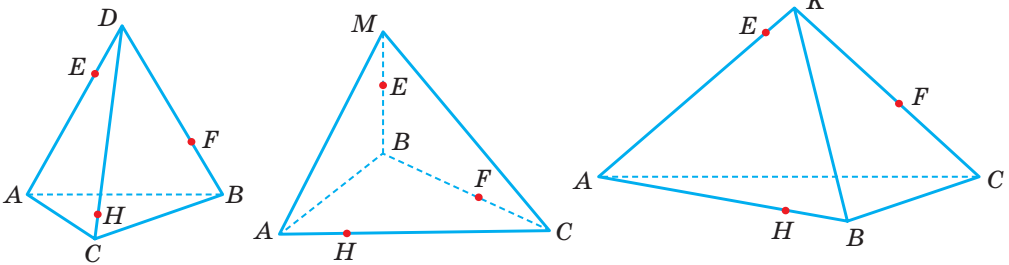
587. Зобразіть дві фігури та розмістіть їх так, щоб: а) їх об'єднання було тілом; б) їх переріз був тілом; в) їх об'єднання не було тілом; г) їх переріз не був тілом.
588. Точка K — середина ребра AD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точки B , C і K .
589. Довжина ребра правильного тетраедра дорівнює a . Побудуйте його переріз площиною, що проходить через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.
590. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 6 см, 6 см і 8 см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини цих ребер, і знайдіть його периметр.
591. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, яка проходить через: а) точки A , B_1 і D_1 ; б) точки A , C та середину ребра DD_1 .
592. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Побудуйте переріз його площиною, яка проходить через точки A , B_1 і C . Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = 5$ дм.

593. (ЗНО, 2010). На малюнках (1–4) зображено куб і три точки, що розміщені у вершинах куба або є серединами його ребер. Установіть відповідність між кожним малюнком та назвою фігури (А–Д), яка є перерізом куба площиною, що проходить через три заданих точки.



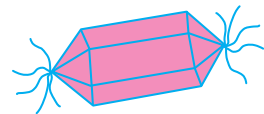
- А Трикутник
- Б Прямокутник
- В Трапеція
- Г П'ятикутник
- Д Ромб

594. Накресліть тетраедри (мал. 111) в зошиті. Побудуйте їх перерізи, що проходять через точки E, F, H .



Мал. 111

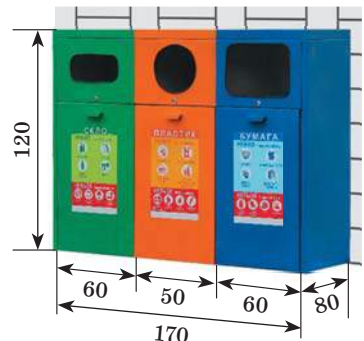
595. $ABCD$ — правильний тетраедр; точки K і P — середини його ребер AB і BC . Знайдіть периметр перерізу даного тетраедра площиною, яка проходить через точки K, P і D , якщо $AB = 10$ см.



Мал. 112

596. Для дітей, що довгий час перебувають у лікарні, волонтери підготували подарунки-сюрпризи у вигляді «великих цукерок» (мал. 112). Спробуйте зробити зменшену копію розгортки такого многогранника. За бажанням зробіть і ви подарунок-сюрприз для людини, яка цього потребує.

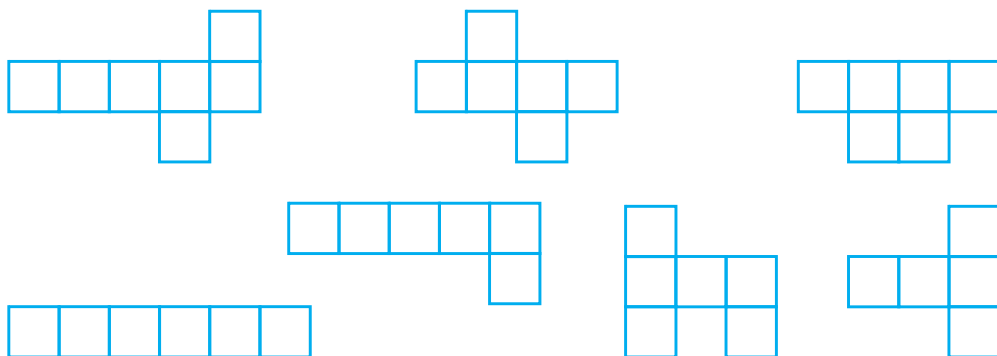
597. На малюнку 113 зображено контейнер для роздільного збору сміття, який встановлюють біля технічної будівлі. Його розміри:



Мал. 113

$170 \times 80 \times 120$ см. Видимі частини контейнера фарбують відповідними кольорами, а невидимі — чорною фарбою. Скільки фарби кожного кольору потрібно, щоб перефарбувати 100 таких контейнерів один раз, якщо на 1 м^2 поверхні йде 120 г фарби? Відходи та втрати покриваються отворами.

598. **Практичне завдання.** На малюнку 114 зображено розгортки многогранників. Установіть, які з них можуть бути розгорткою куба. Виріжте з цупкого паперу одну з цих розгорток і зробіть модель куба.



Мал. 114

599. **Практичне завдання.** Створіть кілька різних розгорток тетраедра. Виріжте з цупкого паперу одну з цих розгорток і зробіть модель тетраедра.

Вправи для повторення

600. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:
- $\vec{a} = (3; 4; 5)$, $\vec{b} = (-3; 4; 5)$;
 - $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 0; 5)$.
601. Знайдіть середину відрізка MN , якщо $M(2; 4; -8)$, а $N(-2; 6; 0)$.
602. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо його вершини лежать у точках $A(0; 4; 0)$, $B(4; 0; 0)$ і $C(0; 0; 4)$.
603. Лікувальний засіб «Гірчичник» (мал. 115) — аркуш цупкого паперу розміром $8 \times 12,5$ см, вкритий шаром знежиреного порошку з насіння гірчиці, товщиною $0,3-0,55$ мм. Хворому під час лікування поставили 4 таких гірчичники. З'ясуйте, яку площу тіла хворого було вкрито гірчичниками і який об'єм гірчиці за цих умов було використано.



Мал. 115

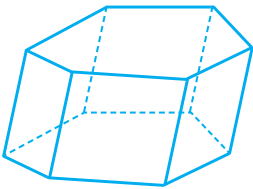
§ 17. ПРИЗМИ

Які геометричні фігури нагадують вам ці об'єкти (мал. 116)?



Мал. 116

Всі вони мають форму призми — прямої чи похилої, чотирикутної, п'ятикутної чи шестигуної.



Мал. 117

Многогранник, у якого дві грані — рівні n -кутники, а решта n граней — паралелограми, називають **n -кутною призмою** (мал. 117).

Два рівні n -кутники, про які йдеться в означенні, називають *основами призми*. Їх відповідні сторони попарно паралельні (як протилежні сторони паралелограма), тому основи призми лежать у паралельних площинах (ознака паралельності площин).

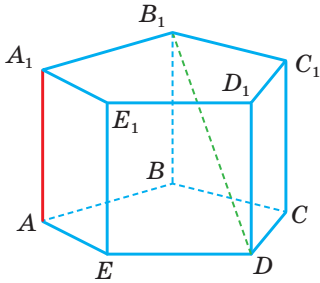
Залежно від того, який многокутник лежить в основі, призму називають трикутною, чотирикутною, п'ятикутною, ..., n -кутною.

Усі грані призми, які не є основами, та ребра, які не є сторонами основ, називають відповідно *бічними гранями* та *бічними ребрами* призми. Відрізок, який сполучає дві вершини призми, що не належать одній грані, називають *діагоналлю призми*.

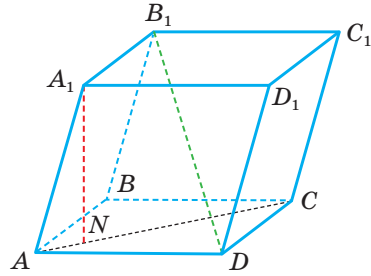
Висота призми — відстань між площинами її основ. Висота прямої призми дорівнює довжині її бічного ребра.

Призму називають **прямою**, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площин основ. Усі інші призми називають **похилими**.

На малюнках зображено пряму (мал. 118) і похилу (мал. 119) призми. Для кожної зеленим кольором побудовано одну з діагоналей, а червоним — одну з висот.



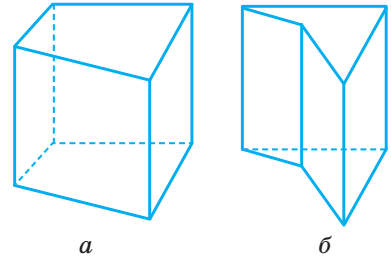
Мал. 118



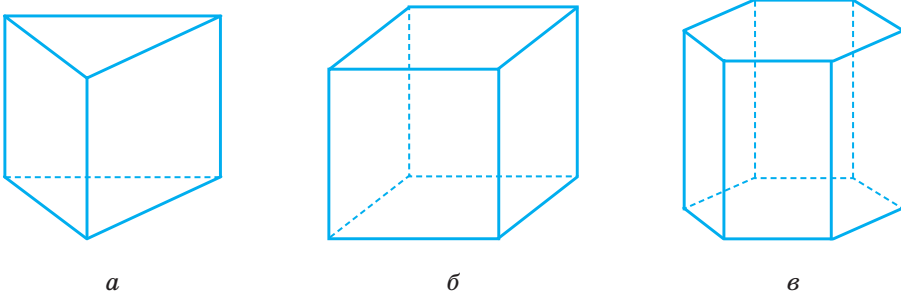
Мал. 119

Призми бувають *опуклі* (мал. 120, а) й *неопуклі* (мал. 120, б). Призму називають *правильною*, якщо вона пряма та її основою є правильний многокутник.

Усі бічні грані прямої призми — прямокутники. На малюнку 121 зображено правильні трикутну, чотирикутну й шестикутну призми. Кожна правильна призма опукла. Усі бічні грані правильної призми — рівні прямокутники.



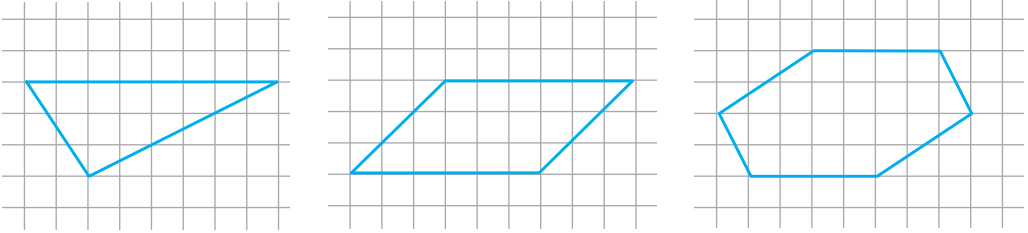
Мал. 120



Мал. 121

Призму зображають відповідно до правил паралельного проектування. Краще її будувати, починаючи з основи, тобто спочатку слід зобразити відповідний многокутник $ABCD\dots$. По один бік від площини цього многокутника проводять паралельні відрізки $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, \dots$, що мають рівні довжини. Для наочності бічні ребра прямої призми зображають вертикальними відрізками, а похилої призми — похилими. З'єднавши послідовно утворені точки $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$, отримують многокутник $A_1B_1C_1D_1\dots$ — другу основу призми. Невидимі ребра зображають штриховими лініями.

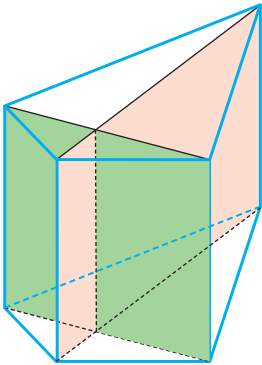
Щоб швидко і наочно зобразити основи призми, можна використовувати такі шаблони побудови на клітинках трикутника, паралелограма і шестикутника (мал. 122).



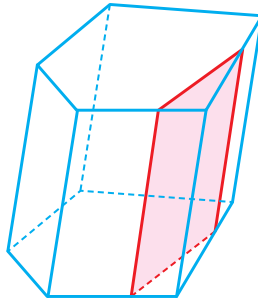
Мал. 122

Переріз призми площиною, яка проходить через її бічне ребро та діагональ основи, називають *діагональним перерізом*. Діагональний переріз кожної призми — паралелограм, а прямої призми — прямокутник (мал. 123).

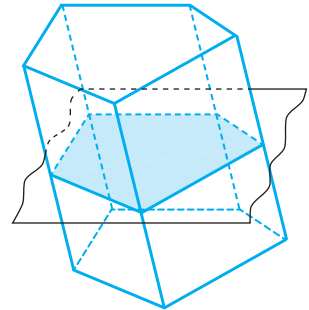
Перерізи призми площинами, які паралельні бічним ребрам, — паралелограми (мал. 124), а прямої призми — прямокутники.



Мал. 123



Мал. 124



Мал. 125

Січна площина, паралельна основам призми, перетинає її по багатокутнику, який дорівнює основі (мал. 125).

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней.

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту:

$$S_6 = P \cdot h.$$

(Спробуйте довести це твердження самостійно).

Площа поверхні призми дорівнює сумі площ її бічної поверхні та двох основ:

$$S_{\text{п}} = S_6 + 2S_{\text{осн}}.$$

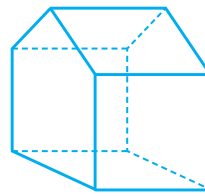
Чи можна вважати призмою зображений на малюнку 126 многогранник?

Призму, основою якої є паралелограм, називають **паралелепіпедом**.

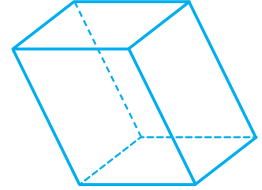
Усі шість граней паралелепіпеда — паралелограми (мал. 127).

Паралелепіпед, чотири грані якого є прямокутниками, називають *прямим*. Якщо всі шість граней паралелепіпеда — прямокутники, то його називають *прямокутним паралелепіпедом*. Правильна чотирикутна призма — окремий вид прямокутного паралелепіпеда.

Так, це — призма, але поставлена на бічну грань. Назва фігури не залежить від того, як вона розміщена в просторі.



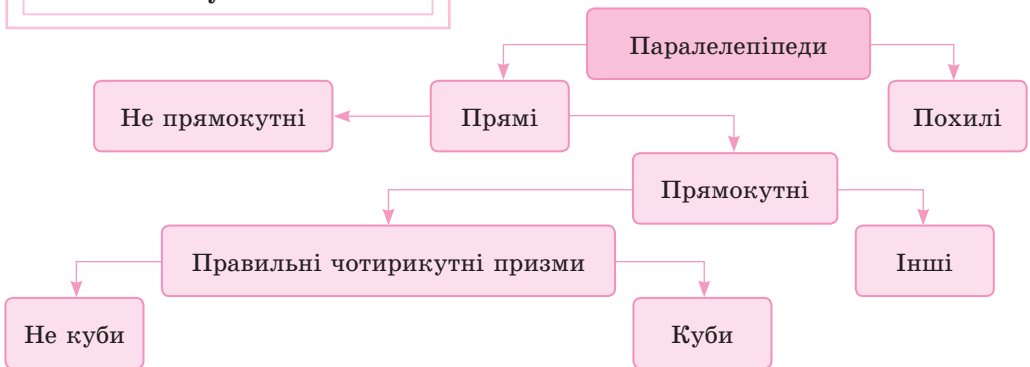
Мал. 126



Мал. 127

Прямокутний паралелепіпед, усі ребра якого рівні, називають **кубом**.

Співвідношення між різними видами паралелепіпедів подані на схемі (мал. 128).



Мал. 128

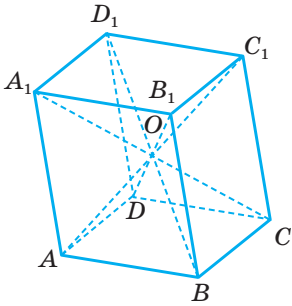
Оскільки паралелепіпед — це окремий вид призми, то його поверхню знаходять так само, як поверхню відповідної призми, зокрема площу бічної поверхні (S_6) і поверхні (S_n) прямого паралелепіпеда визначають за формулами:

$$S_6 = P_{\text{осн}} \cdot h, \quad S_n = S_6 + 2S_{\text{осн}}.$$

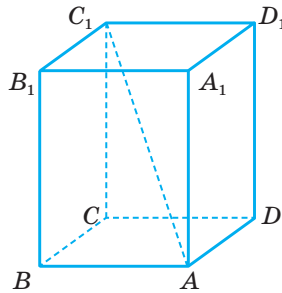
Розглянемо найважливіші *властивості діагоналей паралелепіпеда*.

1. Діагоналі кожного паралелепіпеда перетинаються в одній точці і діляться цією точкою навпіл (мал. 129).
2. Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів (мал. 130).

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$



Мал. 129



Мал. 130



Мал. 131

Останнє твердження про діагоналі паралелепіпеда у XIII столітті довів італійський математик **Леонардо Пізанський (Фібоначчі)** (мал. 131).

Спробуйте довести самостійно, що всі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

Форму прямокутного паралелепіпеда мають цеглини, бруски, контейнери, ящики для овочів і фруктів, деякі упаковки продуктів харчування, ліків тощо (мал. 132). З непрямокутними паралелепіпедами часто доводиться мати справу мінерологам і кристалографам.



Мал. 132

Перевірте себе

- 1 Що називають призмою? Назвіть елементи призми.
- 2 Якими бувають призми?
- 3 Які призми називають прямими? А правильними?
- 4 Що називають діагоналлю призми? А діагональною площиною; діагональним перерізом призми?
- 5 Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми? А непрямої?
- 6 Чому дорівнює площа поверхні довільної призми?
- 7 Сформулюйте означення паралелепіпеда. Назвіть його елементи.
- 8 Які бувають паралелепіпеди?
- 9 Який паралелепіпед називають прямим?
- 10 Сформулюйте і доведіть властивості діагоналей паралелепіпеда.

Виконаємо разом

- 1) Площа поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 40 см^2 , а площа бічної поверхні — 32 см^2 . Знайдіть висоту призми.

Розв'язання. Площі двох основ призми дорівнюють $40 - 32 = 8 \text{ (см}^2\text{)}$, а однієї — 4 см^2 . Тому сторона основи дорівнює 2 см . Площа однієї бічної грані $32 : 4 = 8 \text{ (см}^2\text{)}$. Якщо висота призми дорівнює h , то $2h = 8$, звідки $h = 4 \text{ (см)}$.

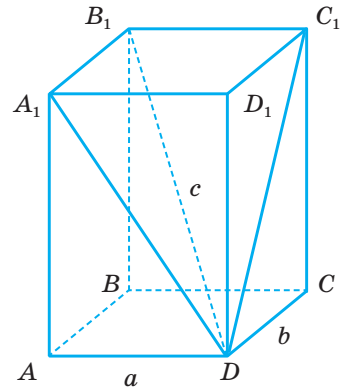
- 2) Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого дорівнює $5\sqrt{10} \text{ см}$, а діагоналі бічних граней — 13 см і 15 см .

Розв'язання. Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямокутний паралелепіпед, у якого $DB_1 = 5\sqrt{10} \text{ см}$, $DC_1 = 13 \text{ см}$, $DA_1 = 15 \text{ см}$ (мал. 133). Позначимо виміри паралелепіпеда $AD = a$, $DC = b$, $DD_1 = c$.

Тоді за теоремою Піфагора $DC_1^2 = b^2 + c^2$, $DA_1^2 = a^2 + c^2$ і $DB_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 250, \\ b^2 + c^2 = 169, \\ a^2 + c^2 = 225. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння друге і третє, отримаємо: $a^2 = 81$ і $b^2 = 25$, тоді $c^2 = 144$. Отже, $AD = 9 \text{ см}$, $DC = 5 \text{ см}$, $DD_1 = 12 \text{ см}$. Тоді $S_6 = P_{\text{осн}} \cdot h = 2(5 + 9) \cdot 12 = 336 \text{ (см}^2\text{)}$. $S_{\text{п}} = S_6 + 2S_{\text{осн}}$. Оскільки $S_{\text{осн}} = 5 \cdot 9 = 45 \text{ (см}^2\text{)}$, то $S_{\text{п}} = 336 + 2 \cdot 45 = 426 \text{ (см}^2\text{)}$.



Мал. 133

Виконайте усно

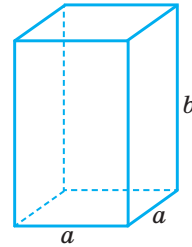
604. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму призми.
605. Дано правильну трикутну призму. Чому дорівнює двогранний кут при: а) ребрі основи; б) бічному ребрі?
606. Чому дорівнює площа поверхні куба з ребром завдовжки 2 см ?
607. Три попарно непаралельні ребра паралелепіпеда мають довжини 1 дм , 2 дм і 3 дм . Знайдіть суму довжин усіх ребер паралелепіпеда.
608. Площі трьох граней паралелепіпеда дорівнюють 2 см^2 , 3 см^2 і 4 см^2 . Чому дорівнює площа поверхні паралелепіпеда? А площа бічної поверхні?
609. Скільки граней, ребер і вершин має п'ятикутна призма? Зобразіть її.
610. Чи рівні діагональні перерізи правильної чотирикутної призми? А правильної п'ятикутної?

А

611. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює 48 см^2 . Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо довжина сторони основи дорівнює 4 см .

612. На малюнку 134 зображено правильну чотирикутну призму, сторона основи якої дорівнює a , а бічне ребро — b . Знайдіть:

- площу бічної грані;
- площу основи;
- площу бічної поверхні;
- площу поверхні призми;
- діагональ основи;
- діагональ бічної грані.



Мал. 134

613. У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Площа її бічної поверхні — 27 см^2 . Знайдіть площу основи призми.

614. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює 10 см , а діагональ утворює з площиною основи кут 60° . Установіть відповідність між елементами призми (1–4) та їх числовим значенням (А–Д).

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1 Діагональ основи | А $10\sqrt{3} \text{ см}$ |
| 2 Діагональ призми | Б $10\sqrt{6} \text{ см}$ |
| 3 Висота призми | В $20\sqrt{2} \text{ см}$ |
| 4 Діагональ бічної грані | Г $10\sqrt{2} \text{ см}$ |
| | Д $10\sqrt{7} \text{ см}$ |

615. У правильній чотирикутній призмі площа основи дорівнює 400 см^2 , а висота — 10 см . Знайдіть площу діагонального перерізу.

616. Побудуйте переріз трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через вершини A , B і середину ребра A_1C_1 .

617. Три грані призми — рівні квадрати зі стороною 2 см , а дві інші — трикутники. Накресліть цю призму та її розгортку.

618. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами: а) 10 см , 16 см і 22 см ; б) a , b , c .

619. Дано паралелепіпед, кожна грань якого — ромб зі стороною a і кутом α . Знайдіть площу його поверхні.

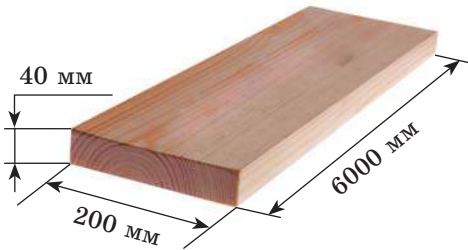
620. Знайдіть діагоналі прямокутного паралелепіпеда, виміри якого — 3 см , 4 см і 12 см .

621. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого — 4 см , 4 см і 10 см .

622. Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 1 , 2 і 3 . Знайдіть їх довжини, якщо площа його поверхні дорівнює 550 см^2 .

623. Розміри цеглини — $250 \times 120 \times 65 \text{ мм}$. Знайдіть відстань між її найвіддаленішими точками.

624. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 42 см^2 , 72 см^2 і 84 см^2 . Знайдіть довжини його ребер.
625. Знайдіть довжину діагоналі куба, ребро якого дорівнює a .
- ✓ 626. (ЗНО, 2010). Дерев'яний брусок має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 10 см, 20 см, 80 см. Скільки лаку потрібно для того, щоб один раз покрити ним усю поверхню цього бруска, якщо на 1 м^2 витрачається 100 г лаку?
627. Для проведення змагань з настільних ігор у таборі відпочинку вирішили виготовити довгий дерев'яний стіл. Для стільниці придбали 5 обрізних дошок (розміри подано на малюнку 135). Скільки лаку знадобиться для того, щоб один раз покрити ним кожну дошку, якщо на 1 м^2 витрачається 100 г лаку?
628. Підставка для канцелярського приладдя має форму правильної трикутної призми без верхньої основи (мал. 136). Периметр бічної грані цієї підставки дорівнює 40 см. Знайдіть площу бічної поверхні підставки, якщо сторона її основи дорівнює 10 см.



Мал. 135



Мал. 136

629. Знайдіть площу діагонального перерізу правильної чотирикутної призми, висота якої дорівнює 10 см, а площа основи — 144 см^2 .
630. Площа поверхні правильної чотирикутної призми — 144 см^2 , а бічної поверхні — 112 см^2 . Знайдіть висоту призми.

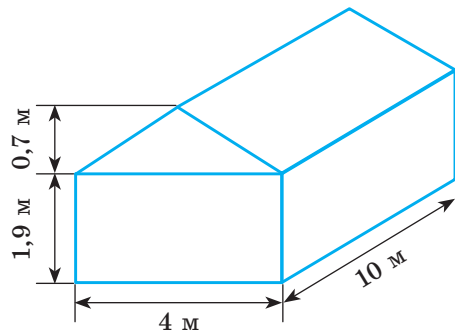
Б

631. Доведіть, що n -кутна призма має $n + 2$ грані, $3n$ ребер і $2n$ вершин.
632. Чи існує призма, яка має 100 ребер?
633. Чи можуть площі бічних граней правильної трикутної призми дорівнювати 20 см^2 , 30 см^2 і 50 см^2 ?
634. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної призми дорівнює S . Знайдіть площу її бічної поверхні.

635. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямий паралелепіпед, K, L, M — середини ребер $AB, A_1 B_1, B_1 C_1$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки K, L, M . Знайдіть площу перерізу, якщо $AA_1 = 6$ см, $LM = 10$ см.
636. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторони основи дорівнюють 6 см і 8 см, а бічне ребро — 12 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через точки C, C_1, A .
637. Виміри прямокутного паралелепіпеда — 3, 4 і 5. Знайдіть кут між діагоналлю паралелепіпеда та його найменшою гранню.
638. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює h , а сторона основи — a . Знайдіть: а) площу її поверхні; б) довжину діагоналі призми; в) площу діагонального перерізу призми.
639. Бічне ребро призми дорівнює l і нахилене до площини основи під кутом α . Знайдіть висоту призми.
640. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу: а) діагонального перерізу; б) бічної поверхні призми.
641. Гумки форми прямого і похилого паралелепіпедів (мал. 137) мають однакові лінійні розміри (довжину, ширину і висоту). Установіть, яка з гумок має більшу площу поверхні.



Мал. 137

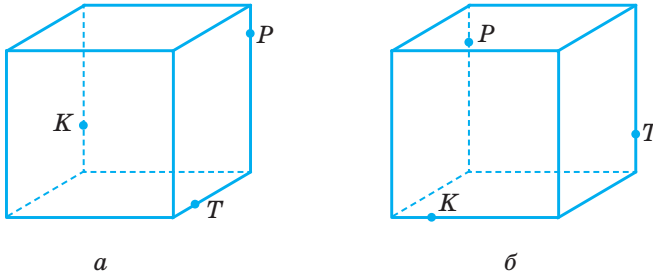


Мал. 138

642. На малюнку 138 зображено теплицю для вирощування овочів. Установіть вартість плівки на цю теплицю, якщо вона продається погонними метрами у формі рукава, ширина якого дорівнює 1500 мм. Врахуйте, що плівку можна склеювати, але 5% плівки йде у відходи. Ціна одного погонного метра становить 21 грн.
643. (ЗНО, 2009). Кімната має форму прямокутного паралелепіпеда (ширина кімнати — 4 м, довжина — 5 м, висота — 2,5 м). Площа стін кімнати дорівнює 0,8 площі бічної поверхні цього паралелепіпеда. Скільки фарби (у кг) потрібно для того, щоб повністю пофарбувати стіни і стелю цієї кімнати, якщо на 1 м витрачається 0,25 кг фарби?
644. У кімнаті, що має форму прямокутного паралелепіпеда, є два вікна та одні двері. Скільки рулонів шпалер (без малюнка) потрібно придбати,

щоб обклеїти стіни цієї кімнати, якщо відомі розміри (у м): кімнати — $4 \times 5 \times 2,8$; вікон — $1,2 \times 1,8$; дверей — $0,9 \times 2,1$; рулона — $0,5 \times 10$. Врахуйте, що відходи становлять 5%.

645. Намалюйте прямокутний паралелепіпед. Позначте на його ребрах точки M , K , R так, щоб перерізом паралелепіпеда площиною MKN був п'ятикутник.
646. Перенесіть малюнки 139 у зошит і на кожному з них побудуйте переріз многогранника площиною KPT .

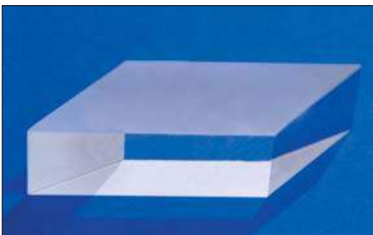


Мал. 139

647. *Задача для кмітливих.* $ABCA_1B_1C_1D_1$ — правильна призма, у якої $AA_1 = 15$ см, $AB = BC = 5$ см. Знайдіть найкоротшу відстань по поверхні призми між серединами ребер AB і C_1D_1 .
648. **Практичне завдання.**
1. Виготовте з цупкого паперу розгортку похилого паралелепіпеда.
 2. Виготовте з пластиліну чи іншого матеріалу неопуклу призму.

Вправи для повторення

649. Побудуйте переріз куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки B , D і C_1 . Укажіть кількість вершин, ребер і граней у кожному многограннику, на які січна площина поділяє куб $ABCA_1B_1C_1D_1$.
650. Кожні дві з трьох прямих перетинаються, але всі разом не лежать в одній площині. Як розташовані дані прямі? Виконайте малюнок.
651. Знайдіть кути ромба, якщо вони пропорційні числам 2 і 7.



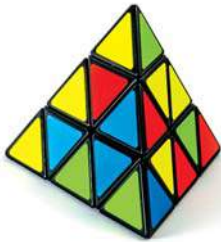
Ромбовидна призма

§ 18. ПІРАМІДИ

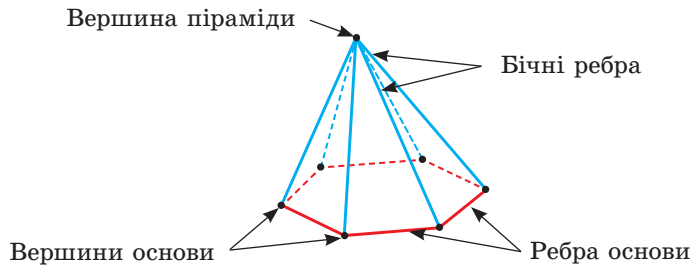
Піраміда — термін багатозначний. Його використовують в екології — екологічні піраміди, в економіці — фінансові піраміди, в архітектурі — єгипетські піраміди, у спорті — акробатичні піраміди, більярдні піраміди, у побуті — дитячі піраміди, пірамідка Мефферта (мал. 140), у математиці — спеціальний вид многогранника.

У піраміді трикутники зі спільною вершиною називають *бічними гранями*, а їх спільну вершину — *вершиною піраміди*. Грань, яка не є бічною, — *основа піраміди*. Залежно від кількості сторін основи розрізняють трикутні, чотирикутні, ..., n -кутні піраміди. Трикутну піраміду називають також *тетраедром*.

Пірамідою називають многогранник, одна грань якого — довільний многокутник, а решта — трикутники, що мають спільну вершину (мал. 141).



Мал. 140



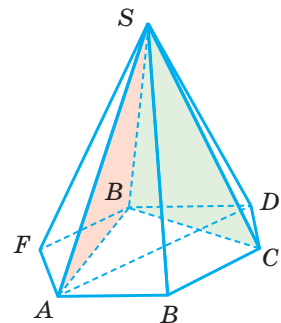
Мал. 141

Ребро, яке не є стороною основи, називають *бічним ребром піраміди*. Січна площина, яка проходить через два несуміжні бічні ребра піраміди, перетинає її по трикутнику, який називають *діагональним перерізом* піраміди (мал. 142).

Висотою піраміди називають перпендикуляр, опущений з її вершини на площину основи. Довжину цього перпендикуляра також називають висотою піраміди. Це — омоніми.

Піраміду називають *правильною*, якщо її основа — правильний многокутник, центр якого збігається з основою висоти піраміди. Усі бічні ребра правильної піраміди — рівні, усі бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники. (Доведіть самостійно).

Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають *апофемою піраміди*.



Мал. 142

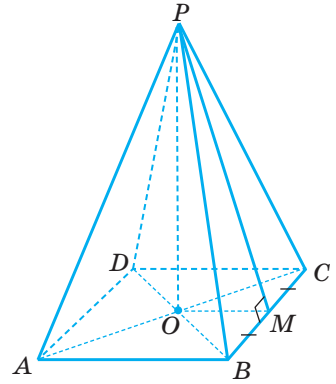
Неправильна піраміда апофем не має. На малюнку 143 зображено правильну чотирикутну піраміду. Відрізок PO — її висота, а PM — апофема.

Піраміду зображають відповідно до правил паралельного проектування.

Щоб зобразити піраміду, потрібно:

- побудувати зображення многокутника, який лежить в її основі;
- за умовою задачі знайти положення точки O — основи висоти PO ;
- з точки O вертикально вгору провести промінь, на якому вибрати точку P — вершину піраміди;
- сполучити точку P з вершинами основи;
- виділити видимі і невидимі ребра піраміди.

Бічна поверхня піраміди складається з поверхонь усіх її бічних граней.



Мал. 143

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему піраміди.

Доведемо сформульоване твердження.

Якщо сторона основи правильної n -кутної піраміди дорівнює a , а апофема — l , то площа однієї бічної грані дорівнює $\frac{1}{2}al$.

Бічна поверхня піраміди складається з n таких граней. Тому, якщо периметр основи піраміди дорівнює P , то площа її бічної поверхні

$$S_6 = \frac{1}{2}al \cdot n = \frac{1}{2}an \cdot l = \frac{1}{2}P \cdot l.$$

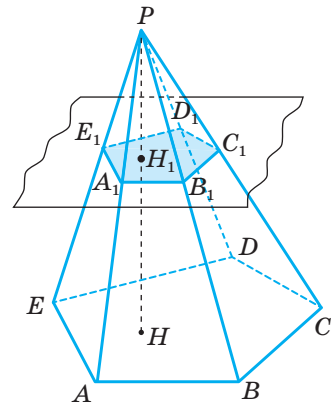
Щоб знайти всю площу поверхні піраміди, треба до площі бічної поверхні додати площу основи:

$$S_{\Pi} = S_6 + S_{\text{осн}}.$$

Площу бічної поверхні неправильної піраміди знаходять як суму площ усіх її граней.

Нехай $PABCD$ — довільна піраміда. Якщо через точку H_1 її висоти PH провести площину, паралельну площині основи, то вона перетне піраміду по многокутнику $A_1B_1C_1D_1$, подібному до многокутника $ABCD$ (мал. 144). Якщо площа основи піраміди дорівнює $S_{\text{осн}}$, а площа перерізу — $S_{\text{пер}}$, то

$$S_{\text{осн}} : S_{\text{пер}} = PH^2 : PH_1^2.$$



Мал. 144

Тобто площі основи піраміди та паралельного їй перерізу відносяться як квадрати відстаней від їх площин до вершини піраміди.

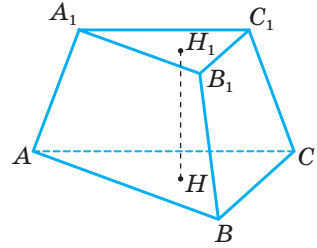
Доведення цих тверджень елементарні, але досить громіздкі, тому опускаємо їх. Наведемо лише приклад. Якщо січну площину, паралельну площині основи піраміди, провести через середину висоти, то площа перерізу ($S_{\text{пер}}$) буде в 4 рази менша від площі основи ($S_{\text{осн}}$). Бо якщо $PH : PH_1 = 2 : 1$, то

$$S_{\text{осн}} : S_{\text{пер}} = PH^2 : PH_1^2 = 4 : 1.$$

Частина піраміди, що міститься між її основою та січною площиною, паралельною основі, називають **зрізаною пірамідою** (мал. 145).

Паралельні грані зрізаної піраміди називають її *основами*, а всі інші — *бічними гранями*. *Висота зрізаної піраміди* — відстань між площинами її основ. Зрізану піраміду називають *правильною*, якщо вона є частиною правильної піраміди. Основи кожної зрізаної піраміди — подібні багатокутники, а бічні грані — трапеції.

Зауваження. Зрізана піраміда не є пірамідою, оскільки не відповідає означенню піраміди. Тому не можна стверджувати, що «зрізана піраміда — це така піраміда, у якої...» або що «піраміди бувають повні та зрізані».



Мал. 145

Перевірте себе

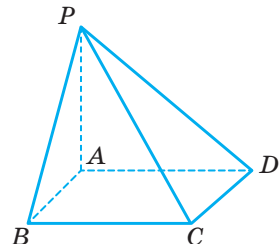
- 1 Сформулюйте означення піраміди. Назвіть її елементи.
- 2 Які бувають піраміди?
- 3 Що називають діагональним перерізом піраміди?
- 4 Які піраміди називають правильними?
- 5 Що називають апофемою правильної піраміди?
- 6 Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної піраміди?

Виконаємо разом

- 1) Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, основа якої — квадрат зі стороною a , а висота проходить через одну з вершин основи і дорівнює h .

Розв'язання. Нехай $PABCD$ — піраміда, яка задовольняє умову задачі (мал. 146). Оскільки $PA \perp AB$ і $PA \perp AD$, то грані PAB і PAD — прямокутні трикутники. Площа кожного з них дорівнює

$$\frac{1}{2} ah. \quad PB = PD = \sqrt{a^2 + h^2}.$$



Мал. 146

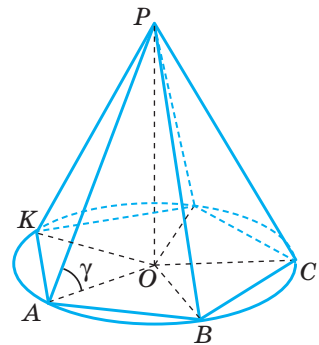
За теоремою про три перпендикуляри, $PB \perp BC$ і $PD \perp DC$, тому грані PBC і PDC — прямокутні трикутники. Площа кожного з них дорівнює $\frac{1}{2} a\sqrt{a^2 + h^2}$.

