А.С. Истер

АЛГЕБРА

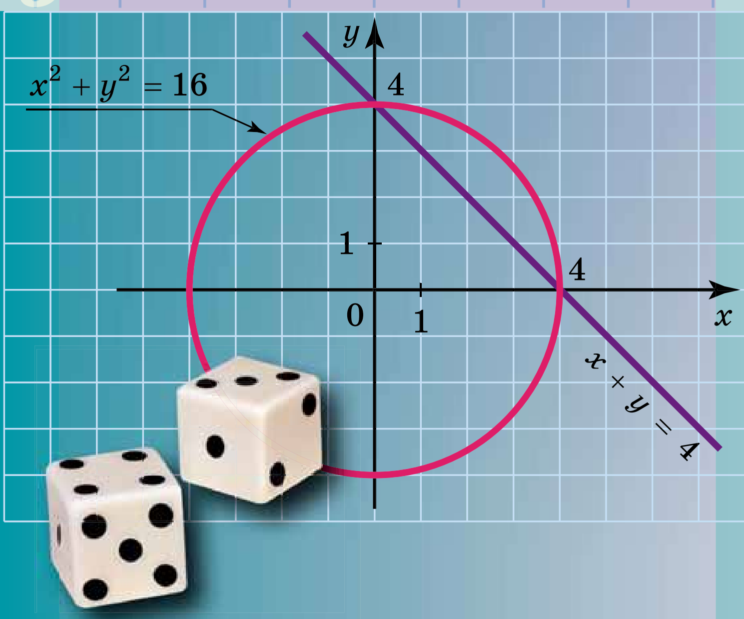
9

$$(a-3)^2 > (a-2)(a-4)$$

$$4 - x > 3(2 + x)$$

$$2x^2 + 3x - 5 > 0$$

$$y = x^2 + 4x + 5$$



УДК 512(075.3)
И89

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(Приказ МОН Украины от 20.03.2017 № 417)

Издано за счет государственных средств.
Продажа запрещена

Переведено по изданию:
Алгебра : підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. — Київ : Генеза, 2017. — 264 с. — ISBN 978-966-11-0843-0.

Эксперты, проводившие экспертизу учебника во время конкурсного отбора проектов учебников для 9 класса общеобразовательных учебных заведений и сделавшие вывод о целесообразности предоставления учебнику грифа «Рекомендовано Министерством образования и науки Украины»:

Ковальчук В.П., учитель математики средней общеобразовательной школы I–III степеней № 1 пгт Крыжополь Винницкой области, учитель-методист;
Мазий С.М., старший учитель, методист методического кабинета отдела образования Люботинской городской государственной администрации Харьковской области;
Скрипка Г.В., старший преподаватель кафедры теории и методики среднего образования коммунального заведения «Кировоградский областной институт последипломного педагогического образования имени Василия Сухомлинского».

Истер А. С.
И89 Алгебра : учебн. для 9-го кл. общеобразоват. учебн. завед. / А.С. Истер. — Киев : Генеза, 2017. — 264 с.

ISBN 978-966-11-0865-2.

Материал учебника соответствует действующей программе по математике, содержит достаточное количество дифференцированных упражнений и прикладных задач.

После каждого параграфа выделены упражнения для повторения, нестандартные задачи и задачи на применение математики в повседневной жизни. Для подготовки к контрольной работе предусмотрены упражнения рубрик «Домашняя самостоятельная работа» и «Задания для проверки знаний». Рубрика «А еще раньше...» знакомит с историей развития и становления алгебры как науки.

УДК 512(075.3)

ISBN 978-966-11-0843-0 (укр.)
ISBN 978-966-11-0865-2 (рус.)

Уважаемые учащиеся!

В этом году вы продолжите изучать одну из важнейших математических дисциплин – алгебру. Поможет вам в этом учебник, который вы держите в руках.

При изучении теоретического материала обращайте внимание на текст, выделенный **жирным** шрифтом. Его надо запомнить.

Обращайте внимание и на условные обозначения:

– надо запомнить; – упражнения для повторения;

– вопросы и задания к параграфам;

– рубрика «Решите и подготовьтесь к изучению нового материала»;

1 – задание для классной работы; **2** – для домашней работы;

– рубрика «Математика вокруг нас»;

– рубрика «Интересные задачки для неленивых» и дополнительный материал;

1 – упражнения начального уровня;

2 – среднего уровня; 3 – достаточного уровня;

4 – высокого уровня; ★ – повышенной сложности.

Проверить свои знания и подготовиться к тематическому оцениванию можно, выполняя задания «Домашней самостоятельной работы» и «Задания для проверки знаний». В конце каждой главы есть упражнения для ее повторения, а в конце учебника – «Задания для проверки знаний по курсу алгебры 9 класса». «Задачи повышенной сложности» помогут подготовиться к математической олимпиаде и углубить знание математики. В учебнике также есть пример варианта аттестационной письменной работы.

Изученный в школе теоретический материал обязательно прорабатывайте дома.

В учебнике имеется большое количество упражнений. Большинство из них вы рассмотрите на уроках и выполняя домашнюю работу, остальные рекомендуем вам выполнить самостоятельно.

Интересные факты из истории математики, о ее становлении и развитии как науки вы найдете в рубрике «А еще раньше...».

Уважаемые учителя!

Предлагаемый учебник содержит много упражнений; в большинстве параграфов упражнения представлены «с запасом». Поэтому в зависимости от поставленной цели, уровня подготовки учащихся, степени дифференциации учебного процесса и т.п. используйте их на уроках, во внеурочной работе и в качестве домашнего задания.

Дополнительные упражнения рубрики «Задания для проверки знаний» предназначены для учащихся, которые на уроке раньше других справились с основными заданиями. Правильность их решения учитель может оценить отдельно. Упражнения для повторения глав можно предложить учащимся на обобщающих уроках или при повторении и систематизации учебного материала в конце учебного года. В конце учебника представлен образец варианта аттестационной письменной работы. Задачи повышенной сложности и «Интересные задачки для неленивых» смогут удовлетворить повышенный интерес учащихся к предмету и будут способствовать их подготовке к различным математическим соревнованиям.

Уважаемые родители!

Если ваш ребенок пропустил один или несколько уроков алгебры, предложите ему самостоятельно проработать этот материал по учебнику. Сначала ему нужно будет прочитать теоретический материал, изложенный простым доступным языком и содержащий много примеров решения заданий, а затем – выполнить посильные ему упражнения из предложенных в соответствующем тематическом параграфе.

При изучении курса алгебры 9 класса вы можете предлагать ребенку дополнительно решать дома упражнения, которые не рассматривались на уроке. Это поможет ему лучше усваивать материал.

Изучение каждой темы завершается тематическим оцениванием. Перед его проведением предложите ребенку выполнить задания «Домашней самостоятельной работы», представленные в форме теста, и «Задания для проверки знаний». Это поможет ему освежить в памяти основные типы упражнений и качественно подготовиться к тематическому оцениванию.

Глава 1
Неравенства

В этой главе вы:
- **вспомните** числовые неравенства, двойные неравенства;
- **познакомитесь** с понятиями объединения и пересечения множеств, линейными неравенствами с одной переменной и их системами;
- **узнаете** о свойствах числовых неравенств;
- **научитесь** решать линейные неравенства с одной переменной и системы линейных неравенств с одной переменной.

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В предыдущих классах вы научились сравнивать всевозможные числа и записывать результат их сравнения в виде равенства или неравенства с помощью знаков =, >, <. Например, $0{,}4 = \frac{2}{5}$; $-2 > -11$; $5 < 7$. Выражение, записанное слева от знака неравенства, называют *левой частью неравенства*, а выражение, записанное справа, – *правой частью неравенства*. Так, в последнем неравенстве левой частью неравенства является число 5, а правой – число 7.

Неравенство, обе части которого – числа, называют *числовым неравенством*. Например,

$$1{,}2 > -0{,}8;\ \sqrt{2} < 2;\ 0{,}1 < \frac{1}{9};\ \sqrt{7} + 2 > \sqrt{8}.$$

Для любых двух чисел a и b имеет место одно и только одно из соотношений: $a > b$, $a < b$ или $a = b$. Ранее в зависимости от вида чисел (натуральные числа, десятичные дроби, обычные дроби с одинаковыми или разными знаменателями) мы использовали то или иное правило сравнения чисел. Удобнее было бы иметь универсальное правило сравнения.

Известно, что $5 > 2$. Рассмотрим разность левой и правой частей этого неравенства: $5 - 2 = 3 > 0$, разность положительна. Рассматривая разность левой и правой частей неравенства $3 < 7$, получаем: $3 - 7 = -4 < 0$, разность отрицательна. Рассматривая в равенстве $4 = 4$ разность левой и правой частей, получим, что разность равна нулю: $4 - 4 = 0$.

Приходим к *определению сравнения чисел*.

$a > b$, **если** $a - b > 0$;
$a < b$, **если** $a - b < 0$;
$a = b$, **если** $a - b = 0$.

Пример 1. Сравнить $\frac{5}{9}$ и 0,6.

Решение. Рассмотрим разность чисел $\frac{5}{9}$ и 0,6:

$$\frac{5}{9} - 0{,}6 = \frac{5}{9} - \frac{3}{5} = \frac{25-27}{45} = -\frac{2}{45} < 0.$$

Разность отрицательна, значит $\frac{5}{9} < 0{,}6$.

Ответ. $\frac{5}{9} < 0{,}6$.

Напомним, что на координатной прямой точка, соответствующая меньшему числу, лежит левее точки, соответствующей большему числу. На рисунке 1 точка, соответствующая числу m, лежит левее точки, соответствующей числу n, поэтому $m < n$.

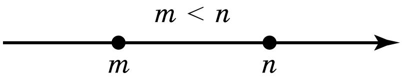


Рис. 1

Числовые неравенства бывают *верные* и *неверные*.

Например, $\frac{5}{9} < 0{,}6$; $\sqrt{2} > 1$ – верные числовые неравенства, $1{,}8 > 2$; $\frac{3}{8} < -0{,}1$ – неверные числовые неравенства.

Кроме знаков $>$ и $<$, называемых *знаками строгого неравенства*, в математике также используют знаки $\leqslant$ (читают: «меньше или равно» или «не больше») и $\geqslant$ («больше или равно» или «не меньше»). Знаки $\geqslant$ и $\leqslant$ называют *знаками нестрогого неравенства*. Неравенства, которые содержат знак $>$ или $<$, называют *строгими неравенствами*, а те, которые содержат знак $\geqslant$ или $\leqslant$, – *нестрогими неравенствами*.

Из определения соотношений «больше», «меньше» и «равно» получаем, что $a \geqslant b$, если $a - b \geqslant 0$, и $a \leqslant b$, если $a - b \leqslant 0$.

Рассмотрим, как с помощью определения сравнения чисел можно *доказывать неравенства*.

Пример 2. Доказать, что при любом значении a имеет место неравенство $(a-3)^2 > (a-2)(a-4)$.

Доказательство. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства и упростим ее:

$(a-3)^2 - (a-2)(a-4) = a^2 - 6a + 9 - (a^2 - 2a - 4a + 8) =$
$= a^2 - 6a + 9 - a^2 + 6a - 8 = 1 > 0.$

Так как $(a-3)^2 - (a-2)(a-4) > 0$ при любом значении a, то при любом значении a имеет место неравенство $(a-3)^2 > (a-2)(a-4)$, что и требовалось доказать.

Условие для примера 2 можно было сформулировать проще, например: доказать неравенство $(a-3)^2 > (a-2)(a-4)$.

Пример 3. Доказать неравенство $2(x-8) \leqslant x(x-6)$.

Доказательство. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства и упростим ее:

$2(x-8) - x(x-6) = 2x - 16 - x^2 + 6x = -x^2 + 8x - 16 =$
$= -(x^2 - 8x + 16) = -(x-4)^2.$

Так как $(x-4)^2 \geqslant 0$ при любом значении x, то $-(x-4)^2 \leqslant 0$. Следовательно, по определению, неравенство $2(x-8) \leqslant x(x-6)$ верно при любом x, что и требовалось доказать.

Пример 4. Доказать неравенство $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$.

Доказательство. В левой части неравенства выделим квадраты двучленов:

$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 15 =$
$= (x+2)^2 + (y-3)^2 + 2.$

При любых значениях x и y: $(x+2)^2 \geqslant 0$ и $(y-3)^2 \geqslant 0$.

А значит, $(x+2)^2 + (y-3)^2 \geqslant 0$, а $(x+2)^2 + (y-3)^2 + 2 > 0$.

Следовательно, $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$, что и требовалось доказать.

Напомним, что число $\dfrac{a+b}{2}$ называют *средним арифметическим чисел* a и b. Для неотрицательных чисел a и b число $\sqrt{ab}$ называют их *средним геометрическим*.

Пример 5. Доказать, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел a и b не меньше их среднего геометрического (*неравенство Коши*):

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \text{ где } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

Доказательство. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем ее, учитывая, что $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Получим:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} =$$

$= \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0$ для любых $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Следовательно, $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ при любых $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Отметим, что знак равенства в неравенстве Коши возможен тогда и только тогда, когда $a = b$. Если $a \neq b$, то $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

А еще раньше...

Понятия «больше» и «меньше» появились одновременно с понятием «равно». Еще с древних времен в практической деятельности человека возникла потребность сравнивать количество предметов, длины отрезков, площади участков и т. п. Так, например, несколько неравенств присутствует в выдающемся труде «Начала» древнегреческого математика Евклида (ок. 356–300 до н. э.). В частности, там он доказывает неравенство $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ геометрическим методом для положительных чисел a и b.

Чтобы оценить отношение длины круга C к его диаметру d (позже названное числом π), другой древнегреческий физик и математик Архимед (ок. 287–212 до н. э.) использовал неравенство: $3\dfrac{10}{71} < \dfrac{C}{d} < 3\dfrac{1}{7}$.

Привычные нам символы для записи неравенств появились лишь в XVII–XVIII в. Знаки $>$ и $<$ впервые использовал английский математик Томас Харриот (1560–1621) в работе «Практика аналитического искусства», опубликованной в 1631 году, а знаки $\geqslant$ и $\leqslant$ – в 1734 году французский математик и астроном Пьер Бугер (1698–1758).

Кроме неравенства Коши отметим еще и такие известные неравенства:

1) Неравенство *Бернулли*.

$$(1 + x)^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha x, \text{ где } x \geqslant -1,\ \alpha \text{ – целое число.}$$

2) Неравенство *Чебышёва*.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ – положительные числа, причем $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$.

3) Неравенство *Коши–Буняковского*.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ – любые числа.

Последнее неравенство доказали французский математик *О. Л. Коши* (1789–1857) и наш земляк *В. Я. Буняковский*.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889) родился в г. Бар (сейчас – Винницкая обл.). Учился по большей части за рубежом, в основном во Франции, где его ближайшим наставником был сам Коши. В 1825 году в Парижском университете Буняковский защитил диссертацию и получил степень доктора наук. Его исследования касались области прикладной математики и математической физики. В 1826 году он переезжает из Парижа в Петербург и начинает преподавать математику и механику в известных на то время учебных заведениях, одновременно занимаясь переводом работ Коши с французского.

1. Назовите левую и праву части неравенства $-5 > -10$.
2. Приведите примеры числовых неравенств.
3. Сформулируйте определение сравнения чисел.
4. Какие неравенства называют строгими? Нестрогими?
5. Сформулируйте и докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел (неравенство Коши).

1 Начальный уровень

1. Сравните числа:

1) $0{,}8$ и $0{,}7$; 2) $-1{,}2$ и $-1{,}25$; 3) $1\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{3}$;

4) $-\frac{4}{7}$ и $-\frac{3}{7}$; 5) π и 3; 6) $-2{,}31$ и 0.

2. Сравните числа:

1) $1{,}8$ и $1{,}9$; 2) $-1{,}3$ и $-1{,}27$; 3) $\frac{4}{5}$ и $2\frac{4}{5}$;

4) $-\frac{5}{8}$ и $-\frac{7}{8}$; 5) 4 и π; 6) 0 и $-3{,}71$.

3. (*Устно*). Верно ли неравенство:

1) $2{,}7 > -3{,}1$; 2) $0{,}5 < -3{,}17$; 3) $7{,}8 > 7{,}08$;

4) $4{,}1 < 4\frac{1}{10}$; 5) $-7{,}1 > -7{,}19$; 6) $5{,}05 < 5{,}5$?

4. Сравните числа a и b, если:

1) $a - b = 5$; 2) $a - b = 0$; 3) $a - b = -7$.

5. Сравните числа m и n, если разность $m - n$ равна:

1) -18; 2) $1{,}7$; 3) 0.

2 Средний уровень

6. Какое из чисел x или y меньше, если:

1) $x + 4 = y$; 2) $y - 2 = x$; 3) $y + 2 = x$; 4) $x - 3 = y$?

7. Какое из чисел a или b больше, если:

1) $a - 7 = b$; 2) $a + 3 = b$; 3) $b + 2 = a$; 4) $b - 5 = a$?

8. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам m, n и p, если $m < n$ и $p > n$.

9. Запишите в порядке возрастания числа:

$$\frac{4}{5};\ -\frac{3}{7};\ -0{,}1;\ 0;\ \frac{3}{8};\ -1{,}2;\ 0{,}7.$$

10. Запишите в порядке убывания числа:

$$-1{,}2;\ \frac{3}{4};\ 0;\ -0{,}99;\ 0{,}8;\ -0{,}6;\ 0{,}51.$$

11. Какие из следующих неравенств верны при любых значениях x:

1) $x^2 > 0$; 2) $x^2 \geqslant 0$; 3) $x + 1 > 0$;
4) $x^2 + 1 > 0$; 5) $(x - 3)^2 \geqslant 0$; 6) $(x + 4)^2 > 0$;
7) $x > -x$; 8) $-x \leqslant x$.

12. Докажите неравенство:

1) $3m + 5 > 3(m - 1)$; 2) $p(p - 2) < p^2 - 2p + 7$;
3) $(a + 1)(a - 1) < a^2$; 4) $x(x + 2) > 2x - 1$.

13. Докажите неравенство:

1) $2a - 3 < 2(a - 1)$; 2) $c(c + 2) > c^2 + 2c - 3$;
3) $(x + 2)(x - 2) + 5 > x^2$; 4) $3m - 2 < m(m + 3)$.

14. Докажите неравенство:

1) $x^2 + y^2 \geqslant -2xy$; 2) $p(p - 6) \geqslant -9$;
3) $a(a + b) \geqslant ab$; 4) $m^2 + 5m + 4 \geqslant m$.

15. Докажите неравенство:

1) $m^2 + n^2 \geqslant 2mn$; 2) $t(t + 2) \geqslant -1$;
3) $c(c - d) \geqslant -cd$; 4) $p^2 - 11p + 36 \geqslant p$.

3 Достаточный уровень

16. Сравните числа:

1) $\sqrt{5} - 2$ и $\dfrac{1}{\sqrt{5} + 2}$; 2) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

17. Сравните числа:

1) $\sqrt{3} - 1$ и $\dfrac{1}{\sqrt{3} + 1}$;   2) $4 + \sqrt{15}$ и $\dfrac{1}{4 - \sqrt{15}}$.

18. Докажите неравенство:

1) $a^2 + 10a + 26 > 0$;   2) $8a < a^2 + 20$.

19. Докажите неравенство:

1) $b^2 - 4b + 7 > 0$;   2) $-2b < b^2 + 2$.

20. Пусть x – произвольное число. Сравните с нулем значение выражения:

1) $x^2 + 5$;   2) $-(x - 1)^2 - 3$;   3) $(x - 7)^2$;
4) $-(x + 9)^2$;   5) $9 + (x - 1)^2$;   6) $(x - 1)^2 + (x - 2)^2$.

21. Докажите, что: 1) $x^3 - 3x^2 + x - 3 \geqslant 0$ при $x \geqslant 3$;

2) $\dfrac{3}{a + 3} > \dfrac{1}{a + 1}$, если $a > 0$.

22. Докажите, что: 1) $m^3 + m^2 + 5m + 5 \geqslant 0$ при $m \geqslant -1$;

2) $\dfrac{p}{p + 7} < \dfrac{p + 1}{p + 8}$, если $p > 0$.

4 Высокий уровень

23. Докажите неравенство:

1) $m^2 + 4m + p^2 + 2p + 5 \geqslant 0$;
2) $a^2 + b^2 \geqslant 4(a + b) - 8$;
3) $m^2 + n^2 + 1 \geqslant m + n + mn$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 > 2(a + b + c) - 4$.

24. Для каждого положительного значения a докажите, что:

1) $a^3 + 2a^2 + a > 0$;   2) $a^3 + 1 \geqslant a^2 + a$;
3) $(a + 1)^3 \leqslant 4(a^3 + 1)$;   4) $a^6 - a^5 + a^4 > 0$.

25. Для каждого отрицательного значения p докажите, что:

1) $p^3 + 10p^2 + 25p \leqslant 0$;

2) $1 - p^3 > p - p^2$.

26. Докажите, что:

1) $\dfrac{7a}{2b} + \dfrac{8b}{7a} \geqslant 4$, где a и b – числа одного и того же знака;

2) $\dfrac{3m}{5n} + \dfrac{5n}{12m} \leqslant -1$, где m и n – числа разных знаков.