Тому площа всієї бічної поверхні піраміди

$$S_6 = 2 \cdot \frac{1}{2} ah + 2 \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{a^2 + h^2} = a(h + \sqrt{a^2 + h^2}).$$

- 2) Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під рівними кутами, то основа її висоти — центр кола, описаного навколо основи піраміди.

Розв'язання. Якщо всі бічні ребра піраміди $PABC\dots K$ нахилені до площини основи під кутом γ (мал. 147), то прямокутні трикутники POA , POB , ..., POK рівні (за катетом PO і протилежним кутом). Тоді рівні й відрізки OA , OB , ..., OK . Отже, всі вершини основи піраміди лежать на колі радіуса OA з центром у точці O .



Мал. 147

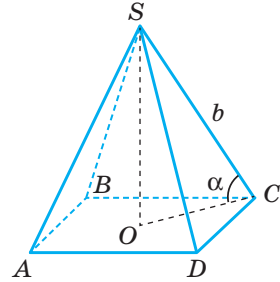
Виконайте усно

652. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму піраміди.
653. Скільки граней, вершин і ребер має n -кутна піраміда?
654. Чи існує піраміда, яка має 125 ребер?
655. Знайдіть площу поверхні правильного тетраедра, якщо сторона його основи дорівнює a .
656. Площина, паралельна основі піраміди, ділить її висоту навпіл. Знайдіть площу основи піраміди, якщо площа перерізу дорівнює 40 см^2 .
657. Усі грані піраміди рівні між собою. Знайдіть площу основи цієї піраміди, якщо площа її повної поверхні дорівнює 24 см^2 .

А

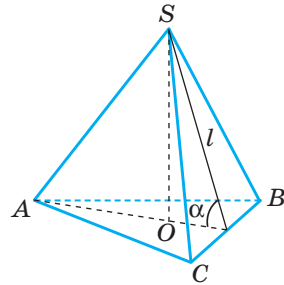
658. Знайдіть площу поверхні правильної трикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 10 см , а апофема — 6 см .
659. Знайдіть апофему правильної чотирикутної піраміди, якщо її висота дорівнює 4 см , а сторона основи — 6 см .
660. Двогранний кут при ребрі основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60° , а апофема дорівнює 10 см . Знайдіть площу основи.
661. Кут між висотою та апофемою правильної чотирикутної піраміди дорівнює 30° , сторона основи — a . Чому дорівнює апофема піраміди?

662. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α (мал. 148). Знайдіть: а) висоту піраміди; б) діагональ основи; в) сторону основи.



Мал. 148

663. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α (мал. 149). Знайдіть: а) висоту піраміди; б) медіану основи; в) сторону основи; г) площу поверхні піраміди.



Мал. 149

664. Відома піраміда Хеопса в Єгипті має форму правильної чотирикутної піраміди. Її висота — 147 м, а площа основи — 5,3 га. Знайдіть кут нахилу її бічного ребра до площини основи.

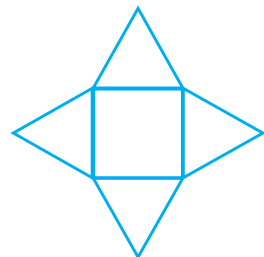
665. Основа піраміди — прямокутник зі сторонами 12 см і 16 см. Кожне бічне ребро дорівнює 26 см. Знайдіть висоту піраміди.

666. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, основа якої — квадрат зі стороною 5 см, а висота проходить через одну з вершин основи і дорівнює 12 см.

667. Висота чотирикутної піраміди дорівнює 4 см і проходить через точку перетину діагоналей основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо в основі лежить: а) квадрат зі стороною $8\sqrt{3}$ см; б) прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см; в) ромб із діагоналями 12 см і 16 см.

668. Знайдіть площу поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо: а) сторона основи дорівнює a , а двогранний кут при ребрі основи — α ; б) бічне ребро дорівнює b і утворює з площиною основи кут 45° ; в) відстань від основи висоти до бічної грані дорівнює d , а двогранний кут при ребрі основи — α .

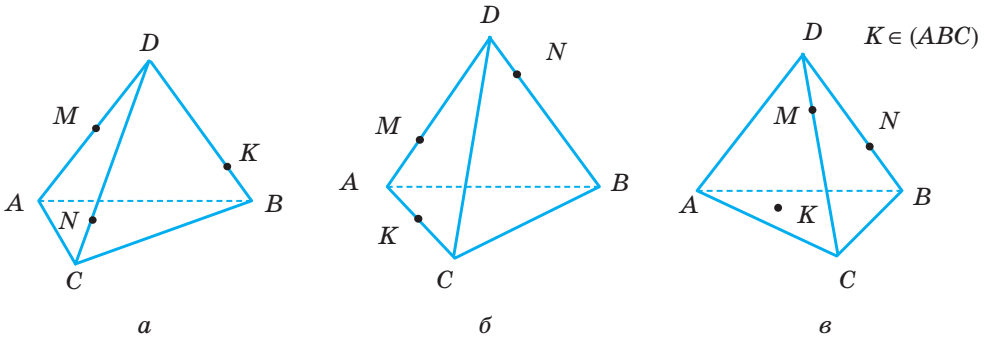
- 669.** (ЗНО, 2014). На малюнку 150 зображено розгортку піраміди, що складається з квадрата, сторона якого дорівнює 10 см, і чотирьох правильних трикутників. Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди (y см²).



Мал. 150

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------|-----|---------------|----------------------------|-----|
| $100\sqrt{3}$ | 100 | $400\sqrt{3}$ | $100 \cdot (1 + \sqrt{3})$ | 200 |

- 670.** Дах має форму правильної чотирикутної піраміди, ребро основи якої дорівнює 5 м, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 45° . Скільки фарби потрібно, щоб пофарбувати цей дах двічі, якщо на одноразове покриття цією фарбою 1 м^2 витрачається 150 г?
- 671.** Побудуйте перерізи пірамід площиною, що проходить через точки K , M , N (мал. 151).



Мал. 151

Б

- 672.** В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60° . Знайдіть висоту піраміди.
- 673.** В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайдіть відстань від основи висоти піраміди до її бічного ребра.
- 674.** (ЗНО, 2015). Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, а сторона її основи — 12 см. Знайдіть довжину бічного ребра піраміди.

| А | Б | В | Г | Д |
|------|----------------|----------------|------|-------|
| 6 см | $3\sqrt{5}$ см | $5\sqrt{3}$ см | 9 см | 15 см |

- 675.** Доведіть, що коли всі двогранні кути при ребрах основи піраміди рівні, то основа її висоти — центр кола, вписаного в основу піраміди.
- 676.** Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетами 12 см і 16 см. Кожен із двограних кутів при ребрах основи дорівнює 60° . Знайдіть висоту піраміди та площу бічної поверхні.
- 677.** В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 11 см, 24 см і 31 см. Висота піраміди дорівнює 2 см. Усі двогранні кути при ребрах основи рівні. Знайдіть ці кути.
- 678.** Підприємець, який спеціалізується на заготовці екологічно чистих лікувальних трав, вирішив випускати набори трав для покращення стану шкіри обличчя. Кожна трава упаковується в одноразовий паке-тик (виготовлений з екологічного матеріалу), що має форму тетраедра,



кожне ребро якого дорівнює 4 см (мал. 152). В одній картонній упаковці мають міститися: череди — 10 пакетів, календули — 8 пакетів і мати-й-мачухи — 7 пакетів. У підприємця є 7 м^2 екологічного матеріалу для одноразових пакетиків і відповідно підготовлені трави. Скільки упаковок (мал. 153) лікувальних трав він може підготувати до продажу?

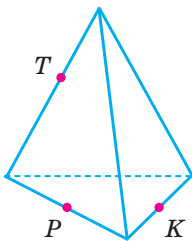


Мал. 152

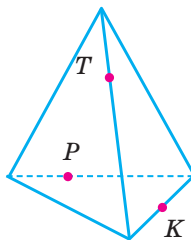


Мал. 153

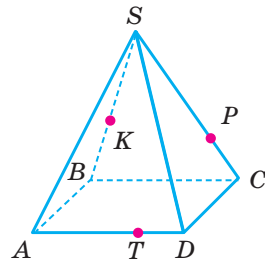
- 679.** Через середину висоти піраміди паралельно основі проведено переріз. Знайдіть площу перерізу, якщо площа основи піраміди дорівнює Q .
- 680.** Площина, паралельна основі піраміди, ділить її висоту у відношенні $2 : 3$ (від вершини до основи). Знайдіть площу перерізу, знаючи, що вона на 84 см^2 менша від площі основи піраміди.
- 681.** Через точки, які ділять висоту піраміди на чотири рівні частини, проведено площини, паралельні основі піраміди. Знайдіть площі перерізів, якщо площа основи піраміди дорівнює 16 см^2 .
- 682.** Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди вдвічі менша від площі основи. Доведіть, що її протилежні бічні ребра перпендикулярні.
- 683.** Побудуйте перерізи пірамід площиною, що проходить через точки K, P, T (мал. 154).



а



б



в

Мал. 154

- 684.** Знайдіть площу поверхні тетраедра, вершинами якого є точки $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ і $C(0; 0; 2)$.
- 685.** Знайдіть площі діагональних перерізів правильної шестикутної піраміди, якщо її висота і сторона основи дорівнюють по 6 дм .

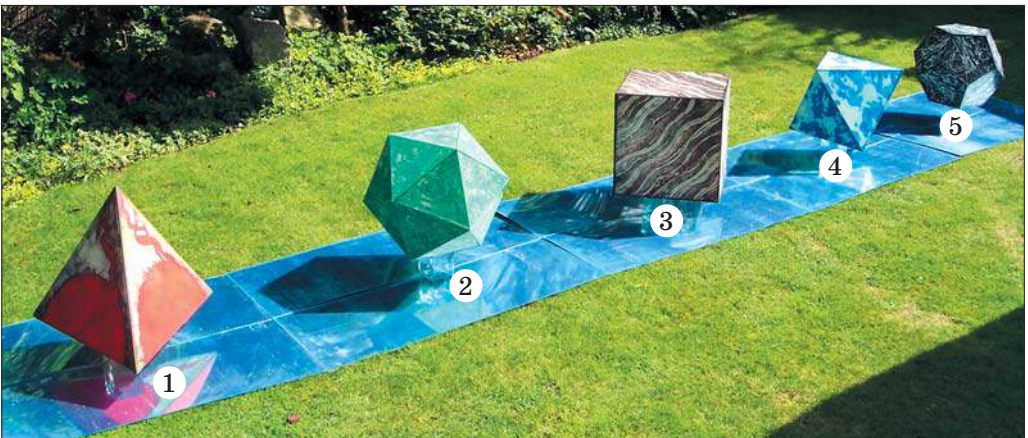
- 686.** Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною a . Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом 30° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 687. Практичне завдання.** Виріжте з цупкого паперу розгортку правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 4 см, а бічне ребро — 8 см.

Вправи для повторення

- 688.** Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайдіть кут між відрізками AC і DC_1 .
- 689.** В основі прямої призми з висотою 4 см лежить квадрат зі стороною 3 см. Знайдіть площу перерізу призми площиною, яка проходить через вершину основи перпендикулярно до діагоналі бічної грані.
- 690.** Знайдіть відстань від точки $A(-1; -3; 4)$ до осі абсцис.

§ 19. ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

На малюнку 155 зображена інсталяція з п'яти правильних многогранників — тетраедра (1), ікосаедра (2), гексаедра (куба) (3), октаедра (4) і додекаедра (5). Ці тіла стали предметом дослідження багатьох вчених задовго до початку нашої ери. Особливі властивості цих фігур надавали їм таємничості та підносили їх до основи світобудови. Давньогрецький філософ Платон назвав їх «найпрекраснішими з усіх, які не подібні між собою, але, руйнуючись, здатні перероджуватися один в одного». Дізнайтеся самостійно, чому на інсталяції їх подано саме в такій кольоровій гамі.



Мал. 155

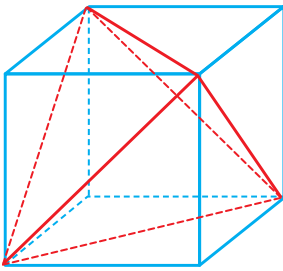
Розглянемо детальніше ці многогранники та їх властивості.

Многогранник називають **правильним**, якщо всі його грані — рівні правильні багатокутники, а всі вершини рівновіддалені від деякої точки.

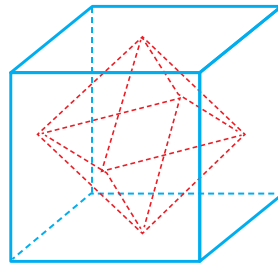
Цю точку називають *центром правильного многогранника*.

Куб — правильний многогранник, бо всі його грані — рівні квадрати, а всі вершини куба рівновіддалені від точки перетину його діагоналей. Якщо сполучити відрізками кінці двох мимобіжних діагоналей протилежних граней куба, то утвориться каркас **правильного тетраедра** (мал. 156).

Адже кожна його грань — рівносторонній трикутник, а кожна вершина однаково віддалена від центра куба. Сполучивши відрізками центри суміжних граней куба, дістанемо каркас **правильного октаедра** (мал. 157).



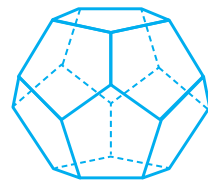
Мал. 156



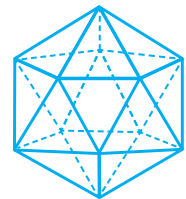
Мал. 157

Існує п'ять видів правильних многогранників. Крім трьох названих, є ще правильний *додекаедр* (мал. 158, а) і правильний *ікосаедр* (мал. 158, б). Назви *тетраедр*, *октаедр*, *додекаедр*, *ікосаедр* у перекладі з грецької означають відповідно: чотиригранник, восьмигранник, дванадцятигранник і двадцятигранник. Куб називають ще правильним *гексаедром*.

Форму куба мають кристали кухонної солі (мал. 159) та деякі алмази. Інші алмази кристалізуються у формі правильних октаедрів (мал. 160). Кристали піриту (залізного колчедану) мають форму правильного додекаедра (мал. 161). Вона настільки характерна для піриту, що кристалографи частіше називають додекаедри піритоєдрами.



а



б

Мал. 158



Мал. 159



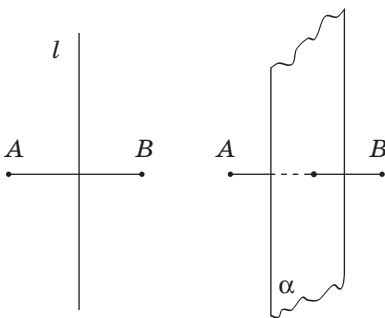
Мал. 160



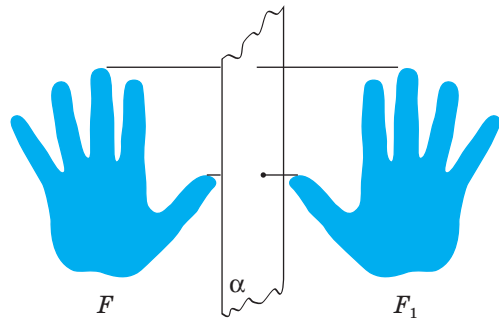
Мал. 161

Властивості правильних многогранників добре знали і часто використовували античні математики та філософи. Для сучасної геометрії правильні многогранники цікаві насамперед як носії багатьох видів симетрії.

У просторі розрізняють симетрії відносно: точки, прямої та площини. Точки A і B називають *симетричними відносно точки O* , якщо O — середина відрізка AB . Точки A і B називають *симетричними відносно прямої (площини)*, якщо ця пряма (площина) перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину (мал. 162). Якщо кожна точка фігури F симетрична відносно деякої точки (прямої чи площини) точці фігури F_1 і навпаки, то фігури F і F_1 називають *симетричними одна одній* відносно точки (прямої чи площини) (мал. 163). Фігуру F називають *симетричною відносно точки (прямої чи площини)*, якщо кожна її точка симетрична відносно точки (прямої чи площини) деякій точці цієї самої фігури. У цьому разі вважають також, що фігура F має центр симетрії (вісь симетрії чи площину симетрії).



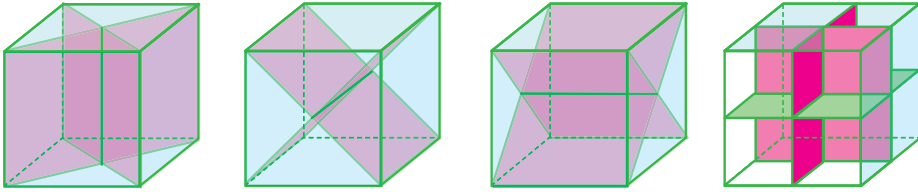
Мал. 162



Мал. 163

Кожен правильний многогранник, крім тетраедра, має центр симетрії, а також кілька осей і кілька площин симетрії. Правильний тетраедр має 3 осі симетрії та 6 площин симетрії. Куб має 9 осей симетрії та 9 площин симетрії.

На малюнку 164 зображені 9 площин симетрії куба.



Мал. 164

Властивості правильних (і похідних від них) многогранників використовують архітектори й будівельники, художники й дизайнери, інженери й конструктори, які створюють просторові конструкції.

Перевірте себе

- 1 Які многогранники називають правильними?
- 2 Якими бувають правильні многогранники?
- 3 Що називають центром правильного многогранника?

Виконаємо разом

- 1) Учень пояснює: «Кожна призма — це многогранник, тому кожна правильна призма — це правильний многогранник. Так само і кожна правильна піраміда є правильним многогранником». Чи правильно це?

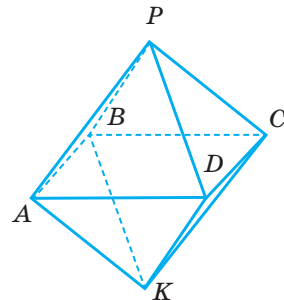
Розв'язання. Ні. Якщо призма не чотирикутна, то її основа не дорівнює бічній грані. Такий многогранник не може бути правильним, бо не всі його грані рівні. З усіх призм тільки куб є правильним многогранником, а з усіх пірамід — тільки правильний тетраедр.

- 2) Чи може бути дев'ятикутник перерізом правильного октаедра?

Розв'язання. Октаедр має 8 граней. Якщо січна площина перетинає навіть усі його грані, то в перерізі буде восьмикутник, а не дев'ятикутник. Отже, не може.

- 3) Доведіть, що протилежні грані правильного октаедра лежать у паралельних площинах.

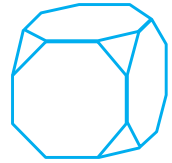
Розв'язання. Нехай $PABCDK$ — правильний октаедр (мал. 165). Усі його ребра і всі діагоналі рівні, тому чотирикутники $PBKD$ і $PAKC$ — квадрати. $PD \parallel BK$ і $PC \parallel AK$. Отже, дві пересічні прямі площини PDC відповідно паралельні двом прямим площини ABK , тому грані октаедра PDC і ABK лежать у паралельних площинах. Так само можна довести, що $PAD \parallel KCB$, $PAB \parallel KCD$ і $PBC \parallel KDA$.



Мал. 165

Виконайте усно

691. Чи є правильним многогранником правильна піраміда?
692. Чи існує піраміда, яка є правильним многогранником? А призма?
693. Чи є правильним многогранником, що об'єднує два правильні тетраедри, які мають спільну основу?
694. Чому дорівнює плоский кут при вершині правильного гексаедра?
695. Площа грані правильного додекаедра дорівнює 10 см^2 . Чому дорівнює його площа поверхні?
696. Площа поверхні правильного гексаедра — 54 см^2 . Чому дорівнює довжина його ребра?
697. Від куба при його вершинах відрізали 8 рівних тетраедрів так, що утворився многогранник, грані якого — правильні трикутники й восьмикутники (мал. 166). Чи є утворена фігура правильним многогранником? Чому?
698. Із двох правильних тетраедрів склали шестигранник, усі грані якого — рівні правильні трикутники. Чи є цей многогранник правильним?



Мал. 166

А

699. Із яких двох чотирикутних пірамід можна скласти правильний октаедр? Як відносяться сторона основи та висота такої піраміди?
700. Чи є правильним многогранником, вершини якого — центри всіх граней: а) куба; б) правильного тетраедра; в) правильного октаедра?
701. Чи є правильним многогранником, вершини якого — середини всіх ребер: а) куба; б) правильного тетраедра; в) правильного октаедра?
702. Знайдіть суму плоских кутів при вершині кожного правильного многогранника.
703. Знайдіть площу поверхні правильного гексаедра, ребро якого дорівнює: а) 12 см ; б) $0,1 \text{ м}$.
704. Знайдіть довжину ребра правильного гексаедра, якщо площа його поверхні дорівнює: а) 726 см^2 ; б) $1,5 \text{ м}^2$.
705. Як зміниться площа поверхні правильного гексаедра, якщо його ребро, що дорівнює 5 см , збільшити: а) на 2 см ; б) у 2 рази?
706. Чи може бути перерізом правильного гексаедра правильний: а) трикутник; б) чотирикутник? Виконайте відповідний малюнок.
707. Заповніть таблицю і за її даними перевірте твердження, сформульоване в теоремі Ейлера.

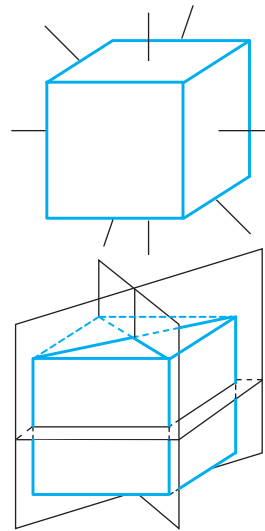
| | Правильний тетраедр | Гексаедр (куб) | Октаедр | Додекаедр | Ікосаедр |
|---------|---------------------|----------------|---------|-----------|----------|
| Вершини | | | | | |
| Ребра | | | | | |
| Грані | | | | | |

708. Намалуйте розгортку правильного октаедра з ребром завдовжки 2 см.
 709. Ребро правильного октаедра дорівнює a . Знайдіть площу його поверхні.
 710. У магазині для маленьких подарунків є упаковки двох видів: у формі куба і у формі правильного тетраедра (мал. 167). На яку упаковку йде більше матеріалу, якщо ребро тетраедра у $\sqrt{3}$ разів більше за ребро куба?



Мал. 167

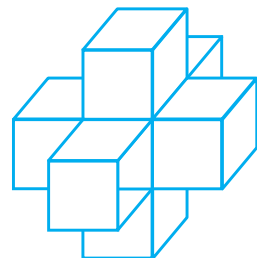
711. **Практичне завдання.** На малюнку 168 зображені деякі з осей симетрії куба. Виготуйте з пластиліну модель куба і спробуйте за допомогою спиці показати всі осі симетрії куба.



Мал. 168

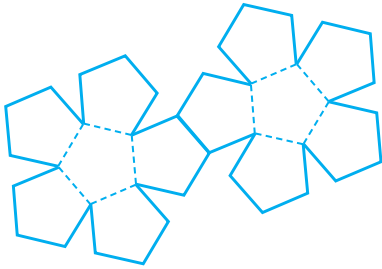
Б

712. Відстань від центра правильного октаедра до його вершини дорівнює b . Знайдіть довжину його ребра.
 713. Скільки осей симетрії та площин симетрії має правильний октаедр?
 714. Ребро правильного октаедра дорівнює 4 см. Знайдіть площу його перерізу площиною симетрії. Скільки розв'язків має задача?
 715. Знайдіть площу поверхні правильного ікосаедра, ребро якого дорівнює 2 см.
 716. Учень отримав завдання виготовити на виставку геометричних фігур многогранник, який складається із семи кубів (мал. 169). Як можна виготовити таку модель? Чому дорівнює площа її поверхні?
 717. Знайдіть ребро правильного октаедра, якщо площа його поверхні дорівнює $8\sqrt{3}$.
 718. У скільки разів збільшиться площа поверхні правильного ікосаедра, якщо кожне його ребро збільшити в 3 рази?
 719. Чи можна правильний тетраедр перерізати площиною так, щоб переріз був квадратом?
 720. Чи можна куб перерізати площиною так, щоб перерізом був правильний: а) трикутник; б) чотирикутник; в) п'ятикутник; г) шестикутник?
 721. Доведіть, що гранню правильного многогранника не може бути шестикутник. А семикутник?
 722. Під яким кутом із центра куба видно його ребро? А з центра правильного октаедра?

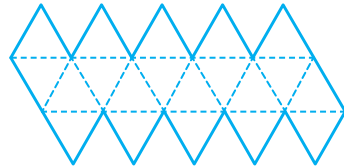


Мал. 169

723. Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки куба до всіх його граней є сталою для даного куба.
724. **Практичне завдання.** Використовуючи малюнки 170 і 171, побудуйте на цупкому папері розгортки правильних додекаедра та ікосаедра. Додайте припуски для склеювання і виготовте відповідні моделі.



Мал. 170



Мал. 171

Вправи для повторення

725. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямокутний паралелепіпед, $AB = BC = a$ і $\angle BAC = \alpha$. Знайдіть площу трикутника AB_1C .
726. Установіть вид $\triangle ABC$, якщо $A(1; -1; 2)$, $B(0; 2; -1)$, $C(2; 1; -1)$.
727. Висота піраміди дорівнює 12 см, а площа основи — 288 см^2 . На якій відстані від основи потрібно провести переріз, паралельний основі, щоб його площа дорівнювала 32 см^2 ?

Самостійна робота 4

ВАРІАНТ 1

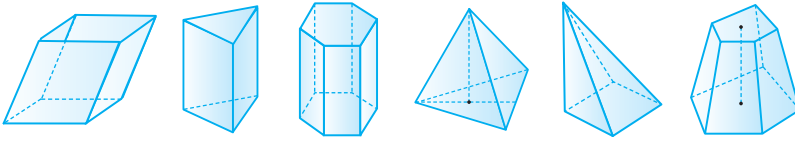
- 1 Висота правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а сторона основи — 4 см. Знайдіть: а) площу поверхні призми; б) довжину її діагоналі.
- 2 Знайдіть площу поверхні правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a .

ВАРІАНТ 2

- 1 Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи — 8 см. Знайдіть: а) площу поверхні піраміди; б) її висоту.
- 2 Знайдіть площу поверхні правильного гексаедра, ребро якого дорівнює a .

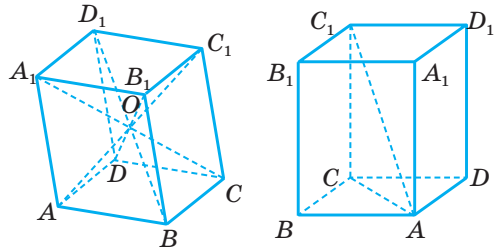
Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

- ✓ Розумію, що призми, піраміди, зрізані піраміди, правильні многогранники — найпростіші та найважливіші види многогранників.



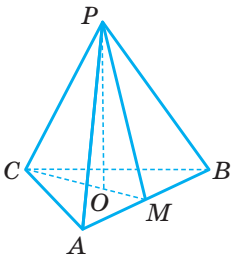
- ✓ Знаю, що *призмою* називають многогранник, у якого дві грані — рівні n -кутники, а решта n граней — паралелограми. Призму називають *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ. Призму називають *правильною*, якщо вона пряма, а її основи — правильні многокутники.
- ✓ Розумію, що *паралелепіпед* — це призма, в основі якої лежить паралелограм. Якщо бічні ребра паралелепіпеда перпендикулярні до площин основ, його називають *прямим паралелепіпедом*. Якщо всі 6 граней паралелепіпеда прямокутники, його називають *прямокутним паралелепіпедом*.
- ✓ Знаю і вмю використовувати формулу для визначення площі бічної поверхні прямої призми: $S_6 = Ph$, де P — периметра її основи, h — висота.
- ✓ Знаю і вмю використовувати властивості паралелепіпеда:

- діагоналі кожного паралелепіпеда перетинаються в одній точці і діляться цією точкою навпіл;
- квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів;

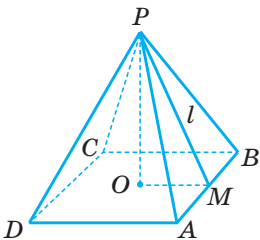


- усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

$$AC_1 = CA_1 = BD_1 = DB_1.$$



- ✓ Знаю, що *пірамідою* називають многогранник, одна грань якого — довільний многокутник, а всі інші грані — трикутники, що мають спільну вершину. Піраміду називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, центр якого збігається з основою висоти. Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, — *апофема* піраміди.



- ✓ Знаю і вмю використовувати формулу для визначення площі бічної поверхні правильної піраміди $S_6 = \frac{1}{2}Pl$, де P — периметр її основи, l — апофема.

Історичні відомості

Геометрія — одна з найдавніших наук. Досліджувати різні просторові форми здавна спонукала людину її практична діяльність.

Багато початкових геометричних відомостей дістали єгипетські, шумеро-вавилонські, китайські та інші учені давніх часів. Встановлювалися вони спочатку тільки дослідним шляхом, без логічних доведень.

Як наука геометрія вперше сформувалась у Стародавній Греції, коли геометричні закономірності й залежності, знайдені спочатку дослідним шляхом, були зведені в систему і доведені як теореми. Одна з математичних праць тих далеких часів дійшла і до нас. Це — «Основи» Евкліда (бл. 365 — бл. 300 рр. до н. е.).

Розвивалася геометрія і після Евкліда. Зокрема, Архімед (III ст. до н. е.) запропонував нові способи обчислення площ і об'ємів геометричних тіл, Аполлоній (III–II ст. до н. е.) дослідив перерізи конуса, Менелай (I–II ст.) розвинув геометрію і тригонометрію сфери. Але в наступні століття аж до Відродження в Європі геометрія не розвивалася. Тільки у другій половині минулого тисячоліття тут знову почали з'являтися геометричні відкриття. Створювалися нові методи дослідження властивостей геометричних фігур і з'являлися невідомі раніше галузі стародавньої науки: аналітична, проєктивна, нарисна, диференціальна геометрії.

Далі зробимо короткий історичний огляд тем, розглянутих у цьому розділі.

Многогранники. Перші згадки про многогранники відомі ще за три тисячі років до нашої ери в Єгипті і Вавилоні. Досить згадати знамениті єгипетські піраміди і найвідомішу з них — піраміду Хеопса. Це правильна піраміда, в основі якої — квадрат зі стороною 233 м і висота якої сягає 146,5 м. Не випадково кажуть, що піраміда Хеопса — німий трактат з геометрії.

Прямий паралелепіпед з квадратною основою, прямі призми з трапецевидними і трикутними основами розглядалися у стародавньому китайському математичному творі «Математика в дев'яти книгах».

Загальні поняття про геометричні тіла почали формуватися в VI ст. до н. е. в Греції. Давньогрецьким геометрам були відомі поняття «куб», «паралелепіпед», «призма». Грецьке слово «кібос» буквально означає «гральна кісточка». Тіла, що мали схожі форми, назвали кубами. Слово «призма» також грецького походження і буквально означає «відпиляне» (тіло).

Основні теореми стереометрії викладені в XI книзі «Начал» Евкліда (III ст. до н. е.).

Поняття «куб», «паралелепіпед», «призма», «піраміда», «тіло» були добре відомі давньогрецькому геометру Евкліду. Ось кілька означень з книги XI «Оснoв» Евкліда.

- Тілом називається те, що має довжину, ширину і глибину. Межі тіла є поверхні... .
- Піраміда є тіло, обмежене площинами, проведеними від якої-небудь площини до точки, яка лежить поза цією останньою.
- Призма є тіло, обмежене площинами, з яких дві протилежні рівні, подібні і паралельні, решта ж є паралелограми...
- Куб є тіло, обмежене шістьма рівними квадратами.

Історичні відомості

У науковому трактаті Леонарда Пізанського (Фібоначчі) (бл. 1170 — після 1228) «Практична геометрія» доводиться, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його трьох вимірів. Цієї теореми немає в Евкліда.

У XVI ст. Христофор Клавіус (1537–1612) сформулював теорему про центр симетрії паралелепіпеда: «Якщо паралелепіпед розсікається площиною, що проходить через центр, то він розбивається навпіл і, навпаки, якщо паралелепіпед розсікається навпіл, то площина проходить через центр».

До означення призми поверталися математики у XVIII ст. Так, Брук Тейлор (1685–1731) дав таке означення призми: це многогранник, у якого всі грані, за винятком двох, паралельні одній прямій.

Правильні многогранники були відомі навіть попередникам Евкліда. В «Основах» доведено, що існує тільки 5 видів правильних многогранників, і показано, як можна побудувати кожний із них.

Правильні многогранники досліджували ще в школі Піфагора. Вони вважали, що існування п'яти правильних многогранників пов'язане з будовою матерії та Всесвіту. Відповідно до їхньої теорії атоми основних елементів матерії повинні мати форму різних тіл:

Всесвіт — додекаедр

Земля — куб

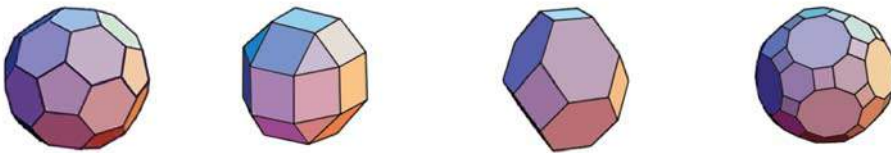
Вогонь — тетраедр

Вода — ікосаедр

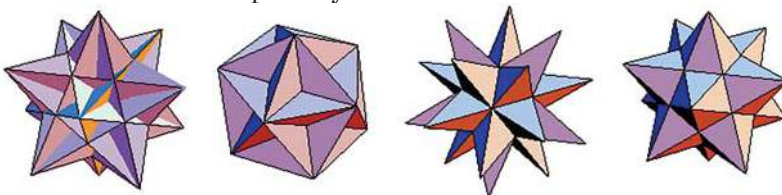
Повітря — октаедр

Пізніше вчення піфагорійців про правильні многогранники виклав у своїх працях інший давньогрецький вчений Платон. З тих п'ять правильних многогранників стали називатися Платоновими тілами.

Архімед відкрив існування 13 видів напівправильних многогранників, чотири з яких подано нижче.



На іншому малюнку зображено правильні зірчасті многогранники, які називають тілами Кеплера—Пуансо.



Розгляньте детальніше малюнки. Установіть види многокутників, що є гранями кожного. Дізнайтеся більше про ці та інші многогранники. Спробуйте зробити їх розгортки та виготовити моделі кількох з них.

ТЕМАТИЧНІ ТЕСТИ

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 1–12 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

- 1 Призма має 10 граней. Який многокутник лежить в її основі?

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|
| 12-кутник | 10-кутник | 9-кутник | 8-кутник | 7-кутник |

- 2 В основі прямої призми лежить прямокутник зі стороною 6 см і діагоналлю 10 см. Бічне ребро призми дорівнює 20 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 376 см ² | 328 см ² | 608 см ² | 640 см ² | 656 см ² |

- 3 Многогранник має чотири грані. Укажіть кількість ребер цього многогранника.

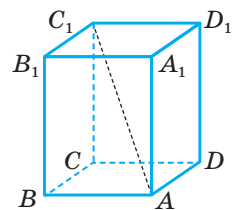
| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|----|
| 6 | 4 | 5 | 8 | 10 |

- 4 В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 8 см.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------|---------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| 192 см ² | 384 см ² | 48 см ² | 96 см ² | 108 см ² |

- 5 Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони основ дорівнюють 3 см і 6 см, діагональ паралелепіпеда — $3\sqrt{6}$ см.

| А | Б | В | Г | Д |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 72 см ² | 63 см ² | 90 см ² | 45 см ² | 18 см ² |



- 6 Ребро куба збільшили у 2 рази. У скільки разів збільшилась площа повної поверхні цього куба?

| А | Б | В | Г | Д |
|----------|----------|-----------|-----------|------------|
| у 2 рази | у 4 рази | у 6 разів | у 8 разів | у 12 разів |



Аполлоній Пергський

(262 р. до н. е. — 190 до н. е.)

Давньогрецький математик, один із найвидатніших математиків античності. У праці «Конічні перерізи» вперше розглянув еліпс, параболу і гіперболу як довільні плоскі перерізи довільних конусів з круговою основою і детально дослідив їх властивості. Довів оригінальним методом 387 теорем про криві 2-го порядку. Його праці стали основою створеної пізніше аналітичної геометрії.

262

до н. е.

н. е.

1300

1400

1500

1600

1571

Йоганн Кеплер

(1571–1630)

Німецький філософ, математик, астроном. Описав спосіб визначення об'ємів тіл, використовуючи елементи інтегрального числення. У книзі «Стереометрія бочок для вина» (1615 р.) знайшов об'єми 92 тіл обертання, схожих на лимони, яблука, бочки тощо, і узагальнив ці відомості для визначення об'ємів тіл. Установив, що кожен із п'яти правильних многогранників може бути вписаним у сферу й описаним навколо сфери.

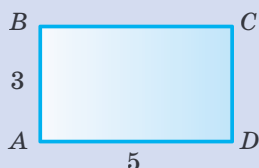


РОЗДІЛ 5

ТІЛА ОБЕРТАННЯ. ОБ'ЄМИ
ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ
ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

CHAPTER 5

SOLIDS OF REVOLUTION.
VOLUME AND SURFACE AREA
OF A SOLID



« Обертання плоскої фігури навколо своєї осі полягає в одночасному описуванні всіма її точками кіл у площинах, перпендикулярних до осі. »

М. Остроградський

§ 20

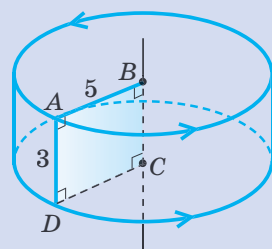
ТІЛА ОБЕРТАННЯ

SOLIDS OF REVOLUTION

§ 21

Конуси

CONES



§ 22

Куля та сфера

SPHERE AND SPHERICAL SOLID

§ 23

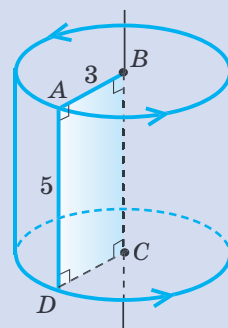
Комбінації
геометричних фігур

COMBINATIONS
OF SOLIDS

§ 24

Об'єм призми
та циліндра

VOLUME OF PRISM
AND CYLINDER



§ 25

Об'єм піраміди,
конуса та кулі

VOLUME OF PYRAMID,
CONE, AND SPHERICAL SOLID

МИСТЕЦТВО

Майстерність, продукт якої приносить естетичне задоволення.