27. Докажите, что:

1) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$, где $a > 0$, $b > 0$;

2) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \leqslant -2$, где $a < 0$, $b > 0$.

28. Сравните значение выражений $m^3 + n^3$ и $mn(m + n)$, если m и n – положительные числа, причем $m \neq n$.

29. К каждому из чисел 2, 3, 4, 5 прибавили одно и то же число a. Сравните произведение первого и четвертого из полученных выражений с произведением второго и третьего.

Упражнения для повторения

30. Решите уравнение:

1) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; 2) $5x^2 - 2x - 3 = 0$.

31. Постройте график функции:

1) $y = 3x - 5$; 2) $y = 7$; 3) $y = -0{,}2x$.

32. Трактористы должны были вспахать поле площадью 40 гектаров. Каждый день они вспахивали на 1 гектар больше, чем планировалось, и поэтому закончили пахоту на 2 дня раньше срока. За сколько дней трактористы вспахали поле?

33. Вычислите значение суммы:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{9}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{49} + \sqrt{45}}.$$

Математика вокруг нас

34. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или пеноблочный. Для пеноблочного фундамента нужно 3 кубометра пеноблоков и 6 мешков цемента. Для бетонного фундамента нужно 3 тонны щебня и 30 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 780 грн, щебень – 185 грн за тонну, а мешок цемента стоит 65 грн. Какова будет стоимость материала, если выбрать самый дешевый тип фундамента?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

35. Прочитайте запись:

1) $a \leqslant 7$; 2) $b > -8$; 3) $x < -2$;
4) $m \geqslant 0$; 5) $-2 < x \leqslant 3$; 6) $0 < p < 5$;
7) $3 \leqslant c \leqslant 5$; 8) $-5 \leqslant y < 7$.

36. Верно ли утверждение:

1) если $a = b$, то $b = a$;
2) если $a = b$, $b = c$, то $a = c$;
3) если $a = b$ и p – любое число, то $a + p = b + p$;
4) если $a = b$ и p – любое число, то $a - p = b - p$?

37. Сравните числа x и y, если:

1) $x < 0$, $y > 0$; 2) $x \geqslant 0$, $y < 0$;
3) $x > 0$, $y \leqslant 0$; 4) $x \leqslant 0$, $y > 0$.

Интересные задачки для нелениных

38. Водитель планировал преодолеть путь из города A в город B со скоростью 60 км/ч, а возвращаться назад – со скоростью 80 км/ч. Но, возвращаясь назад и проехав половину пути с запланированной скоростью, он сделал остановку для ночлега. Какова средняя скорость в описанный в задаче промежуток времени?

§ 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим свойства числовых неравенств.

Свойство 1. ***Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$.***

Доказательство. Поскольку $a > b$, то $a - b > 0$. Тогда $-(a - b) < 0$, но $-(a - b) = b - a$, поэтому $b - a < 0$. Следовательно, $b < a$.

Аналогично будем рассуждать и в случае, когда $a < b$.

Свойство 2. ***Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$; если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.***

Доказательство. По условию $a > b$ и $b > c$. Поэтому $a - b > 0$ и $b - c > 0$, т. е. числа $a - b$ и $b - c$ – положительны. Рассмотрим разность $a - c$. Имеем: $a - c = a - c \mathbf{- b + b} = (a - b) + (b - c) > 0$ (так как числа $a - b$ и $b - c$ – положительны). Поэтому $a > c$.

Аналогично рассуждаем, когда $a < b$ и $b < c$.

Геометрическая иллюстрация свойства 2 представлена на рисунках 2 и 3.

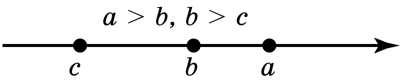


Рис. 2

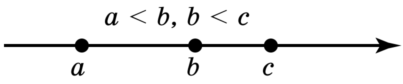


Рис. 3

Свойство 3. ***Если $a > b$ и p – любое число, то $a + p > b + p$.***

Доказательство. По условию $a > b$, значит, $a - b > 0$. Рассмотрим разность $(a + p) - (b + p)$ и преобразуем ее:

$$(a + p) - (b + p) = a + p - b - p = a - b > 0,$$

следовательно, $a + p > b + p$.

Следствие. ***Если $a > b + m$, то $a - m > b$.***

Доказательство. Так как $a > b + m$, то $a - (b + m) > 0$, т. е. $a - b - m > 0$. Но $a - b - m = (a - b) - m$, поэтому $(a - b) - m > 0$. Следовательно, $a - m > b$.

Из этого следствия имеем:

если некоторое слагаемое перенести из одной части верного неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим верное неравенство.

Свойство 4. ***Если $a > b$ и $p > 0$, то $ap > bp$;
если $a > b$ и $p < 0$, то $ap < bp$.***

Доказательство. Пусть $a > b$, тогда $a - b > 0$. Рассмотрим разность $ap - bp$ и преобразуем ее: $ap - bp = p(a - b)$.

Если $p > 0$, то $p(a - b) > 0$, а значит, $ap > bp$;
если $p < 0$, то $p(a - b) < 0$, а значит, $ap < bp$.

Так как $\frac{a}{q} = a \cdot \frac{1}{q}$, то, обозначив $p = \frac{1}{q}$, получим, что аналогичное свойство имеет место и в случае деления обеих частей неравенства на отличное от нуля число q.

Следовательно,

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство;
если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство.

С л е д с т в и е. **Если $a > 0$, $b > 0$ и $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разделим обе части неравенства $a > b$ на положительное число ab: $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$; тогда $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, т. е. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Пример 1. Дано: $m > n$. Сравнить:

1) $m + 1$ и $n + 1$; 2) $n - 5$ и $m - 5$; 3) $1{,}7m$ и $1{,}7n$;

4) $-m$ и $-n$; 5) $-10n$ и $-10m$; 6) $\frac{m}{8}$ и $\frac{n}{8}$.

Р е ш е н и е. 1) Если к обеим частям верного неравенства $m > n$ прибавим число 1, то по свойству 3 получим: $m + 1 > n + 1$.

2) Если к обеим частям верного неравенства $m > n$ прибавим число -5, то по свойству 3 получим верное неравенство $m - 5 > n - 5$, т. е. $n - 5 < m - 5$.

3) Если обе части верного неравенства $m > n$ умножим на положительное число 1,7, то по свойству 4 получим верное неравенство $1{,}7m > 1{,}7n$.

4) Если обе части верного неравенства $m > n$ умножим на отрицательное число -1, то по свойству 4 получим верное неравенство $-m < -n$.

5) Если обе части верного неравенства $m > n$ умножим на отрицательное число -10, то по свойству 4 получим верное неравенство $-10m < -10n$, т. е. $-10n > -10m$.

Решение таких упражнений можно записать короче:

$$m > n \mid \cdot (-10)$$
$$-10m < -10n;$$
$$-10n > -10m.$$

6) Если обе части верного неравенства $m > n$ разделим на положительное число 8, то по свойству 4 получим верное неравенство $\frac{m}{8} > \frac{n}{8}$.

О т в е т. 1) $m + 1 > n + 1$; 2) $n - 5 < m - 5$;
3) $1{,}7m > 1{,}7n$; 4) $-m < -n$; 5) $-10n > -10m$; 6) $\frac{m}{8} > \frac{n}{8}$.

Напомним, что в математике есть и *двойные числовые неравенства*: $a < b < c$, $a \leqslant b < c$, $a < b \leqslant c$, $a \leqslant b \leqslant c$. Например, двойное неравенство $a < b < c$ означает, что одновременно имеют место неравенства $a < b$ и $b < c$. Так как $a < b$ и $b < c$, то для любого числа p по свойству 3 имеют место неравенства $a + p < b + p$ и $b + p < c + p$, т. е. $a + p < b + p < c + p$.

Таким образом, если ко всем частям верного двойного неравенства прибавить одно и то же число, то получим верное двойное неравенство.

Рассуждая аналогично, получаем:
если $a < b < c$ и $p > 0$, то $ap < bp < cp$;
если $a < b < c$ и $p < 0$, то $ap > bp > cp$, т. е. $cp < bp < ap$;
если a, b, c – положительны и $a < b < c$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$,
т. е. $\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Рассмотренные нами свойства числовых неравенств можно использовать для *оценивания значений выражений*.

Пример 2. Оценить периметр квадрата со стороной a см, если $3{,}2 < a < 3{,}9$.

Р е ш е н и е. Так как периметр P квадрата находят по формуле $P = 4a$, то все части неравенства $3{,}2 < a < 3{,}9$ нужно умножить на 4. Получим:

$$3{,}2 \cdot 4 < 4a < 3{,}9 \cdot 4, \text{ тогда } 12{,}8 < P < 15{,}6.$$

Следовательно, периметр квадрата больше чем 12,8 см, но меньше чем 15,6 см.

О т в е т. $12{,}8 < P < 15{,}6$.

Пример 3. Дано: $1 < x < 5$. Оценить значение выражения:
1) $x + 2$; 2) $x - 3$; 3) $6x$; 4) $-x$;
5) $\frac{x}{15}$; 6) $-\frac{x}{10}$; 7) $3x - 1$; 8) $\frac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. Используя форму записи, предложенную в задании 5 примера 1, получим:

1)
$$1 < x < 5 \;\big|+2$$
$$1 + 2 < x + 2 < 5 + 2;$$
$$3 < x + 2 < 7;$$

2)
$$1 < x < 5 \;\big|-3$$
$$1 - 3 < x - 3 < 5 - 3;$$
$$-2 < x - 3 < 2;$$

3)
$$1 < x < 5 \,\Big|\cdot 6$$
$$1 \cdot 6 < 6x < 5 \cdot 6;$$
$$6 < 6x < 30;$$

4)
$$1 < x < 5 \,\Big|\cdot (-1)$$
$$1 \cdot (-1) > x \cdot (-1) > 5 \cdot (-1);$$
$$-5 < -x < -1;$$

5)
$$1 < x < 5 \,\Big|: 15$$
$$\frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{5}{15};$$
$$\frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{1}{3};$$

6)
$$1 < x < 5 \,\Big|: (-10)$$
$$\frac{1}{-10} > \frac{x}{-10} > \frac{5}{-10};$$
$$-\frac{1}{2} < -\frac{x}{10} < -\frac{1}{10};$$

7)
$$1 < x < 5 \,\Big|\cdot 3$$
$$1 \cdot 3 < 3x < 5 \cdot 3 \,\Big| - 1$$
$$3 - 1 < 3x - 1 < 15 - 1;$$
$$2 < 3x - 1 < 14;$$

8) $1 < x < 5$
$$\frac{1}{1} > \frac{1}{x} > \frac{1}{5};$$
$$\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 1.$$

О т в е т. 1) $3 < x + 2 < 7$; 2) $-2 < x - 3 < 2$;
3) $6 < 6x < 30$; 4) $-5 < -x < -1$;
5) $\frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{1}{3}$; 6) $-\frac{1}{2} < -\frac{x}{10} < -\frac{1}{10}$;
7) $2 < 3x - 1 < 14$; 8) $\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 1$.

1. Сформулируйте и докажите свойства числовых неравенств и их следствия.
2. Приведите примеры двойных числовых неравенств.
3. Сформулируйте свойства двойных числовых неравенств.

1 Начальный уровень

39. Запишите верное неравенство, получающееся, если:
1) к обеим частям неравенства $-2 < 5$ прибавить -5;
2) из обеих частей неравенства $7 > 3$ вычесть 1;
3) обе части неравенства $-2 < 9$ умножить на 3;
4) обе части неравенства $-5 > -10$ умножить на -2;
5) обе части неравенства $8 > 4$ разделить на 2;
6) обе части неравенства $3 < 18$ разделить на -3.

40. Запишите полученное верное неравенство, если:

1) к обеим частям неравенства $7 > 5$ прибавить 8;
2) из обеих частей неравенства $0 < 8$ вычесть 6;
3) обе части неравенства $12 > 4$ умножить на 3; на -1;
4) обе части неравенства $15 < 18$ разделить на 3; на -3.

41. (*Устно*). Сравните x и y, если:

1) $x < 5$, $5 < y$; 2) $x > 2$, $2 > y$.

2 Средний уровень

42. Изобразите на координатной прямой точки, соответствующие числам a, b, c, d, e, если: $a > b$, $b > c$, $d < c$, $a < e$.

43. Известно, что $m > n$, $p < n$, $t > m$. Сравните:

1) p и m; 2) p и t; 3) n и t.

44. Сравните число a с нулем, если:

1) $a > b$, $b \geqslant 1$; 2) $a < b$, $b < -2$.

45. Сравните число x с нулем, если:

1) $x < y$, $y \leqslant -3$; 2) $x > y$, $y > 5$.

46. Известно, что $x > y$. Каким знаком ($>$ или $<$) нужно заменить звездочку, чтобы получить верное неравенство:

1) $x + 2 * y + 2$; 2) $x - 3 * y - 3$; 3) $1{,}8x * 1{,}8y$;
4) $-x * -y$; 5) $-2{,}7x * -2{,}7y$; 6) $\frac{x}{3} * \frac{y}{3}$?

47. Дано: $a < b$. Сравните:

1) $a - 7$ и $b - 7$; 2) $a + 3$ и $b + 3$; 3) $1{,}9a$ и $1{,}9b$;
4) $-a$ и $-b$; 5) $-0{,}8a$ и $-0{,}8b$; 6) $\frac{a}{5}$ и $\frac{b}{5}$.

48. Известно, что $1 < p < 2$. Оцените значение выражения:

1) $p + 3$; 2) $p - 4$; 3) $12p$;
4) $\frac{p}{2}$; 5) $-p$; 6) $-3p$.

49. Известно, что $2 < m < 10$. Оцените значение выражения:

1) $m + 1$; 2) $m - 2$; 3) $3m$;
4) $\frac{m}{5}$; 5) $-m$; 6) $-7m$.

50. Сравните числа:

1) $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, если $a > 0$, $b > 0$ и $a < b$;

2) $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$, если $m > n$, m и n – положительны.

51. Сравните числа:

1) $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{5}$, если $x > 5$;
2) $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{2}$, если $0 < b < 2$.

52. Сравните числа:

1) $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{9}$, если $0 < a < 9$;
2) $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{3}$, если $c > 3$.

53. Оцените значение выражения $\frac{1}{a}$, если $10 < a < 20$.

54. Оцените значение выражения $\frac{1}{x}$, если $5 < x < 10$.

3 Достаточный уровень

55. Сравните число a с нулем при условии, что:
1) $a + 2 > b + 2$ и $b \geqslant 0{,}3$;
2) $a - 3 < p - 3$ и $p < -0{,}7$;
3) $7a > 7x$ и $x > 8$;
4) $-9a < -9b$ и $b \geqslant 13$.

56. Сравните число x с нулем при условии, что:
1) $x - 5 < y - 5$ и $y < -1$;
2) $x + 7 > a + 7$ и $a \geqslant 1$;
3) $2x > 2p$ и $p > 0{,}17$;
4) $-x > -t$ и $t \leqslant -2{,}5$.

57. Верно ли утверждение:

1) если $a > 5$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{5}$;
2) если $a < 5$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{5}$?

58. Известно, что $x > y$. Сравните, если это возможно:
1) $x + 2$ и y;
2) $y - 3$ и x;
3) $-x + 1$ и $-y + 1$;
4) $-x$ и $-y + 8$;
5) $-(x + 1)$ и $-y$;
6) $x - 1$ и $y + 2$.

59. Известно, что $a < b$. Сравните, если это возможно:
1) $a - 2$ и b;
2) $b + 3$ и a;
3) $-a + 2$ и $-b + 2$;
4) $-b - 7$ и $-a$;
5) $-a$ и $-(b + 3)$;
6) $a + 3$ и $b - 1$.

60. Известно, что $1{,}2 < x < 1{,}5$. Оцените значение выражения:

1) $2x + 0{,}7$;
2) $5 - x$;
3) $\frac{x}{3} - 1$;
4) $2 - 10x$.

61. Известно, что $0,8 < a < 1,2$. Оцените значение выражения:

1) $3a - 0,2$; 2) $4 - a$; 3) $\frac{a}{2} + 3$; 4) $10 - 5a$.

62. Оцените значение выражения:

1) $\frac{20}{a}$, если $2 < a < 5$; 2) $\frac{1}{3a + 4}$, если $-1 < a < 2$.

63. Оцените значение выражения:

1) $\frac{100}{x}$, если $5 < x < 10$; 2) $\frac{1}{2x - 3}$, если $2 < x < 4$.

64. Периметр равностороннего треугольника равен P см. Оцените сторону a (в см) этого треугольника, если $12,6 < P < 15$.

65. Масса четырех одинаковых мешков с сахаром равна m кг. Оцените массу p (в кг) одного такого мешка, если $192 < m < 204$.

Высокий уровень

66. Сравните x и y, если:

1) $x + 2 > m > y + 3$; 2) $x - 2 < p < y - 3$.

67. Сравните a и b, если:

1) $a + 3 < c < b + 2$; 2) $a - 7 > d > b - 5$.

68. Известно, что $1 < a < 2$. Оцените значение выражения $\frac{12}{7 - 3a}$.

69. Известно, что $2 < b < 5$. Оцените значение выражения $\frac{27}{13 - 2b}$.

70. Известно, что $-2 < x < 2$. Оцените значение выражения $\frac{6}{x}$.

Упражнения для повторения

71. Выполните действия:

1) $\frac{x + 3y}{3x} - \frac{x + 2y}{2x}$; 2) $\frac{1}{m(m + n)} + \frac{1}{n(m + n)}$;

3) $\frac{3p^2}{p - 2} - 3p$; 4) $\frac{a}{a - 5} + \frac{5}{5 - a}$.

72. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+3}{x+1} - \dfrac{x+2}{1-x} = \dfrac{x+5}{x^2-1}$;   2) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{2-x} = \dfrac{x+2}{x^2-2x}$.

73. Докажите, что значение выражения $8^{15} - 2^{40}$ кратно числу 31.

74. Числа x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2 - 3x - 10 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2$.

Математика вокруг нас

75. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовой техники на основе коэффициента ценности, равного 0,01 от средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивают целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляют по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P$.

В таблице приведены средняя цена и оценка каждого из показателей для нескольких моделей кухонных комбайнов.

Среди представленных в таблице определите модели с самым высоким и самым низким рейтингами.

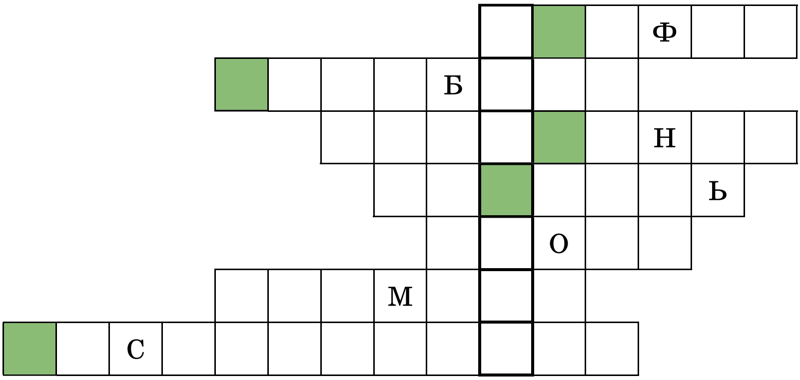
Модель комбайна	Средняя цена, грн	Функциональность, F	Качество, Q	Дизайн, D
А	2800	3	2	4
Б	3000	3	3	3
В	3150	4	2	4
Г	3400	4	3	2

Дополнительное задание. Попробуйте решить задачу, используя электронные таблицы, например *Excel*.

Интересные задачки для неленивых

76. 1) Вспомните алгебраические понятия и запишите их в строки кроссворда, где некоторые буквы уже есть (см. с. 22).

Если названия понятий будут записаны верно, то в выделенном столбце получится название горы – самой высокой точки Украины, а из букв в закрашенных клеточках можно будет составить название реки, протекающей по территории Украины. Найдите эти названия.



2) Используя дополнительные источники информации, в частности Интернет, соберите сведения об этих географических объектах.

§3. ПОЧЛЕННОЕ СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

Продолжим рассмотрение свойств неравенств.

Допустим, имеем два верных неравенства одного знака: $2 < 5$ и $3 < 7$. Сложим их левые части, их правые части и между результатами запишем такой же знак: $2 + 3 < 5 + 7$. Получим верное числовое неравенство, ведь, действительно, $5 < 12$. Действие, которое мы выполнили, называют *почленным сложением неравенств*. Заметим, что почленно складывать можно лишь неравенства одного знака.

Свойство 5 (почленное сложение неравенств). ***Если*** $a < b$ ***и*** $c < d$, ***то*** $a + c < b + d$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. К обеим частям неравенства $a < b$ прибавим число c, а к обеим частям неравенства $c < d$ – число b, получим два верных неравенства: $a + c < b + c$ и $c + b < d + b$, следовательно, $a + c < b + d$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказываем, что если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Свойство 5 справедливо и в случае почленного сложения более чем двух неравенств.

Пример 1. Стороны некоторого треугольника равны a см, b см и c см. Оценить периметр треугольника P (в см), если $2{,}1 < a < 2{,}3$; $2{,}5 < b < 2{,}7$; $3{,}1 < c < 3{,}5$.