Декоративно-прикладне

Музика



Скульптура

МАТЕМАТИКА В МОЇЙ ПРОФЕСІЇ

СИЛЬСЬКЕ ГОСПОДАРСТВО

Обробка землі та вирощування свійських тварин для забезпечення населення продуктами харчування й отримання сировини для деяких галузей промисловості.

Рослинництво



Тваринництво



Меліорація



Лісівництво



§ 20. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Розгляньте два зображення одного велосипеда (мал. 172 і мал. 173).



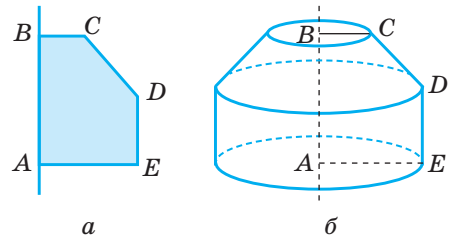
Мал. 172



Мал. 173

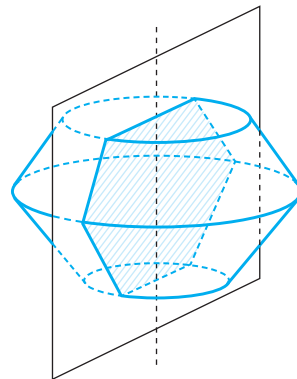
Чим вони відрізняються? Чому таке відбувається? Схожі ілюзії можна спостерігати на модифікованих дисках сучасних автомобілів та інших предметах, що обертаються. Розглянемо, як у процесі обертання утворюються просторові геометричні фігури.

Уявіть, що плоский багатокутник $ABCDE$ обертається навколо нерухомої прямої AB (мал. 174, a). Якщо він зробить повний оберт, то кожна його точка, що не лежить на AB , опише коло з центром на цій прямій. А весь даний багатокутник, обертаючись навколо прямої AB , опише деяке *тіло обертання*. Пряма AB — вісь цього тіла обертання (мал. 174, b).



Мал. 174

Площина, яка проходить через вісь тіла обертання, поділяє його на дві рівні частини. Утворений переріз називають **осьовим перерізом** (мал. 175).

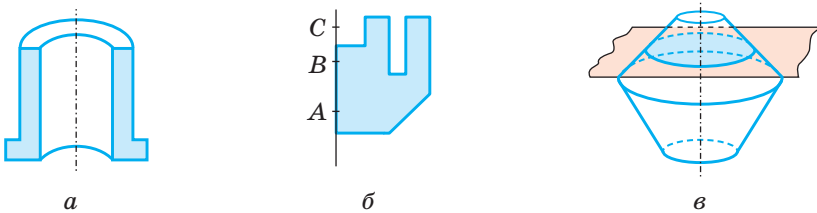


Мал. 175

Осьовий переріз тіла обертання може складатися з двох плоских фігур, симетричних відносно осі (мал. 176, *a*).

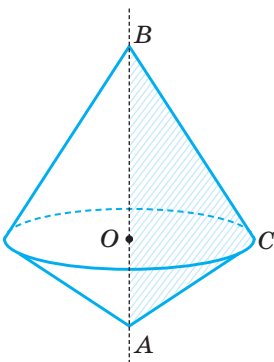
Перерізом тіла обертання площиною, перпендикулярною до осі, є круг, або плоске кільце, або кільця кільцець тощо. Для прикладу уявимо тіло, утворене обертанням фігури, зображеної на малюнку 176, *б*, навколо прямої AB . Якщо його перетинати площинами, які перпендикулярні до осі та проходять через точки A, B, C , то в перерізі матимемо відповідно круг, круг і кільце, два кільця.

Якщо тіло обертання опукле, то січна площина, перпендикулярна до осі обертання, перетинає його по колу (мал. 176, *в*).

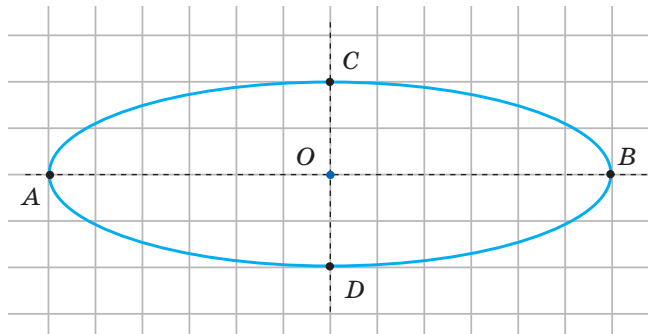


Мал. 176

Щоб задати тіло обертання, досить указати його вісь і фігуру, обертанням якої утворене це тіло. Замість осі часто вказують відрізок, що їй належить. Наприклад, можна сказати так: тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його гіпотенузи (мал. 177).



Мал. 177



Мал. 178

Проекцією кола на площину, не перпендикулярну до площини кола, є еліпс (мал. 178). Тому наочне зображення тіла обертання містить еліпси (див. наприклад, мал. 174, 175). Еліпс має центр симетрії та дві осі симетрії. Будувати еліпси можна за допомогою шаблонів або від руки. Щоб побудувати еліпс, проведемо спочатку дві взаємно перпендикулярні прямі лінії. Від точки O їх перетину в обидва боки приблизно у відношенні 3:1 відкладаємо рівні відрізки. Отримані чотири точки з'єднуємо плавною лінією (мал. 178).

Щоб навчитися правильно і швидко креслити еліпси, виконайте кілька зображень на клітинках за готовим шаблоном, поданим на мал. 178.

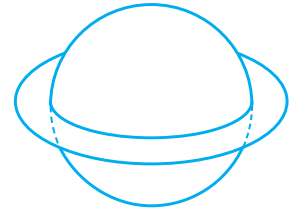
Приклади матеріальних моделей тіл обертання: лінза, котушка, хокейна шайба, колба, пробірка, макітра, рухомі механізми (мал. 179). А от болт, гайка, свердло не є тілами обертання.



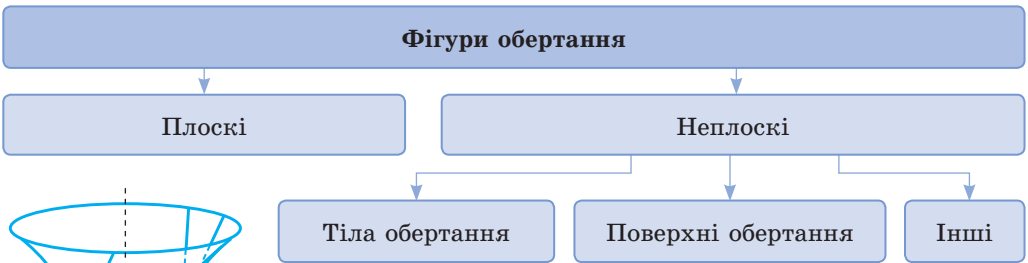
Мал. 179



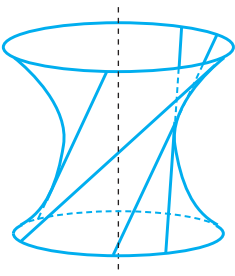
Мал. 180



Слід розрізняти тіла обертання та *фігури обертання* (мал. 180). Останнє поняття — загальніше (мал. 181). Кожна фігура обертання — це деяка множина точок.



Мал. 181

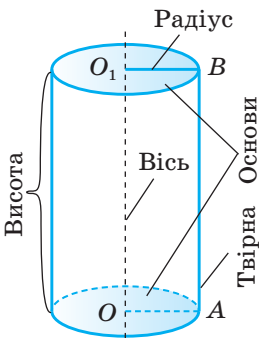


Мал. 182

Приклади фігур обертання, які не є тілами: коло, круг, поверхня, утворена обертанням прямої навколо мимобіжної їй осі (мал. 182), тощо.

Найпростішим тілом обертання є циліндр.

Циліндром називають тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони.



Мал. 183

Якщо прямокутник $OABO_1$ обернути навколо сторони OO_1 , то його сторони OA і O_1B опишуть рівні круги, які називають *основами циліндра* (мал. 183). Сторона AB опише *бічну поверхню* циліндра. Кожен відрізок цієї поверхні, який дорівнює AB , — *твірна* циліндра. Усі твірні циліндра рівні та паралельні одна одній, бо кожна з них дорівнює AB і паралельна осі обертання. Довжина твірної є *висотою* циліндра. Вона дорівнює відстані між площинами основ.

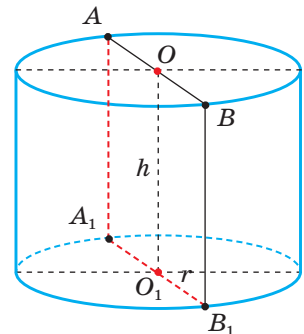
Циліндри широко використовують у промисловості, побуті, архітектурі тощо (мал. 184).



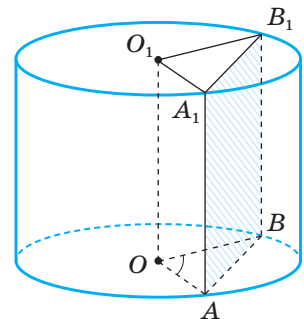
Мал. 184

Щоб зобразити циліндр, потрібно:

- побудувати довільний еліпс;
- через центр побудованого еліпса (точку O), перпендикулярно до його площини, пунктирною тонкою лінією провести вісь циліндра OO_1 ;
- паралельним перенесенням першого еліпса побудувати другий еліпс з центром у точці O_1 ;
- провести твірні, які дотикаються до зображень основ у діаметрально протилежних точках і утворюють зображення одного з осьових перерізів циліндра;
- за потреби провести другий осьовий переріз (ABB_1A_1) через інші твірні і діаметри основ (мал. 185).



Мал. 185



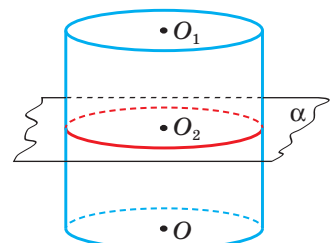
Мал. 186

Усі осьові перерізи циліндра — рівні прямокутники (мал. 185). Кожна січна площина, паралельна осі циліндра, також перетинає його по прямокутнику, дві сторони якого — твірні циліндра, а дві інші — рівні між собою хорди його основ (мал. 186).

Кожна січна площина, перпендикулярна до осі циліндра, перетинає його по колу, що дорівнює основі циліндра (мал. 187).

Підсумуємо сказане вище і сформулюємо основні властивості циліндра.

1. Основи циліндра рівні і паралельні круги.
2. Усі твірні циліндра рівні, паралельні між собою та перпендикулярні до основ.
3. Висота циліндра дорівнює твірній і відстані між площинами основ.



Мал. 187

Перерізом циліндра може бути:

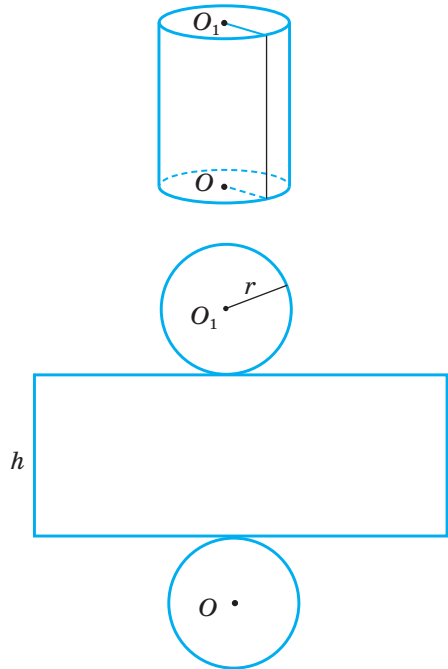
- прямокутник, якщо січна площина проходить через вісь циліндра або паралельна їй;
- круг, якщо січна площина перпендикулярна до осі циліндра;
- еліпс або його частина, якщо січна площина перетинає вісь під гострим кутом.

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і по одній з твірних, а потім розгорнути на площині, то дістанемо *розгортку циліндра* (мал. 188). Вона складається з прямокутника — розгортки бічної поверхні — та двох рівних кругів. Якщо радіус основи циліндра дорівнює r (його називають радіусом циліндра), а висота — h , то його бічна поверхня розгортається в прямокутник зі сторонами $2\pi r$ і h . Площа цієї розгортки є площею бічної поверхні циліндра:

$$S_6 = 2\pi rh.$$

Щоб знайти всю площу поверхні циліндра S_{Π} (іноді говорять площу повної поверхні), досить до площі його бічної поверхні додати площі двох його основ:

$$S_{\Pi} = 2\pi rh + 2\pi r^2, \text{ або } S_{\Pi} = 2\pi r(r + h).$$



Мал. 188

Перевірте себе

- 1 Як можна утворити тіло обертання?
- 2 Що називають віссю обертання; осьовим перерізом тіла обертання?
- 3 Якою фігурою може бути осьовий переріз тіла обертання? А переріз площиною, перпендикулярною до осі обертання?
- 4 Як пов'язані між собою фігури обертання і тіла обертання? Покажіть на діаграмі.
- 5 Що називають циліндром? Назвіть його елементи.
- 6 Якою фігурою є осьовий переріз циліндра?
- 7 Якою фігурою є переріз циліндра площиною, перпендикулярною до його осі?
- 8 Якою фігурою є переріз циліндра площиною, паралельною його осі?
- 9 Що називають розгорткою поверхні циліндра?
- 10 Як можна визначити площу поверхні циліндра?

Виконаємо разом

- 1) Осьові перерізи двох різних циліндрів — рівні прямокутники зі сторонами 4 м і 6 м. Знайдіть площу поверхні того циліндра, у якого вона більша.

Розв'язання. Йдеться про два циліндри: діаметр першого — 4 м, висота — 6 м; діаметр другого — 6 м, висота — 4 м. За формулою $S_{\text{п}} = 2\pi r(r + h)$ знайдемо площі поверхонь обох циліндрів:

1) якщо $r = 2$ і $h = 6$, то $S = 2\pi \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi$;

2) якщо $r = 3$ і $h = 4$, то $S = 2\pi \cdot 3 \cdot 7 = 42\pi$.

- 2) Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Розв'язання. Нехай радіус основи циліндра дорівнює r , а висота — h (мал. 189). Тоді площа осьового перерізу циліндра $Q = 2rh$, а площа його бічної поверхні $S_{\text{б}} = 2\pi rh = \pi \cdot 2rh = \pi Q$.

- 3) Циліндр радіусом $\sqrt{10}$ і висотою 5 перетинається площиною, паралельною осі циліндра і віддаленою від неї на 1. Знайдіть площу і периметр перерізу.

Розв'язання. Нехай переріз ABB_1A_1 циліндра віддалений від осі OO_1 на $OC = 1$ (мал. 190).

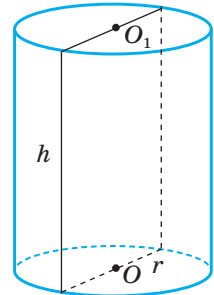
Тоді $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{10 - 1} = 3$.

Шукана площа перерізу

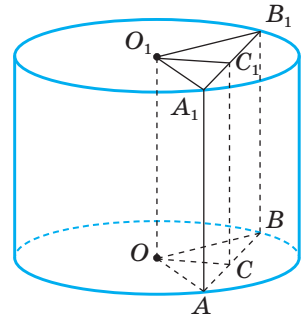
$$S = AA_1 \cdot AC \cdot 2 = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30,$$

а периметр перерізу

$$P = 2(AA_1 + AB) = 2(5 + 6) = 22.$$



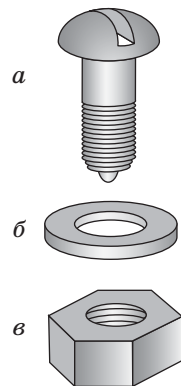
Мал. 189



Мал. 190

Виконайте усно

728. Назвіть приклади фігур обертання з навколишнього середовища.
729. Які з наведених на малюнку 191 фігур є тілами обертання?
730. Що за фігура утвориться під час обертання точки навколо прямої, яка: а) не проходить через дану точку; б) проходить через дану точку?
731. Що за фігура утвориться під час обертання відрізка AB навколо прямої, яка перпендикулярна до AB : а) проходить через одну з точок A чи B ; б) не перетинає відрізок AB ; в) перетинає відрізок AB у точці C ?

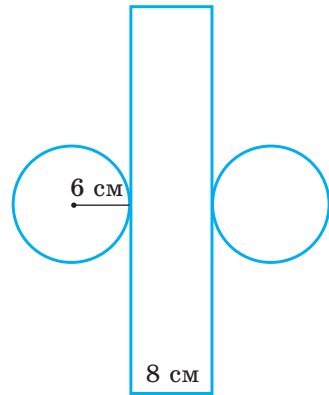


Мал. 191

- 732.** Скільки існує площин, які розтинають циліндр:
 а) на два рівні циліндри;
 б) на дві рівні фігури?
 Чи є ці площини площинами симетрії циліндра?
- 733.** Скільки осей симетрії має циліндр? Чи має циліндр центр симетрії?
- 734.** Яка фігура буде осьовим перерізом тіла, утвореного під час обертання правильної чотирикутної піраміди навколо висоти?

А

- 735.** Намалуйте тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його:
 а) більшої сторони; б) меншої сторони.
- 736.** Рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 2 см обертається навколо одного з катетів. Намалуйте утворене тіло і знайдіть площу його осьового перерізу.
- 737.** Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, висота якого дорівнює 10 см, а радіус основи — 2 см.
- 738.** Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра, висота якого дорівнює 5 см, а радіус основи — 4 см.
- 739.** Осьовий переріз циліндра — квадрат, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть твірну циліндра та радіус його основи.
- 740.** Знайдіть площу поверхні циліндра, розгортку якого зображено на малюнку 192.
- 741.** Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
- 742.** Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут 45° . Як відноситься висота циліндра до радіуса основи?
- 743.** Радіус циліндра — 5 м, а діагональ осьового перерізу — 26 м. Знайдіть: а) висоту циліндра; б) площу осьового перерізу; в) площу бічної поверхні; г) площу поверхні циліндра.
- 744.** Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 м і нахилена до площини основи під кутом 60° . Знайдіть: а) висоту циліндра; б) радіус циліндра; в) площу бічної поверхні циліндра.
- 745.** (ЗНО, 2014). Довжина кола основи циліндра дорівнює 18π см. Визначте площу бічної поверхні цього циліндра, якщо його висота дорівнює 7 см.

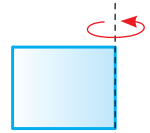


Мал. 192

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $126\pi \text{ см}^2$ | $207\pi \text{ см}^2$ | $252\pi \text{ см}^2$ | $288\pi \text{ см}^2$ | $567\pi \text{ см}^2$ |

746. Намалюйте тіло, утворене обертанням рівностороннього трикутника навколо його сторони.
747. Дано прямокутник з нерівними сторонами. Доведіть, що площі бічних поверхонь циліндрів, утворених обертанням цього прямокутника навколо нерівних сторін, рівні.
- ✓ 748. (ЗНО, 2012). Прямокутник зі сторонами 8 см і 10 см обертається навколо меншої сторони (мал. 193). Знайдіть площу повної поверхні отриманого тіла обертання.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $360\pi \text{ см}^2$ | $160\pi \text{ см}^2$ | $260\pi \text{ см}^2$ | $288\pi \text{ см}^2$ | $800\pi \text{ см}^2$ |



Мал. 193

749. Площа осевого перерізу циліндра — S . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
750. Радіус основи циліндра — r , а висота — h . Знайдіть довжину діагоналі осевого перерізу циліндра.
751. Ви отримали замовлення зварити трубопровід з десятиметрових труб діаметром 102 мм завдовжки 1 км. Скільки метрів стикових швів доведеться зварити? На яку мінімальну оплату ви можете розраховувати, якщо вартість зварки одного такого шва дорівнює 400 грн?
752. **Практичне завдання.** Використайте циліндричний пластилін (мал. 194) і покажіть перерізи циліндра різними площинами. Скільки різних фігур може утворитися в перерізі?

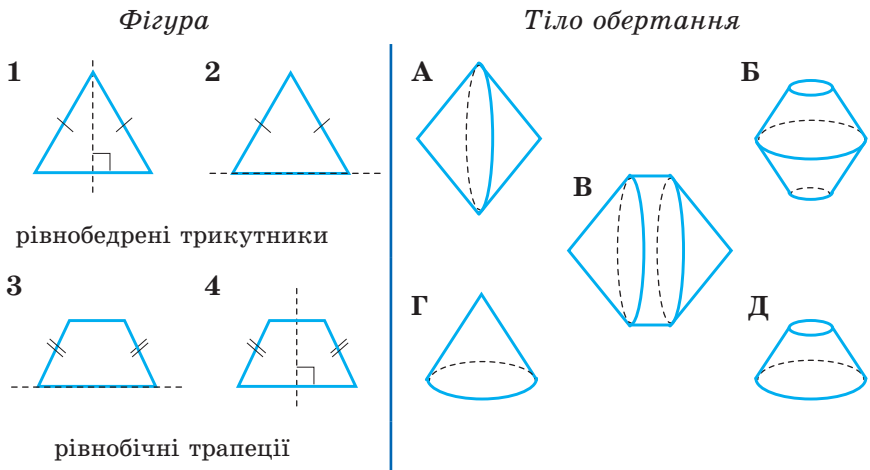


Мал. 194

Б

753. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його радіус — r , а твірну з центра основи видно під кутом α .
754. Знайдіть площу поверхні циліндра, якщо діаметр його основи d з центра другої основи видно під кутом α .
755. Як відносяться площі перерізів циліндра площинами, які проходять через твірну, якщо кут між цими площинами дорівнює 30° , а одна з них проходить через вісь циліндра?
756. Доведіть, що площина, яка проходить через твірну циліндра, але не дотикається до нього, перетинає циліндр по прямокутнику.
757. Висота циліндра дорівнює 16 см, радіус — 10 см. Знайдіть площу його перерізу площиною, паралельною осі циліндра і віддаленою від осі на 60 мм.
758. Радіус циліндра — r , а висота — h . Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка перпендикулярна до основи і відтинає від кола основи дугу 60° .
759. Площа поверхні та площа бічної поверхні циліндра дорівнюють відповідно 50 см^2 і 30 см^2 . Знайдіть висоту циліндра.

760. З квадрата, площа якого — Q , згорнули бічну поверхню циліндра. Знайдіть площу основи цього циліндра.
761. Прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 5$ см і $AD = 7$ см обертається спочатку навколо сторони AB , а потім навколо сторони AD . Намалуйте тіла, утворені обертанням цього прямокутника. Знайдіть відношення площ осевих перерізів утворених фігур.
- ☑ 762. (ЗНО, 2013). Установіть відповідність між фігурою (1–4) і тілом обертання (А–Д), яке утворено внаслідок обертання цієї фігури навколо прямої, зображеної пунктиром.



763. Тор — це тіло, утворене обертанням круга навколо прямої, яка лежить у площині цього круга, але не перетинає його. Намалуйте тор.
764. Висота консервної банки циліндричної форми дорівнює 4 см, а радіус основи — 6 см. Скільки таких банок можна виготовити з $15\,000$ м², якщо 10% матеріалу йде на відходи?
765. Діаметр циліндричного парового котла завдовжки 3,8 м дорівнює 0,8 м. Знайдіть тиск пари на повну поверхню котла, якщо на 1 см² пара давить із силою 10 кг.
766. Скільки квадратних метрів жерсті піде на виготовлення ринви (мал. 195) завдовжки 5 м і діаметром 20 см, якщо на шви додають 3% її площі?
767. Для зменшення енерговитрат і збереження довкілля важливо зменшити втрати тепла під час транспортування гарячої води наземними і підземними тепломережами. В Україні стало можливими звести ці втрати до 1,5–2% завдяки сучасним технологіям виробництва попередньо ізольованих труб (мал. 196). Для наземного монтажу використовують труби в ізоляції пінополіуретаном з оболонкою з оцинкованої сталі. Розрахуйте площу сталеві бляхи для оболонки труби



Мал. 195



Мал. 196

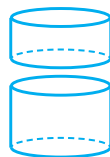
довжиною 9 м, якщо діаметр труби 114 мм, товщина пінополіуретану — 43 мм і 150 мм з кожного боку труби не вкрито ізоляцією.

- ✓ 768. (ЗНО, 2012). Циліндр, радіус основи якого дорівнює 4 см, висота — 12 см, перетнули площиною, паралельною до його основи (мал. 197). Утворилося два циліндри (мал. 198). Визначте суму площ повних поверхонь утворених циліндрів.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 90л см ² | 108л см ² | 128л см ² | 144л см ² | 160л см ² |



Мал. 197



Мал. 198

769. Відомо, що висота першої коробки дорівнює діаметру основи другої, а висота другої — діаметру основи першої (мал. 199). На виготовлення якої коробки (з кольоровим дном, але без кришки) буде витрачено більше декоративного матеріалу, якщо радіуси основ коробок відповідно дорівнюють 10 см і 20 см.

770. **Практичне завдання.** Зробіть із цупкого паперу розгортку циліндра, осьовий переріз якого — квадрат зі стороною 16 см. Зробіть з неї підставку для дрібничок (мал. 200).



Мал. 199



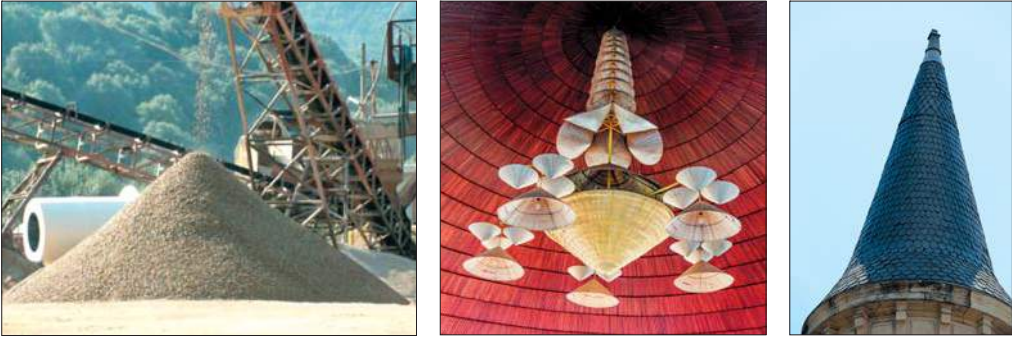
Мал. 200

Вправи для повторення

771. Основа прямої призми — ромб з гострим кутом 60° . Менший діагональний переріз призми має площу S . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
772. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а апофема — 13 см. Обчисліть площу поверхні піраміди.
773. Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ .

§ 21. Конуси

Розгляньте наведені нижче малюнки. Серед них — матеріальні моделі конуса (мал. 201).



Мал. 201

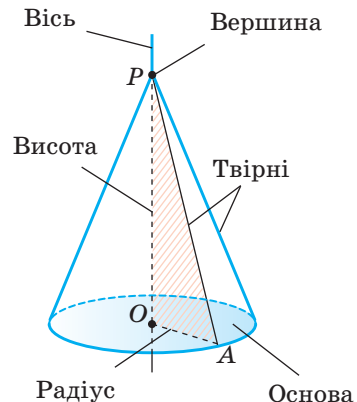
Форму конусів мають насипані на горизонтальній поверхні купи піску, зерна, вугілля, породи, щебеню тощо. Кожному такому матеріалу відповідає *кут природного укосу* — кут нахилу твірної до площини основи конуса. Для піску він дорівнює приблизно 30° , для вугілля — 42° , для породи — 46° .

Якщо прямокутний трикутник OPA обертати навколо катета PO , то його гіпотенуза PA опише бічну поверхню, а катет OA — основу конуса (мал. 202). Точку P , відрізок PO та пряму PO називають відповідно *вершиною*, *висотою* і *віссю конуса*. Відрізок, який сполучає вершину конуса з будь-якою точкою кола його основи, — *твірна конуса*. Усі твірні конуса рівні, оскільки кожна з них дорівнює гіпотенузі трикутника, обертанням якого утворено конус. Рівними є й усі кути, під якими твірні нахилені до площини конуса.

Щоб зобразити конус, потрібно:

- побудувати довільний еліпс;
- через центр побудованого еліпса (точку O), перпендикулярно до його площини, пунктирною тонкою лінією провести вісь конуса OP ;
- позначити на осі конуса його вершину;

Конусом називають тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета.



Мал. 202

- провести твірні, які дотикаються до зображення основи (PK і PB).

Зверніть увагу, що відрізок KB не є діаметром еліпса.

Щоб побудувати осьовий переріз конуса, потрібно провести діаметр AC і твірну PC . Тоді трикутник APC — осьовий переріз конуса. Інший осьовий переріз — трикутник EPM (мал. 203).

Усі осьові перерізи конуса — рівні рівнобедрені трикутники. Кожна площина, яка проходить через вісь конуса, є площиною його симетрії. Центра симетрії конус не має.

Кожна площина, яка проходить через вершину конуса, — рівнобедрений трикутник, бічними сторонами якого є твірні конуса, а основою — хорда його основи (мал. 204).

Кожна січна площина, перпендикулярна до осі конуса (або паралельна до його основи), перетинає конус по колу (див. мал. 206).

Підсумуємо сказане вище і сформулюємо основні властивості конуса.

1. В основі конуса лежить круг.
2. Усі твірні конуса рівні та нахилені до основи під однаковими кутами.

Висота конуса проектується в центр основи.

Перерізом конуса може бути:

- рівнобедрений трикутник, якщо січна площина проходить через вершину;
- круг, якщо січна площина перпендикулярна до осі конуса;
- еліпс, парабола або гіпербола (див. с. 194).

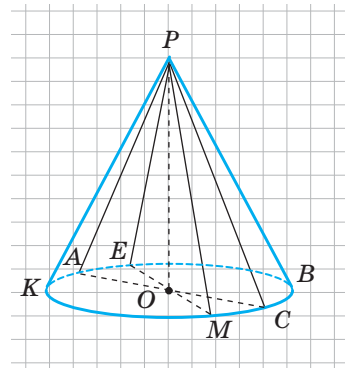
Якщо бічну поверхню конуса розрізати по якій-небудь твірній і розгорнути на площині, то дістанемо її *розгортку*.

Розгортка бічної поверхні конуса, радіус основи якого дорівнює r , а твірна — l , є сектором круга радіуса l (мал. 205). Довжина його дуги — $2\pi r$.

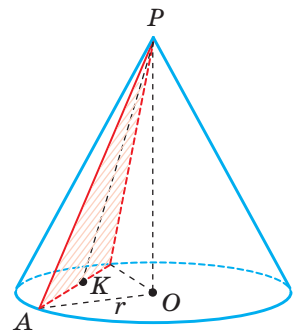
Площу такої розгортки приймають за *площу бічної поверхні конуса*. Вона у стільки разів менша від площі круга радіуса l , у скільки разів $2\pi r$ менше від $2\pi l$. Тому $S_6 : \pi l^2 = 2\pi r : 2\pi l$, звідки $S_6 = \pi rl$.

Щоб знайти всю площу поверхні конуса, треба до площі його бічної поверхні додати площу основи:

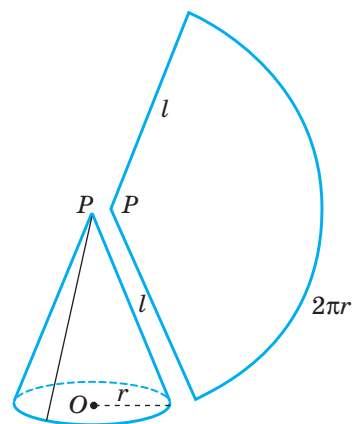
$$S_{\text{ц}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(r + l).$$



Мал. 203



Мал. 204



Мал. 205

Отже, $S_{\pi} = \pi r(r + l)$.

Січна площина, паралельна основі конуса, перетинає його по кругу (мал. 206).

Оскільки $\triangle POA \sim \triangle PO_1B$, то

$$OA : O_1B = PO : PO_1 \text{ і } OA^2 : O_1B^2 = PO^2 : PO_1^2,$$

звідки $\pi OA^2 : \pi O_1B^2 = PO^2 : PO_1^2$.

Іншими словами, якщо S — площа круга, що лежить в основі конуса, а S_1 — площа круга в перерізі конуса, то:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{OA^2}{O_1B^2} = \frac{PO^2}{PO_1^2}.$$

Січна площина, паралельна основі конуса, поділяє його на два тіла обертання: менший конус і *зрізаний конус*.

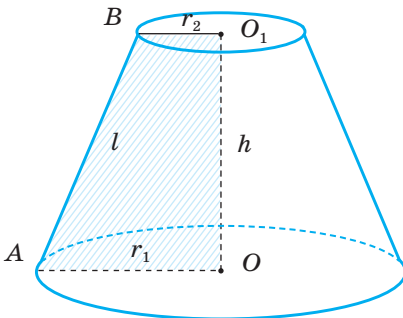
На малюнку 206 зрізаний конус розташований під площиною α .

Зрізаний конус можна розглядати і як тіло, утворене обертанням прямокутної трапеції OO_1BA навколо меншої її бічної сторони.

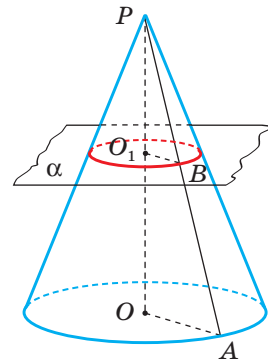
Зрізаний конус обмежений двома кругами — його *основами* — і *бічною поверхнею* (мал. 207).

Відстань між основами — *висота* зрізаного конуса.

Відрізок AB , який сполучає найближчі точки кіл основ, — *твірна*. Довжину цього відрізка також називають твірною зрізаного конуса.



Мал. 207



Мал. 206

Площі основи конуса і паралельного їй перерізу відносяться як квадрати їх відстаней від вершини конуса.

Площу бічної поверхні зрізаного конуса обчислюють за формулою:

$$S_6 = \pi l(r_1 + r_2),$$

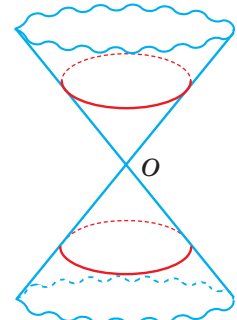
де r_1, r_2, l — радіуси його основ і твірна.

Примітка. Зрізаний конус — не конус, бо не відповідає означенню конуса. Те саме стосується і зрізаної піраміди. Тому неправильно говорити, що конуси (або піраміди) бувають повні і зрізані.

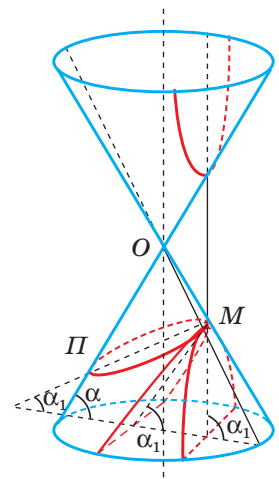
Форму зрізаних конусів мають деталі машин і механізмів, будівельні конструкції, зокрема маяки, огорожувальні знаки, а також наперсток, абажур, горщики для квітів тощо (мал. 208).



Мал. 208



Мал. 209



Мал. 210

Варте уваги питання про перерізи конічної поверхні. *Конічною поверхнею* вважають фігуру (не тіло!), утворену обертанням однієї з пересічних прямих навколо другої. Конічна поверхня вважається необмеженою і складається з двох рівних частин, які мають одну спільну точку — вершину O (мал. 209).

Уявімо, що через деяку точку M конічної поверхні проведено січну площину ω . Її можна провести так, щоб позначений на малюнку 210 кут α_1 : а) дорівнював α ; б) був меншим від α ; в) був більшим за α . У першому випадку площина ω перетинає конічну поверхню по параболі, в другому — по еліпсу, в третьому — по гіперболі. Ці три математичні терміни ввів ще в II ст. до н. е. давньогрецький математик Аполлоній. Грецькою мовою ці слова означали: парабола — зіставлення (бо з першим випадком зіставлялися два інші), еліпс — недостача (бо кут α_1 менший за α), гіпербола — перебільшення (бо кут α_1 більший за α). Хоч Аполлоній зіставляв не кути α_1 і α , а деякі інші величини, але суть справи зводилася до порівняння цих кутів.

Перевірте себе

- 1 Сформулюйте означення конуса.
- 2 Що називають вершиною; основою; твірною; віссю; висотою конуса?
- 3 Якою фігурою є осьовий переріз конуса? А переріз конуса площиною, перпендикулярною до його осі?
- 4 Як можна утворити розгортку конуса?
- 5 Як можна обчислити площу бічної поверхні конуса? А площу поверхні конуса?
- 6 Що називають зрізаним конусом? Чи є зрізаний конус конусом?
- 7 Назвіть елементи зрізаного конуса.
- 8 Якою фігурою є осьовий переріз зрізаного конуса? А переріз зрізаного конуса площиною, перпендикулярною до його осі?

Виконаємо разом

- 1) Конус утворено обертанням прямокутного трикутника навколо більшого катета, який з гіпотенузою c утворює кут α . Знайдіть:
 - а) площу круга, описаного меншим катетом;
 - б) площу осьового перерізу конуса.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC (мал. 211) $AC \perp BC$, $AB = c$ і $\angle CAB = \alpha$.

Осьовий переріз даного тіла — рівнобедрений $\triangle ABK$, у якого висота $AC = c \cos \alpha$, половина основи $CB = c \sin \alpha$.

Тоді: а) Площа круга радіуса CB :

$$S_{CB} = \pi CB^2 = \pi c^2 \sin^2 \alpha.$$

б) Площа осьового перерізу:

$$\begin{aligned} S_{ABK} &= CB \cdot AC = c \sin \alpha \cdot c \cos \alpha = \\ &= c^2 \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

- 2) Твірна конуса — 5 см, висота — 4 см. Знайдіть відношення площі поверхні цього конуса до площі його основи.

Розв'язання. Трикутник POA — прямокутний (мал. 212).

Тому радіус основи конуса $OA = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

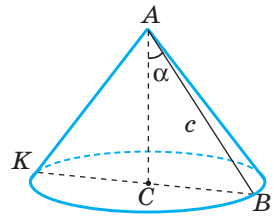
Площа основи

$$S_{\text{осн}} = \pi \cdot 3^2 = 9\pi;$$

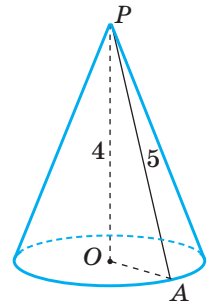
площа поверхні

$$S_{\text{п}} = \pi \cdot 3(3 + 5) = 24\pi.$$

Отже, $S_{\text{п}} : S_{\text{осн}} = 24\pi : 9\pi = 8 : 3$.