Р е ш е н и е. Приведем сокращенную запись решения:

$$\begin{array}{r} 2{,}1 < a < 2{,}3 \\ +\ 2{,}5 < b < 2{,}7 \\ +\ 3{,}1 < c < 3{,}5 \\ \hline 7{,}7 < a + b + c < 8{,}5. \end{array}$$

Таким образом, $7{,}7 < P < 8{,}5$.

О т в е т. $7{,}7 < P < 8{,}5$.

Свойство, аналогичное почленному сложению двух и более неравенств, существует и для умножения. Почленно умножив верные неравенства $2 < 7$ и $3 < 4$, получим верное неравенство $2 \cdot 3 < 7 \cdot 4$, ведь $6 < 28$. Если же почленно перемножить верные неравенства $-2 < -1$ и $2 < 8$, получим $-4 < -8$ – неверное неравенство. Отметим, что в первом случае обе части неравенств были положительны (2 и 7; 3 и 4), а во втором – некоторые были отрицательны (–2 и –1).

Свойство 6 (почленное умножение неравенств). ***Если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c, d – положительные числа, то $ac < bd$.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим обе части неравенства $a < b$ на положительное число c, а обе части неравенства $c < d$ – на положительное число b, получим два верных неравенства: $ac < bc$ и $bc < bd$, следовательно, $ac < bd$ (по свойству 2). Доказано.

Аналогично можно доказать, что если $a > b$ и $c > d$, где a, b, c, d – положительные числа, то $ac > bd$.

Отметим, что свойство 6 справедливо и для более чем двух неравенств.

С л е д с т в и е. **Если a и b – положительные числа, причем $a < b$, то $a^n < b^n$, где n – натуральное число.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перемножив почленно n верных неравенств $a < b$, где $a > 0$ и $b > 0$, получим $a^n < b^n$.

С помощью рассмотренных нами свойств можно *оценивать сумму, разность, произведение* и *частное чисел*.

Пример 2. Дано: $10 < a < 12$, $2 < b < 5$. Оцените значение выражения:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) ab; 4) $\frac{a}{b}$.

Р е ш е н и е. 1)

$$\begin{array}{r} 10 < a < 12 \\ +\ 2 < b < 5 \\ \hline 12 < a + b < 17 \end{array}$$

2) Чтобы оценить разность $a - b$, представим ее в виде суммы: $a - b = a + (-b)$, но сначала оценим выражение $-b$.

Умножив все части неравенства $2 < b < 5$ на число -1 и изменив знаки неравенства на противоположные, получим: $-2 > -b > -5$, т. е. $-5 < -b < -2$. Таким образом,

$$+\begin{array}{r} 10 < a < 12 \\ -5 < -b < -2 \\ \hline 5 < a - b < 10 \end{array}$$

3) $$\times\begin{array}{r} 10 < a < 12 \\ 2 < b < 5 \\ \hline 20 < ab < 60 \end{array}$$

4) Чтобы оценить частное $\frac{a}{b}$, представим его в виде произведения: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Оценим выражение $\frac{1}{b}$. Если $2 < b < 5$, то $\frac{1}{2} > \frac{1}{b} > \frac{1}{5}$, т. е. $\frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\times\begin{array}{r} 10 < a < 12 \\ \frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2} \\ \hline 2 < \frac{a}{b} < 6 \end{array}$$

О т в е т. 1) $12 < a + b < 17$; 2) $5 < a - b < 10$;
3) $20 < ab < 60$; 4) $2 < \frac{a}{b} < 6$.

С помощью рассмотренных свойств можно также доказывать неравенства.

Пример 3. Доказать, что $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geqslant 4$, если $x > 0$, $y > 0$.

Р е ш е н и е. К каждому множителю левой части неравенства применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (неравенство Коши), получим:

$$\frac{x + y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}.$$

Используя свойство 4, обе части каждого из этих неравенств умножим на 2, получим:

$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{xy}}.$$

Перемножим эти неравенства почленно:

$$\times\begin{array}{l} x + y \geqslant 2\sqrt{xy} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{xy}} \\ \hline (x + y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \geqslant 4\sqrt{xy} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{xy}}. \end{array}$$

Таким образом, $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \geqslant 4$, что и требовалось доказать.

1. Что подразумевают под почленным сложением неравенств?
2. Сформулируйте и докажите свойство почленного сложения неравенств.
3. Что подразумевают под почленным умножением неравенств?
4. Сформулируйте и докажите свойство почленного умножения неравенств.
5. Сформулируйте следствие из свойства почленного умножения неравенств.

1 Начальный уровень

77. Сложите почленно неравенства:

1) $3 < 9$ и $10 < 14$; 2) $-2 > -5$ и $3 > 0$.

78. Сложите почленно неравенства:

1) $8 > 3$ и $10 > 7$; 2) $-3 < -1$ и $-5 < 1$.

79. Перемножьте почленно неравенства:

1) $3 > 1$ и $5 > 2$; 2) $7 < 10$ и $2 < 5$.

80. Перемножьте почленно неравенства:

1) $5 < 7$ и $1 < 10$; 2) $7 > 3$ и $5 > 1$.

81. (*Устно*). Получим ли верное неравенство, перемножив неравенства почленно:

1) $-2 < -1$ и $5 < 17$; 2) $0 > -3$ и $1 > -5$?

2 Средний уровень

82. Оцените значение выражения $a + b$, если:
1) $-3 < a < 5$ и $0 < b < 7$; 2) $2 < a < 7$ и $-10 < b < -8$.

83. Оцените значение выражения $m + n$, если:
1) $3 < m < 7$ и $0 < n < 2$; 2) $-3 < m < -2$ и $-5 < n < -1$.

84. Оцените значение выражения xy, если:
1) $1 < x < 2$ и $5 < y < 10$; 2) $3 < x < 4,5$ и $1 < y < 10$.

85. Оцените значение выражения cd, если:
1) $2 < c < 10$ и $1,5 < d < 2,5$; 2) $\frac{1}{3} < c < 1$ и $3 < d < 8$.

86. Известно, что $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$; $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$. Оцените:
1) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; 2) $\sqrt{10}$.

87. Оцените значение выражения $2a + b$, если $-1 < a < 4$ и $2 < b < 3$.

88. Оцените значение выражения $3x + y$, если $2 < x < 3$ и $1 < y < 7$.

89. Оцените значение выражения p^2, если $2 < p < 3$.

90. Оцените значение выражения m^2, если $1 < m < 5$.

91. Известно, что $x > 3$, $y > 4$. Верно ли, что:
1) $x + y > 7$; 2) $x + y > 6$; 3) $x + y > 8$;
4) $xy > 12$; 5) $xy > 13$; 6) $xy > 10$?

3 Достаточный уровень

92. Известно, что $x < 3$, $y < 4$. Верно ли, что $xy < 12$?

93. Известно, что $-3 < x < 4$, $1 < y < 4$. Оцените значение выражения:
1) $x - y$; 2) $3x - y$; 3) $2y - x$; 4) $2x - 3y$.

94. Известно, что $-2 < a < 0$, $3 < b < 5$. Оцените значение выражения:
1) $a - b$; 2) $2a - b$; 3) $3b - a$; 4) $4a - 5b$.

95. Дано: $5 < a < 10$, $1 < b < 2$. Оцените значение выражения:
1) $\frac{a}{b}$; 2) $\frac{4b}{3a}$.

96. Дано: $2 < x < 4$, $1 < y < 5$. Оцените значение выражения:

1) $\dfrac{x}{y}$; 2) $\dfrac{5y}{2x}$.

97. Оцените периметр P (в см) прямоугольника со сторонами a см и b см, если $2{,}3 < a < 2{,}5$; $3{,}1 < b < 3{,}7$.

98. Оцените периметр P (в см) равнобедренного треугольника с основанием x см и боковой стороной y см, если $10 < x < 12$; $9 < y < 11$.

99. Оцените меру угла A треугольника ABC, если $50° < \angle B < 52°$, $60° < \angle C < 65°$.

4 Высокий уровень

100. Дано: $a > 4$, $b < -3$. Докажите, что:

1) $a - b > 7$; 2) $2a - b > 11$;
3) $5b - a < -19$; 4) $6b - 11a < -60$.

101. Дано: $m > 6$, $n < -1$. Докажите, что:

1) $m - n > 7$; 2) $3m - n > 13$;
3) $2n - m < -8$; 4) $4n - 5m < -34$.

102. Докажите неравенство:

1) $(x^3 + y)(x + y^3) \geqslant 4x^2y^2$, если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
2) $(m + 6)(n + 3)(p + 2) \geqslant 48\sqrt{mnp}$, если $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $p \geqslant 0$;
3) $(a + 1)(b + 1)(c + 1) > 32$, если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $abc = 16$.

103. Докажите неравенство:

1) $(mn + 1)(m + n) \geqslant 4mn$, если $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
2) $(a + 2c)(b + 2a)(c + 2b) \geqslant 16\sqrt{2}abc$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$;
3) $(x + 3)(y + 3)(z + 3) > 72$, если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $xyz = 3$.

104. Докажите неравенство, если $x > 0$, $y > 0$:

1) $x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} \geqslant 4$; 2) $\left(1 + x + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + y + \dfrac{1}{y}\right) \geqslant 9$.

Упражнения для повторения

105. Выполните действия:

1) $\dfrac{4c^2 - 4c + 1}{5c + 5} \cdot \dfrac{c + 1}{2c - 1}$; 2) $\dfrac{p - 2}{m^2 + 2m} : \dfrac{p - 2}{5m + 10}$.

106. После смешивания 6-процентного и 3-процентного растворов соли получили 300 г 4-процентного раствора. По сколько граммов каждого раствора смешали?

107. Вычислите: $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

108. Постройте график функции $y = \dfrac{12-6x}{x^2-2x}$.

Математика вокруг нас

109. 1) Петр Петрович приобрел американский внедорожник, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Найдите скорость внедорожника в километрах в час в тот момент, когда показания спидометра равны 60 миль в час. Ответ округлите до десятых.

2) Чтобы упростить вышеуказанные вычисления, Петр Петрович решил умножать показатели спидометра на 1,6. Найдите абсолютную погрешность (в км/ч) такого способа вычислений, если спидометр показывает 70 миль в час.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

110. Является ли число 2 корнем уравнения:

1) $2x - 1 = 5$; 2) $x^2 + x = 6$;
3) $3x - 7 = -1$; 4) $x^2 + x + 9 = 2x + 7$;
5) $x^3 + x^2 + x = 14$; 6) $\dfrac{x+8}{x-1} = 10$?

111. Верно ли неравенство $25 - x > 20$ при $x = -5$; 3; 5; 11?