Мал. 211

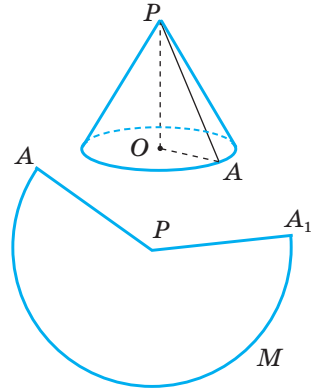


Мал. 212

- 3) Висота конуса — 4, твірна — 5.
Знайдіть кут сектора, який є розгорткою бічної поверхні цього конуса.

Розв'язання. Радіус основи конуса $OA = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (мал. 213).

Тому довжина кола його основи $C = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Така сама довжина дуги сектора AMA_1 . Ця довжина в стільки разів менша від довжини кола радіуса $PA = 5$, у скільки разів шуканий кут φ сектора менший від 360° . Отже, $\varphi : 360^\circ = 6\pi : 10\pi$, звідки $\varphi = 216^\circ$.



Мал. 213

Виконайте усно

774. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму конуса або зрізаного конуса.
775. Що є перерізом конуса площиною, яка:
а) паралельна основі; б) проходить через вершину під кутом до основи?
776. На малюнку 214 зображено собаку в захисному комірці. Яку форму має цей комір? Для чого його використовують?
777. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо його твірна дорівнює 8 м, а кут при вершині осьового перерізу становить:
а) 90° ;
б) 30° .
778. Відгадайте ребус (мал. 215).



Мал. 214



Мал. 215

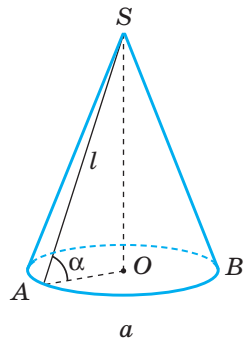
A

779. Висота конуса — 8 м, радіус основи — 6 м. Знайдіть довжину твірної.
780. Осьовий переріз конуса — правильний трикутник зі стороною 10 см. Знайдіть радіус основи та висоту конуса.
781. Висота конуса дорівнює радіусу основи. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса.
782. Твірна конуса — 5 см, висота — 4 см. Знайдіть площу його поверхні.
783. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює 6 см, а градусна міра дуги дорівнює 120° . Знайдіть радіус основи конуса та його висоту.
784. Скільки квадратних метрів тканини потрібно, щоб пошити конусоподібну палатку без дна заввишки 3 м і діаметром 4 м?

- 785.** Твірна конуса дорівнює 8 і нахилена до площини основи під кутом 30° . Знайдіть висоту конуса та площу осьового перерізу.
- 786.** Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть: а) висоту конуса; б) радіус основи; в) площу осьового перерізу; г) площу поверхні конуса.
- 787.** (ЗНО, 2011). Висота конуса вдвічі менша за діаметр його основи. Знайдіть градусну міру кута між твірною конуса та площиною його основи.

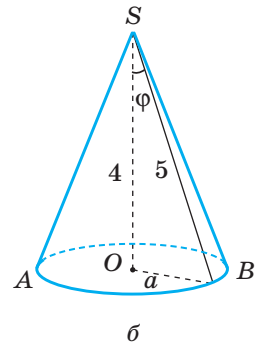
| А | Б | В | Г | Д |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| 15° | 30° | 45° | 60° | 75° |

- 788.** Знайдіть площу бічної поверхні конуса радіуса R , осьовим перерізом якого є прямокутний трикутник.
- 789.** Різниця між довжиною твірної та висотою конуса дорівнює 2 см, а кут між ними — 60° . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
- 790.** Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо площа його бічної поверхні дорівнює 15π см², а площа поверхні — 24π см².
- 791.** Користуючись малюнком 216, сформулюйте і розв'яжіть якомога більше задач.



Б

- 792.** Знайдіть площу поверхні конуса, висота якого дорівнює 12 см, а відстань від основи висоти до середини твірної — 6,5 см.
- 793.** Висота конуса дорівнює 2 см, а радіус основи — 4 см. Знайдіть площу перерізу, який проходить через вершину конуса і хорду основи, що стягує дугу 60° .
- 794.** Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює 60° , проведено площину, що утворює з площиною основи кут 30° .



Мал. 216

- Знайдіть висоту конуса, якщо площа перерізу дорівнює $4\sqrt{3}$ см².
- 795.** Доведіть, що з усіх перерізів конуса площинами, які проходять через його вершину, найбільший периметр має осьовий переріз.
- 796. Задача для кмітливих.** Чи правильно, що з усіх перерізів конуса, які проходять через його вершину, найбільшу площу має осьовий переріз?
- 797.** За даними в таблиці елементами знайдіть інші елементи конуса, де C — довжина кола, d — діаметр основи, h — висота, l — твірна конуса, α — кут нахилу твірної до основи, S — площа основи,

Q — площа осевого перерізу. Перед розв'язанням задачі зробіть на дошці малюнок, повторіть і запишіть формули.

| № | C | d | h | l | α | S | Q |
|---|-----|-----|-----|-----|----------|-----|-----|
| 1 | C | | h | | | | |
| 2 | C | | | l | | | |
| 3 | | d | | | α | | |
| 4 | | | | | α | S | |
| 5 | | | | | α | | Q |

798. Півкруг радіуса R згорнули в конус. Визначте: а) радіус основи конуса; б) кут α при вершині осевого перерізу.

799. (ЗНО, 2017). Радіус основи конуса дорівнює r , а твірна — l . До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

1 Якщо площа бічної поверхні конуса втричі більша за площу його основи, то

А $l = 2r$

2 Якщо висота конуса дорівнює радіусу його основи, то

Б $l = \sqrt{2}r$

В $l = 3r$

3 Якщо проекція твірної на площину основи конуса удвічі менша за твірну, то

Г $l = 4r$

Д $l = r$

4 Якщо площа повної поверхні конуса дорівнює $5\pi r^2$, то

800. Через середину висоти конуса проведено площину паралельно основі. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса $R = 2$ см.

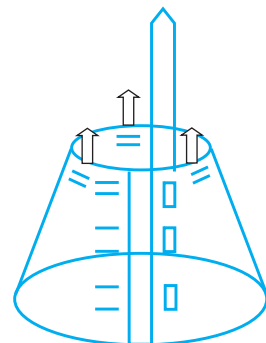
801. Висота конуса дорівнює h . На якій відстані від його вершини проведено січну площину, паралельну основі, якщо площа перерізу вдвічі менша за площу основи?

802. Площа основи конуса — Q , а площа бічної поверхні — $2Q$. Під яким кутом його твірна нахилена до площини основи?

803. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням прямокутного трикутника з катетами 3 см і 4 см навколо: а) меншого катета; б) більшого катета; в) гіпотенузи.

804. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом a навколо: а) катета; б) гіпотенузи; в) прямої, проведеної через вершину прямого кута паралельно гіпотенузі.

805. У ветеринарних аптеках продають готові захисні комірці для собак і кішок (мал. 217). Щоб зекономити кошти, ви можете виготовити такий



Мал. 217



комірць самостійно. Обчисліть площу поверхні такого комірця, якщо діаметр його меншого кола дорівнює 18 см, більшого — 36 см, а висота — 24 см.

806. Практичне завдання. Виготовте з цупкого паперу розгортки конуса і зрізаного конуса.

Вправи для повторення

807. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а двограний кут при ребрі основи — 60° . Знайдіть: а) сторону основи піраміди; б) площу поверхні.

808. Осьовий переріз циліндра — прямокутник, площа якого становить 48 см^2 . Площа основи циліндра дорівнює $36\pi \text{ см}^2$. Обчисліть висоту циліндра.

809. Знайдіть довжини медіан трикутника з вершинами в точках $A(2; 4; 6)$, $B(-2; 4; 6)$ і $C(2; 4; -6)$.

§ 22. Куля і сфера

У попередніх параграфах ви ознайомилися з різними тілами обертання: циліндром, конусом, зрізаним конусом. Ще одним із видів тіл обертання є куля. Це поняття не є для вас новим, оскільки його розглядали під час вивчення різних предметів у попередніх класах та використовували у побуті.

Форму кулі мають спортивні знаряддя, прикраси, продукти харчування, деталі механізмів тощо (мал. 218).

Згадайте інше означення кулі, із яким ви ознайомилися в 10 класі.

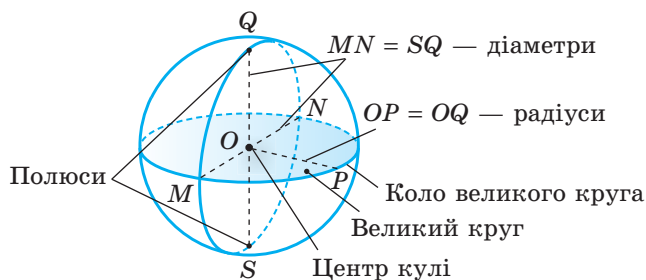
Центр круга, обертанням якого утворено кулю, називають *центром* цієї кулі. Будь-який відрізок, що сполучає центр кулі з якою-небудь точкою її поверхні, називають *радіусом* кулі. Довжину цього відрізка також називають радіусом кулі.



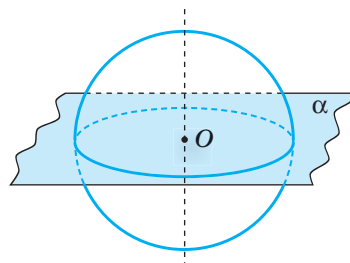
Мал. 218

Кулею називають тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра.
Сферою називають фігуру, утворену обертанням кола навколо його діаметра.

Відрізок, який сполучає дві точки поверхні кулі та проходить через її центр, — *діаметр* кулі, його кінці — *діаметрально протилежні точки* кулі. Діаметр кулі дорівнює двом радіусам (мал. 219).



Мал. 219

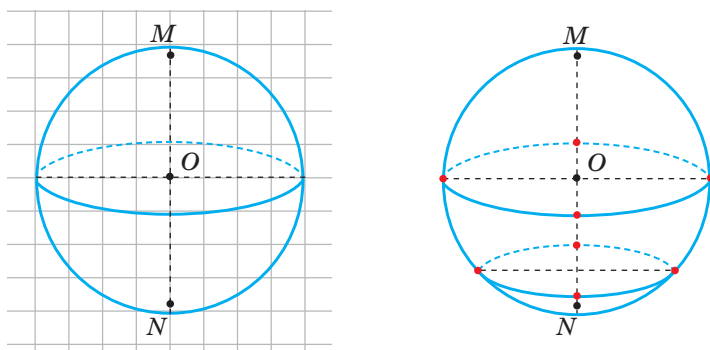


Мал. 220

Кожна площина, яка проходить через центр кулі, поділяє її на дві рівні *півкулі* і є площиною симетрії кулі. Вона перетинає кулю по великому колу, а поверхню кулі — по *колу великого круга* (мал. 220).

Щоб зобразити кулю, потрібно:

- побудувати обрис кулі — коло з центром O ;
- зобразити горизонтальне коло великого круга — еліпс з центром O ;
- через центр побудованого еліпса (точку O), перпендикулярно до його площини, пунктирною тонкою лінією провести вісь кулі;
- позначити на осі кулі полюси M і N ;
- за потреби провести ще один переріз кулі (мал. 221).

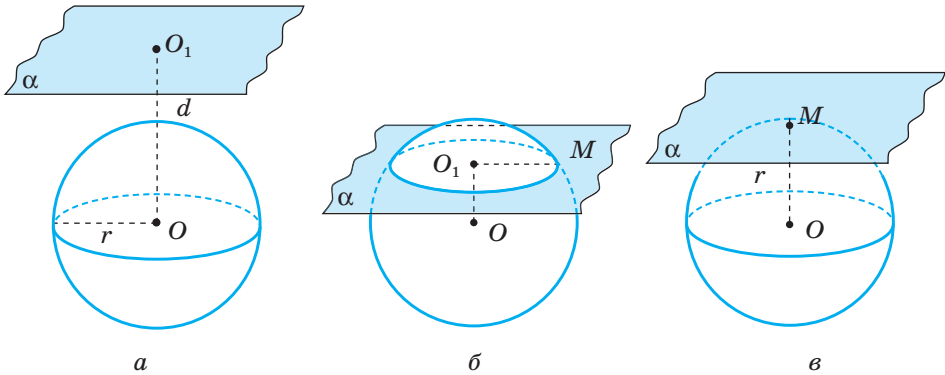


Мал. 221

Як можуть розміщуватись у просторі куля і площина? Нехай відстань від центра кулі до площини дорівнює d , а радіус кулі — r . Можливі такі три випадки (мал. 222).

1. Якщо $r < d$, то площина і куля не мають спільних точок (мал. 222, а).
2. Якщо $r > d$, то площина перетинає кулю по колу радіуса $O_1M = \sqrt{r^2 - d^2}$. З цієї формули випливає, що переріз кулі тим більший, чим менше d (мал. 222, б).

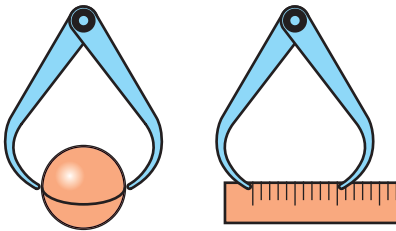
3. Якщо $r = d$, то площина і куля мають тільки одну спільну точку (мал. 222, в). У цьому разі говорять, що площина *дотикається* до кулі, а їх спільну точку називають *точкою дотику*.



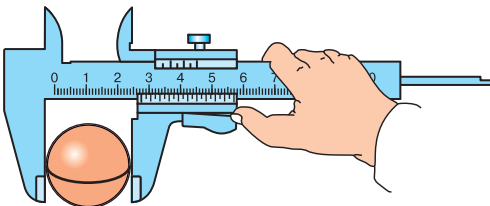
Мал. 222

Пряму, яка має з кулею тільки одну спільну точку, називають *дотичною до кулі*.

Діаметри невеликих матеріальних куль вимірюють *кронциркулем* (мал. 223) або *штангенциркулем* (мал. 224).

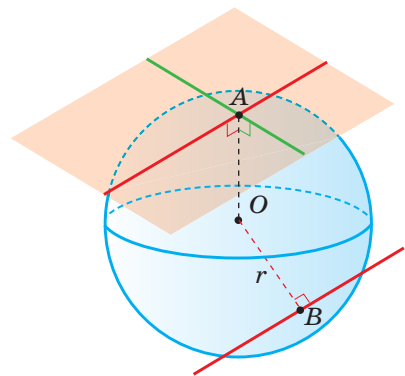


Мал. 223



Мал. 224

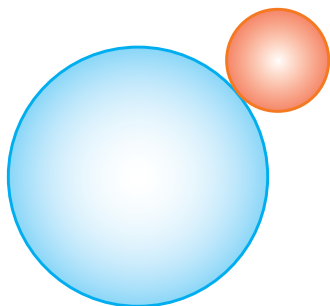
Пряма і площина, дотичні до кулі, перпендикулярні до радіуса, проведеного в точку дотику (мал. 225).



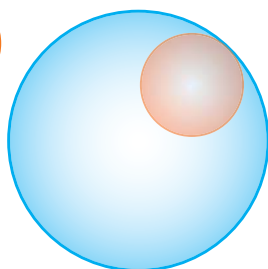
Мал. 225

Поверхню кулі називають *сферою*. Січна площина перетинає сферу по колу. Центр, радіус і діаметр кулі є також центром, радіусом і діаметром відповідної сфери. Якщо дві сфери мають тільки одну спільну точку, то вони *дотикаються* в цій точці. Дотик двох сфер може бути зовнішнім

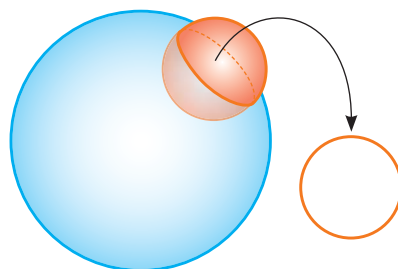
(мал. 226) або внутрішнім (мал. 227). Ці випадки аналогічні взаємному розміщенню на площині двох кіл. Якщо дві сфери перетинаються, то лінією їх перетину є коло (мал. 228).



Мал. 226



Мал. 227



Мал. 228

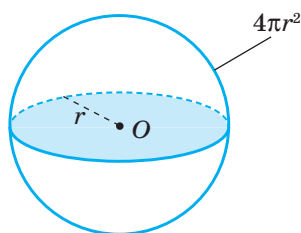
Для циліндра і конуса за допомогою розгорток можна було досить просто визначити площу їх поверхні. Для сфери такий спосіб не прийнятний, бо «розгорнути» сферу на площину не можна. Виникає питання: як визначити площу сфери.



Існує формула:

$$S_{\text{сф}} = 4\pi r^2,$$

де r — радіус сфери.



Мал. 229

Цю формулу доводять у курсах вищої математики.

За цією формулою визначають і площу поверхні кулі.

Зверніть увагу! Площа поверхні кулі в 4 рази більша за площу її великого круга (мал. 229).

$$S_{\text{кулі}} = 4 \cdot \pi r^2 = 4 \cdot S_{\text{кр}}.$$

Щоб краще запам'ятати формулу для визначення площі поверхні кулі та усвідомити її зміст, виконайте практичне завдання № 853 на с. 206.

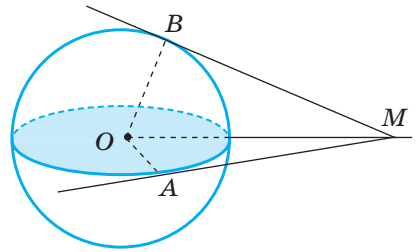
Перевірте себе

- 1 Що називають кулею? Що називають сферою? Назвіть їх елементи.
- 2 Що називають діаметральною площиною кулі? А екватором; полюсом?
- 3 Якою фігурою є переріз кулі площиною?
- 4 Яку площину називають дотичною до кулі? Які її властивості?
- 5 Яку пряму називають дотичною до кулі? Назвіть її властивості.
- 6 За якої умови одна сфера дотикається до другої?
- 7 Як можна знайти площу поверхні кулі?

Виконаємо разом

- 1) З однієї точки до кулі проведено дві дотичні прямі. Доведіть, що відстані від даної точки до точок дотику рівні.

Розв'язання. Нехай MA і MB — відрізки дотичних, проведених до кулі з точки M , а O — центр даної кулі (мал. 230). Трикутники AMO і BMO рівні за спільною гіпотенузою MO і катетами OA і OB . Тому $MA = MB$.



Мал. 230

- 2) Вершини рівностороннього трикутника зі стороною 10 см лежать на сфері радіуса 10 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.

Розв'язання. Нехай точки A, B, C лежать на сфері з центром O ;

$$AB = BC = CA = OA = OB = OC$$

і OM — шукана відстань (мал. 231). Тоді трикутники OMA, OMB і OMC рівні за спільним катетом OM і гіпотенузами.

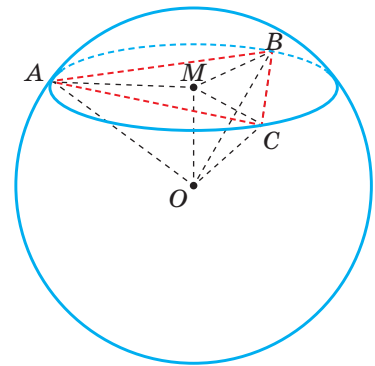
Отже, $MA = MB = MC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$, як ра-

діус кола, описаного навколо правильного трикутника ABC .

За теоремою Піфагора

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}.$$

Отже, $OM = \frac{10}{3}\sqrt{6}$ см.



Мал. 231

Виконайте усно

810. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму кулі або сфери.
811. Знайдіть площу великого круга кулі та довжину екватора, якщо її радіус дорівнює 2 м.
812. Діаметр кулі — 38 дм, а площина віддалена від її центра на 20 дм. Чи має ця площина з кулею спільні точки?
813. Точки A і B лежать на поверхні кулі радіуса 12 см. Знайдіть довжину відрізка AB , якщо з центра кулі його видно під кутом 60° .

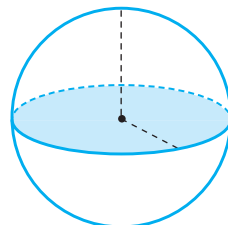
А

814. Через середину радіуса кулі проведено перпендикулярну до нього площину. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус кулі дорівнює 8.
815. Кулю радіуса 10 см перетинає площина, віддалена від її центра на 6 см. Знайдіть площу перерізу.
816. Знайдіть довжину лінії перетину сфери радіуса 25 см площиною, віддаленою від центра сфери на 7 см.
- ✓ 817. (ЗНО, 2009). Кулю перетнули площиною на відстані 12 см від її центра. Площа утвореного перерізу дорівнює 25π см². Знайдіть довжину радіуса кулі (y см).
- ✓ 818. (ЗНО, 2013). Переріз кулі площиною має площу 81π см². Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу, якщо радіус кулі дорівнює 15 см.

| А | Б | В | Г | Д |
|------|------|------|-------|-------|
| 6 см | 8 см | 9 см | 12 см | 15 см |

819. Точки A і B лежать на поверхні кулі радіуса 50 см. Знайдіть відстань від центра кулі до відрізка AB , якщо $AB = 80$ см.
820. Сфери радіусів R і r дотикаються. Знайдіть відстань між їх центрами. Розгляньте два випадки.
821. Знайдіть геометричне місце центрів сфер радіуса r , які:
а) дотикаються до даної площини; б) проходять через дану точку.
822. Знайдіть площу поверхні кулі, радіус якої 2 см.
823. Знайдіть площу сфери, діаметр якої дорівнює 20 см.
824. Сферу перетнули площиною на відстані 7 см від її центра. Довжина лінії перетину сфери — 48π см. Знайдіть: а) довжину радіуса сфери; б) площу сфери.
825. Площа сфери дорівнює $3,14$ дм². Знайдіть радіус сфери.
826. Для фарбування круга радіуса 1 м потрібно 20 г фарби. Скільки такої фарби потрібно, щоб пофарбувати кулю діаметром 1 м?
827. Знайдіть площу поверхні півкулі, радіус якої дорівнює 10 см.
828. Переріз кулі площиною, віддаленою від її центра на 12 см, має площу 25π см². Визначте площу поверхні кулі.
829. Площа поверхні кулі — 400π см². Знайдіть площу перерізу кулі площиною, віддаленою від центра на 6 см.
- ✓ 830. (ЗНО, 2018). Площа великого круга кулі (мал. 232) дорівнює S . Визначте площу сфери, що обмежує цю кулю.

| А | Б | В | Г | Д |
|------|-------|----------------|------|---------------|
| $4S$ | S^2 | $\frac{4S}{3}$ | $2S$ | $\frac{S}{4}$ |



Мал. 232

- 831.** Для фарбування кулі діаметром 2 дм потрібно 30 г фарби. Скільки фарби потрібно для фарбування кулі діаметром 6 дм?
- 832.** Приміщення виставки має вигляд півкулі, площа сферичної поверхні якої — 392π м². Визначте діаметр підлоги.
- 833.** У якому випадку витрачається більше матеріалу: на нікелювання однієї кулі діаметром 8 см чи на нікелювання 15 куль діаметром 2 см кожна?
- 834.** На Маршаллових островах інколи випадають краплі дощу діаметром в 1 см. Знайдіть поверхню такої краплі, вважаючи, що вона має форму кулі.

Б

- 835.** Крива поверхня півкулі на 20 см² більша за площу її основи. Знайдіть площу основи півкулі.
- 836.** Точки $A(2; 0; 3)$ і $B(0; 4; 7)$ — кінці діаметра сфери. Знайдіть її площу.
- 837.** Сфера з центром $A(1; 1; 1)$ проходить через точку $M(2; -1; 8)$. Знайдіть площу сфери.
- 838.** Куля з центром у точці O дотикається до площини. Відстань від точки M , що лежить у цій площині, до центра кулі — 25 см, а до точки дотику кулі — 15 см. Знайдіть: а) радіус кулі; б) площу перерізу цієї кулі площиною, що проходить через середину радіуса.
- 839.** Куля дотикається до всіх сторін прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть радіус кулі, якщо відстань від центра кулі до площини трикутника — 7 см.
- 840.** Усі сторони правильного трикутника дотикаються до сфери радіуса 2 дм. Знайдіть відстань від центра цієї сфери до площини трикутника, якщо довжина його сторони дорівнює 6 дм.
- 841.** Доведіть, що площі двох сфер відносяться як квадрати їх радіусів.
- 842.** Радіуси двох сфер відносяться як 4 : 9. Знайдіть площу більшої з них, якщо площа меншої дорівнює 32 дм².
- 843.** Спортивна гра петанк полягає в тому, що, стоячи всередині кола (обомі ногами торкаючись землі), треба кинути порожністі металеві кулі якомога ближче до маленької дерев'яної кулі — кошонета (мал. 233). Відомо, що діаметри цих куль мають відповідно розміри 30 мм і 75 мм. Установіть: а) у скільки разів поверхня металевої кулі більша за поверхню дерев'яної (кошонета); б) на скільки квадратних сантиметрів поверхня металевої кулі перевищує поверхню дерев'яної?
- 844.** Складіть аналогічну задачу про розміри куль в інших спортивних іграх. Дізнайтеся більше про історію розглянутих вами спортивних ігор.



Мал. 233

845. Радіус кулі дорівнює r .

Через кінець радіуса проведено площину під кутом α до нього. Знайдіть площу перерізу (мал. 234).

846. Точка A лежить на поверхні кулі радіуса 13 см і віддалена від кінців діаметра MN на відстані, пропорційні числам 5 і 12. Знайдіть ці відстані.

847. Два кола радіусів 30 см і 40 см лежать у паралельних площинах і на поверхні кулі радіуса 50 см. Знайдіть відстань між площинами.

848. На сфері радіуса 26 см дано три точки. Прямолінійні відстані між ними 12 см, 16 см і 20 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини, яка проходить через ці точки.

849. Радіус Землі — 6,4 тис. км. Який шлях проходять за добу внаслідок обертання Землі міста Одеса, Львів і Київ, широти яких становлять $46^{\circ}29'$, $49^{\circ}49'$ і $50^{\circ}27'$?

850. Радіус Землі дорівнює 6400 км. На яку висоту над горизонтом слід піднятися, щоб лінія горизонту проходила на відстані 100 км від спостерігача?

851. Куля радіуса r дотикається до граней двогранного кута. Знайдіть відстань від центра кулі до ребра кута, якщо цей кут дорівнює: а) 60° ; б) 90° ; в) 120° ; г) α .

852. *Задача з несподіваною відповіддю.* Уявіть, що дві кулі — одна велика, як Земля, а друга, як м'яч, — по екваторах обтягнуті обручами. Якщо кожний із цих обручів подовжити на 1 м, вони відійдуть від поверхонь куль на деякі відстані. Де ця відстань буде більшою — у більшої чи меншої кулі?

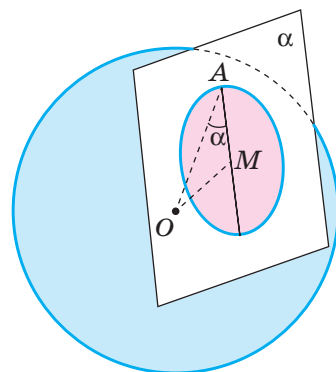
853. **Практичне завдання.** Перевірте на практиці твердження про те, що площа поверхні кулі в 4 рази більша за площу її великого круга (мал. 235).

1. Візьміть апельсин чи яблуко, що мають форму, якомога більше наближену до кулі, та розріжте по великому кругу.

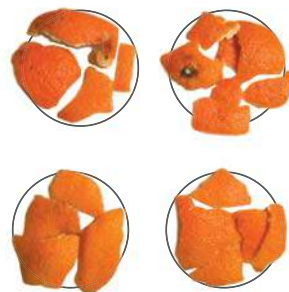
2. Обведіть цей круг на папері 4 рази.

3. Акуратно маленькими шматочками зніміть шкірку з плода і заповніть нею намальовані раніше круги.

4. Сфотографуйте вашу роботу і відправте фото в одну із соцмереж. Лайки вам гарантовані.



Мал. 234



Мал. 235

Вправи для повторення

854. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений прямокутний трикутник. Довжина кола основи конуса дорівнює 8π см. Знайдіть площу осьового перерізу.
855. Рівнобедрений прямокутний трикутник обертається навколо гіпотенузи, довжина якої дорівнює 8 м. Обчисліть поверхню отриманого тіла.
856. Обчисліть діагональ куба, якщо діагональ його бічної грані дорівнює d .

Самостійна робота 5

ВАРІАНТ 1

- 1 Обчисліть площу поверхні конуса, твірна якого дорівнює 8 см, а радіус основи — 5 см.
- 2 Діаметр кулі дорівнює 10 см. Знайдіть площу її поверхні.
- 3* Рівнобедрена трапеція, бічні сторони та менша основа якої дорівнюють по 5 см, обертається навколо більшої основи. Знайдіть площу поверхні утвореного тіла, якщо висота трапеції дорівнює 4 см.

ВАРІАНТ 2

- 1 Обчисліть площу поверхні циліндра, твірна якого дорівнює 5 см, а радіус основи — 9 см.
- 2 Площа сфери дорівнює 100π см². Знайдіть її діаметр.
- 3* Прямокутна трапеція, бічні сторони та менша основа якої відповідно дорівнюють 3 см, 5 см і 4 см, обертається навколо більшої основи. Знайдіть площу поверхні утвореного тіла.

§ 23. КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

Досі ми розглядали властивості простих геометричних тіл — призм, пірамід, циліндрів, конусів, куль. Але багатьом спеціалістам часто доводиться мати справу зі складнішими тілами, які є *комбінаціями* (поєднаннями) названих тіл. А конструкторам, ливарникам, токарям, слюсарям та іншим робітникам доводиться створювати деталі й складніших конфігурацій (мал. 236).

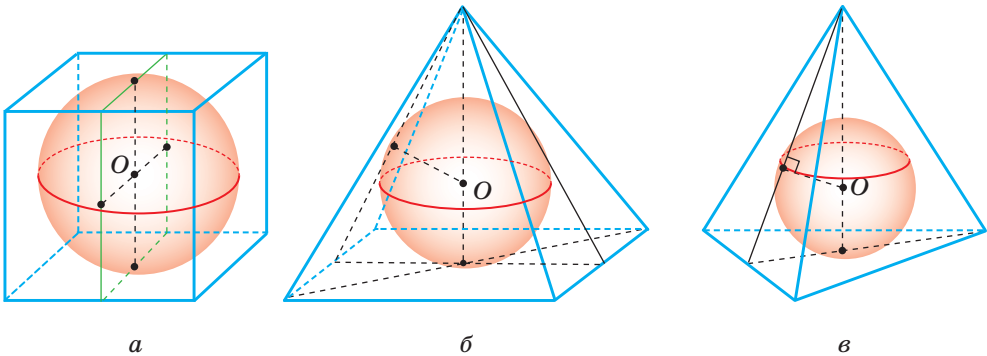


Мал. 236

Кулю називають **вписаною у многогранник**, якщо вона дотикається до кожної грані многогранника.

Із різноманітних комбінацій геометричних тіл особливої уваги заслуговують *вписані й описані тіла*. Уточнимо ці поняття.

На малюнку 237 зображено кулю, вписану в: а) куб (мал. 237, а); б) чотирикутну піраміду (мал. 237, б); в) трикутну піраміду (мал. 237, в).



а

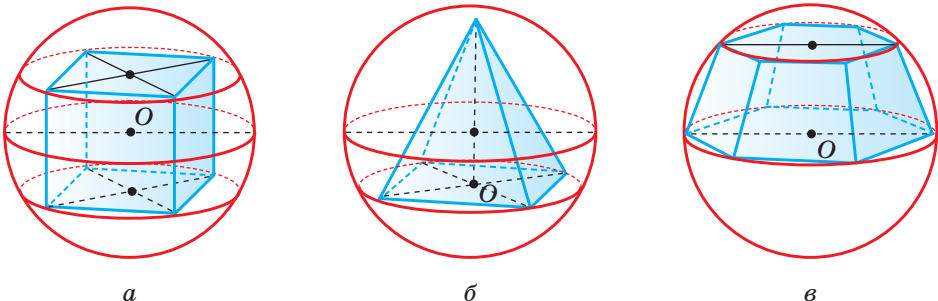
б

в

Мал. 237

Многогранник називають **вписаним у сферу**, якщо всі його вершини лежать на сфері.

На малюнку 238 зображено сферу, описану навколо: а) призми (мал. 238, а); б) чотирикутної піраміди (мал. 238, б); в) шестикутної зрізаної піраміди (мал. 238, в).



а

б

в

Мал. 238

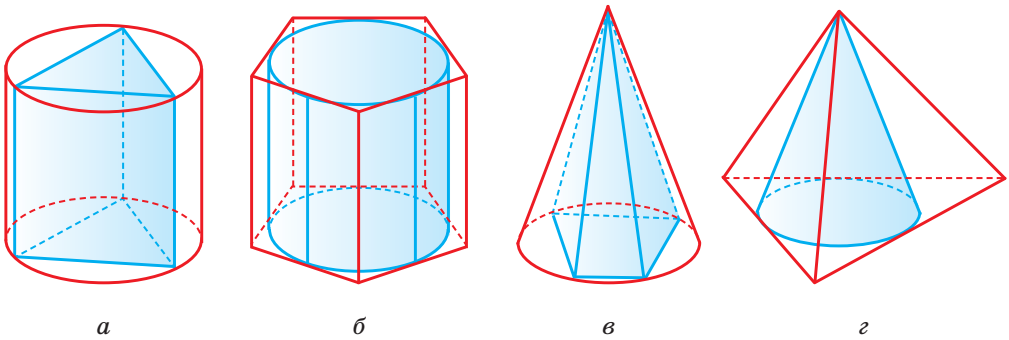
Аналогічні означення можна сформулювати і для інших фігур, вписаних одна в одну.

Зауваження. Якщо вписане тіло малюється іншими кольорами, то його видимі лінії можна зображати суцільно.

Призму називають **вписаною в циліндр**, якщо її основи вписані в основи циліндра (мал. 239, а). Циліндр буде **вписаним у призму**, якщо кола його основ вписані в основи призми (мал. 239, б).

Піраміду називають **вписаною в конус**, якщо їх вершини збігаються, а основа піраміди вписана в коло основи конуса (мал. 239, в).

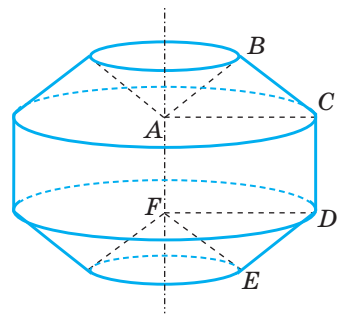
Конус **вписаний у піраміду**, якщо їх вершини збігаються, а коло основи конуса дотикається до всіх сторін основи піраміди (мал. 239, г).



Мал. 239

Якщо одне тіло *вписане* в інше, то друге тіло називають *описаним* навколо першого.

Як комбінації циліндрів, конусів і зрізаних конусів можна розглядати тіла, утворені обертанням багатокутників. Наприклад, тіло, утворене обертанням правильного шестикутника навколо його сторони, є об'єднанням циліндра і двох зрізаних конусів, із якого вилучено два конуси (мал. 240).



Мал. 240

Перевірте себе

- 1 Яку кулю називають вписаною в многогранник?
- 2 Який многогранник називають вписаним у сферу?
- 3 Дайте означення призми, вписаної в циліндр.
- 4 Дайте означення піраміди, вписаної в конус.

Виконаємо разом

- 1) Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням рівностороннього трикутника зі стороною a навколо однієї зі сторін.

Розв'язання. При обертанні трикутника ABC навколо прямої AC точка B опише коло радіуса OB з центром у точці O — середині AC . Тоді тіло, утворене обертанням, буде складатися з двох рівних конусів (мал. 241). Площа бічної поверхні конуса: $S_6 = \pi rl$,

$$\text{де } r = OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ і } l = AB = a;$$

$$S_6 = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Тому } S = 2S_6 = \pi a^2 \sqrt{3}.$$

- 2) Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть довжину ребра куба, вписаного в конус так, що чотири його вершини лежать на основі конуса, а інші чотири — на його бічній поверхні.

Розв'язання. Нехай PM — твірна конуса, яка проходить через вершину A_1 вписаного куба (мал. 242). Вершина A куба лежить на радіусі OM . За умовою задачі, $PM = l$, $\angle PMO = \alpha$.

$$\text{Якщо ребро куба дорівнює } x, \text{ то } OA = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

З прямокутного $\triangle POM$ маємо:

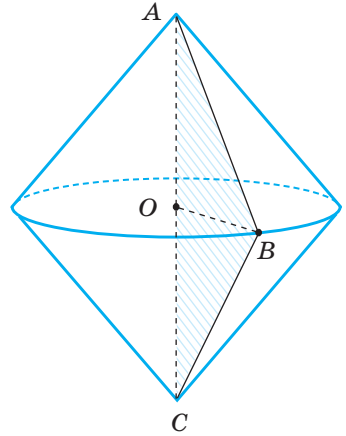
$$OM = PM \cdot \cos \alpha = l \cos \alpha,$$

$$MA = MO - OA = l \cos \alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

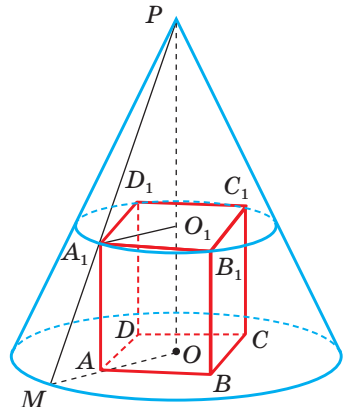
$$\text{Оскільки } \frac{A_1A}{MA} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ то } \frac{x}{l \cos \alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\text{звідки } x = \frac{\sqrt{2}l \sin \alpha}{\sqrt{2} + \operatorname{tg} \alpha}.$$

- 3) Основою прямої призми є прямокутник зі стороною a та кутом α , який утворює ця сторона з діагоналлю прямокутника. Діагональ призми утворює з площиною основи кут β . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо призми, якщо $a = 6$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.