112. Для каждого неравенства найдите два таких значения x, при которых будет верным неравенство:

1) $x \geqslant 5$; 2) $x < -2$; 3) $x + 7 > 9$;
4) $x - 3 \leqslant 0$; 5) $2x \geqslant 9$; 6) $-3x < -12$.

113. Какие из выражений при всех значениях переменной принимают положительное значение, а какие – неотрицательное:

1) x^2; 2) $(x-3)^2 + 1$;
3) $(x+5)^2$; 4) $(x+7)^2 + 11$?

Интересные задачки для неленивых

114. (*Украинская математическая олимпиада, 1962 г.*). Найдите значение выражения $a^3 + b^3 + 3(a^3b + ab^3) + 6(a^3b^2 + a^2b^3)$, где a и b – корни уравнения $x^2 - x + q = 0$.

§ 4. НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМИ. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим неравенство $2x + 1 > 11$, содержащее переменную. При одних значениях переменной x неравенство обращается в верное числовое неравенство, а при других – в неверное. Действительно, если вместо x подставить, например, число 8, то получим $2 \cdot 8 + 1 > 11$ – верное неравенство, если же подставить число 4, то получим неверное неравенство $2 \cdot 4 + 1 > 11$. В таком случае говорят, что число 8 является *решением неравенства* $2x + 1 > 11$ (или число 8 *удовлетворяет неравенству* $2x + 1 > 11$), а число 4 – не является его решением (или число 4 *не удовлетворяет неравенству* $2x + 1 > 11$).

Также решениями неравенства $2x + 1 > 11$ являются, например, числа 34; 5,5; $\sqrt{90}$; $7\frac{1}{8}$ и т. д.

Решением неравенства **с одной переменной называют такое значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.**
Решить неравенство **– означает найти все его решения или доказать, что решений нет.**

Пример 1. Решить неравенство: 1) $\sqrt{x} > 0$; 2) $\frac{1}{x^2 + 1} \leqslant 0$.

Р е ш е н и е. 1) $\sqrt{x} \geqslant 0$ при всех $x \geqslant 0$, причем $\sqrt{x} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Значит, решением неравенства $\sqrt{x} > 0$ является любое положительное число.

2) $x^2 \geqslant 0$ при любом значении x, поэтому $x^2 + 1 > 0$ при любом x. Следовательно, значение выражения $\frac{1}{x^2 + 1}$ также будет положительным при любом x. А значит, при любом значении x неравенство $\frac{1}{x^2 + 1} \leqslant 0$ является неверным, т. е. не имеет решений.

О т в е т. 1) Любое число, большее нуля; 2) нет решений.

1. Приведите пример неравенства с одной переменной.
2. Что называют решением неравенства с одной переменной?
3. Что означает решить неравенство?

1 Начальный уровень

115. (*Устно*). Является ли решением неравенства $x > 3$ число:
1) -2; 2) 5; 3) 2,7; 4) 0; 5) 3,01; 6) 17?

116. Является ли решением неравенства $x < 7$ число:
1) 8; 2) -2; 3) 0; 4) 4,7; 5) 8,1; 6) 13?

117. Запишите три любых решения неравенства $x \leqslant -2$.

118. Запишите три любых решения неравенства $x \geqslant 4$.

2 Средний уровень

119. Какие из чисел будут решением неравенства $x^2 + 3x \leqslant 3 + x$:
1) 2; 2) 0; 3) -4; 4) 1; 5) 3; 6) -3?

120. Какие из чисел будут решением неравенства $x^2 + 4x \geqslant 6 + 3x$:
1) 4; 2) 0; 3) -3; 4) 1; 5) 2; 6) -1?

121. Запишите два любых решения неравенства $\sqrt{x - 1} > 3$.

122. Запишите два любых решения неравенства $\sqrt{x + 2} < 7$.

123. Найдите все натуральные решения неравенства $15\frac{1}{3} < x \leqslant 19$.

3 Достаточный уровень

124. Найдите все целые решения неравенства $\frac{20}{x} < -8$.

125. Найдите все целые решения неравенства $-\frac{30}{x} < -7$.

126. Решите неравенство:
1) $x^2 > 0$; 2) $-x^2 < 0$; 3) $x^2 \geqslant 0$;
4) $x^2 \leqslant 0$; 5) $(x - 1)^2 > 0$; 6) $(x - 1)^2 \geqslant 0$;
7) $(x - 1)^2 < 0$; 8) $(x - 1)^2 \leqslant 0$; 9) $x^2 + 9 < 0$.

127. Решите неравенство:

1) $(x+2)^2 \geqslant 0$; 2) $(x+2)^2 > 0$; 3) $(x+2)^2 < 0$;

4) $(x+2)^2 \leqslant 0$; 5) $\dfrac{1}{x^2} + 13 < 0$; 6) $x^2 + 5 \geqslant 0$.

4 Высокий уровень

128. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x+2}{x+2} > 0,5$; 2) $\dfrac{x-3}{x-3} \leqslant 0,7$; 3) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 \geqslant 0$;

4) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 > 0$; 5) $\dfrac{(x+3)^2}{x} > 0$; 6) $\dfrac{(x-1)^2}{x} \leqslant 0$.

129. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x-3}{x-3} > -2$; 2) $\dfrac{x+7}{x+7} < -1$; 3) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 \geqslant 0$;

4) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 > 0$; 5) $\dfrac{(x-3)^2}{x} > 0$; 6) $\dfrac{(x+1)^2}{x} \leqslant 0$.

Упражнения для повторения

2 **130.** Упростите выражение:

1) $(3+\sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2 - 9$.

3 **131.** Докажите тождество:

$$\frac{x^2+x}{(x-1)^2} : \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} + \frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \frac{x}{x-1}.$$

4 **132.** Постройте график уравнения $|x-y| = 3$.

Математика вокруг нас

133. Диагональ экрана телевизора – 48 дюймов. Запишите длину диагонали экрана в сантиметрах, если известно, что один дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

134. Где на координатной прямой лежат числа, если они:
1) больше числа 5; 2) меньше числа 3;
3) больше числа 5, но меньше числа 9?

135. Укажите несколько значений переменной, удовлетворяющих неравенству:
1) $x < -2$; 2) $x > 3$; 3) $-2 \leqslant x \leqslant 3$; 4) $-2 < x < 3$.

136. Между какими целыми числами содержится число:
1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{13}$; 4) $-\sqrt{3}$?

137. Назовите элементы множества:
1) $A = \{4;\ 7;\ 10\}$; 2) $B = \{\triangle;\ \square;\ !\}$.

138. 1) Приведите примеры конечных и бесконечных множеств.
2) Как называют множество решений уравнения $|x| = -4$?

139. Назовите общие элементы множеств A и B, если
$A = \{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$ и $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

Интересные задачки для нелленивых

140. Первую половину пути пешеход двигался со скоростью, на 25 % больше запланированной. На сколько процентов может быть теперь уменьшена запланированная скорость на второй половине пути, чтобы в конечный пункт он прибыл в назначенное время?

§ 5. ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ И ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Множество решений неравенств удобно записывать с помощью *числовых промежутков*.

Пример 1. Рассмотрим двойное неравенство $-4 < x < 1$. Ему удовлетворяют все числа больше -4 и меньше 1, то есть числа, лежащие на координатной прямой между числами -4 и 1. Множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $-4 < x < 1$, называют *числовым промежутком*, или просто *промежутком*, от -4 до 1 и обозначают: $(-4;\ 1)$ (читают: «промежуток от -4 до 1»). Чтобы показать на координатной прямой это множество, его выделяют штриховкой, как показано на рисунке 4. При этом точки -4 и 1 изображают «пустыми» (или «выколотыми»).

Число -1 удовлетворяет неравенству $-4 < x < 1$, а число 2 ему не удовлетворяет. В таком случае говорят, что число -1 принадлежит промежутку $(-4;\ 1)$, а число 2 – не принадлежит (рис. 5). Следовательно, любое число, удовлетворяющее неравенству $-4 < x < 1$, принадлежит промежутку $(-4;\ 1)$, и, наоборот, любое число, принадлежащее промежутку $(-4;\ 1)$, удовлетворяет неравенству $-4 < x < 1$.

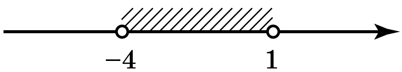


Рис. 4

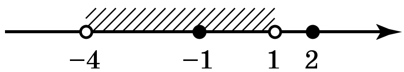


Рис. 5

Пример 2. Двойному неравенству $-4 \leqslant x \leqslant 1$ удовлетворяют не только все числа, большие, чем -4, и меньшие, чем 1, но и сами числа -4 и 1. Множество этих чисел обозначают $[-4;\ 1]$ (читают: «промежуток от -4 до 1, включая -4 и 1»). В этом случае на координатной прямой выделяют промежуток между числами -4 и 1 вместе с этими числами (рис. 6).

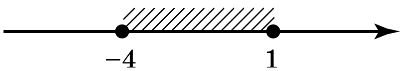


Рис. 6

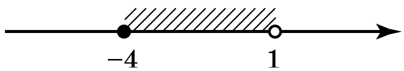


Рис. 7

Пример 3. Множество чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $-4 \leqslant x < 1$, обозначают: $[-4;\ 1)$ (читают: «промежуток от -4 до 1, включая -4»). Этот промежуток изображен на рисунке 7.

Пример 4. Множество чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $-4 < x \leqslant 1$, обозначают: $(-4;\ 1]$ (читают: «промежуток от -4 до 1, включая 1»). Этот промежуток изображен на рисунке 8.

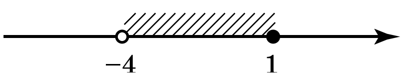


Рис. 8

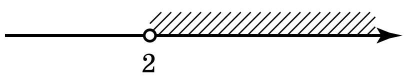


Рис. 9

Пример 5. Неравенству $x > 2$ удовлетворяют все числа, большие, чем 2, то есть числа, лежащие на координатной прямой справа от числа 2. Множество этих чисел обозначают $(2;\ +\infty)$ (читают: «промежуток от 2 до плюс бесконечности») и изображают лучом, выходящим из «пустой» точки с координатой 2 (рис. 9).

Пример 6. Неравенству $x \geqslant 2$ удовлетворяют все числа, большие, чем 2, и само число 2. Множество этих чисел обозначают: $[2; +\infty)$ (читают: «промежуток от 2 до плюс бесконечности, включая 2») и изображают лучом, лежащим справа от точки с координатой 2, включая эту точку (рис. 10).

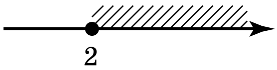


Рис. 10

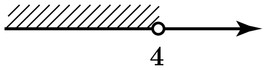


Рис. 11

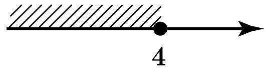


Рис. 12

Пример 7. Множество чисел, удовлетворяющих условию $x < 4$, записывают так: $(-\infty; 4)$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до 4»). Это множество изображено на рисунке 11.