Мал. 241



Мал. 242

Розв'язання. Дана призма — прямокутний паралелепіпед (мал. 243).

Тому, якщо $AB = a$, то $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAC_1 = \beta$, CC_1 — висота описаного циліндра, а AC — діаметр його основи.

Площу бічної поверхні циліндра визначатимемо за формулою:

$$S = 2\pi rh, \text{ де } r = \frac{AC}{2}, h = CC_1.$$

Оскільки трикутники ABC і ACC_1 прямокутні, то з $\triangle ABC$:

$$AC = \frac{AB}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha};$$

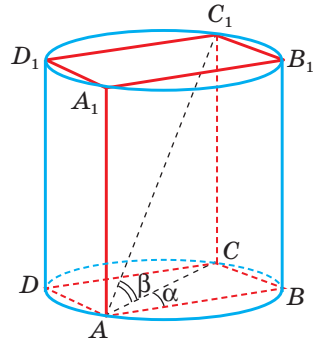
$$\text{із } \triangle ACC_1: CC_1 = AC \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \beta.$$

Отже,

$$S = 2\pi \frac{a}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{a}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \beta = \frac{\pi a^2}{\cos^2 \alpha} \operatorname{tg} \beta.$$

$$\text{Якщо } a = 6, \alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, \text{ то } S = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 4}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{144\pi\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Отже, } S = \frac{\pi a^2 \cdot 4}{\cos^2 \alpha} \operatorname{tg} \beta = \frac{144\pi\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2.$$



Мал. 243

Виконайте усно

857. Знайдіть радіус кулі, вписаної в куб з ребром завдовжки a .
858. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в куб з ребром завдовжки 2 см.
859. Знайдіть площу осевого перерізу циліндра, у який вписано кулю радіуса R .
860. Чи в будь-який циліндр можна вписати кулю?
861. Чому дорівнює висота зрізаного конуса, у який вписано кулю радіуса R ?
862. Знайдіть діагональ куба, вписаного у сферу радіуса 8 см.

A

863. Накресліть описану навколо кулі правильну призму: а) чотирикутну; б) трикутну.
864. Накресліть описану навколо кулі правильну піраміду: а) чотирикутну; б) трикутну.
865. Накресліть вписану в конус правильну піраміду: а) трикутну; б) чотирикутну; в) шестикутну.

866. Зобразіть тіло, утворене обертанням прямокутної трапеції навколо більшої основи (мал. 244).

Комбінацією яких тіл воно є?

867. Впишіть у правильну чотирикутну піраміду куб так, щоб одна його грань лежала на основі піраміди, а вершини протилежної грані: а) на бічних ребрах піраміди; б) на апофемах піраміди.

868. В основі прямої призми — прямокутний трикутник. Опишіть навколо неї: а) циліндр; б) сферу.

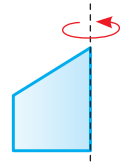
869. Знайдіть діаметр сфери, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда з вимірами 3 дм, 4 дм і 5 дм.

870. Знайдіть площу сфери, вписаної в куб, ребро якого — 10 см.

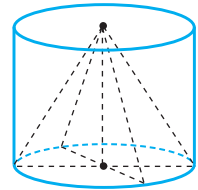
871. Як відносяться площі сфер, вписаної в куб та описаної навколо того самого куба?

872. (ЗНО, 2018). У циліндр з радіусом основи 3 см і висотою 4 см вписано конус (мал. 245). До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

- | | |
|---|------------------------|
| 1 Площа бічної поверхні циліндра дорівнює | А $9\pi \text{ см}^2$ |
| 2 Площа повної поверхні циліндра дорівнює | Б $12\pi \text{ см}^2$ |
| 3 Площа основи конуса дорівнює | В $15\pi \text{ см}^2$ |
| 4 Площа бічної поверхні конуса дорівнює | Г $24\pi \text{ см}^2$ |
| | Д $42\pi \text{ см}^2$ |



Мал. 244



Мал. 245

Б

873. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди.

874. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 10 м і 24 м, а всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60° . Знайдіть площу поверхні конуса, вписаного в цю піраміду.

875. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть бічну поверхню циліндра, вписаного в призму.

876. Знайдіть площу поверхні циліндра, описаного навколо трикутної призми, всі ребра якої дорівнюють a .

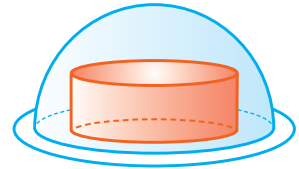
877. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює 27 см^2 . Знайдіть площу бічної поверхні вписаного в неї циліндра.

878. У прямий паралелепіпед, діагоналі основи якого дорівнюють 6 см і 8 см, вписано кулю. Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда.

879. Навколо правильної шестикутної призми, висота якої дорівнює 12 см, описано сферу радіуса 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

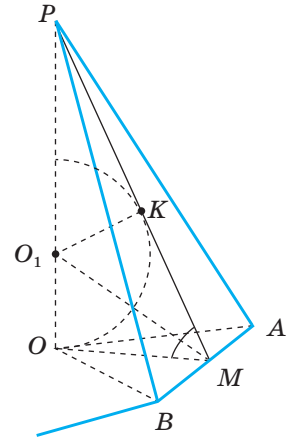
- 880.** Знайдіть площу сфери, описаної навколо циліндра, діаметр основи і висота якого дорівнюють відповідно 4 см і 3 см.
- 881.** (ЗНО, 2013). Для розігрівання в мікрохвильовій печі рідких страв використовують посудину у формі циліндра, радіус основи якого дорівнює 9 см. Посудина ставиться на горизонтальний диск у формі круга і накривається кришкою, що має форму півсфери (мал. 246). Радіус півсфери дорівнює 12 см і є меншим за радіус круга. Укажіть найбільше з наведених значень, якому може дорівнювати висота посудини, якщо посудина не торкається кришки.

| А | Б | В | Г | Д |
|------|------|------|------|------|
| 3 см | 5 см | 6 см | 7 см | 8 см |



Мал. 246

- 882.** Площа бічної поверхні конуса — Q , а радіус його основи — r . Знайдіть довжину бічного ребра вписаної в цей конус правильної піраміди: а) трикутної; б) чотирикутної; в) шестикутної.
- 883.** Навколо кулі радіуса r описано конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо $r = 2$ м, $\alpha = 50^\circ$.
- 884.** Ребро правильного октаедра дорівнює a . Знайдіть радіус кулі: а) вписаної в цей октаедр; б) описаної навколо нього.
- 885*.** Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну n -кутну піраміду (мал. 247), сторона основи якої дорівнює a , а двогранний кут при ребрі основи — α , якщо: а) $n = 4$; б) $n = 6$; в) $n = 3$; г) $n = t$.
- 886*.** У сферу радіуса r вписано правильну чотирикутну піраміду, бічне ребро якої нахилене до площини основи під кутом α . Знайдіть висоту піраміди.



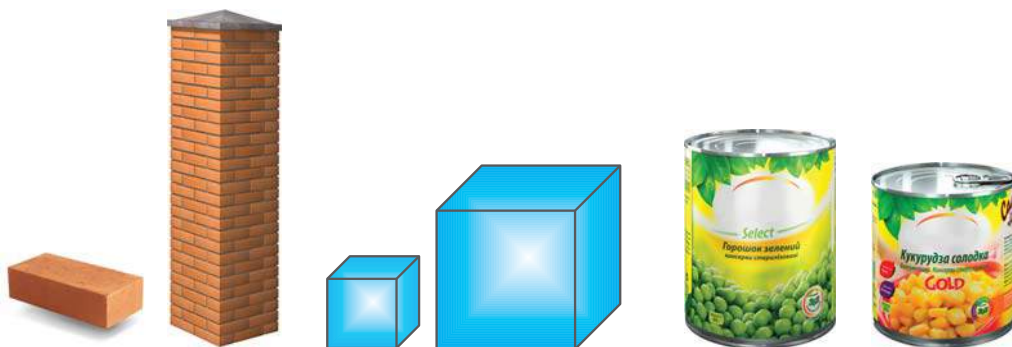
Мал. 247

Вправи для повторення

- 887.** Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу циліндра, якщо площа основи відноситься до площі осьового перерізу як $\pi:4$.
- 888.** Переріз циліндра, проведений паралельно його осі, є квадратом і віддалений від осі на 2 см. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи дорівнює $\sqrt{6}$ см.
- 889.** Обчисліть площу діагонального перерізу куба, якщо площа поверхні куба дорівнює 150 м².

§ 24. ОБ'ЄМ ПРИЗМИ ТА ЦИЛІНДРА

Кожне тіло займає певну частину простору: цеглина — меншу, ніж будинок; куб з ребром 1 см — меншу, ніж куб з ребром 2 см, перша консервна банка більшу, ніж друга (мал. 248).



Мал. 248

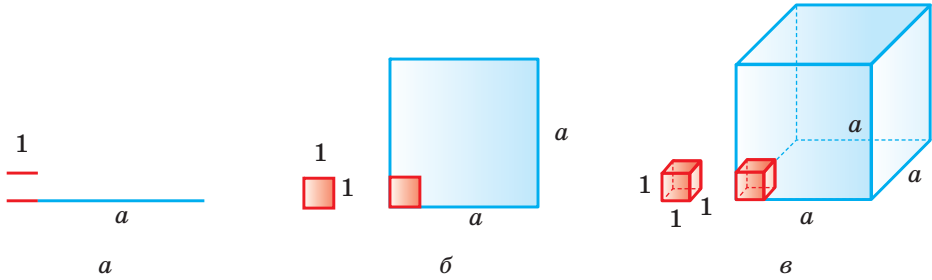
Щоб можна було порівнювати різні частини простору, вводять поняття *об'єму*.

Строгий виклад теорії об'ємів досить складний. Ми обмежимося розглядом лише простих тіл — многогранників, циліндра, конуса та кулі. Для цих тіл об'єм — це величина, яка задовольняє певні умови (властивості об'єму).

Властивості об'єму

1. Кожне тіло має об'єм, виражений додатним числом.
2. Якщо тіло поділене на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів усіх цих частин.
3. Рівні тіла мають рівні об'єми.
4. Об'єм одиничного куба дорівнює одиниці об'єму. **Одиничним кубом** називають куб, ребро якого дорівнює одиниці довжини.

Об'єм — одна з величин, як і довжина, міра кута, площа. Значення об'єму задається не тільки числом, а й найменуванням. Наприклад, об'єм 1 дм^2 можна записати і як 1000 см^3 , і як $0,001 \text{ м}^3$. У теоретичних міркуваннях за одиницю довжини беруть довжину деякого (одиничного) відрізка (мал. 249, а). Площу квадрата, сторона якого дорівнює одиничному відрізку, беруть за одиницю площі (мал. 249, б), а об'єм куба, ребро якого дорівнює одиничному відрізку, — за одиницю об'єму (мал. 249, в).



Мал. 249

Об'єми тіл вимірюють або обчислюють.

Наприклад, об'єм відра можна виміряти, наливаючи в нього воду банкою відомого об'єму. Об'єм невеликої деталі можна виміряти за допомогою мензурки з поділками (мал. 250).

Виміряти подібним способом об'єм кімнати чи доменної печі неможливо. Їх обчислюють. Крім того, вимірювання об'ємів дають наближені результати.

Точні значення об'ємів геометричних тіл обчислюють за формулами. Наприклад, об'єм куба з ребром a дорівнює a^3 .

Розглянемо, як обчислюють об'єми деяких інших тіл. Вам відомо, що об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту:

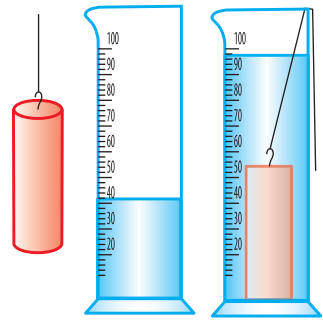
$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

А як знаходити об'єм призми? Якщо призма пряма і в її основі лежить прямокутний трикутник, то з двох таких рівних призм можна скласти прямокутний паралелепіпед (мал. 251).

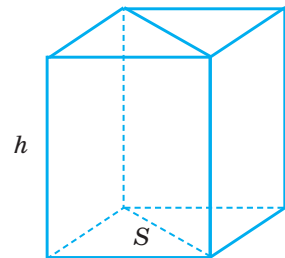
Якщо висота, площа основи та об'єм такої трикутної призми дорівнюють h , $S_{\text{осн}}$ і V , то висота, площа основи та об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнюють відповідно h , $2S_{\text{осн}}$ і $2V$. Оскільки об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту, то $2V = 2S \cdot h$, звідки $V = S_{\text{осн}} \cdot h$.

Отже, об'єм кожної прямої призми, в основі якої лежить прямокутний трикутник, дорівнює добутку площі її основи на висоту.

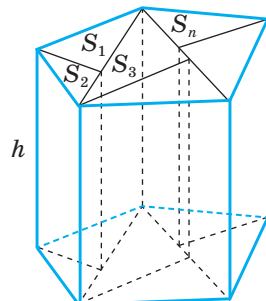
Розглянемо довільну пряму призму з площею основи S , висотою h і об'ємом V . Її основу можна поділити на n прямокутних трикутників (мал. 252), отже, дану призму — на n прямих



Мал. 250



Мал. 251



Мал. 252

призм, основами яких є прямокутні трикутники. Якщо їх площі основ та об'єми дорівнюють відповідно S_1 і V_1 , S_2 і V_2 , ..., S_n і V_n , то:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = S_1h + S_2h + \dots + S_nh = (S_1 + S_2 + \dots + S_n)h = Sh.$$

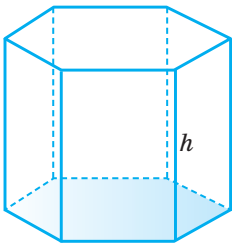
Об'єм кожної прямої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.

Об'єм циліндра також дорівнює добутку площі основи на висоту.

Циліндр можна розглядати як правильну n -кутну призму при дуже великому n . Наприклад, якщо n дорівнює мільярду, то таку призму практично не можна відрізнити від циліндра. А, за доведеним, об'єм і такої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту. Оскільки площа круга радіуса r дорівнює πr^2 , то об'єм циліндра, радіус основи якого — r , а висота — h , можна знаходити за формулою:

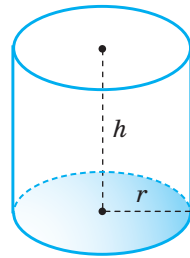
$$V = \pi r^2 h.$$

Отже, маємо формули для визначення об'єму призми і циліндра:



$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

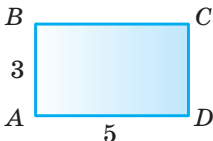
Призма



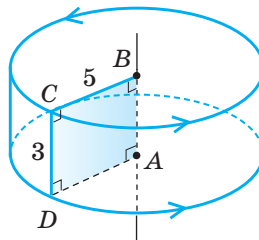
$$V = \pi r^2 h$$

Циліндр

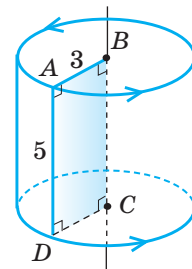
Приклад. Обчисліть об'єми циліндрів, утворених обертанням зображеного на малюнку 253 прямокутника навколо його: а) меншої сторони; б) більшої сторони.



Мал. 253



Мал. 254



Мал. 255

Розв'язання. а) Якщо прямокутник $ABCD$ обертається навколо меншої сторони, то ця сторона буде твірною і висотою утвореного циліндра. Радіусом основи цього циліндра буде більша сторона прямокутника (мал. 254). Маємо: $r = AD = 5$ см, $h = AB = 3$ см. Знайдемо об'єм циліндра:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 3 = 75\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

б) Якщо прямокутник $ABCD$ обертається навколо більшої сторони, то ця сторона буде твірною і висотою утвореного циліндра. Радіусом основи цього циліндра буде менша сторона прямокутника (мал. 255).

Маємо: $r = AB = 3$ см; $h = BC = 5$ см. Об'єм циліндра:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Пам'ятайте і правильно використовуйте співвідношення між одиницями виміру об'єму:

$$1 \text{ см}^3 = 1000 \text{ мм}^3$$

$$1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3$$

$$1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ дм}^3$$

$$1 \text{ м}^3 = 1\,000\,000 \text{ см}^3$$

Перевірте себе

- 1 Назвіть властивості об'єму.
- 2 У яких одиницях вимірюють об'єм?
- 3 Як можна вимірювати об'єми?
- 4 Чому дорівнює об'єм куба з ребром завдовжки a ?
- 5 Чому дорівнює об'єм призми?
- 6 Чому дорівнює об'єм циліндра?

Виконаємо разом

- 1) Площі трьох нерівних граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 дм^2 , 10 дм^2 і 15 дм^2 . Знайдіть його об'єм.

Розв'язання. Якщо виміри даного паралелепіпеда — x , y , z , то $xy = 6$, $xz = 10$, $yz = 15$. Перемножимо ці рівності:

$$x^2 y^2 z^2 = 900.$$

Отже, шуканий об'єм $V = xyz = \sqrt{900} = 30$.

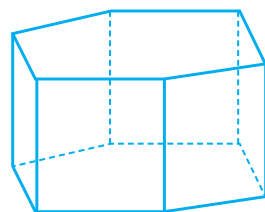
- 2) Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми, кожне ребро якої має довжину a .

Розв'язання. Висота даної призми (мал. 256) дорівнює a , а основу можна поділити на 6 правильних три-

кутників, площа кожного з яких дорівнює $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Тому шуканий об'єм

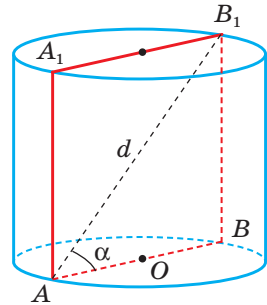
$$V = Sh = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = 1,5\sqrt{3}a^3.$$



Мал. 256

- 3) Діагональ осевого перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть об'єм циліндра.

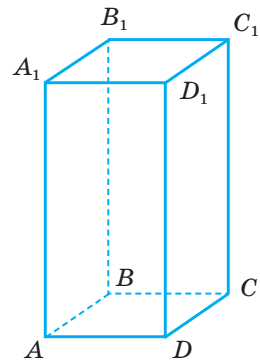
Розв'язання. Нехай ABB_1A_1 — осевий переріз циліндра, AB_1 — його діагональ і $\angle B_1AB = \alpha$ (мал. 257). Трикутник ABB_1 — прямокутний, тому висота циліндра $BB_1 = d \sin \alpha$, а діаметр основи $AB = d \cos \alpha$. Радіус основи $OA = 0,5d \cos \alpha$. Тому шуканий об'єм циліндра $V = \pi \cdot OA^2 \cdot AB = \pi \cdot 0,25d^2 \cos^2 \alpha \cdot d \sin \alpha = 0,25\pi d^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$.



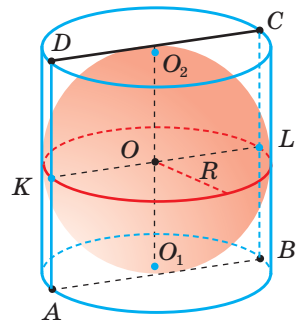
Мал. 257

Виконайте усно

890. Ребро куба дорівнює 5 дм. Чому дорівнює його об'єм?
891. Знайдіть ребро куба, якщо його об'єм дорівнює 64 см^3 .
892. Якою буде площа поверхні куба, якщо його об'єм дорівнює 27 см^3 ?
893. На малюнку 258 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайдіть його об'єм, якщо:
- $AD = 2a$, $DD_1 = a$, $DC = 3a$;
 - $AD = 0,5 \text{ м}$, $DC = 4 \text{ дм}$, $CC_1 = 3 \text{ дм}$;
 - $AB = m$, $A_1 D_1 = 2m$, $CC_1 = 0,5m$;
 - $S_{ABCD} = Q$, $CC_1 = 3$.
894. Зі шматка пластиліну, який мав форму прямокутного паралелепіпеда розмірами $1 \times 2 \times 4$, виліпили куб. Знайдіть довжину ребра цього куба.
895. Скільки кубів з ребром завдовжки 1 дм можна вкласти в коробку розмірами $3 \times 4 \times 5$?
896. Як зміниться об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо всі його виміри збільшити в 3 рази?
897. Об'єм правильної чотирикутної призми дорівнює 14 см^3 . Знайдіть об'єми многогранників, на які ця призма поділяється двома перпендикулярними діагональними площинами.



Мал. 258

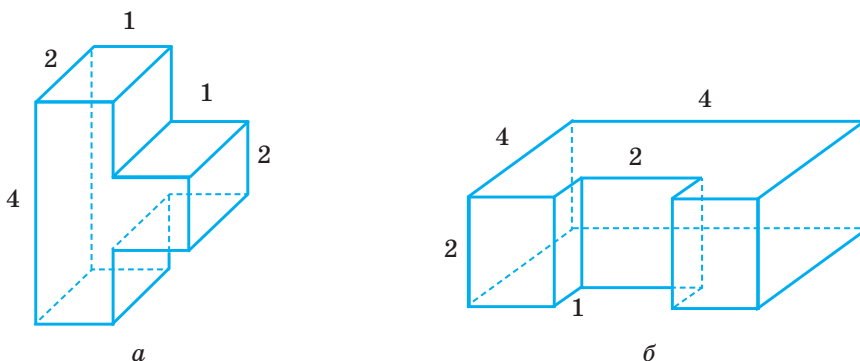


Мал. 259

A

898. Осевий переріз циліндра — квадрат зі стороною 4 м. Знайдіть об'єм циліндра.
899. Знайдіть об'єм циліндра, у який вписано кулю радіуса R (мал. 259).

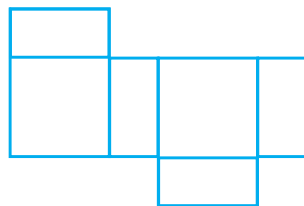
900. Знайдіть об'єм куба, якщо площа його грані дорівнює Q .
901. Діагональ куба дорівнює d . Знайдіть його об'єм.
902. Об'єм куба дорівнює V . Знайдіть площу його поверхні.
903. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють 6 см і 8 см, а діагональ утворює з площиною основи кут 45° .
904. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють 3 см і 4 см, а площа діагонального перерізу — 30 см^2 .
905. Деталь складається з двох частин (мал. 260). Знайдіть об'єм кожної частини і загальний об'єм усієї деталі. Яку форму матиме деталь у складеному вигляді?



Мал. 260

906. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, якщо площа її основи дорівнює 49 см^2 , а площа бічної грані — 56 см^2 .

907. (ЗНО, 2008). На малюнку 261 зображено розгортку поверхні тіла, складеного з двох квадратів і чотирьох однакових прямокутників, довжина сторін яких — 3 см і 6 см. Визначте об'єм цього тіла.



Мал. 261

| А | Б | В | Г | Д |
|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|----------------|
| 108 см^2 | 54 см^2 | 144 см^2 | 36 см^2 | інша відповідь |

908. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм призми.
909. Три свинцеві куби з ребрами 1 см, 6 см і 8 см переплавили в один куб. Знайдіть довжину ребра утвореного куба.
910. Виміри прямокутного паралелепіпеда — 15 м, 36 м і 50 м. Знайдіть довжину ребра куба такого самого об'єму.
911. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює 39 см, а ребра пропорційні числам 3, 4 і 12.

912. Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 1, 2 і 4. Знайдіть його об'єм, якщо площа поверхні дорівнює 112 см^2 .
913. На кожного учня класу має припадати не менш як 6 м^3 повітря. На скільки учнів розрахована класна кімната розмірами $10 \times 6 \times 3,5 \text{ м}$?
914. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 2 см і 5 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 3 см.
915. Знайдіть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 2 см, а висота — 5 см.
916. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, всі ребра якої дорівнюють a .
917. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см, а більша бічна грань — квадрат. Знайдіть об'єм призми.
918. Осьовий переріз циліндра — квадрат зі стороною a . Знайдіть об'єм циліндра.
919. Кондитерський рулет має форму циліндра. Його довжина 18 см, а діаметр основи — 8 см. Калорійність усього рулету 960 ккал. Установіть, скільки калорій припадає на 1 см^3 рулету? Дізнайтеся, скільки часу потрібно бігати, щоб відпрацювати калорії двох шматочків такого рулету товщиною у 2 см (мал. 262).
920. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням квадрата зі стороною a навколо прямої, що містить сторону квадрата.



Мал. 262

Б

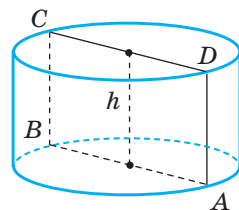
921. Діагональ грані правильної трикутної призми дорівнює d і нахилена до сторони основи під кутом α . Знайдіть об'єм призми.
922. (ЗНО, 2018). Обчисліть об'єм правильної трикутної призми, бічні грані якої є квадратами, а площа основи дорівнює $9\sqrt{3} \text{ см}^2$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------------|---------------------------|-------------------|-------------------------------------|----------------------------|
| $54\sqrt{3} \text{ см}^3$ | $27\sqrt{3} \text{ см}^3$ | 27 см^3 | $\frac{27}{2}\sqrt{3} \text{ см}^3$ | $162\sqrt{3} \text{ см}^3$ |

923. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 10 см, 10 см і 16 см. Знайдіть об'єм призми, якщо периметр її більшої бічної грані дорівнює 48 см.
924. Основою прямої призми є ромб зі стороною a і кутом 60° . Знайдіть об'єм призми, якщо її менша діагональ утворює з площиною основи кут 45° .
925. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з основами 6 см і 10 см. Через більшу основу трапеції та середину протилежного бічного ребра проведено площину під кутом 30° до площини основи. Знайдіть об'єм призми, якщо площа перерізу дорівнює 48 см^2 .

- ✓ 926. (ЗНО, 2016). На малюнку 263 зображено циліндр, радіус основи якого дорівнює 6, а висота — h . Чотирикутник $ABCD$ — осьовий переріз цього циліндра. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

- | | |
|--|-------------|
| 1 Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 36, якщо | А $h = 3$ |
| 2 Площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює 42, якщо | Б $h = 3,5$ |
| 3 Об'єм циліндра дорівнює 108π , якщо | В $h = 4$ |
| 4 Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 48π , якщо | Г $h = 4,5$ |
| | Д $h = 6$ |



Мал. 263

927. У пряму призму, сторони основи якої дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, вписано кулю. Знайдіть об'єм призми.
928. Знайдіть об'єм прямого паралелепіпеда, сторона основи якого дорівнює a , а радіус вписаної кулі — r .
929. Переріз залізничного насипу має вигляд трапеції з основами 18 м і 8 м та висотою 3 м. Знайдіть об'єм 1 км такого насипу.
930. Довжини двох круглих колод рівні, а їх діаметри відносяться як 2:3. Як відносяться їх об'єми?
931. Нафта — екологічно небезпечна речовина. Потрапивши у ґрунт і воду, вона істотно впливає на всі життєві процеси, що проходять у них: розчинення і виділення кисню та вуглекислого газу, теплообмін та відбивну здатність морської води тощо. При потраплянні на водну поверхню, наприклад, 10 літрів нафти, формується пляма, що може розтікатися на площу до 500 м^2 , утворюючи суцільну нафтову плівку, що стає перешкодою для нормального газообміну у водному середовищі. Термін розкладання такого забруднення може досягати 10–12 років. Установіть, якою може бути товщина такої плівки.

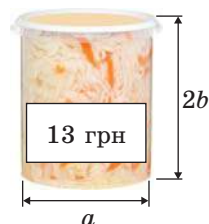
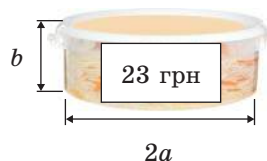
932. Знайдіть площу круглої плями на поверхні моря, утвореної 1 м^3 нафти, якщо товщина її плівки дорівнює 1 мм.

933. Цистерна для зберігання нафтопродуктів має форму циліндра, довжина якого 7 м, а діаметр 3 м. У цистерну вилили 100 барелей нафти. Скільки ще нафти можна залити в цю цистерну?

934. У циліндричну посудину, внутрішній діаметр якої 20 см, опущено деталь. Рівень рідини, яка була в посудині, піднявся на 12 см. Знайдіть об'єм деталі.

935. Зробіть правильний вибір (мал. 264). Обґрунтуйте, капусту у якій ємності вигідніше придбати.

936. Скільки квадратних метрів паперу в рулоні, висота якого — 85 см, а радіуси — 45 см і 2 см? Товщина паперу — 0,1 мм.



Мал. 264

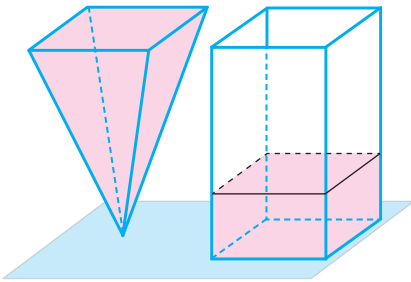
Вправи для повторення

937. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см навколо сторони завдовжки 14 см.
938. Знайдіть висоту циліндра, якщо діаметр його основи d з центра другої основи видно під кутом α .
939. Знайдіть площу поверхні правильної трикутної піраміди, у якої апофема завдовжки l утворює з висотою кут α .

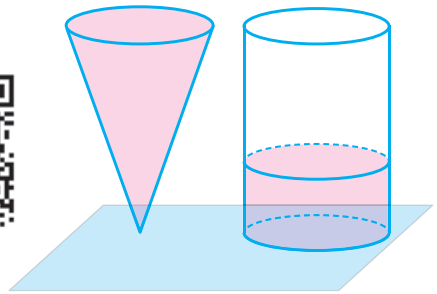
§ 25. ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ, КОНУСА ТА КУЛІ

Об'єм піраміди чи конуса дорівнює третині добутку площі основи на висоту.

Формули для визначення об'ємів піраміди, конуса та кулі можна встановити експериментально. Пересипаючи пісок з піраміди в призму (мал. 265) або з конуса в циліндр (мал. 266) з відповідно рівними основами й висотами, неважко перекопатися, що об'єм піраміди втричі менший за об'єм призми, а об'єм конуса втричі менший за об'єм циліндра.



Мал. 265



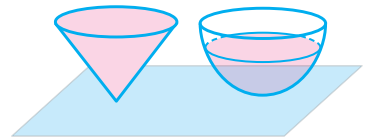
Мал. 266

Зокрема, якщо радіус основи конуса — r , а висота — h , то його об'єм

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

У такий спосіб можна перекопатися, що об'єм півкулі радіуса r удвічі більший за об'єм конуса, радіус основи якого і висота дорівнюють r (мал. 267).

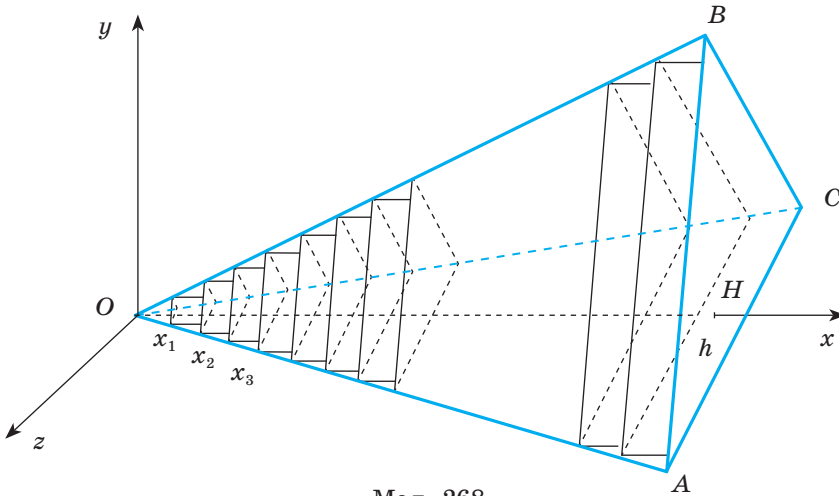
Оскільки об'єм такого конуса дорівнює $\frac{1}{3} \pi r^3$, то об'єм кулі радіуса r можна визначити за формулою $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.



Мал. 267

Зрозуміло, що такі міркування — не доведення. Строго математично вивести формули для визначення об'ємів зазначених тіл можна за допомогою інтегралів. Детально такий підхід ви розглядали у §8 (с. 65). Наведемо тут загальні схеми доведень формул для обчислення об'ємів піраміди, конуса і кулі.

Нехай дано довільну піраміду $OABC$ (мал. 268), площа основи якої S , а висота — h . Розмістимо прямокутну систему координат так, щоб її початок збігався з вершиною O , а вісь x була напрямлена вздовж висоти піраміди OH .



Мал. 268

Поділимо цю висоту h точками x_1, x_2, x_3, \dots , на n рівних відрізків. Якщо через кожен з цих точок провести площину, перпендикулярну до осі x , то вони поділять піраміду на n частин. Одна з цих частин — маленька піраміда, решта — зрізані піраміди. Замінімо уявно кожен з цих зрізаних пірамід прямою призмою з такою самою висотою та основою, що дорівнює меншій основі відповідної зрізаної піраміди. Внаслідок цього утвориться вписане в піраміду східчасте тіло, складене з $n - 1$ призм. Висота кожної з цих призм $\delta = \frac{h}{n}$, а площі основ — деякі функції від x : $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_{n-1})$.

Об'єм V_n утвореного східчастого тіла дорівнює сумі об'ємів усіх цих $n - 1$ призм: $V_n = f(x_1)\delta + f(x_2)\delta + \dots + f(x_{n-1})\delta$.

Це — інтегральна сума. Тут функція $f(x)$ — площа перерізу піраміди площиною, що перпендикулярна до осі x і віддалена від вершини O на x .

Як було показано на с. 161, $f(x) : S = x^2 : h^2$, звідки $f(x) = \frac{S}{h^2} x^2$.

Отже, шуканий об'єм даної піраміди:

$$V = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{Sh^3}{3h^3} = \frac{1}{3} Sh.$$

Так само, але замінивши скрізь слово «піраміда» на «конус», можна довести, що й об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту. Аналогічно виводиться також формула об'єму кулі.

Нехай дано півкулю радіуса r (мал. 269). Її радіус OP , який лежить на осі x , точками $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ поділимо на n рівних частин і через точки поділу проведемо площини, перпендикулярні до осі x . Дану півкулю вони поділять на n частин. Кожну з цих частин, крім останньої, замінимо циліндром так, щоб утворилося східчасте тіло, складене з $n - 1$ циліндрів. Висота кожного з цих циліндрів $\delta = \frac{r}{n}$, а площі основ — деякі функції від x_i : $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_{n-1})$.

Об'єм утвореного східчастого тіла, вписаного в цю півкулю,

$$f(x_1)\delta + f(x_2)\delta + f(x_3)\delta + \dots + f(x_{n-1})\delta.$$

Це — інтегральна сума. Функція $f(x_i)$ — площа перерізу, проведеного через точку x_i площиною, перпендикулярною до осі x .

Якщо абсцису x_i має точка C на поверхні кулі, то $f(x_i)$ — площа круга радіуса CM .

З прямокутного трикутника OCM маємо:

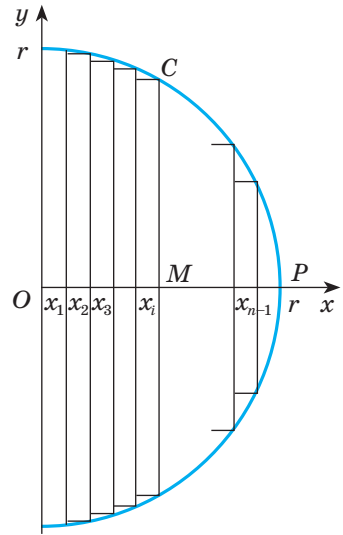
$$CM^2 = r^2 - x_i^2.$$

Тому $f(x_i) = \pi(r^2 - x_i^2)$. Отже, об'єм півкулі радіуса r

$$\int_0^r \pi(r^2 - x^2) dx = \left(\pi r^2 x - \frac{\pi x^3}{3} \right) \Big|_0^r = \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3.$$

Об'єм кулі, відповідно, вдвічі більший.

Отже, маємо формули для визначення об'єму піраміди, конуса і кулі.



Мал. 269

| Піраміда | Конус | Куля |
|--|-----------------------------|---------------------------|
| | | |
| $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$ | $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ | $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ |

Виконаємо разом

- 1) Знайдіть об'єм правильного октаедра, ребро якого дорівнює a .

Розв'язання. Правильний октаедр $PABCDK$ — об'єднання двох рівних правильних пірамід: $PABCD$ і $KABCD$ (мал. 270). Їх спільна основа — квадрат $ABCD$, площа якого $S = a^2$; $PK = a\sqrt{2}$ як діагональ квадрата $APCK$ зі стороною a .

Шуканий об'єм:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot PO + \frac{1}{3} S \cdot KO = \frac{1}{3} S \cdot PK = \frac{1}{3} a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3.$$

- 2) Знайдіть об'єм трикутної піраміди, якщо кожне її бічне ребро дорівнює a , а плоскі кути при вершині — 60° , 90° і 90° .

Розв'язання. Візьмемо за основу піраміди її грань, яка є рівностороннім трикутником.

Її площа $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, а висота піраміди — a . Тому об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{12} a^3.$$

- 3) Доведіть, що коли многогранник, описаний навколо кулі радіуса r , має площу поверхні S , то його об'єм $V = \frac{1}{3} Sr$.

Розв'язання. Сполучимо центр кулі з кожною вершиною описаного n -гранника, дістанемо n пірамід. Висота кожної з них дорівнює r , а площа основи — площі відповідної грані даного многогранника. Тому, якщо S_1, S_2, \dots, S_n — площі граней описаного многогранника, то його об'єм

$$V = \frac{1}{3} S_1 r + \frac{1}{3} S_2 r + \dots + \frac{1}{3} S_n r = \frac{1}{3} r (S_1 + S_2 + \dots + S_n) = \frac{1}{3} Sr.$$

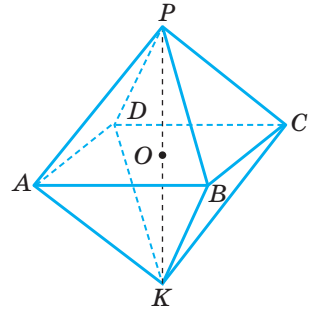
Пригадайте аналогічну планиметричну властивість.

- 4) Знайдіть об'єм кулі, вписаної в правильну трикутну піраміду, сторона основи якої — a , а двогранний кут при ребрі основи — α .

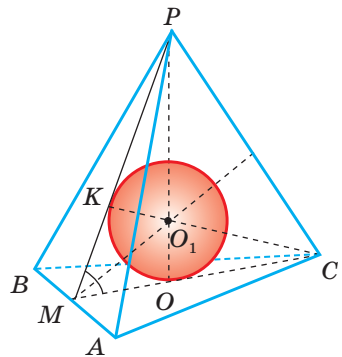
Розв'язання. Центр O_1 кулі, вписаної в правильну трикутну піраміду $PABC$, лежить на її висоті PO (мал. 271).

Куля дотикається до бічної грані PAB у деякій точці K , яка лежить на апофемі піраміди PM .

Якщо $AB = a$, то $OM = \frac{1}{3} MC = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, як радіус кола, описаного навколо рівностороннього $\triangle ABC$.



Мал. 270



Мал. 271

Оскільки $\triangle O_1OM = \triangle O_1KM$, то $\angle O_1MO = \frac{1}{2} \angle PMO = \frac{\alpha}{2}$.

З прямокутного трикутника MOO_1 знаходимо радіус кулі:

$$OO_1 = OM \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} a \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

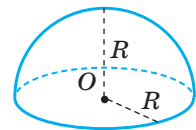
Отже, об'єм кулі

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot OO_1^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6} a \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54} \pi a^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$$

Виконайте усно

940. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, у якій сторона основи дорівнює 5 см, а висота — 4 см.
941. Знайдіть об'єм трикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см, а гіпотенуза дорівнює висоті піраміди.
942. Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 3 см, а радіус основи — 1 см.
943. (ЗНО, 2018). Укажіть формулу для обчислення об'єму V півкулі радіуса R (мал. 272).

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------|---------------------------|---------------|----------------|---------------------------|
| $V = 4\pi R^2$ | $V = \frac{2}{3} \pi R^3$ | $V = \pi R^3$ | $V = 2\pi R^2$ | $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ |



Мал. 272

А

944. Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 2 м, а твірна утворює з площиною основи кут 45° .
945. Знайдіть об'єм конуса, твірна якого дорівнює 5 см, а висота — 3 см.
946. Чому дорівнює об'єм кулі радіуса 2 см?
947. Як зміниться об'єм кулі, якщо її діаметр збільшити у 2 рази?
948. Знайдіть радіус кулі, якщо її об'єм дорівнює 36π см³.
949. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює h , а діагональ основи — d .
950. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, кожне ребро якої дорівнює 1 дм.
951. Знайдіть об'єм піраміди Хеопса, якщо площа її основи дорівнює 5,3 га, а висота — 147 м.
952. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює b , а плоский кут при вершині — 90° .

953. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні, а їх довжини дорівнюють a , b , c . Знайдіть об'єм піраміди.
954. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює b та утворює:
- з площиною основи кут α ;
 - з висотою піраміди кут β ;
 - зі стороною основи піраміди кут φ .
955. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює a і:
- двогранний кут при ребрі основи дорівнює α ;
 - бічне ребро утворює з площиною основи кут β ;
 - плоский кут при вершині піраміди дорівнює φ .
956. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 6 см, а бічне ребро — 5 см.
957. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює a і:
- двогранний кут при ребрі основи дорівнює α ;
 - бічне ребро утворює з площиною основи кут β ;
 - плоский кут при вершині піраміди дорівнює φ .
958. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α .
- ☑ 959. (ЗНО, 2018). Установіть відповідність між геометричним тілом (1–4) і його об'ємом (А–Д).

- Циліндр, діаметр основи та висота якого дорівнюють a (мал. 273)
- Конус, діаметр основи та висота якого дорівнюють a (мал. 274)
- Куля, діаметр якої дорівнює a (мал. 275)
- Правильна трикутна призма, сторона основи та бічне ребро якої дорівнюють відповідно a і $\frac{\pi a}{2}$ (мал. 276)

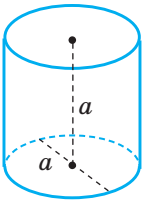
А $\frac{1}{6} \pi a^3$

Б $\frac{1}{12} \pi a^3$

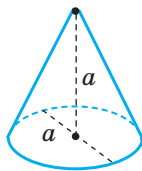
В $\frac{1}{4} \pi a^3$

Г $\frac{\sqrt{3}}{8} \pi a^3$

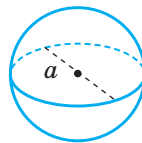
Д $\frac{1}{3} \pi a^3$



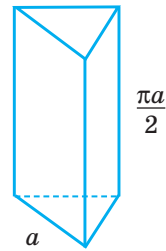
Мал. 273



Мал. 274



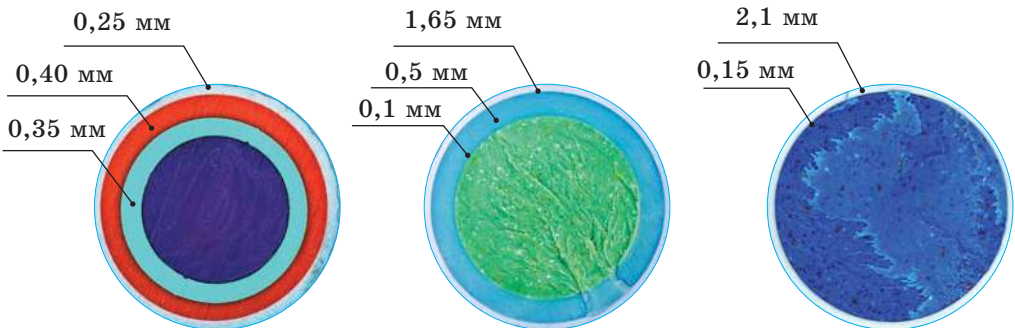
Мал. 275



Мал. 276

960. Свинцевий конус, висота якого дорівнює 18 см, переплавили в циліндр з такою самою основою. Знайдіть висоту циліндра.

961. Купа щебеню має форму конуса, твірна якого — 4 м. Знайдіть її об'єм, якщо кут природного укосу для щебеню — 30° .
962. Маємо два конуси однакового зерна одного сорту: один удвічі вищий за другий. У скільки разів у першому конусі більше зерна, ніж у другому?
963. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник з катетом $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм конуса.
964. Осьовий переріз конуса — рівносторонній трикутник. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його поверхні дорівнює 12π см².
965. Чому дорівнює об'єм кулі, вписаної в куб, об'єм якого дорівнює 8 м³?
966. Знайдіть висоту циліндра, у який вписано кулю об'ємом $\frac{4}{3}\pi$ см³.
967. Знайдіть об'єм кулі, діаметр якої дорівнює 4 дм.
968. Площа поверхні кулі дорівнює 16π см². Знайдіть об'єм цієї кулі.
969. Ребро куба дорівнює a . Знайдіть об'єми вписаної та описаної кулі.
970. Як відносяться об'єми двох куль, якщо їх радіуси відносяться як 2 : 3?
971. Скільки кульок діаметра 0,6 см можна відлити зі шматка свинцю масою 1 кг? Густина свинцю — $11,4$ кг/дм³.
972. Діаметр одного кавуна вдвічі більший за діаметр другого. У скільки разів перший кавун важчий за другий?
973. Пересипаючи пісок з порожнистої півкулі радіуса r у конус, радіус і висота якого дорівнюють r , ученя дійшов висновку, що об'єм півкулі у 2 рази більший за об'єм конуса. Чи відповідає результат цього експерименту теорії?
974. Гольф — це одна з небагатьох спортивних ігор, яка ґрунтується на принципах чесності. Змагання з гольфу пройшли на трьох літніх Олімпійських іграх — у 1900, 1904 і 2016 роках. Для гри в гольф використовують м'ячі складної конструкції діаметром 4,5 см (мал. 277). Знайдіть об'єм м'яча та кожної його частини для кожного з малюнків.



Мал. 277

Для обчислень скористайтеся програмою Excel чи іншим калькулятором.

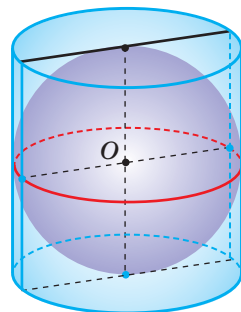
Б

975. За бічним ребром b і плоским кутом 2α при вершині піраміди знайдіть об'єм правильної піраміди: а) чотирикутної; б) трикутної; в) шестикутної.
976. Знайдіть об'єм правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a .
977. Основа піраміди — паралелограм зі сторонами a , b і кутом φ . Висота піраміди — h . Знайдіть об'єм піраміди.
978. Основа піраміди — трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Двогранні кути при кожному ребрі основи дорівнюють по 45° . Знайдіть об'єм піраміди.
- ✓ 979. (ЗНО, 2007). Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см і нахилена під кутом 60° до площини основи. Знайдіть об'єм піраміди.
980. Через вершину конуса проведено площину під кутом 45° до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді a , яку видно з центра основи під кутом 60° . Знайдіть об'єм конуса.
981. Визначте об'єм конуса, якщо в його основі хорда t стягує дугу φ , а кут між твірною і висотою дорівнює α .
982. З центра основи конуса до твірної проведено перпендикуляр завдовжки d . Знайдіть об'єм конуса, якщо цей перпендикуляр утворює з площиною основи кут α .
983. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник зі стороною 6 см. Знайдіть об'єм вписаної в цей конус правильної піраміди: а) чотирикутної; б) трикутної.
984. Доведіть теорему Архімеда: об'єм кулі в 1,5 рази менший за об'єм описаного навколо неї циліндра.
985. З циліндра, осьовий переріз якого — квадрат зі стороною 10 см, коваль викував кулю. Знайдіть радіус цієї кулі.
986. Зі свинцевої кулі радіуса 10 см зробили циліндричний диск завтовшки 3 см. Знайдіть діаметр диска.
987. Кут в осьовому перерізі кульового сектора дорівнює 60° . Знайдіть відношення об'єму кульового сектора до об'єму відповідного конуса.
988. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо конуса, твірна якого дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α .
989. Навколо кулі описано правильну чотирикутну піраміду, кожна з бічних граней якої утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм кулі, якщо висота піраміди дорівнює h . Обчисліть для $h = 9$ см, $\alpha = 60^\circ$.
990. Із циліндра, висота якого дорівнює діаметру, виточили кулю найбільшого об'єму. Скільки відсотків матеріалу сточено?
991. Маса порожнистої чавунної кулі — 1,57 кг, її зовнішній діаметр — 10 см. Знайдіть внутрішній діаметр, якщо густина чавуну $7,3$ кг/дм³.
992. Якою має бути загальна маса космічного апарата, що має форму кулі радіуса 1 м, щоб він не тонує у воді?

993. З краплини мильного розчину діаметра 6 мм хлопчик видув бульбашку діаметра 30 см. Знайдіть товщину плівки цієї бульбашки.

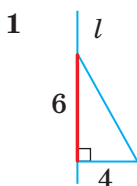
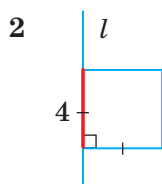
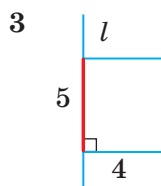
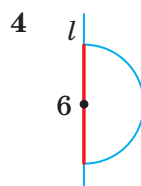
994. (ЗНО, 2008). У склянку циліндричної форми, наповнену водою по самі вінця, поклали металеву кульку, що дотикається до дна склянки та стінок (мал. 278). Визначте відношення об'єму води, яка залишилася у склянці, до об'єму води, яка вилася зі склянки.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------|-----------|-------|-------|-------|
| 1 : π | 2 : π | 1 : 2 | 2 : 3 | 1 : 3 |



Мал. 278

995. Установіть відповідність між плоскими фігурами (1–4) і числовими виразами (А–Г), що виражають об'єми тіл, утворених внаслідок обертання цих фігур навколо прямої l .

А 32π Б 36π В 64π Г 80π

Самостійна робота 6

ВАРІАНТ 1

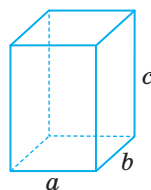
- Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, висота якої дорівнює 10 см, а сторона основи — 5 см.
- Знайдіть об'єм конуса, твірна якого дорівнює 6 см і утворює кут 30° з його висотою.
- Об'єм кулі дорівнює 36π см³. Знайдіть її діаметр.
- Намалюйте кулю, вписану у правильний тетраедр.

ВАРІАНТ 2

- Знайдіть об'єм циліндра, висота якого дорівнює 7 см, а радіус основи — 5 см.
- Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 6 см і утворює з її висотою кут 45° .
- Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайдіть її об'єм.
- Намалюйте сферу, описану навколо правильного октаедра.

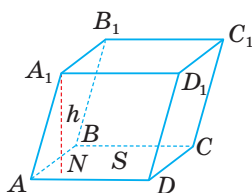
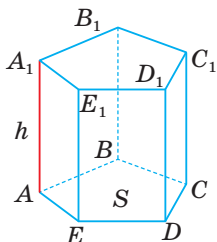
Скарбничка досягнень і набутих компетентностей

- ✓ Розумію, що таке тіла обертання — *циліндр, конус, куля*.
- ✓ Умію визначати об'єми і поверхні тіл обертання та многогранників.
- ✓ Знаю, що *об'єм прямокутного паралелепіпеда* дорівнює добутку трьох його вимірів a, b, c , або добутку площі його основи S на висоту h :



$$V = abc \quad \text{або} \quad V = Sh.$$

- ✓ Знаю, що *об'єм призми* дорівнює добутку площі основи на висоту:



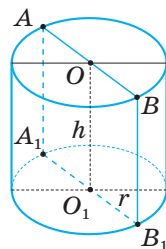
$$V = Sh$$

- ✓ Знаю, що *об'єм циліндра* дорівнює добутку площі його основи S на висоту h .

$$V = Sh$$

Якщо радіус циліндра r , а висота h , то його об'єм

$$V = \pi r^2 h$$



- ✓ Знаю та умію використовувати формули для знаходження *об'єму піраміди, конуса і кулі*.

| Піраміда | Конус | Куля |
|--|-----------------------------|---------------------------|
| | | |
| $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$ | $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ | $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ |

- ✓ Знаю та умію використовувати формули для знаходження *площі поверхні* циліндра, конуса, зрізаного конуса і кулі.

| Циліндр | Конус | Зрізаний конус | Куля |
|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------|---------------------------|
| $S_6 = 2\pi r h$ | $S_6 = \pi r l$ | $S_6 = \pi l(r_1 + r_2)$ | $S_{\text{п}} = 4\pi r^2$ |
| $S_{\text{п}} = 2\pi r(r + h)$ | $S_{\text{п}} = \pi r(r + l)$ | | |

- ✓ Знаю співвідношення між одиницями виміру об'єму:

$$1 \text{ см}^3 = 1000 \text{ мм}^3$$

$$1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ дм}^3$$

$$1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3$$

$$1 \text{ м}^3 = 1\,000\,000 \text{ см}^3$$

Історичні відомості

Об'єми деяких многогранників уміли знаходити ще в Стародавньому Єгипті. В одному папірусі, який дійшов до наших днів, крім інших, розв'язується задача про визначення об'єму зрізаної чотирикутної піраміди з висотою 6 і сторонами основи 4 і 2.

Тіла обертання були відомі ще давньогрецьким геометрам. Назви «циліндр», «конус», «сфера» — грецького походження. В «Основах» Евкліда їх зміст описано такими фразами: «Циліндр походить від обертання прямокутника навколо нерухомої сторони»; «Конус описано прямокутним трикутником, який обертається навколо нерухомої перпендикулярної сторони»; «Сферу описано півкругом, який обертається навколо нерухомого діаметра». Як бачимо, стародавні греки сферою називали не поверхню кулі, а всю кулю. Розрізняти ці два поняття стали пізніше.

Евклід не застосовував терміну «об'єм». Для нього термін «куб», наприклад, означає й об'єм куба. У XI книзі «Начал» наводяться теореми про порівняння об'ємів паралелепіпедів.

Архімед умів знаходити об'єми навіть параболоїда, гіперболоїда й еліпсоїда обертання, а також площі поверхонь циліндра, конуса, кулі. Про свої відкриття Архімед писав математику Досіфею: «Я довів, що поверхня всякої кулі в чотири рази більша від площі її великого круга, що об'єм циліндра, основа якого дорівнює площі великого круга кулі, а висота — діаметру кулі, в півтора рази більший від об'єму цієї кулі, а його поверхня (включаючи і площі основ) у півтора рази більша від поверхні кулі». Ці відкриття Архімед вважав дуже важливими і висловлював бажання, щоб на його могилі встановили пам'ятник, на якому був би зображений циліндр з вписаною в нього кулею.

Нові методи визначення об'ємів геометричних тіл розробив італійський математик Б. Кавальєрі (1598–1647). Його міркування були нестрогими, інтуїтивними, бо посилався він на ще не доведені твердження, які вважав очевидними. Тільки згодом їх було доведено методами математичного аналізу.



Анрі Луї Лебег
(1875–1941)

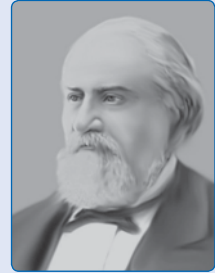
Французький математик, доктор філософії. Один із засновників сучасної теорії функцій, створив теорію міри, ввів нове розуміння інтеграла — інтеграл Лебега. Нове поняття інтеграла дає можливість інтегрувати досить широкий клас функцій, а отже, розв'язувати багато важливих прикладних задач. З проблем середньої школи опублікував книги «Лекції про геометричні побудови», «Конічні перерізи», «Про вимірювання величин».

Історичні відомості

Строгу сучасну теорію об'ємів, площ та інших величин розробив відомий французький математик А. Лебег (1875–1941). На основі загального поняття міри він запровадив нове, загальніше, поняття інтеграла, який тепер називають інтегралом Лебега.

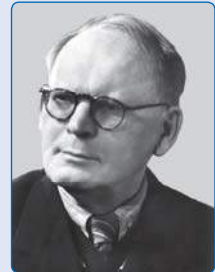
Михайло Ващенко-Захарченко (1825–1912)

Народився в с. Маліївці на Полтавщині. Навчався в Києві і Парижі, був професором Київського університету. Досліджував питання історії розвитку геометрії, надрукував кілька посібників з геометрії, переклав з грецької «Начала» Евкліда.



Олександр Смогоржевський (1896–1969)

Народився в с. Лісовому на Вінниччині. Навчався в Немирові, Києві, був професором Київського політехнічного інституту. Досліджував питання, пов'язані з геометричними побудовами, надрукував кілька посібників і підручників, зокрема підручник з основ геометрії для студентів університетів. Його праці перекладено англійською, болгарською, чеською, японською та деякими іншими мовами.



Значний внесок у розвиток геометричної науки зробили українські математики М. Є. Ващенко-Захарченко (1825–1912), С. Й. Шатуновський (1859–1929), О. С. Смогоржевський (1896–1969), М. І. Кованцов (1924–1988), О. В. Погорелов (1919–2002) та багато інших.

Як бачимо, більшість властивостей геометричних фігур, які вивчаються у сучасній школі, були відомі й дві тисячі років тому. З часом їх доповнювали новими відкриттями, передавали від покоління до покоління, тому що ці відомості дуже потрібні людям. У наш час геометрія ще більш потрібна. Не можна не погодитися з думкою відомого архітектора Ле Корбюзьє: «Ніколи ще до цього часу ми не жили у такий геометричний період. Варто поміркувати про минуле, пригадати те, що було й раніше, і ми будемо приголомшені, побачивши, що оточуючий нас світ — це світ геометрії, чистий, істинний, бездоганний у наших очах. Усе навкруги — геометрія».

ТЕМАТИЧНІ ТЕСТИ

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 1–12 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

- 1 Чому дорівнює площа бічної поверхні циліндра, діаметр основи якого дорівнює 4 см, а твірна — 9 см?

| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 108 см ² | 72л см ² | 36л см ² | 24л см ² | 12л см ² |

- 2 Обчисліть об'єм циліндричної бляшанки, осьовим перерізом якої є квадрат зі стороною 12 см.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 144л см ³ | 96л см ³ | 432л см ³ | 256л см ³ | 512л см ³ |

- 3 Знайдіть об'єм циліндра, якщо площа його основи дорівнює 9л см², а площа бічної поверхні — 20л см².

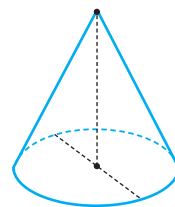
| А | Б | В | Г | Д |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 60л см ³ | 30л см ³ | 15л см ³ | 20л см ³ | 27л см ³ |

- 4 Знайдіть об'єм циліндра, якщо розгортка його бічної поверхні — квадрат, периметр якого дорівнює 40 см.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------------|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------|
| 250л см ³ | $\frac{1000}{\pi}$ см ³ | $\frac{250}{\pi}$ см ³ | $\frac{100}{\pi}$ см ³ | 100л см ³ |

- 5 Твірна конуса дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

| А | Б | В | Г | Д |
|----------------|-----------------|-----|-----|----|
| $8\pi\sqrt{3}$ | $16\pi\sqrt{3}$ | 16л | 12л | 8л |



- 6 Знайдіть висоту конуса, радіус основи якого дорівнює 8 см, а площа повної поверхні — 144л см².

| А | Б | В | Г | Д |
|-------|------|------|------|------|
| 10 см | 4 см | 5 см | 6 см | 8 см |

- 7 Прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 6 см, а один із гострих кутів дорівнює 30°, обертається навколо більшого катета. Знайдіть радіус основи конуса, утвореного внаслідок цього обертання.

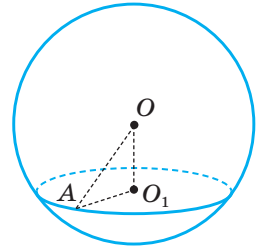
| А | Б | В | Г | Д |
|----------------|------|----------------|------|------|
| $3\sqrt{2}$ см | 3 см | $3\sqrt{3}$ см | 6 см | 2 см |

- 8 Площа поверхні однієї кулі дорівнює 393 см^2 . Знайдіть площу поверхні іншої кулі, у якій радіус у $\sqrt{3}$ разів менший, ніж у даної.

| А | Б | В | Г | Д |
|--------------------|----------------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| 131 см^2 | $131\sqrt{3} \text{ см}^2$ | 140 см^2 | 50 см^2 | 121 см^2 |

- 9 У кулі з центром O , зображеній на малюнку, проведено переріз з центром O_1 на відстані 12 см від центра кулі. Знайдіть радіус кулі, якщо радіус перерізу дорівнює 9 см .

| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 10 см | 12 см | 21 см | 15 см | 13 см |



- 10 У циліндр вписано кулю. Знайдіть відношення об'єму циліндра до об'єму кулі.

| А | Б | В | Г | Д |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| $3 : 2$ | $3 : 4$ | $2 : 1$ | $4 : 1$ | $4 : 3$ |

- 11 Дві сфери, діаметри яких дорівнюють 8 см і 16 см , мають внутрішній дотик. Знайдіть відстань між центрами цих сфер.

| А | Б | В | Г | Д |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 2 | 4 | 8 | 6 | 3 |

- 12 В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см . Площа бічної поверхні призми дорівнює 96 см^2 . Знайдіть об'єм призми.

| А | Б | В | Г | Д |
|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| 192 см^3 | 384 см^3 | 48 см^3 | 96 см^3 | 108 см^3 |

«Сьогодні математика стала одним із могутніх стовпів, на яких виростають величні будівлі. Без неї й не подумати про облік у колосальному виробництві, про будову каналів і гребель, про раціональне планування транспорту, про польоти в Космос».

Микола Чайковський

ДОДАТКИ

Додаткові завдання¹

Числові вирази і функції, рівняння та нерівності

996. Спростіть вираз:

а) $\frac{6x^2 - 9x}{2x - 3}$; в) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$; г) $\frac{a^2 - 9}{2a^2 + 7a + 3}$;

б) $\frac{x^2 - 16}{x + 4} + 4$; г) $\frac{3x - 9}{2x^2 - 5x - 3}$; д) $\frac{c^2 - 8c - 20}{c^2 - 11c + 10}$.

997. Знайдіть два числа, якщо:

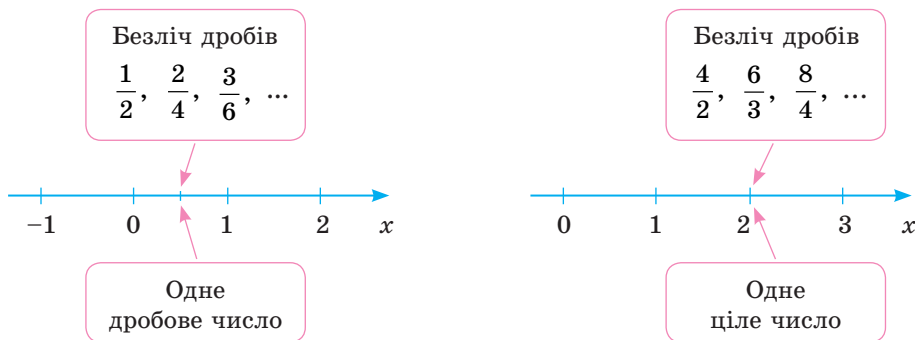
- а) їх сума дорівнює 98, а різниця — 14;
 б) їх сума дорівнює 108, а різниця квадратів — 216;
 в) їх добуток дорівнює 105, а різниця — 8.

998. Яке з чисел більше: а) 4^3 чи 3^4 ; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ чи $\left(\frac{4}{9}\right)^3$?

999. Доведіть, що:

а) $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + 2$; б) $\frac{2}{6+\sqrt{34}} = 6 - \sqrt{34}$.

1000. Розглядаючи малюнок 279, поясніть, чим відрізняються поняття «дріб» і «дробове число».



Мал. 279

1001. На скільки добуток чисел $\frac{2}{5}$ і 2,1 більший чи менший за їх суму?

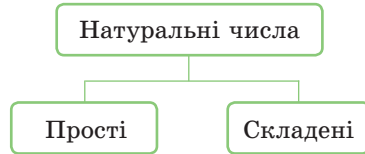
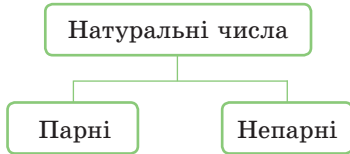
1002. Послідовність 3, 5, 7, 9, ... — арифметична прогресія. Знайдіть її різницю, 20-й член і суму перших 20 членів.

1003. Послідовність 3, 6, 12, 24, ... — геометрична прогресія. Знайдіть її знаменник, 10-й член і суму перших 10 членів.

1004. Знайдіть суму всіх двоцифрових натуральних чисел.

¹ Деякі завдання пропонуються для повторення матеріалу попередніх класів.

1005. Знайдіть: а) 12 % від числа 350; б) 3,5 % від 34 га.
 1006. Знайдіть число, 15 % якого становлять 8,7.
 1007. Одна подія відбулась у IV ст. до н. е., а друга — у XVIII ст. Скільки століть минуло між подіями?
 1008. Чи правильні схеми?

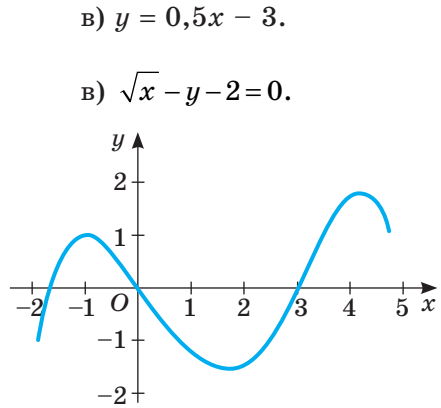


1009. Побудуйте графік функції:
 а) $y = 0,5x$; б) $y = 0,5x + 2$;

1010. Побудуйте графік рівняння:

а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $x^2 - y = 3$;

1011. Функцію $y = f(x)$ задано графічно (мал. 280). Укажіть її область визначення, проміжки зростання або спадання. На яких проміжках значення цієї функції додатні, на яких — від'ємні?



Мал. 280

1012. Парною чи непарною є функція:
 а) $y = 2 + x^2$; б) $y = 3 - x^2$?

1013. Побудуйте графік функції:

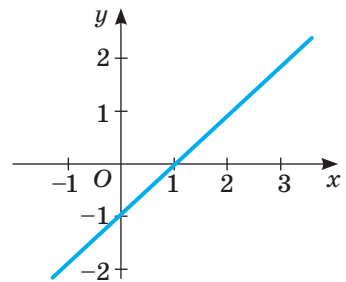
а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x+2}$.

1014. Задайте формулою пряму пропорційність, графік якої проходить через точку $A(1; 3)$.

1015. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої проходить через точки $A(4; 2)$ і $B(-4; -2)$.

1016. Задайте формулою функцію, графік якої зображено на малюнку 281.

1017. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = \frac{2}{3}x$ і $y = 5 - x$.



Мал. 281

1018. Чи є міра кута при основі рівнобедреного трикутника функцією міри його кута при вершині? Яка її область визначення?

1019. При яких значеннях аргументу x значення функції $y = (x + 7)^2$ найменше? Знайдіть найменше значення даної функції.

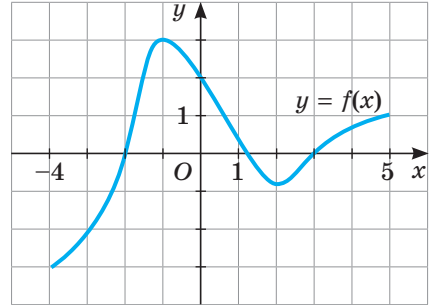
1020. Знайдіть найменше значення виразу:

а) $(x - 3)^2 + 5$; б) $x^2 - 2x + 1$.

1021. Знайдіть найбільше значення функції $y = 1 - (x + 3)^4$.

1022. Сформулюйте два речення, у яких слово «функція» має різні значення.

1023. Сформулюйте два речення з омонімами: а) «аргумент»; б) «куб»; в) «гіпербола»; г) «відношення».
1024. Назвіть синоніми до термінів: «відсоток», «півпряма», «правильний чотирикутник».
- ✓ 1025. (ЗНО, 2018). На малюнку 282 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Точка $(x_0; -2)$ належить графіку цієї функції. Визначте абсцису x_0 цієї точки.



Мал. 282

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|----|----|
| 3 | 2 | 0 | -2 | -3 |

1026. Що більше: а) $\sin 1^\circ$ чи $\sin 3^\circ$; б) $\sin 1$ чи $\sin 3$?
1027. Які з чисел $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$: а) менші за 1; б) більші за 2?
1028. Які з чисел $\sin 2, \cos 2, \operatorname{tg} 2, \sin 3, \cos 3$ від'ємні?
1029. Заповніть таблицю.

| α | 0 | π | 2π | 3π | 4π | 5π |
|----------------------------|---|-------|--------|--------|--------|--------|
| $\sin \alpha$ | | | | | | |
| $\cos \alpha$ | | | | | | |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | | | | | | |

1030. За якої умови: а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = 0$; в) $\operatorname{tg} x = 1$?
1031. За якої умови $\operatorname{tg} x$ не існує?
1032. Знайдіть найменші додатні розв'язки рівняння:
а) $\sin x = 0,5$; б) $\cos x = 0,5$; в) $\operatorname{tg} x = -1$.
1033. Знайдіть значення виразу:
а) $\sin x \cdot \cos x$, якщо $x = \frac{\pi}{6}$; б) $\sin x + \cos x$, якщо $x = \frac{\pi}{4}$.
1034. Спростіть вираз:
а) $1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$; б) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$; в) $\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$; г) $\sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1$.
1035. Доведіть тотожність:
а) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$; б) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;
в) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$; г) $\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin \alpha$.
1036. Доведіть формули:
а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$;
б) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.

1037. Знаючи, що $\sin \frac{\pi}{6} = 0,5$, обчисліть $\cos \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$.

1038. Обчисліть значення функції:

а) $\cos x$ і $\operatorname{tg} x$, якщо $\sin x = 0,6$ і $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

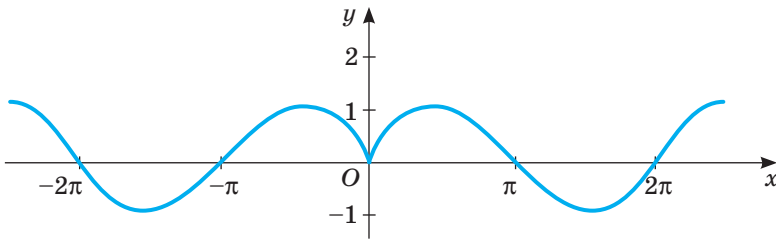
б) $\sin x$ і $\operatorname{tg} x$, якщо $\cos x = -0,8$ і $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

1039. Покажіть, що рівність $\sin 2x = 2\sin x$ правильна не при всіх значеннях x . А рівність $\cos 3x = 3\cos x$?

1040. Як, маючи графік функції $y = \sin x$, одержати графіки функцій $y = -\sin x$ і $y = 1 - \sin x$?

1041. Як, маючи графік функції $y = \cos x$, одержати графік функції $y = |\cos x|$?

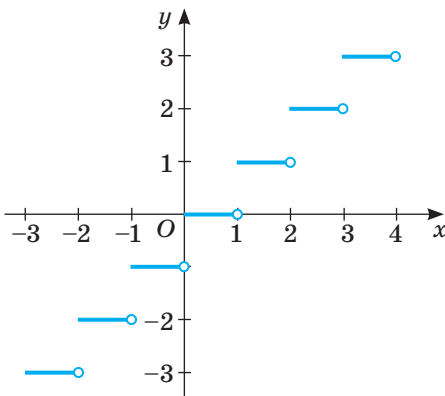
1042. Чи є періодичною функція, графік якої зображено на малюнку 283?



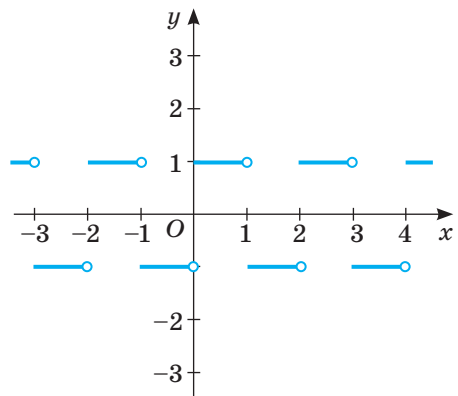
Мал. 283

1043. Чому функція $y = x + \sin x$ не періодична?

1044. Найбільше ціле число, яке не перевищує x , позначають символом $[x]$. Чи є періодичними функції $y = [x]$ і $y = (-1)^{[x]}$, графіки яких зображені на малюнках 284 і 285?



Мал. 284



Мал. 285

1045. Побудуйте графік функції $y \cdot x - [x]$.

1046. Обчисліть: 2^{-3} , 3^{-2} , $8 \cdot 2^{-4}$, $25 \cdot 5^{-3}$, $3^5 \cdot 3^{-5}$.

1047. Заповніть таблицю.

| α | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---------------|----|----|----|---|---|---|---|
| α^{-1} | | | | | | | |
| α^{-2} | | | | | | | |
| α^{-3} | | | | | | | |

1048. Знайдіть значення виразу x^5x^{-2} , якщо $x = -3$.

1049. Спростіть вираз:

а) $(a^{-1} + 3)(a^{-1} - 3)$; б) $(x^{-2} - c^{-1})c^2x^2$.

1050. Обчисліть: $8^{\frac{2}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $16^{0,5}$, 49^0 , $27^{-\frac{1}{3}}$.

1051. Обчисліть за допомогою мікрокалькулятора:

а) $34^{0,8}$; б) $2,3 \cdot 3,8^{-2}$; в) $7,8^{-2} : 0,4^{2,3}$.

1052. Запишіть за допомогою коренів: $m^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, $(ab)^{0,5}$, $p^{0,2}$.

1053. Запишіть за допомогою степенів: \sqrt{x} , $\sqrt[3]{c}$, $\sqrt[3]{xz}$, $\sqrt[5]{2}$.

1054. Обчисліть:

а) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{20}$; в) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt{3}$.

1055. Спростіть вираз:

а) $(\sqrt{x} - c)(\sqrt{x} + c)$; в) $(\sqrt[4]{2} + 1) : \frac{1}{\sqrt[4]{2} - 1}$;

б) $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt[4]{a} - 1)$; г) $1 : (\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

1056. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x-2} = 3$; в) $(x+1)^{0,5} = 1$;

б) $\sqrt[3]{x-4} = 2$; г) $(3-x)^{\frac{1}{3}} = 1$.

1057. Чи є степеневу функція:

а) $y = x^3$; б) $y = x^{-2}$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \sqrt[4]{x}$?

1058. Побудуйте на проміжку $[-2; 2]$ графік функції:

а) $y = x^{-1}$; б) $y = x^{0,5}$; в) $y = \sqrt[3]{x}$; г) $y = -\sqrt[3]{x}$.

1059. Чи правильно, що рівності $y = x^{0,5}$ і $y = \sqrt[4]{x}$ задають одну й ту саму функцію?

1060. Функція $y = f(x)$ степенева. Чи є степеневу функція $y = 1 + f(x)$?

1061. Чи проходить графік функції $y = \sqrt[3]{x}$ через точку $A(27; 3)$? А через точку $B(-8; -2)$?

1062. Графік функції $y = kx^3$ проходить через точку $M(2; 16)$. Чому дорівнює k ?

1063. Графік функції $y = kx^{-2}$ проходить через точку $P\left(\frac{1}{2}; 12\right)$. Чи проходить він через точку $K\left(\frac{1}{3}; 27\right)$?

1064. Чи є показниковою функція:

а) $y = x^5$; б) $y = 3^x$; в) $y = (\sqrt{2})^x$; г) $y = \pi^x$?

1065. Зростаючою чи спадною є функція: а) $y = 0,5^x$; б) $y = 1,5^x$?

1066. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2^x$ на проміжку $[-3; 3]$;

б) $y = 0,5^x$ на проміжку $[-4; 2]$.

1067. Чи правильно, що рівності $y = 2^{-x}$ і $y = 0,5^x$ задають одну й ту саму функцію? Чому?

Розв'яжіть рівняння (1068–1073).

1068. а) $3(x - 1) = 7x + 2$; в) $5x - 2x = 3(x - 2)$.

б) $3(3x - 5) = 5(2x - 3)$;

1069. а) $5x - 9 = 3(x - 2)$; в) $5(x + 2) + 3 = 1 - 7x$.

б) $3(x - 1) - x = 1 + 2x$;

1070. а) $x^2 - 7x + 10 = 0$; в) $y^2 + 4y - 60 = 0$; г) $\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{3}{x+1}$.