Пример 8. Множество чисел, удовлетворяющих условию $x \leqslant 4$, записывают так: $(-\infty; 4]$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до 4, включая 4»). Изображено оно на рисунке 12.

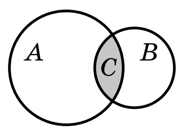
Таким образом, если конец промежутка принадлежит промежутку (например, для нестрогого неравенства), то этот конец заключают в квадратную скобку, во всех остальных случаях конец заключают в круглую скобку.

Множество всех чисел изображает вся координатная прямая и его записывают в виде $(-\infty; +\infty)$. Множество, не содержащее ни одного числа, обозначают символом $\varnothing$ и называют *пустым множеством*.

Над множествами можно выполнять некоторые действия (*операции*). Рассмотрим два из них: *пересечение* и *объединение*.

***Пересечением множеств A* и *B* называют множество, которое состоит из элементов, принадлежащих как множеству *A*, так и множеству *B*.**

Пересечение множеств записывают с помощью символа $\cap$. Изображать пересечение множеств удобно в виде диаграмм Эйлера–Венна (рис. 13).



$A \cap B = C$

Рис. 13

Пример 9. Если даны множества $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$ и $C = \{6; 7\}$, то $A \cap B = \{2; 3\}$; $A \cap C = \varnothing$.

Пересечением числовых промежутков **называют множество, которое содержит все числа, принадлежащие как одному промежутку, так и другому.**

Пример 10. $[-2;\ 4) \cap [0;\ 6] = [0;\ 4)$ (рис. 14).

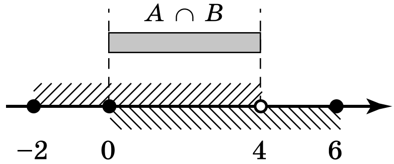


Рис. 14

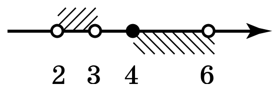


Рис. 15

Пример 11. Промежутки $(2;\ 3)$ и $[4;\ 6)$ не имеют общих точек (рис. 15), поэтому их пересечением является пустое множество. Записать это можно так: $(2;\ 3) \cap [4;\ 6) = \varnothing$.

***Объединением множеств A* и *B* называют множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств *A* или *B*.**

Для записи объединения множеств используют символ $\cup$. Изображать объединение множеств также удобно в виде диаграмм Эйлера–Венна (рис. 16).

Пример 12. Если даны множества $A = \{1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{2;\ 3;\ 4\}$ и $C = \{6;\ 7\}$, то $A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; $A \cup C = \{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 7\}$.

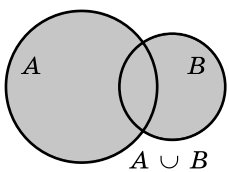


Рис. 16

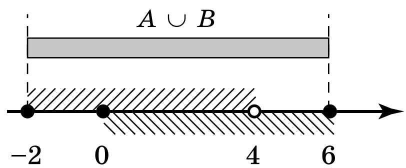


Рис. 17

***Объединением числовых промежутков* называют множество, которое состоит из всех чисел, принадлежащих хотя бы одному из этих промежутков.**

Пример 13. $[-2;\ 4) \cup [0;\ 6] = [-2;\ 6]$ (рис. 17).

Отметим, что объединение промежутков не всегда является промежутком. Например, множество $(2;\ 3) \cup [4;\ 6)$ не является промежутком (рис. 15).

1. Приведите примеры числовых промежутков разных видов, запишите их и изобразите на координатной прямой.
2. Что такое пересечение множеств; числовых промежутков?
3. Что такое объединение множеств; числовых промежутков?

1 Начальный уровень

141. Изобразите на координатной прямой промежуток:

1) $(-2;\ 1)$; 2) $(-4;\ 2]$; 3) $[1;\ 5)$; 4) $[3;\ 7]$;
5) $(-\infty;\ 3)$; 6) $[4;\ +\infty)$; 7) $(-\infty;\ 0]$; 8) $(5;\ +\infty)$.

142. Изобразите на координатной прямой промежуток:

1) $[4;\ 6)$; 2) $(-1;\ 7)$; 3) $[3;\ 4]$; 4) $(0;\ 2]$;
5) $(-3;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;\ 4]$; 7) $[0;\ +\infty)$; 8) $(-\infty;\ -1)$.

143. Запишите промежутки, изображенные на рисунках 18–21.

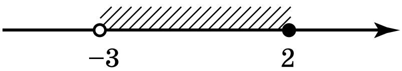


Рис. 18

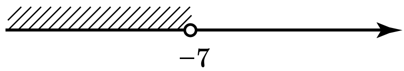


Рис. 19

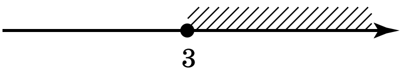


Рис. 20

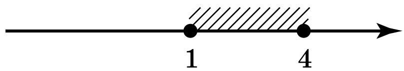


Рис. 21

144. Запишите промежутки, изображенные на рисунках 22–25.

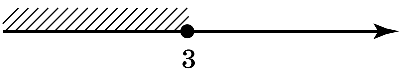


Рис. 22

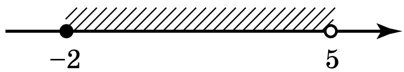


Рис. 23

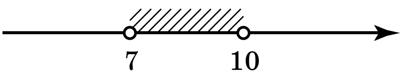


Рис. 24

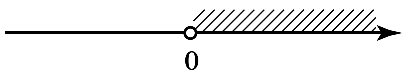


Рис. 25

2 Средний уровень

145. Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, заданный неравенством:

1) $x > 3$; 2) $x \leqslant -8$; 3) $x \geqslant -1$;

4) $x < 2$; 5) $1,8 \leqslant x < 2$; 6) $2,5 \leqslant x \leqslant 3\frac{1}{8}$;

7) $3,9 < x < 4$; 8) $7 < x \leqslant 7,01$.

146. Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, заданный неравенством:

1) $x \geqslant 5$; 2) $x < 4,5$; 3) $1,8 \leqslant x < 5$; 4) $1,9 < x < 4$.

147. (*Устно*). Принадлежит ли промежутку $[-1{,}01; 1{,}02]$ число:
1) $-1{,}1$; 2) $0{,}9$; 3) $1{,}03$;
4) $-1{,}11$; 5) $1{,}015$; 6) $-1{,}009$?

148. Запишите все целые числа, принадлежащие промежутку:
1) $(-2; 1)$; 2) $[-1{,}8; 2]$; 3) $(3; 4)$; 4) $(-2{,}6; 1{,}6)$.

149. Какие натуральные числа принадлежат промежутку:
1) $(-0{,}1; 4{,}9]$; 2) $[1; \sqrt{5})$;
3) $(-3; 0{,}7]$; 4) $[2; 3{,}99)$?

150. Запишите два положительных и два отрицательных числа, принадлежащих промежутку:
1) $(-2; 7)$; 2) $[-1; 1]$.

151. Найдите наименьшее целое число, принадлежащее промежутку:
1) $(0; 8)$; 2) $(-5; 2)$; 3) $[4; 7)$; 4) $(0{,}5; +\infty)$.

152. Найдите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:
1) $(-2; 9)$; 2) $(-\infty; 4{,}5)$; 3) $[0; 17{,}2]$; 4) $(-1; 0{,}99)$.

153. Найдите пересечение и объединение множеств C и D:
1) $C = \{1; 2; 7\}$, $D = \{1; 2; 3\}$; 2) $C = \{*\}$, $D = \{*; !\}$;
3) $C = \varnothing$, $D = \{7; 8\}$; 4) $C = \{$а; б$\}$, $D = \{$в; з$\}$.

154. Найдите пересечение и объединение множеств A и B:
1) $A = \{7; 8; 9\}$, $B = \{6; 7; 8\}$; 2) $A = \{\triangle; \square\}$, $B = \{\square\}$;
3) $A = \{$а; в; д$\}$, $B = \varnothing$; 4) $A = \{4; 7\}$, $B = \{1; 3\}$.

3 Достаточный уровень

155. Принадлежит ли промежутку $(1{,}6; 4{,}5]$ число:
1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{21}$?

156. Принадлежит ли промежутку $[2{,}5; 6{,}1)$ число:
1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{15}$; 4) $\sqrt{39}$?

157. Изобразите промежутки на координатной прямой и запишите их пересечение:
1) $[-2; 3)$ и $[0; 4]$; 2) $[-5; 4]$ и $(-2; 1)$;
3) $(-\infty; 2)$ и $(-\infty; 3]$; 4) $(-\infty; 4)$ и $[0; +\infty)$;
5) $[2; 3)$ и $(2; 8)$; 6) $(-2; 1)$ и $(2; 5)$.

158. Изобразите промежутки на координатной прямой и запишите их пересечение:

1) $(-1; 8)$ и $(0; 9)$;
2) $(-2; 4]$ и $[1; 2)$;
3) $(-\infty; 1)$ и $(-2; 3)$;
4) $[1; 5)$ и $[6; +\infty)$.

159. Изобразите промежутки на координатной прямой и запишите их объединение:

1) $(-3; 1)$ и $(0; 4]$;
2) $[0; 1)$ и $[-2; 1]$;
3) $[3; 8)$ и $[4; 5]$;
4) $(-\infty; 3)$ и $[2{,}8; 4)$;
5) $[1; 3)$ и $[3; 5]$;
6) $(0; 1]$ и $(2; +\infty)$.

160. Изобразите промежутки на координатной прямой и запишите их объединение:

1) $[-2; 3)$ и $(2; 5]$;
2) $(2; 4)$ и $[2; 10)$;
3) $(-\infty; 0)$ и $[0; 1]$;
4) $(-\infty; 4)$ и $(3; +\infty)$.

161. Найдите пересечение и объединение множеств A и B, если:

1) A – множество делителей числа 18,
B – множество делителей числа 12;
2) A – множество корней уравнения $x^2 + 2x - 3 = 0$,
B – множество корней уравнения $|x| = 1$;
3) A – множество простых чисел, меньших 15,
B – множество натуральных чётных чисел, меньших 10;
4) A – множество корней уравнения $x^2 = 9$,
B – множество корней уравнения $\sqrt{x} = -3$.

162. Найдите пересечение и объединение множеств C и D, если:

1) C – множество двузначных натуральных чисел, кратных числу 15,
D – множество двузначных натуральных чисел, кратных числу 30;
2) C – множество корней уравнения $x^2 = 16$,
D – множество корней уравнения $x^2 + x - 20 = 0$;
3) C – множество нечетных натуральных чисел, меньших 20,
D – множество простых чисел, меньших 12;
4) C – множество корней уравнения $|x| = -2$,
D – множество корней уравнения $3x + 6 = 0$.