б) $y^2 - 2y - 35 = 0$; г) $\frac{x-4}{x+2} = \frac{x-2}{x+1}$;

1071. а) $8x^2 - 9x + 1 = 0$; в) $x^2 - 31x - 32 = 0$; г) $\frac{3x}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 5$.

б) $16x^2 = 625$; г) $x + \frac{2}{x} = 3$;

1072. а) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; в) $6x^4 - x^2 - 5 = 0$; г) $\frac{4x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = 4$;

б) $8x^6 - 27 = 0$; г) $\frac{x}{2x+1} + \frac{2x+1}{x} = 2$; д) $\frac{x-2}{x+3} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{2}$.

1073. а) $|5 - 2x| = 3$; в) $|9 - x^2| = 5$;

б) $|5x^2 - 3| = 2$; г) $5 + |x+3| = 2|x+3|$.

1074. Розв'яжіть графічно рівняння.

а) $x^3 = 2 - x$; б) $2x^2 = -x + 3$; в) $x^3 = x^{-1}$; г) $x^2 = \sqrt{x}$.

Знайдіть корені рівняння (1075–1078).

1075. а) $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$; в) $\operatorname{tg}^2 x = \sqrt{3} \operatorname{tg} x$.

б) $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$;

1076. а) $4 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$; в) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{ctg} x$.

б) $\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$;

1077. а) $\sqrt{3x+10} = \sqrt{x^2+6x}$; в) $\sqrt[3]{x^2-1} = \sqrt[3]{2x+2}$.

б) $\sqrt{x^2-15} = \sqrt{5x-19}$;

1078. а) $\sqrt{x-3} = \sqrt{3x-7}$; б) $\sqrt{x^2-8} = \sqrt{4-x}$; в) $\sqrt[5]{2x+7} = \sqrt[5]{3x+12}$.

1079. Яке найбільше натуральне число є розв'язком нерівності:

а) $3(x + 3) > 5(x - 1)$; в) $10(x - 1) \leq 8 + 5x$;

б) $5(2x - 4) < 9x - 7$; г) $0,3(x - 2) > 0,5(x - 3) - 0,1$?

Розв'яжіть нерівність (1080–1083).

1080. а) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$;

б) $x^2 - x - 6 > 0$;

в) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$;

г) $4x^2 + 12x + 9 < 0$.

1081. а) $(x + 1)(5x + 1) > 0$;

б) $(x - 9)(2x + 3) \geq 0$;

в) $(2x - 7)(3x + 1) < 0$;

г) $(2x - 3)(3x - 9) > 0$;

г) $\frac{x+3}{x-7} > 0$;

е) $\frac{2+x}{x+3} < 0$;

д) $\frac{x}{x+2} > 0$;

е) $\frac{3-x}{x} < 0$.

1082. а) $\sqrt{x-5} > 6$;

б) $\sqrt{x+3} \leq 2$;

в) $\sqrt[3]{2x-1} < 3$;

г) $\sqrt{x^2-5x+4} < 2$.

1083. а) $|x+2| \leq 3$;

б) $|x-5| \geq 6$;

в) $|2x-3| > 7$;

г) $|2x+1| \geq x+3$.

Прямі та площини в просторі

1084. Наведіть приклади фігур, відмінних від геометричних.

1085. Чи становлять одну геометричну фігуру: а) дві пересічні площини;

б) дві паралельні площини?

1086. На скільки частин ділять простір: а) дві паралельні площини; б) дві пересічні площини?

1087. На скільки частин можуть поділити простір три площини?

1088. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $AA_1 = a$. Знайдіть відстань від точки A до:

а) точок C і C_1 ; б) площин BCC_1 і B_1BD .

1089. Намалюйте зображення куба і побудуйте його переріз площиною, яка проходить через два його протилежні ребра. Як відноситься площа цього перерізу до площі грані куба?

1090. Знайдіть відстань між точками $A(2; 3; 0)$ і $B(3; -2; 4)$.

1091. Знайдіть координати середини відрізка, який сполучає точки $K(-3; 2; 6)$ і $P(5; 8; 0)$.

1092. Дано точки $A(0; 0; 2)$, $B(-3; 0; 5)$ і $C(5; 6; 0)$. Знайдіть периметр трикутника ABC .

1093. Дано точки $A(3; 0; 6)$ і $C(2; -2; 5)$. Знайдіть координати векторів \overline{AC} і \overline{CA} .

1094. Знайдіть суму і різницю векторів $\vec{a} = (0; 1; 2)$ і $\vec{c} = (-3; 0; 5)$.

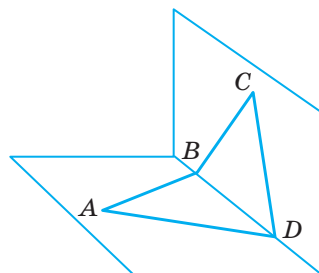
1095. $ABCD A$ — неплоска замкнена ламана (мал. 286). Чи справджуються для неї векторні рівності:

а) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{DC}$;

б) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \vec{0}$?

1096. $A(3; -1; 0; 2)$ і $B(-1; -3; -2; 0)$ — точки чотиривимірного простору. Знайдіть:

а) довжину відрізка AB ; б) координати векторів \overline{AB} і \overline{BA} .



Мал. 286

Похідна та інтеграл

1097. Знайдіть кутовий коефіцієнт графіка функції:

а) $y = 0,5^x - 4$; б) $y = 3(2 - x)$; в) $y = \frac{1}{3}(2x - 5)$.

1098. Яка функція швидше зростає: $y = 0,8x - 1$ чи $y = 0,7x + 5$?

1099. Визначте тангенс кута, утвореного графіком функції $y = 1 - 2x$ з додатним напрямом осі x .

1100. Чи правильно, що похідна функції $y = 3x - 8$ у кожній точці області її визначення дорівнює 3?

1101. Знайдіть похідну функції:

а) $y = 1,5x + 3$; б) $y = 3 - 2x$; в) $y = 0,5(2x - 3)$.

1102. Дано функцію $f(x) = x^2 - 5$. Обчисліть: $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(3)$.

1103. Дано функцію $f(x) = \sin x$. Обчисліть: $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'(-\pi)$.

1104. Знайдіть похідну функції:

а) $f(x) = 2x^3$; б) $f(x) = x^6 - 3x^2$; в) $f(x) = (x^2 - 1)x^3$.

1105. Знайдіть критичні точки функції:

а) $f(x) = x^5 - 5x$; б) $f(x) = x^4 - 0,5x$.

1106. Визначте проміжки зростання та проміжки спадання функції:

а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5$; б) $f(x) = 8 + 6x^2 - 3x^4$.

1107. Знайдіть точки максимуму або мінімуму функції:

а) $f(x) = 3 + x - x^2$; б) $f(x) = x^3 - 4x + 5$.

1108. Чи правильно, що функція $y = x^5 + 3x$ зростає на всій області визначення?

1109. Покажіть, що функція $y = 10 + x^3$ спадає, якщо $x > 1$.

1110. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

а) $f(x) = x^3 - 12x$; б) $f(x) = 2x^3 - 6x^2$.

1111. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:

а) $f(x) = x^2 - 6x$ на проміжку $[-5; 0]$;
б) $f(x) = x^3 - 5x$ на проміжку $[-2; 3]$.

1112. Яке число в сумі з його квадратом має найменше значення?

1113. Знайдіть найменший діаметр кола, яке можна описати навколо прямокутника з периметром 20 см.

1114. З усіх правильних чотирикутних призм об'ємом 1 м^3 виберіть таку, площа поверхні якої найменша.

1115. Чи є первісною для функції x^3 функція: $3x^2$; $3x^2 - 8$?

1116. Знайдіть для функції x^2 таку первісну, графік якої проходить через точку $A(1; 9)$.

1117. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

а) $f(x) = x^3 + 2$; б) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

1118. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну $F(x)$, щоб:

а) $f(x) = x^2 - 1$ і $F(1) = 3$; б) $f(x) = 2 - x^3$ і $F(2) = 5$.

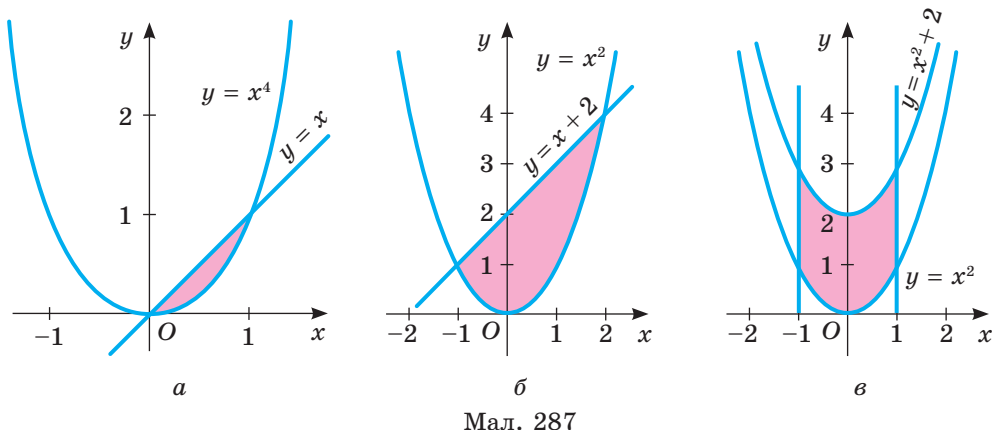
1119. Знайдіть площу підграфіка функції:

а) $y = x^2$ на проміжку $[0; 2]$; б) $y = 4 - x^2$ на проміжку $[-1; 1]$.

1120. Обчисліть інтеграл:

а) $\int_0^3 x^2 dx$; б) $\int_0^2 (x-1) dx$; в) $\int_1^3 (x^2 + x - 1) dx$.

1121. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 9 - x^2$ і віссю x .
1122. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 + 1$ і $y = 2x + 1$.
1123. Знайдіть площі фігур, заштрихованих на малюнку 287.



Геометричні тіла

1124. Скільки діагоналей має n -кутна призма?
1125. Кожне ребро правильної трикутної призми дорівнює 10 см. Знайдіть площу її бічної поверхні.
1126. Кожне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 2 дм. Знайдіть площу її поверхні.
1127. Чи може площа основи піраміди дорівнювати площі її бічної поверхні? Чому?
1128. Чи може перерізом куба бути прямокутний трикутник?
1129. Ребро правильного тетраедра дорівнює 4 см. Знайдіть площу його перерізу площиною, яка проходить через середину його ребра і паралельна одній грані.
1130. Осьовий переріз циліндра — квадрат зі стороною 12 см. Знайдіть площу поверхні цього циліндра.
1131. Циліндр утворено обертанням квадрата зі стороною a навколо його сторони. Знайдіть площу поверхні циліндра.
1132. Площа поверхні циліндра у 2 рази більша за площу бічної поверхні. Чи правильно, що висота цього циліндра дорівнює радіусу?
1133. Осьовий переріз конуса — рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 35 см. Знайдіть радіус основи та висоту цього конуса.
1134. Чи існує конус, площа поверхні якого у 2 рази більша за площу бічної поверхні?
1135. Площина, паралельна основі конуса, поділяє його висоту навпіл. У якому відношенні вона ділить: а) твірну конуса; б) площу бічної поверхні конуса?

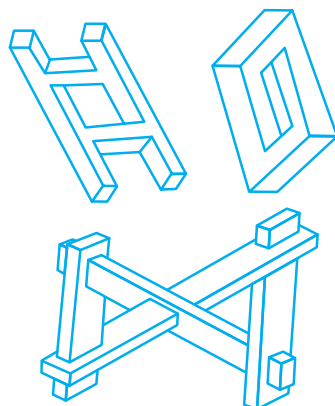
1155. *Задача Архімеда.* Об'єм і площа поверхні циліндра, описаного навколо кулі, в 1,5 разу більші за об'єм і площу поверхні кулі. Доведіть.

1156. *Задача Леонардо да Вінчі.* Площа основи якого циліндра дорівнює площі його бічної поверхні?

1157. Ви витрачаєте мило рівномірно. Через сім днів усі розміри шматка мила зменшились удвічі. На скільки днів вам ще вистачить цього шматка мила?

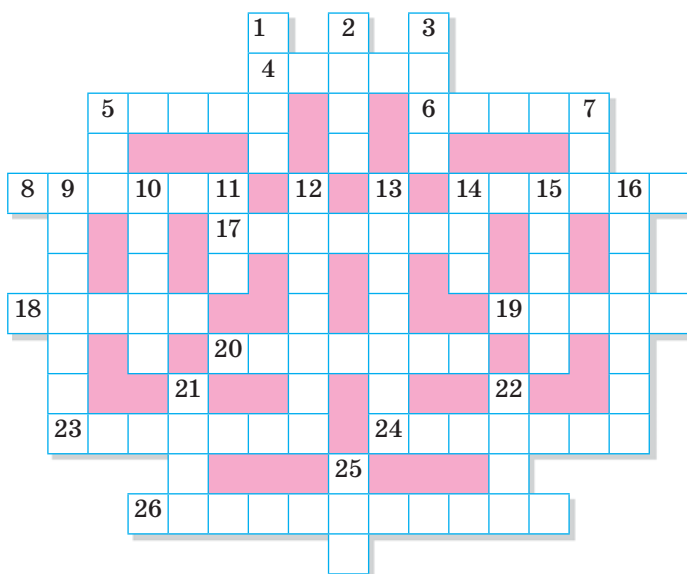
1158. Чи існують многогранники, зображені на малюнку 288?

1159. Розв'яжіть кросворд.



Мал. 288

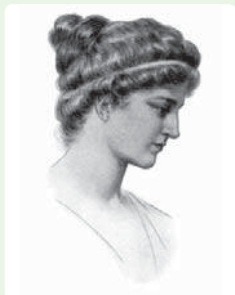
По горизонталі. 4. Геометрична величина. 5. Геометрична фігура. 6. Елемент многогранника. 8. Елемент кулі. 14. Напрявлений відрізок. 17. Твердження, яке доводять. 18. Місто, у якому жив давньогрецький математик Фалес. 19. Запис, складений із цифр, букв і знаків дій. 20. Компонент дії додавання. 23. Математична наука. 24. Тіло обертання. 26. Число, яке характеризує ступінь можливості виконання події.
По вертикалі. 1. Зменшення чого-небудь. 2. Геометрична фігура. 3. Двійка. 5. Давня одиниця маси. 7. Одиничний вектор. 9. Твердження, яке приймають без доведення. 10. Латинська буква. 11. Число. 12. Основне поняття диференціального числення. 13. Німецький математик XVII ст. 14. Одиниця потужності. 15. Малий куб. 16. Восьмигранник. 21. Певне число очок гри в теніс. 22. Відомий французький математик. 25. Просте число.



Теми для завдань творчого характеру

1. Що називають математикою?
2. Математика в системі інших наук
3. Піфагор і його школа
4. Геометрія тетраедра
5. Прості числа
6. Магічні квадрати
7. Що таке число e ?
8. Що називають алгеброю?
9. Число π
10. Перспектива в геометрії та мистецтві
11. Неевклідові геометрії
12. Що називають топологією?
13. Задачі Наполеона
14. Математика в Стародавній Греції
15. Математика в Європі до епохи Відродження
16. Омар Хайям — математик і поет
17. Декарт — математик і філософ
18. Ферма — математик і юрист
19. Паскаль і психологія моралі
20. Галуа — математик і політик
21. Геометрія і Марсельеза
22. Бібліотекар та історіограф Лейбніц
23. Ковалевська — математик і літератор
24. Математика і шахи
25. Що називають математичною логікою?
26. Як створювалася кібернетика?
27. Розвиток математики в Україні
28. Остроградський — математик і патріот
29. Імовірності
30. Клітини Вороного
31. Комбінаторні задачі та комбінаторика
32. Множини в сучасній математиці
33. Математика і романтика
34. Геометрія паркетів і орнаментів
35. Доля академіка М. Кравчука
36. Омоніми і синоніми в математиці
37. Математичні простори
38. Фрактали
39. Тілесні кути й стерadianи
40. Конічні перерізи
41. Статеві-вікові піраміди
42. Українська математична мова
43. Учнівські математичні олімпіади
44. Жіночі імена у науці.

Жінки-математики



Гіпатія Александрійська
(бл. 350–370–415)



**Августа Ада Кінґ,
графиня Лавлейс**
(1815–1852)



Еммі Амалі Нетер
(1882–1935)



Катерина Логвинівна Ющенко
(1919–2001)



Олена Степанівна Дубинчук
(1919–1994)



Зінаїда Іванівна Слєпкань
(1931–2008)

Довідковий матеріал²

Закони дій

$$\begin{aligned} a + b &= b + a; & (ab)c &= a(bc); \\ (a + b) + c &= a + (b + c); & a(b + c) &= ab + ac. \\ ab &= ba; \end{aligned}$$

Властивості дробів

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}; \quad \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}; \quad \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}; \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}.$$

Формули скороченого множення

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2; \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b); \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2); \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2); \\ (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \end{aligned}$$

Степені та корені

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; & (ab)^n &= a^n b^n; & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}; & \sqrt[n]{a^k} &= (\sqrt[n]{a})^k; \\ a^m : a^n &= a^{m-n}; & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}; & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; & \sqrt[n]{a} &= \sqrt[nk]{a^k}; \\ (a^m)^n &= a^{mn}; & \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[nk]{a}. \end{aligned}$$

Логарифми

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y; & a^{\log_a x} &= x; \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y; & \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}; \\ \log_a x^p &= p \log_a x; & \log_a x &= \frac{1}{\log_x a}; \\ \log_a a &= 1; & \log_a 1 &= 0. \end{aligned}$$

² Формули подані без зазначення умов, за яких вони істинні.

Стандартний вигляд числа

$x = a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$,
 n — порядок числа x .

Рівняння

Рівняння $ax = b$ має:
 1 корінь, якщо $a \neq 0$;
 0 коренів, якщо $a = 0$ і $b \neq 0$;
 безліч коренів, якщо $a = 0$ і $b = 0$.

Квадратні рівняння

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ — рівняння;

$D = b^2 - 4ac$ — дискримінант;

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ — корені.

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

$x^2 + px + q = 0$ — зведене рівняння,

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ — його корені;

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$ — теорема Вієта.

Трансцендентні рівняння

$a^x = b$;

$x = \log_a b$;

$\log_a x = b$;

$x = a^b$;

$\sin x = a$;

$x = (-1)^n \arcsin \alpha + \pi n$;

$\cos x = a$;

$x = \pm \arccos \alpha + 2\pi n$;

$\operatorname{tg} x = \alpha$;

$x = \operatorname{arctg} \alpha + \pi n$.

Нерівності

$a > b$, якщо число $a - b$ додатне.

$a < b$, якщо число $a - b$ від'ємне.

Властивості числових нерівностей

Якщо $a < b$, то $b > a$.

Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Якщо $a < b$, то $a + c < b + c$.

Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$.

Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$.

Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Якщо $0 < a < b$ і $0 < c < d$, то $ac < bd$.

Прогресії

Арифметична прогресія: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Геометрична прогресія: $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \dots$

$$b_n = b_1q^{n-1}, \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad S_n = \frac{b_1}{q - 1}, \quad \text{якщо } |q| < 1.$$

Функції

$y = kx + b$ — лінійна; графік — пряма.

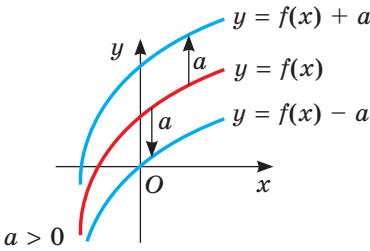
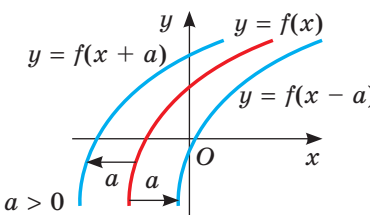
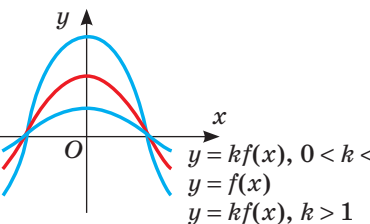
$y = ax^2 + bx + c$ — квадратична;

графік — парабола з вершиною в точці $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

$y = x^2$ — степенева. $y = a^x$ — показникова. $y = \log_a x$ — логарифмічна.

$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ — тригонометричні.

Перетворення графіків функцій

| Функція | Правило перетворення графіка функції | Графічна ілюстрація |
|----------------|--|--|
| $y = f(x) + a$ | Паралельне перенесення вздовж осі ординат на $ a $: вгору, якщо $a > 0$; вниз, якщо $a < 0$ |  |
| $y = f(x + a)$ | Паралельне перенесення вздовж осі абсцис на $ a $: праворуч, якщо $a < 0$; ліворуч, якщо $a > 0$ |  |
| $y = kf(x)$ | Розтяг від осі абсцис у k разів, якщо $k > 1$. Стиск до осі абсцис у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$. |  |

| Функція | Правило перетворення графіка функції | Графічна ілюстрація |
|--------------|---|---------------------|
| $y = f(x)$ | Частина графіка, який лежить у півплощині $x \geq 0$, залишаємо без змін і симетрично відображаємо його відносно осі ординат. Графіком функції буде об'єднання цих двох кривих: $y = f(x), x \geq 0$ і $y = f(-x), x < 0$ | |
| $y = f(x) $ | Частина графіка, який лежить над віссю абсцис, залишаємо без змін. Частина графіка, який лежить під віссю абсцис, симетрично відображаємо відносно осі абсцис | |

Тригонометричні тотожності

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}, \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Похідна

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$.

| | | |
|---|---|-------------------------------------|
| $C' = 0$ | $(x^a)' = ax^{a-1}$ | $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $(Cu)' = Cu'$ | $(\sin x)' = \cos x$ | $(e^x)' = e^x$ |
| $(u+v)' = u' + v'$ | $(\cos x)' = -\sin x$ | $(a^x)' = a^x \ln a$ |
| $(uv)' = u'v + uv'$ | $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |
| $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ | $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ |

Якщо $y = f(u)$, де $u = h(x)$, то $y' = y'_u u'$.

Первісна та інтеграл

Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, а $k \neq 0$, b — сталі, то:
 $kF(x)$ — первісна для функції $kf(x)$,

$\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.

| | | | | | | |
|----------------------------|-----|------|-----------------------|---------------|----------------------|-----------|
| Функція | 0 | k | $x^n,$ $n \neq -1$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\sin x$ |
| Одна з її первісних | C | kx | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\ln x $ | $2\sqrt{x}$ | $-\cos x$ |

| | | | | | |
|----------------------------|----------|-----------------------|-------------------------|-------|---------------------|
| Функція | $\cos x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\frac{1}{\sin^2 x}$ | e^x | a^x |
| Одна з її первісних | $\sin x$ | $\operatorname{tg} x$ | $-\operatorname{ctg} x$ | e^x | $\frac{a^x}{\ln a}$ |

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ — формула Ньютона—Лейбніца.

Комбінаторика

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n;$$

$$P_n = n!$$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1);$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}; \quad C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}; \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

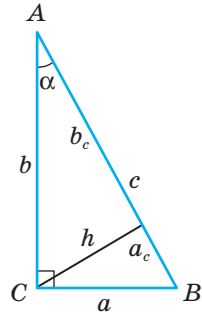
Прямокутний трикутник

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha; \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha; \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad a^2 \cdot a_c = c; \quad b^2 = b_c \cdot c; \quad h^2 = a_c \cdot b_c;$$

$$S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2}ch; \quad S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha;$$

$$h = \frac{ab}{c}; \quad R = \frac{c}{2}; \quad r = \frac{a+b-c}{2}.$$

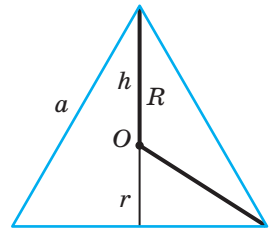


Рівносторонній трикутник

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{1}{3}h; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad R = \frac{2}{3}h; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$R = 2r; \quad h = R + r.$$



Довільний трикутник

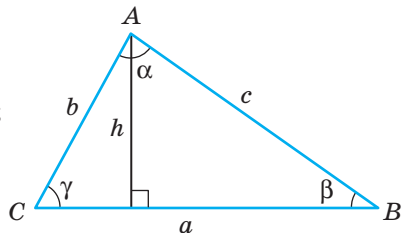
$$S = \frac{1}{2}ah; \quad S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma;$$

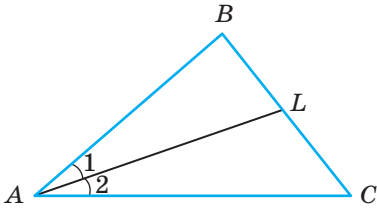
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2} \quad (\text{формула Герона});$$

$$R = \frac{abc}{4S}; \quad r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{a}{2 \sin \alpha};$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{теорема косинусів});$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (\text{теорема синусів}).$$

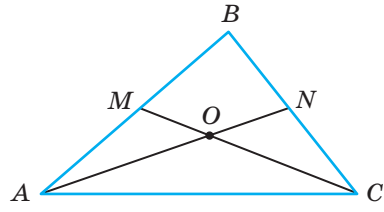




AL — бісектриса

1) $\angle 1 = \angle 2$;

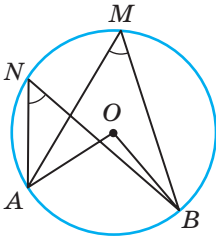
2) $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$.



AN, CM — медіани

$AO : ON = 2 : 1$.

Коло



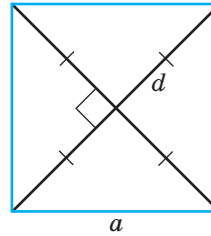
$C = 2\pi r$;

$S = \pi r^2$;

$\angle AMB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \widehat{AB}$;

$\angle AMB = \angle ANB$.

Квадрат

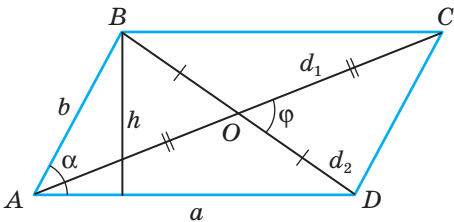


$d = a\sqrt{2}$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$P = 4a$; $r = \frac{a}{2}$;

$S = a^2$; $S = \frac{1}{2} d^2$.

Паралелограм

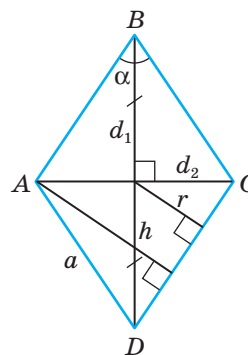


$\angle A + \angle B = 180^\circ$;

$P = 2(a + b)$; $S = ah$; $S = ab \sin \alpha$;

$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \varphi$; $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Ромб



$P = 4a$;

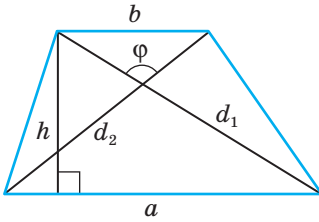
$S = ah$;

$S = a^2 \sin \alpha$;

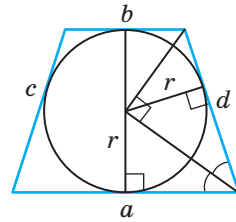
$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$;

$r = \frac{1}{2} h$.

Трапеція



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h; \quad S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi;$$



$$a + b = c + d; \\ h = 2r.$$

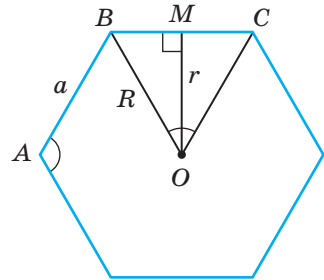
Правильний многокутник

Сума кутів: $180(n - 2)$; $P = na$;

$$\angle A = \frac{180(n-2)}{n}; \quad S = \frac{1}{2} arn;$$

$$\angle BOC = \frac{360^\circ}{n}; \quad S = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{360^\circ}{n};$$

$$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

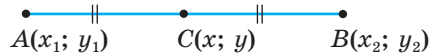


Координати на площині

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ — рівняння кола з центром $O(a; b)$ радіуса R .



Координати в просторі

Нехай дано точки $A(x_1, y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$.

$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ — координати точки C — середини відрізка AB .

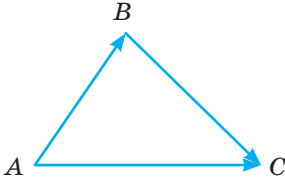
$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ — довжина відрізка AB .

$ax + by + cz + d = 0$ — загальне рівняння площини.

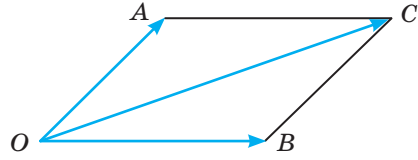
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ — рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ — рівняння сфери радіуса R з центром у точці $(a; b; c)$.

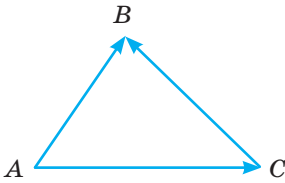
Вектори



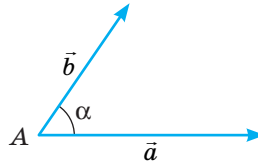
$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ — додавання векторів за правилом трикутника.



$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$ — додавання векторів за правилом паралелограма.



$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$ — різниця векторів.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$ — скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} .

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2}.$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ — умова перпендикулярності ненульових векторів \vec{a} і \vec{b} .

$\vec{a} = \lambda \vec{b}$ — умова колінеарності ненульових векторів \vec{a} і \vec{b} .

Вектори, задані координатами

$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ — координати вектора \overline{AB} , де $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

Нехай $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Тоді $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$;

$k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$ — умова колінеарності ненульових векторів \vec{a} і \vec{b} .

$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ — умова перпендикулярності ненульових векторів \vec{a} і \vec{b} .

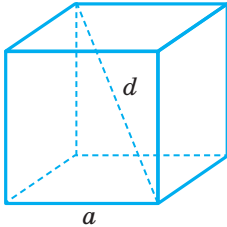
$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — довжина вектора $\vec{a} = (x; y; z)$.

$$\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Многогранники

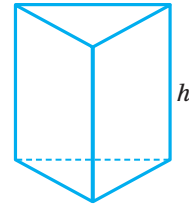
Куб

$$\begin{aligned}d &= a\sqrt{3}; \\ S_{\Pi} &= 6a^2; \\ V &= a^3.\end{aligned}$$



Пряма призма

$$\begin{aligned}S_{\Pi} &= S_{\text{б}} + 2S_{\text{осн}}; \\ S_{\text{б}} &= P_{\text{осн}} \cdot h; \\ V &= S_{\text{осн}} \cdot H.\end{aligned}$$



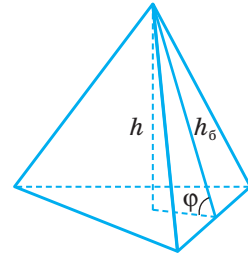
Піраміда

$$S_{\Pi} = S_{\text{б}} + S_{\text{осн}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Для правильної піраміди $S_{\text{б}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h_{\text{б}}$,

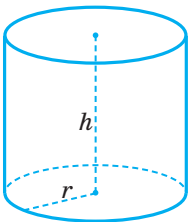
де $h_{\text{б}}$ — апофема.

$$S_{\text{б}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi}.$$



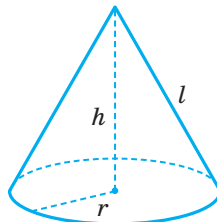
Тіла обертання

Циліндр



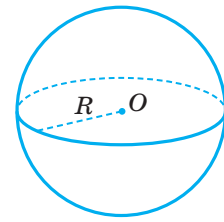
$$\begin{aligned}S_{\text{б}} &= 2\pi r h; \\ S_{\Pi} &= 2\pi r h + 2\pi r^2; \\ V &= \pi r^2 h.\end{aligned}$$

Конус



$$\begin{aligned}S_{\text{б}} &= \pi r l; \\ S_{\Pi} &= \pi r l + \pi r^2; \\ V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h.\end{aligned}$$

Куля і сфера



$$\begin{aligned}S_{\text{сф}} &= 4\pi R^2; \\ V_{\text{кулі}} &= \frac{4}{3} \pi R^3.\end{aligned}$$

Відповіді та вказівки до задач і вправ

Розділ 1

8. а) 2^3 ; б) 2^4 ; в) $2^{0,5}$; г) 2^{-2} . 9. а) 3^4 ; б) 3^3 ; г) 3^{-4} ; д) 3^0 ; е) $3^{1,5}$; є) $3^{3\pi}$.
 10. а) 4; б) 3; г) 81; д) 0,2; е) 1. 12. а) $a^2 - x$; б) $c - p^{0,5}$; в) $a^{0,5} + b^{0,5}$; г) $x^{0,5} - 2$.
 13. а) $x - 1$; б) $n + 8$. 14. 36. 20. Б. 21. а) Зростаюча; б) спадна; в) зростаюча; г) спадна; г) зростаюча; д) спадна; е) спадна; є) зростаюча. 22. а) $2^{(-\sqrt{5})} < 1$; б) $0,5^{\sqrt{3}} < 1$; в) $0,3^2 < 1$; г) $1,7^3 > 1$. 23. б) $2^{\sqrt{3}} > 2^{1,7}$; в) $5^{0,2} > 5^{-1,2}$.
 24. а) Не проходить; б) проходить; в) не проходить; г) проходить. 25. а) Проходить; б) не проходить; в) проходить; г) не проходить.
 26. а) $a = 3$; б) $a = 0,04$; в) $a = 2$. 27. а) Найменше $\frac{1}{3}$; найбільше 27;
 б) найменше $\frac{1}{27}$; найбільше 3. 28. а) $3^{\frac{3}{4}}$; г) $\left(\frac{7}{3}\right)^2$. 29. а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$; в) $3^{\frac{5}{3}}$.
 30. а) 9; б) 9; г) $4\frac{20}{27}$. 31. а) 2; б) 1; в) 1; г) 9. 32. 1-В, 2-А, 3-Г, 4-Б.
 36. а) $x = 4$; $x > 4$; $x \leq 4$; в) $x = 2^{2,5}$; $x \geq 2^{2,5}$; $x < 2^{2,5}$. 37. а) $x = 2$; $x < 2$; $x \geq 2$; в) $x = -2$; $x < -2$; $x \geq -2$. 38. а) 1000 м²; б) 2000 м²; в) 4000 м². 39. а) 24А; б) 6А, 1,5А, 0,375 А, 0,09375А. 40. а) $2e^{0,25}$ г; в) $2e^{0,5}$ г. 41. $b_{10} = 128$, $S_{10} = 255,75$.
 43. а) $4,7 \cdot 10^7$; б) $3,08 \cdot 10^8$; в) $3,9 \cdot 10^{-8}$; д) $6,7 \cdot 10^5$. 49. а) 2; б) 4; в) 0; г) \emptyset ; е) 1; є) 3. 50. а) 5; б) 1,5; в) -3; г) 2. 51. а) 4; б) 1; в) 2; г) 2. 52. а) 1; б) 1; в) -4; г) 2. 53. а) -2; б) 5; в) -2; г) 0,5. 54. а) 2; б) -1; в) \emptyset ; г) 1. 55. -0,5.
 56. а) 0; 1; б) ± 2 ; в) 0; -3; г) 1; 2; г) 1. 57. а) 3; б) 0; в) 4; г) 1. 58. а) 0; б) 1; в) 3; г) -2. 59. а) 1; б) 1; г) 1; 0. 60. а) 1; 0; б) 1; в) 2; г) 4. 61. а) 1; 0; б) 3; 0; в) 1; г) 1; 2. 62. а) 3; [3; + ∞); б) -1; (-1; + ∞); в) 3,5; (- ∞ ; 3,5].
 63. а) -1,5; (- ∞ ; -1,5); в) 4; (4; + ∞). 64. а) (0; + ∞); б) (- ∞ ; -0,5); в) (- ∞ ; 4]; г) R ; г) (-2; + ∞). 65. а) (- ∞ ; 5); б) (- ∞ ; 3); в) (- ∞ ; -3).
 66. а) R ; б) (-3; + ∞). 67. а) [2; + ∞); б) (4; + ∞); в) \emptyset . 68. (-3; + ∞).
 69. а) (- ∞ ; 0); б) (- ∞ ; 1). 70. а) (2; + ∞); б) (- ∞ ; 1). 71. а) (- ∞ ; 0); б) (-1; + ∞).
 72. а) (2; + ∞). 73. [4; + ∞). 75. а) 2,5; в) 2. 76. а) 0,75; б) 0,5; в) 3.
 77. а) 1; в) 1,5. 78. а) $\frac{1}{9}$; б) 3; в) 1. 79. а) 1; б) 3. 80. а) -1; б) 3; в) 2.
 81. а) 2; б) 2. 82. а) $-\frac{1}{3}$; б) $\frac{9}{8}$. 83. (-1; 0]. 84. а) 1; б) 1. 85. а) 1; б) 2.
 86. а) 1) 0; 1; 2) (- ∞ ; 0] \cup [1; + ∞); б) 1) 2; -2; 2) [-2; 2]; г) 1) 1; 2) [0; 1].
 87. а) [1,25; + ∞); б) (- ∞ ; 9]. 88. а) (- ∞ ; 0); в) (2; + ∞). 90. (1; + ∞).
 91. 20 хв. 103. 0; $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; 2. 104. 1; 2; 3; 1; 3. 106. а) $\log_5 625 = 4$;

б) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$; в) $\log_4 8 = 1,5$; г) $\log_6 1 = 0$; р) $\lg 0,001 = -3$; д) $\log_a c = 3x$.

107. а) $\log_3 8$; г) $\log_4 6$. 108. а) $3^4 = 81$; б) $2^6 = 64$; г) $4^3 = x$; д) $x^2 = 49$.

110. а) 4; б) 7; в) 0,09; г) 1; р) 2; д) 1. 111. а) 2; б) 1; в) 3; г) 2; р) 2; д) 2.

112. 4. 116. (3; 4). 117. а) ні; б) так; в) так. 118. а) $a = 2$; б) $a = \frac{1}{2}$; в) $a = 11$;

г) $a = \frac{1}{3}$. 119. -2. 120. а) $(0; +\infty)$; б) $(3; +\infty)$; в) $(-5; +\infty)$; г) $(-\infty; 1)$.

122. а) -3; б) 6; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; р) $\sqrt{3}$. 124. а) 81; б) 25; в) 343; г) $\frac{1}{4}$; р) 2;

д) $\frac{e^2}{2}$. 125. а) 80; б) 4,9. 126. а) $x = 9$; б) $x = 0,08$; в) $x = 8$; г) $x = 200$.

127. а) $x = 35$; б) $x = 0,9$. 128. а) 9; б) -7; в) 7; г) 10; р) 4,5; д) 6.

129. а) 17; б) 4. 132. а) $\log_2 10$; б) 0,5. 133. 3. 135. а) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right)$; б) $(-3; 3)$;

в) $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$; г) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. 143. а) $(3; +\infty)$; б) $(-\infty; 2)$;

в) $\left(-\infty; -\frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; г) $(-5; 11)$. 152. а) 19; б) 95; в) $2 - e^{-3}$. 153. а) 5000;

б) -100; 100; в) 2000. 154. а) 26; б) 1; -4; в) -3; 3; г) 3. 155. а) -3; б) -2; 1;

в) -5; 5; г) 2. 156. а) $-\frac{3}{2}$; б) -1; 4; в) $\frac{3}{8}$; г) 72. 157. а) $(0; 2]$; б) $(8; 10]$.

158. а) 9; б) -1; в) 3; г) 3. 159. а) 2; б) $\frac{1}{3}$; в) -3; г) 2. 160. а) 7; б) 5; в) \emptyset ; г) 4.

161. а) 6; б) 3; в) 7; г) 3. 162. а) 12; б) -1,6. 163. а) $\left(-5; \frac{3}{2}\right)$; б) $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$;

в) $(3, 5; 6)$. 164. а) $(-4; 4)$; б) $(70; +\infty)$; в) $(0; 2)$; г) $(0; 20]$. 165. а) $(7; 34)$;

б) $\left(-1; -\frac{8}{9}\right)$; в) $(7; 16)$; г) $\left(-\infty; -\frac{1}{20}\right)$. 166. а) $\left(-\frac{5}{2}; -2\right)$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$;

в) $\left(\frac{11}{5}; \frac{12}{5}\right)$; г) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$. 167. а) 169; б) 81. 168. а) 8; б) 5^{10} . 169. 9.

170. а) 5; б) 5. 171. а) 100; б) $\frac{1}{5}$; 25; в) 4; 8; г) 0,01; 100. 172. а) 0,1; 100;

б) e^3 ; $\frac{1}{e}$; в) 0,01; 1000; г) 4. 173. а) $\frac{5}{4}$; 9; б) 0,001; 10; в) -2; 4; г) 1; e^2 .

175. а) 9; б) 10; в) 4; 6. 176. а) -1; б) -2; 6; в) 2; 16; г) 0,001; 10. 177. а) $(6; +\infty)$;

б) $(2; 3]$. 178. а) $(7; +\infty)$; б) $[-2; 1)$. 179. а) $\left(\frac{11}{2}; 7\right]$; б) \emptyset . 180. а) $\left(1; 3\frac{2}{3}\right)$;

- б) (1; 3); в) $[-20; 4, 96]$; г) $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (81; +\infty)$. 181. а) $(1; 1, 04) \cup (26; +\infty)$;
 б) $\left(\frac{1}{3}; 27\right)$; в) $(3; 3, 25] \cup [7; +\infty)$; г) (0, 008; 0, 04). 182. а) (0; 1).
 187. 3 год 20 хв.

Розділ 2

201. а) $3x + C$; б) C ; в) $x^3 + C$; г) $x^4 + C$. 202. а) $-x^5 + C$; б) $-x^2 + C$;
 в) $\frac{x^4}{4} - e^x + C$; г) $-\frac{x^6}{6} + e^x + C$. 203. а) $\frac{x^4}{4} + x^2 + C$; б) $\frac{x^{e+1}}{e+1} - 4x + C$;
 в) $2x + \sin x + C$; г) $3x + \cos x + C$. 204. а) $\frac{x^4}{4} + C$; б) $5x + C$; в) $\frac{x^{101}}{101} + C$;
 г) $-3x + C$. 205. а) $\frac{5^x}{\ln 5} + C$; б) $\frac{10^x}{\ln 10} + C$; в) $\ln|x| + C$; г) $\pi x + C$.
 206. а) $\operatorname{tg} x + C$; б) $-\operatorname{ctg} x + C$; в) $-\frac{1}{2x^2} + C$; г) $-\frac{1}{9x^9} + C$. 207. а) $5x + x^3 + C$;
 б) $x^5 - x^3 - 7x + C$; в) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C$; г) $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + C$. 208. 1-Б; 2-А;
 3-Г; 4-В. 209. а) $\frac{x^4}{4} + \frac{7}{4}$; б) $-\cos x + \frac{3}{2}$. 210. а) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{10}{3}$; б) $\frac{3x^2}{2} - 7x + 12$.
 217. а) $x + \frac{x^{10}}{10} + C$; б) $5x - \frac{x^2}{2} + C$; в) $\frac{x^4}{2} + C$; г) $-\frac{x^6}{12} + C$. 218. а) $-2\cos x + C$;
 б) $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$; в) $\frac{1}{7}\sin 7x + C$; г) $5x + \sin x + C$. 219. а) $0,5x - x^2 + C$;
 б) $-e^{-x} + C$; в) $-\frac{1}{9x} + C$; г) $5x + \ln|x| + C$. 221. $F(x) = x^2 + 2x + 1$.
 222. а) $x + \frac{x^3}{3} + 21$; б) $\frac{x^2}{2} + \operatorname{tg} x - 3$. 223. а) $\frac{x^4}{4} + x + \frac{3}{4}$; б) $-\frac{1}{x} + \frac{7}{2}$; в) $-\cos 2x + \frac{3}{2}$;
 г) $2\sqrt{x} - 2$. 228. Лише І. 229. а) $8e^x + C$; б) $-\frac{e^{2-3x}}{3} + C$; в) $\frac{2e^{5x-1}}{5} + C$.
 230. а) $\frac{3 \cdot 2^x}{\ln 2} + C$; б) $-\frac{3^{-5x}}{5 \ln 3} + C$; в) $\frac{5 \cdot 2^{8x-1}}{8 \ln 2} + C$. 231. а) $-\frac{1}{14}\cos 14x + C$;
 б) $-\frac{1}{2}\sin 2x + C$. 232. а) $-\frac{1}{10}\sin 10x + C$; б) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x + C$.

- 233.** а) $\frac{1}{11} \cos 11x + C$. **234.** а) $\frac{1}{4} \sin 4x + C$; б) $x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$. **245.** а) $\frac{1}{2}$ кв. од.;
 б) 1 кв. од. **246.** а) 4 кв. од.; б) 1,25 кв. од. **247.** а) $\frac{20}{3}$ кв. од.; б) 12 кв. од.
248. а) 27 кв. од.; б) $\frac{26}{3}$ кв. од. **249.** а) 2 кв. од.; б) 2 кв. од. **250.** 1-Б; 2-Г; 3-Д;
 4-А. **252.** а) $\frac{26}{3}$ кв. од.; б) $\frac{26}{3}$ кв. од. **253.** а) 1 кв. од.; б) 2 кв. од. **254.** а) 6 кв. од.;
 б) 2 кв. од. **255.** а) $(4 + \pi)$ кв. од.; б) $\left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$ кв. од. **256.** а) 6,4 кв. од.;
 б) 6,2 кв. од. **258.** а) $\frac{1}{4}$ кв. од. **259.** а) $\frac{2}{3}$ кв. од.; б) 4 кв. од.
260. а) $(e^3 - 1)$ кв. од. **261.** $\frac{32}{3}$ кв. од. **262.** $\frac{32}{3}$ кв. од. **263.** а) 36 кв. од.
264. б) $\left(\frac{14}{3} - \ln 4\right)$ кв. од. **265.** а) 4,5 кв. од.; б) $\frac{4}{3}$ кв. од. **266.** а) $\frac{32}{3}$ кв. од.
267. 4,5 км². **273.** а) $\frac{1}{2}$; б) 0; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2}{3}$; г) 1; д) 2; е) 0. **277.** 14.
278. а) 1; б) 3; в) $\frac{243}{64}$. **279.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 2. **280.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{22}{3}$; в) 10.
281. а) $e - 1$; б) $\frac{1}{\ln 2}$; в) 2. **282.** а) 1,5 кв. од.; б) 1 кв. од.; в) 2 кв. од.;
 г) $\sqrt{3}$ кв. од. **283.** а) 3,75 кв. од.; б) 0,5 кв. од.; в) 2 кв. од.; г) 2 кв. од.
284. а) $2(e - 1)$ кв. од.; б) $\frac{7}{\ln 4}$ кв. од.; в) $(12 + \ln 81)$ кв. од.; г) $(12 + \ln 2)$ кв. од.
285. а) $\frac{\ln 7}{3}$; б) $\frac{7}{4}$; в) 0. **286.** а) 4,5; б) $\frac{2}{3}$; в) 2. **287.** а) $\frac{41}{6} + \ln 2$; б) 8;
 в) $1 + \ln 3$. **288.** а) π ; б) π ; в) π . **289.** 15,25. **291.** 1-Д; 2-В; 3-Б; 4-А.
292. Б. **294.** а) $\frac{4}{3}$ кв. од.; б) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ кв. од.; в) 4,5 кв. од.; г) $\frac{125}{6}$ кв. од.
295. а) 4,5 кв. од.; в) 4,25 кв. од.; г) $\frac{1}{3}$ кв. од. **296.** а) $\left(\frac{3}{\ln 2} - 2\right)$ кв. од. **300.** 20.
302. 6 кв. од. **303.** 12 кв. од. **307.** 117π куб. од. **308.** $\frac{\pi}{5}$ куб. од.
309. $\frac{16\pi}{15}$ куб. од. **311.** 198 м. **312.** 80 м. **313.** 10 м. **314.** $\approx 4,5$ гр. од.
315. $2\frac{2}{3}$ кв. од. **316.** 12π куб. од. **317.** 24π куб. од. **318.** 0,125 Дж.
319. 0,784 Дж. **320.** 1-Д; 2-В; 3-А; 4-Б. **321.** ≈ 1177 м. **323.** 9,5 м. **324.** 48 Кл.

Розділ 3

338. а) $A = \{3, 6, 9\}$; б) $B = \{5\}$; в) $C = \emptyset$. 341. а) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; б) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. 343. а) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$; б) $\{1, 73\}$. 344. $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. 345. а) $\{-2, 0, 2\}$; б) \emptyset ; в) $\{0, 1\}$. 346. а) $(-\infty; 4)$; б) $[0; 2]$; в) $(1; 5)$. 347. Правильні: а) $7 \in \mathbb{Q}$; б) $-5 \in \mathbb{R}$. 349. а) $E(y) = [0; 49]$; б) $E(y) = \{1\}$. 350. $K \cap P = \{a, c, 2\}$; $K \cup P = \{a, b, c, x, 1, 2\}$; $K/P = \{b\}$; $P/K = \{1, x\}$. 351. а) $A \cup B = \{2, 3, 5, 7\}$; $A \cap B = \{3, 7\}$; б) $A \cup B = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$; $A \cap B = \{0, 2\}$. 352. а) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$; $A \cap B = \{b\}$; б) $A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta\}$; $A \cap B = \{\beta, \gamma\}$. 353. Скінченні: г); нескінченні: а), б), в), г). 354. а) $\{1, 2, 3, 6\}$; б) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 3, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$; в) $\{(0, 0)\}$. 355. а) $(-\infty; +\infty)$; $(1; 5)$; б) $[1; +\infty)$; $(1; 3)$; в) $(-\infty; 2]$; \emptyset . 356. а) $(-\infty; 7)$; $(-7; -1)$; б) $[-3; 3]$; $\{0\}$; в) $[4; +\infty) \cup [1; 2]$; \emptyset . 357. $A \cap B = \{(4; -1)\}$. 358. Безліч. 359. $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \mathbb{N}$; $A/B = A$. 361. а) Ні. 362. 4 підмножини із трьох елементів. 363. а) 2; б) 4; в) 8; г) 16; 367. а) $[-5; 1) \cup [3; +\infty)$; б) $(-1; 0)$. 368. 600. 369. 25. 373. 5. 374. 7. 375. 18. 376. 8. 377. 24. 378. 12. 379. 6. 380. 120. 381. 6; 24. 382. 5040. 383. 60. 384. 15. 385. а) 120; б) 40320; в) 3628800. 386. а) $(n+1)!$; б) $n!$; в) $n+1$; г) $(n-1)!$. 388. 28. 392. а) 30240; б) 360360; г) 192,5. 393. а) n . 394. а) 120; б) 1680. 395. а) 8. 396. 144. 399. 240. 400. 15. 401. 24. 405. в) $2 \cos x$; г) $-3e^x$. 406. а) 14; б) 4; 9. 415. $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$. 416. а) 120; б) 720; в) 24; г) 5040. 417. $P_8 = 40320$; $P_9 = 362880$. 418. $P_6 = 720$. 419. 2520. 420. 6. 421. 18. 424. а) 60; б) 1680; г) 2450. 425. а) 120; б) 5040; в) 10; г) 45. 427. а) 84; б) 120; в) 66; г) 45. 429. 190. 430. 496. 431. 28. 432. $\frac{n(n-1)}{2}$. 433. $\frac{n(n-3)}{2}$. 435. а) 20; б) 60; в) 120. 436. 648; 4536. 437. 60. 438. 20. 439. 6. 441. а) 7; б) 10. 445. 210. 446. 13 983 816. 448. $C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7$. 449. а) $F(x) = \frac{2x^3}{3} - 5x + C$; б) $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$; в) $F(x) = -2 \cos x + C$; г) $F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C$. 450. а) -1; б) 1; $\log_2 3$. 451. а) $\ln(ex^2)$; б) $\lg \frac{x^2}{2} (x > 0)$; в) $\log_2(8x)$. 455. Мода 32, медіана 31,5. 456. Мода 1, медіана 2, розмах 3. 457. 163. 458. а) Частота 3, відносна частота 0,05; б) у 3 рази менше. 459. Мода 8, медіана 6, розмах 12. 461. 1-Д; 2-Г; 3-В; 4-А. 462. 0,025 та 0,25. 463. Мода 118, 120, медіана 120, розмах 18. 464. а) 50,5; б) 0. 465. Мода 5, медіана 4,5, сер. знач. $4 \frac{1}{3}$. 466. Мода 31, медіана 33, сер. знач. 34. 467. 12. 472. 2,7%. 473. 528 г. 474. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$; $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}$. 475. Середні квадратичні $\sqrt{0,116}$; $\sqrt{0,142}$; $\sqrt{0,134}$. Найкраще завдання виконав перший фрезерувальник. 476. $y = 6x - 3$. 477. Зменшилась на 1%. 483. Г.

492. Розмах 1,5; мода 1,5. 499. а) 600; б) 120. 504. а) $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$;
 б) $F(x) = 2x - \frac{1}{3}x^3 + 1$; в) $F(x) = -2\cos x + 1$; г) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 1$; 506. 36.
513. $\frac{1}{2}$. 514. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$. 515. а) $\frac{1}{14}$; б) $\frac{3}{28}$; в) $\frac{1}{28}$. 516. $\frac{1}{4}$.
517. а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{3}$. 519. а) 0; б) 0; в) 1. 520. а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{3}{8}$; в) $\frac{1}{8}$. 521. а) $\frac{54}{125}$;
 б) $\frac{36}{125}$; в) $\frac{8}{125}$. 522. а) $\frac{3}{10}$; б) $\frac{1}{5}$. 525. $\frac{1}{24}$. 527. $\frac{1}{1296}$. 528. $\frac{1}{24}$.
529. $\frac{1}{2520}$. 530. а) $\frac{1}{60}$; б) 0,1. 532. $\frac{5}{9}$. 533. а) $\frac{60}{253}$; б) $\frac{15}{253}$. 534. $\frac{1}{330}$.
535. 10. 536. а) $\frac{33}{59}$; б) $\frac{45}{118}$. 539. а) $\frac{5}{9}$. 541. а) 3 числа з 49; б) ймовірності рівні, бо $C_{15}^7 = C_{15}^8$. 543. а) $6x^2 + 12x - 5$; б) $10x^4 - 30x^2$. 550. $\frac{1}{6}$.
554. $M(\varphi) = 2,5$; $D(\varphi) \approx 2,92$. Така випадкова величина відповідає, наприклад, випаданню очок під час підкидання правильного грального кубика. 558. $D(y) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $E(y) = \{1; 6; 15; 20\}$. 559. $M(\mu) = 2,4$. 561. а) $(-7; 4)$. 562. а) Так; б) ні.

Розділ 4

574. 8 ребер. 575. 9 ребер. 579. $4\sqrt{3}$ см². 580. б) 9 ребер. 582. а) a ; б) $a\sqrt{2}$.
583. $a\sqrt{3}$. 584. 18 м². 585. 9 : 1. 586. $\sqrt{S_1} : \sqrt{S_2}$. 590. $10 + 3\sqrt{2}$ см.
593. 1-В, 2-А, 3-Г, 4-Б. 595. $5(2\sqrt{3} + 1)$. 611. 4 см. 612. в) $4ab$; д) $\sqrt{a^2 + b^2}$.
613. $2,25\sqrt{3}$ см. 618. а) 1464 см². 619. $6a^2 \sin \alpha$. 620. 13 см. 621. 192 см².
622. 5 см, 10 см і 15 см. 623. ≈ 285 мм. 624. 6 см, 7 см і 12 см. 626. 52 г.
630. 7 см. 632. Ні. 634. $2\sqrt{2}S$. 635. 60 см². 637. 45°. 638. а) $2a(a + 2h)$.
639. $l \sin \alpha$. 640. а) $d^2 \sin \varphi \cos \varphi$. 643. 14 кг. 647. $5\sqrt{13}$ см. Розгляньте розгортку призми. 653. Ребер $2n$, вершин і граней по $n + 1$. 654. Ні.
658. $(25\sqrt{3} + 90)$ см². 659. 5 см. 660. 100 см². 661. a . 662. а) $b \sin \alpha$; б) $2b \cos \alpha$.
663. б) $3l \cos \alpha$; г) $3\sqrt{3}l^2 (\cos \alpha + \cos^2 \alpha)$. 664. $\approx 42^\circ$. 665. 24 см. 666. 125.
667. а) $128\sqrt{3}$. 668. а) $\frac{a^2}{\cos \alpha} + a^2$. 669. $100\sqrt{3}$ см². 672. $5\sqrt{3}$ см.
673. $\frac{25\sqrt{2}}{8}$ см. 674. 9 см. 676. $h = 4\sqrt{3}$ см. 677. 30°. 679. 0,25Q. 680. 16 см².
684. $2(3 + \sqrt{3})$. 685. 36 дм²; ≈ 35 дм². 686. a^2 . 699. $2 : \sqrt{2}$. 700. а) Так.
701. а) Ні; б) так; в) ні. 703. а) 864 см². 704. б) 0,5 м. 705. б) У 4 рази.
709. $2\sqrt{3}a^2$. 712. $b\sqrt{2}$. 714. 16 см²; $8\sqrt{2}$ см². 718. У 9 разів. 719. Можна.
722. $\arccos \frac{1}{3}$; 90°.

Розділ 5

732. Одна; безліч. Так. 733. Безліч. Так. 736. 4 см^2 . 737. $40\pi \text{ см}^2$. 739. 4 см ; 2 см .
 740. $168\pi \text{ см}^2$. 742. $H : r = 2 : 1$. 743. а) 24 м ; г) 290π . 744. б) 3 см . 745. $126\pi \text{ см}^2$.
 748. $360\pi \text{ см}^2$. 749. πS . 750. $\sqrt{4r^2 + h^2}$. 753. $2\pi r^2 \operatorname{tg} \alpha$. 754. $\frac{\pi}{2} d^2 \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)$.
 755. $2 : \sqrt{3}$. 757. 256 см^2 . 758. rh . 759. $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$; $\frac{15}{\sqrt{10\pi}}$. 760. $Q : 4\pi$. 766. $\approx 3,3 \text{ м}^2$.
 768. $160\pi \text{ см}^2$. 772. $255\sqrt{3} \text{ см}^2$. 778. Конус. 779. 10 м . 780. 5 см , $5\sqrt{3} \text{ см}$.
 781. 90° . 782. $24\pi \text{ см}^2$. 783. $r = 2 \text{ см}$; $h = \sqrt{2} \text{ см}$. 784. $\approx 23 \text{ м}$. 785. $h = 4$; $S = 16\sqrt{3}$.
 786. а) $l \sin \alpha$; в) $l^2 \sin \alpha \cos \alpha$. 787. 45° . 788. $\sqrt{2}\pi R^2$. 789. $8\sqrt{3}\pi \text{ см}^2$.
 792. $90\pi \text{ см}^2$. 794. $\sqrt{3} \text{ см}$. 796. Ні, якщо висота конуса менша від радіуса основи. 798. а) $0,5R$. 799. 1–В, 2–Б, 3–А, 4–Г. 800. $\pi \text{ см}^2$. 801. $0,5h\sqrt{2}$.
 802. 60° . 803. б) $24\pi \text{ см}^2$. 804. б) $\sqrt{2}\pi a^2$. 814. $0,75\pi r^2$. 815. $64\pi \text{ см}^2$.
 816. $48\pi \text{ см}$. 817. 13 см . 818. 12 см . 819. 30 см . 820. $R + r$ або $|R - r|$.
 821. а) Дві площини, паралельні даній площині і віддалені від неї на r ; б) сфера радіуса r з центром у даній точці. 825. $\approx 0,5 \text{ дм}$. 826. 20 г .
 827. $200\pi \text{ см}^2$. 836. 36π . 837. 216π . 838. а) 20 см . 840. 1 дм .
 845. $\pi r^2 \cos^2 \alpha$. 846. 10 см і 24 см . 847. 10 см або 70 см . 851. 24 см .
 852. Ці відстані рівні. 869. $5\sqrt{2} \text{ дм}$. 870. $100\pi \text{ см}$. 872. 1–Г, 2–Д, 3–А, 4–В.
 877. $3\pi\sqrt{3} \text{ см}$. 881. 7 см . 882. а) $Q : \pi r$. 883. $r^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$; $\approx 22 \text{ м}^2$.
 884. а) $\frac{a}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 885. г) $\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{m} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 886. $2r \sin^2 \alpha$. 898. $16\pi \text{ м}^3$.
 899. $2\pi r^3 \text{ м}^3$. 900. $Q\sqrt{Q}$. 901. $\frac{\sqrt{3}}{9} d^3$. 902. $6\sqrt[3]{V^2}$. 907. 108 см^2 . 909. 9 см .
 910. 30 дм . 921. $\frac{\sqrt{3}}{4} d^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha$. 922. $54\sqrt{3} \text{ см}^3$. 926. 1–Д, 2–Б, 3–А, 4–В.
 928. $4ar^2$. 934. $\approx 3,8 \text{ дм}^3$. 936. $\approx 5,4 \text{ тис. м}^2$. 949. $\frac{1}{6} d^2 h$. 950. $\frac{\sqrt{2}}{6} \text{ дм}^5$.
 952. Прийміть за основу бічну грань піраміди. 953. $\frac{1}{6} abc$.
 954. а) $\frac{1}{3} b^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$. 959. 1–В, 2–Б, 3–Д, 4–Г. 960. 6 см . 962. У 8 разів.
 967. $10\frac{2}{3}\pi \text{ см}^3$. 969. $\frac{\pi}{6} a^3$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^3$. 970. $8 : 27$. 972. У 8 разів. 973. Так.
 976. $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$. 977. $\frac{1}{3} abh \sin \varphi$. 978. 112 см^3 . 979. 12 см^3 . 985. $\approx 5,7 \text{ см}$.
 986. $\approx 42 \text{ см}$. 991. $\approx 8,4 \text{ см}$. 992. Менша від $4,18 \text{ т}$. 993. $\approx 0,0001 \text{ мм}$. 994. $1 : 2$.

Додатки

996. а) $3x$. 997. а) 56; 42. 998. а) $4^3 < 3^4$. 1001. Менший на 1,66. 1002. $d = 2$, $a_{20} = 41$, $S_{20} = 440$. 1003. $q = 2$, $b_{10} = 1536$, $S_{10} = 3069$. 1004. 4905. 1005. а) 42. 1006. 58. 1007. 21. 1008. Друга схема неправильна, бо 1 — ні просте, ні складене. 1012. а) Парна; б) парна. 1014. $y = 3x$. 1015. $y = 0,5x$. 1017. (3; 2). 1018. Так, усі дійсні числа $x \in (0; 180^\circ)$, де x — кут при вершині. 1019. $x = -7$, $y = 0$. 1020. а) 5; б) 0. 1021. $y = 0$. 1026. а) $\sin 1^\circ < \sin 3^\circ$; б) $\sin 1 > \sin 3$. 1027. а) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{3\pi}{2}$. 1028. $\cos 2$, $\operatorname{tg} 2$, $\cos 3$.
1030. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. 1031. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. 1032. а) $\frac{\pi}{6}$. 1033. а) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
1034. а) 0; в) $\cos^2 \alpha$. 1038. а) 0,8; б) $\frac{3}{4}$. 1048. -27. 1049. а) $a^{-2} - 9$.
1050. 4; 27; 4; 1; $\frac{1}{3}$. 1052. \sqrt{m} , $\sqrt[3]{x^2}$, \sqrt{ab} , $\sqrt[10]{p^2}$. 1053. $x^{\frac{1}{2}}$, $c^{\frac{1}{3}}$, $(xz)^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{5}}$.
1054. а) 2; б) 10. 1055. $x - c^2$. 1056. а) 11. 1059. Ні. 1061. Так; так. 1062. $k = 2$. 1063. Так. 1064. б)–г) Так. 1065. а) Спадає; б) зростає. 1068. б) 0. 1069. а) 1,5. 1070. а) 2; 5. 1072. в) -1; 1. 1073. а) 1; 4. 1077. а) 2. 1079. а) 6. 1080. а) $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$. 1082. а) $(41; +\infty)$. 1083. а) $[-5; 1]$. 1086. а) Три; б) чотири. 1088. а) $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{3}$. 1089. $\sqrt{2}$. 1090. $\sqrt{42}$. 1091. (1; 5; 3). 1093. (-1; -2; -1); (1; 2; 1). 1094. (-3; 1; 7); (3; 1; -3). 1096. а) 4; б) (-2; -2; 2; -2); (2; 2; 2; 2). 1097. а) 0,5; б) -3; в) $\frac{1}{2}$. 1099. -2. 1100. Так. 1101. а) 1,5; в) 1. 1102. -4; 0; 6. 1103. 1; -1; -1. 1104. а) $6x^2$; б) $5x^4 - 6x$. 1105. а) -1; 1. 1106. а) $x \in (1; +\infty)$ — зростає, $x \in (-\infty; 1)$ — спадає. 1107. а) $x_{\max} = 0,5$. 1108. Так.
1111. а) $\max_{[-5; 0]} f(x) = f(-5) = 55$, $\min_{[-5; 0]} f(x) = f(3) = -9$. 1112. -0,5. 1113. $5\sqrt{2}$.
1122. $1\frac{1}{3}$ кв. од. 1123. 300 см². 1126. $4\sqrt{3}$ дм². 1129. $\sqrt{3}$ см². 1130. 216π см².
1131. $4\pi a^2$. 1132. Так. 1133. 17,5 см, 17,5 см. 1134. Ні. 1135. а) Навпіл; б) 1 : 4. 1136. 40π см. 1137. Ні. 1138. 1 : 4. 1139. а) $m^2 : n^2$; б) $m^3 : n^3$. 1140. $40\sqrt{5}$ см⁸. 1141. $54\sqrt{3}$ дм⁸. 1142. 144π дм⁸. 1143. б) 4 : 9. 1144. а) π м². 1145. У 4 рази; у 8 разів. 1146. $8\pi\sqrt{2}$ дм², $\frac{16}{3}\pi$ дм³. 1149. а) КУТ = 289; б) розв'язку немає.
1150. Через 59 хв. 1151. Понад 2^{33} , що більше 8 млрд. Такої кількості людей не існувало. 1152. ≈ 232 р. Рівняння $1,01^x = 10$ розв'яжіть за допомогою ККТ. 1153. 1480. 1157. На 1 день. 1158. Не існують.

Предметний покажчик

- Апофема піраміди 159
- Бічна поверхня конуса 192
 - піраміди 160
 - призми 149
 - циліндра 183
- Бічні грані піраміди 159
 - призми 148
 - ребра піраміди 159
- Варіанта 96
- Варіаційний ряд 96
- Великий круг кулі 200
- Величина випадкова 122
 - дискретна 122
 - неперервна 122
- Вершина конуса 191
 - многогранника 138
 - піраміди 159
- Вибірка 96
- Виміри прямокутного паралелепіпеда 152
- Висота конуса 191
 - піраміди 159
 - призми 149
 - циліндра 183
- Вісь конуса 191
 - кулі 200
 - тіла обертання 181
 - циліндра 181
- Властивості діагоналей паралелепіпеда 152
 - дробів 248
 - імовірності випадкової події 114
 - конуса 192
 - логарифмів 23
 - логарифмічної функції 25
 - об'ємів 214
 - показникової функції 9
 - степенів 7
 - циліндра 184
 - числових нерівностей 249
- Вписані тіла 208
- Геометричне тіло 137
- Гістограма 104
- Грань многогранника 138
 - призми 149
 - бічна 149, 159
 - основи 149
 - піраміди 159
 - основи 159
- Дисперсія 123
- Диференціювання 45
- Діагональ многогранника 138
 - призми 149
- Діагональний переріз піраміди 159
 - призми 151
- Діаграма 103
- Діаметр кулі 200
- Додекаедр правильний 167
- Дотична до графіка функції 58
 - до кулі 201
- Економічний зміст інтеграла 67
- Експонента 10
- Елемент множини 79
- Еліпс 182
- Екватор 200
- Застосування інтегралів 57
- Змінна інтегрування 57
- Знаходження логарифма 23
 - первісних 45
 - об'єму 143
 - площі поверхні 143
 - сліду січної площини 143
- Значення наближені 7
 - степеня 7
 - середнє 97
- Зрізана піраміда 161
- Зрізаний конус 193
- Імовірність класична 114
 - статистична 114

- Інтеграл 57
— визначений 59
— невизначений 59
Інтегральна сума 59
Інтегрування 5
Ймовірнісний експеримент 112
Ймовірність події 112
— випадкової події 114
Комбінаторика 84
Комбінаторні задачі 84
Комбінації 92
— тіл 207
Конічна поверхня 194
Конус 191
Криволінійна трапеція 51
Куб 137, 152, 167
Куля 199
Кут між векторами 200
— природного укусу 191
Кутовий коефіцієнт 58
Логарифм 22
— десятковий 23
— натуральний 23
Математичне сподівання 122
Медіана вибірки 97
Межі інтегрування 57
Метод введення нової змінної 16
— слідів 142
— функціонально-графічний 16
Многогранник 138
— описаний 208
— опуклий 138
— правильний 167
Множина 79
— впорядкована 83
— дійсних чисел 79
— нескінченна 79
— порожня 79
— скінченна 79
— точок 137
Мода вибірки 97
Нерівність логарифмічна 31
— показникова 17
Об'єднання множин 80
Об'єм конуса 222
— куба 215
— кулі 224
— паралелепіпеда 215
— піраміди 222
— призми 216
— тіла обертання 65
— циліндра 216
Область визначення функції
показникової 9
— логарифмічної 25
Область значень функції показни-
кової 9
— логарифмічної 25
Одиниці виміру об'єму 217
Октаедр правильний 167
Описані тіла 208
Основа логарифма 22
— конуса 159
— піраміди 159
— призми 149
— степеня 7
— циліндра 183
Основна логарифмічна тотож-
ність 23
Паралелепіпед 152
— прямий 152
Первісна 45
Переріз множин 80
— многогранника 141
— осьовий 181
Перестановки 91
Підграфік функції 51
Підмет таблиці 102
Підмножина 79
Піраміда 159
— правильна 159, 161
Площа поверхні конуса 192
— многогранника 139
— піраміди 160
— призми 151
— сфери 202
— циліндра 185

- Подія випадкова 112
— достовірна 112
— елементарна 113
— масова 113
— неелементарна 113
— неможлива 112
- Полігон 104
- Полюс кулі 200
- Похідна функції в точці 45
- Правило добутку 85
— знаходження первісних 46
— суми 84
- Призма неопукла 150
— опукла 150
— похила 149
— пряма 149
- Прискорення 47
- Присудок таблиці 102
- Простір елементарних подій 113
- Радіус конуса 159
— кулі 199
— циліндра 182
- Рівняння логарифмічне 30
— показникове 15
- Різниця множин 80
- Робота змінної сили 66
- Розгортка конуса 159
— многогранника 139
— циліндра 185
- Розмах вибірки 96
- Розміщення 90
- Розподіл імовірностей 123
— нормальний 184
— рівномірний 123
— біномний 123
- Середнє значення вибірки 97
- Статистика 96
— математична 96
- Січна площа 141
- Степінь числа 7
— з дійсним показником 7
— з натуральним показником 7
— з цілим показником 7
— з раціональним показником 7
- Стохастика 122
- Сума векторів 195
- Сфера 199, 201
- Таблиця статистична 102
- Твірна конуса 191
— циліндра 182
- Тетраedr 139, 159, 167
— правильний 139
- Тіло геометричне 138
— обертання 181
- Факторіал 86
- Фігура обертання 183
- Формула Ньютона—Лейбніца 58
- Функція 8
— логарифмічна 24
— підінтегральна 57
— показникова 8
— степенева 8
- Центр кулі 199
— правильного многогранника 167
- Циліндр 183
- Частота відносна 121
- Частотна таблиця 96
- Число e 17

ЗМІСТ

Розділ 1. ПОКАЗНИКОВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ ФУНКЦІЇ

| | |
|---|----|
| § 1. Степеневі та показникові функції..... | 7 |
| § 2. Показникові рівняння та нерівності..... | 15 |
| § 3. Логарифми та логарифмічні функції..... | 22 |
| § 4. Логарифмічні рівняння та нерівності..... | 30 |
| Самостійна робота 1..... | 36 |
| Скарбничка досягнень і набутих компетентностей..... | 37 |
| Історичні відомості..... | 38 |
| Тематичні тести..... | 40 |

Розділ 2. ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

| | |
|---|----|
| § 5. Первісна..... | 45 |
| § 6. Площа підграфіка..... | 51 |
| § 7. Визначений інтеграл..... | 57 |
| § 8. Застосування визначених інтегралів..... | 65 |
| Самостійна робота 2..... | 70 |
| Скарбничка досягнень і набутих компетентностей..... | 71 |
| Історичні відомості..... | 72 |
| Тематичні тести..... | 74 |

Розділ 3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

| | |
|---|-----|
| § 9. Множини та підмножини..... | 79 |
| § 10. Комбінаторика та правило добутку..... | 83 |
| § 11. Розміщення, перестановки та комбінації..... | 90 |
| § 12. Елементи статистики..... | 96 |
| § 13. Графічні подання інформації про вибірки..... | 102 |
| § 14. Випадкові події та їх імовірності..... | 112 |
| § 15. Відносна частота події та випадкові величини..... | 121 |
| Самостійна робота 3..... | 128 |
| Скарбничка досягнень і набутих компетентностей..... | 129 |
| Історичні відомості..... | 130 |
| Тематичні тести..... | 132 |

Розділ 4. Многогранники

| | |
|---|-----|
| § 16. Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники | 137 |
| § 17. Призми | 149 |
| § 18. Піраміди | 159 |
| § 19. Правильні многогранники | 166 |
| Самостійна робота 4 | 172 |
| Скарбничка досягнень і набутих компетентностей | 173 |
| Історичні відомості | 174 |
| Тематичні тести | 176 |

Розділ 5. Тіла обертання.

Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл

| | |
|--|-----|
| § 20. Тіла обертання | 181 |
| § 21. Конуси | 191 |
| § 22. Куля і сфера | 199 |
| Самостійна робота 5 | 207 |
| § 23. Комбінації геометричних фігур | 207 |
| § 24. Об'єм призми та циліндра | 214 |
| § 25. Об'єм піраміди, конуса та кулі | 222 |
| Самостійна робота 6 | 230 |
| Скарбничка досягнень і набутих компетентностей | 231 |
| Історичні відомості | 232 |
| Тематичні тести | 234 |

Додатки

| | |
|--|-----|
| Додаткові завдання | 236 |
| Числові вирази і функції, рівняння та нерівності | 236 |
| Прямі та площини в просторі | 242 |
| Похідна та інтеграл | 243 |
| Геометричні тіла | 244 |
| Задачі для кмітливих | 245 |
| Теми для завдань творчого характеру | 247 |
| Жінки-математики | 248 |
| Довідковий матеріал | 249 |
| Відповіді та вказівки до задач і вправ | 259 |
| Предметний покажчик | 267 |

Навчальне видання

*БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна*

МАТЕМАТИКА
Алгебра і початки аналізу та геометрія
Рівень стандарту

Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ВИДАНО ЗА ДЕРЖАВНІ КОШТИ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Редактор *Т. П. Єресько*
Технічний редактор *Л. І. Аленіна*
Комп'ютерна верстка *П. В. Ширнін*
Коректор *О. В. Северцева*

Формат 70×100 $\frac{1}{16}$.
Ум. друк. арк. 22,032 + 0,324 форзац.
Обл.-вид. арк. 21,37 + 0,55 форзац.
Наклад 58 220 пр. Зам. №

В оформленні підручника використано світліни і малюнки з сайту
<https://www.shutterstock.com> авторів:
anfisa focusova, Art of Sketching, bel_ka, Carsten Reisinger, chekart, Evdokimov Maxim,
Evgeny Karandaev, graphixmania, iktash, Iurii Stepanov, Iurii Stepanov, Jiri Vaclavek, JMCM,
Khakimullin Aleksandr, Kudryashka, Mary Skovpen, Nat_S, nikiteev_konstantin, Ollly, Peckki,
pingebat, PRILL, ProStockStudio, Sergey Maksienko, Sergey Nivens, Sunny studio, Twinkle Studio,
ЯКОВЧУК VIACHESLAV, Yuganov Konstantin

ТОВ «ВИДАВНИЧИЙ ДІМ «ОСВІТА»

Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 6109 від 27.03.2018 р.

Адреса видавництва: 04053, м. Київ, вул. Обсерваторна, 25
www.osvita-dim.com.ua

Віддруковано у ПРАТ «Харківська книжкова фабрика «Глобус»»
61052, м. Харків, вул. Різдвяна, 11.
Свідоцтво ДК № 3985 від 22.02.2011 р.
www.globus-book.com