4 Высокий уровень

163. Найдите пересечение и объединение:

1) множества натуральных чисел и множества целых чисел;
2) множества целых чисел и множества рациональных чисел.

164. Пусть A – множество четных натуральных чисел, B – множество нечетных натуральных чисел, C – множество натуральных чисел, кратных числу 3. Запишите с помощью знаков операций над этими множествами множество:

1) натуральных чисел;

2) натуральных чисел, кратных числу 6;

3) нечетных натуральных чисел, кратных числу 3.

165. Пусть A – множество четных натуральных чисел, B – множество нечетных натуральных чисел, C – множество натуральных чисел, кратных числу 5. Запишите с помощью знаков операций над этими множествами множество:

1) натуральных чисел, кратных числу 2 или 5;

2) натуральных чисел, кратных числу 10;

3) нечетных натуральных чисел, кратных числу 5.

Упражнения для повторения

166. Сократите дробь:

1) $\dfrac{m^2 - 5}{m + \sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{m - 2\sqrt{mn} + n}$.

167. Докажите неравенство $(x + 5)(x - 9) < (x - 2)^2$.

168. На перегоне длиной 120 км поезд двигался со скоростью на 10 км/ч меньшей, чем обычно по расписанию, и потому опоздал на 24 мин. С какой скоростью должен был двигаться поезд по расписанию?

169. Найдите значение выражения $x + \dfrac{1}{x}$, если $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 34$.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

170. Найдите корни линейного уравнения:

1) $2x = 6$; 2) $6x = -12$; 3) $-4x = 160$;

4) $-5x = -20$; 5) $0x = 7$; 6) $0x = 0$.

171. Решите уравнение:

1) $2x - 3 = 3x + 7$; 2) $2(x - 3) = 7(x + 2) - 1$;

3) $2(x - 3) - (x + 2) = 1 - 3x$; 4) $\dfrac{x + 1}{2} - \dfrac{x - 2}{3} = 2$.

172. Являются ли равносильными уравнения:

1) $-3x = 12$ и $x + 7 = 3$; 2) $2x = 18$ и $x + 1 = -8$?

Математика вокруг нас

173. На рисунке изображен график процесса разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс отложено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат – температура двигателя в градусах Цельсия.

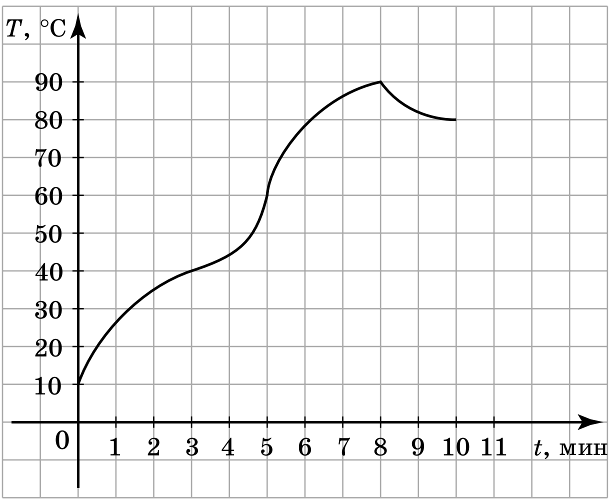
По графику определите:

1) на какой минуте температура двигателя достигла значения 60 °C;

2) сколько минут нагревался двигатель от 40 °C до 90 °C;

3) сколько минут охлаждался двигатель от 90 °C до 80 °C;

4) на сколько градусов нагрелся двигатель за первые три минуты.



Интересные задачки для неленивых

174. Решите уравнение:

$$\frac{x^2 + x + 2}{3x^2 + 5x - 14} = \frac{x^2 + x + 6}{3x^2 + 5x - 10}.$$

§ 6. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. РАВНОСИЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства вида $ax > b$, $ax \geqslant b$, $ax < b$, $ax \leqslant b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называют *линейными неравенствами с одной переменной*.

Если $a \neq 0$, то обе части неравенства можно разделить на a, учитывая при этом свойство числовых неравенств, то есть *если* $a > 0$, *то знак неравенства оставляем без изменений; если же* $a < 0$, *то знак неравенства изменяем на противоположный*.

Пример 1. Решить неравенство: 1) $2x \geqslant 18$; 2) $-3x > -15$.

Решение. 1) Разделив обе части неравенства на 2, получим: $x \geqslant 9$. Таким образом, решением неравенства является промежуток $[9; +\infty)$.

2) Разделив обе части неравенства на -3 и изменив при этом знак неравенства на противоположный, получим: $x < 5$, то есть $x \in (-\infty; 5)$.

Ответ. 1) $[9; +\infty)$; 2) $(-\infty; 5)$.

Отметим, что ответ можно было записать и так:

1) $x \geqslant 9$; 2) $x < 5$.

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называют *равносильными*. Неравенства, не имеющие решений, также являются *равносильными*.

Для неравенств с переменными имеют место *свойства*, подобные тем, которые справедливы и для уравнений:

1) если в любой части неравенства раскрыть скобки или привести подобные слагаемые, то получим неравенство, равносильное данному;
2) если в неравенстве перенести слагаемое из одной его части в другую, изменив его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному;
3) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному; если же обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Чтобы решить уравнение, мы приводим его к равносильному ему, но более простому уравнению. Аналогично, пользуясь свойствами неравенств, можно решать и неравенства, приводя их к более простым неравенствам, им равносильным.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{x+2}{2} - \frac{x+6}{3} \geqslant \frac{x}{6}$.

Решение. Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей – число 6, далее упростим его левую часть и перенесем слагаемые с переменной в левую часть неравенства, а без переменной – в правую.

$\frac{6(x+2)}{2} - \frac{6(x+6)}{3} \geqslant \frac{6 \cdot x}{6}$;

$3(x + 2) - 2(x + 6) \geqslant x$;

$3x + 6 - 2x - 12 \geqslant x$;

$3x - 2x - x \geqslant 12 - 6$;

$0x \geqslant 6$.

Получили неравенство, равносильное исходному. Оно не имеет решений, так как при любом значении x левая часть неравенства будет равна нулю, а неравенство $0 \geqslant 6$ является неверным.

Ответ. Решений нет.

Пример 3. Решить неравенство $(x + 3)^2 - x^2 < 6x + 10$.

Решение. Раскрыв скобки, получим:

$x^2 + 6x + 9 - x^2 < 6x + 10$.

Решая далее, имеем: $6x - 6x < 10 - 9$; то есть $0x < 1$.

Последнее неравенство равносильно исходному и является верным при любом значении x, так как при любом значении x его левая часть будет равна нулю, а неравенство $0 < 1$ является верным. Таким образом, решением неравенства будет любое число, а значит, множеством решений является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; +\infty)$.

Из примеров 2 и 3 можно сделать вывод, что

неравенства вида $0x > b$, $0x \geqslant b$, $0x < b$, $0x \leqslant b$ или не имеют решений, или их решение – любое число.

Пример 4. Для каждого значения m решить неравенство $mx - m^2 < x - 1$, где x – переменная.

Решение. Чтобы привести неравенство к линейному, перенесем слагаемые, содержащие переменную, в левую часть неравенства, остальные – в правую часть:

$mx - x < m^2 - 1;$
$(m - 1)x < m^2 - 1.$

Значение выражения $m - 1$ для разных значений m может быть положительным, отрицательным или нулевым, поэтому рассмотрим отдельно каждый из этих случаев:

1) $m - 1 > 0$; 2) $m - 1 = 0$; 3) $m - 1 < 0$.

1) Если $m - 1 > 0$, т. е. $m > 1$, то, разделив левую и правую части неравенства на положительное число $m - 1$, получим:

$$x < \frac{m^2 - 1}{m - 1};$$

$$x < \frac{(m - 1)(m + 1)}{m - 1};$$

$$x < m + 1.$$

2) Если $m - 1 = 0$, т. е. $m = 1$, получим не имеющее решений неравенство $0 \cdot x < 0$.

3) Если $m - 1 < 0$, т. е. $m < 1$, то, разделив левую и правую части неравенства на отрицательное число $m - 1$ и изменив знак неравенства на противоположный, получим:

$$x > \frac{m^2 - 1}{m - 1};$$

$$x > m + 1.$$

Ответ. Если $m < 1$, то $x > m + 1$; если $m = 1$, то решений нет; если $m > 1$, то $x < m + 1$.

1. Какие неравенства называют линейными неравенствами с одной переменной?
2. Приведите примеры таких неравенств.
3. Какие неравенства называют равносильными?
4. Сформулируйте свойства неравенств, используемые для решения неравенств.
5. Что можно сказать о решениях неравенств вида $0x > b$; $0x \geqslant b$; $0x < b$; $0x \leqslant b$?

1 Начальный уровень

175. (*Устно*). Какие из неравенств являются линейными:

1) $\frac{1}{3}x > -5$; 2) $2x^2 - 3 \geqslant 0$; 3) $-3x \leqslant 6$; 4) $\frac{1}{x} < 3$?

176. (*Устно*). Равносильны ли неравенства:

1) $2x - 7 > 4$ и $2x > 4 + 7$; 2) $3x > 9$ и $x < 3$?

177. Равносильны ли неравенства:

1) $3x + 2 > 5$ и $3x > 5 + 2$; 2) $5x \leqslant 10$ и $x \leqslant 2$?

2 Средний уровень

178. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

1) $x + 7 \geqslant 3$; 2) $x - 5 < 2$;
3) $x + 9 \leqslant -17$; 4) $x - 7 > -8$.

179. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

1) $x - 5 \leqslant 6$; 2) $x + 7 > -9$;
3) $x - 7 \geqslant 12$; 4) $x + 7 < -5$.

180. Найдите все решения неравенства:

1) $4x > 8$; 2) $8x \leqslant 72$; 3) $-9x \geqslant -63$; 4) $-x < 5$;
5) $5x \geqslant 11$; 6) $6x < 1{,}2$; 7) $-18x > -27$; 8) $-3x \leqslant 0$.

181. Решите неравенство:

1) $6x > 12$; 2) $7x < 42$; 3) $-x \geqslant -8$; 4) $-12x \leqslant 24$;
5) $7x \leqslant 13$; 6) $4x > 1{,}6$; 7) $12x < -18$; 8) $-9x \geqslant 0$.

182. Решите неравенство:

1) $\frac{1}{3}x \geqslant -2$; 2) $\frac{2}{9}x < 10$;

3) $-\frac{1}{4}x \leqslant -6$; 4) $-\frac{3}{7}x > -21$.

183. Найдите все решения неравенства:

1) $\frac{1}{6}x < -3$; 2) $\frac{2}{3}x \geqslant 18$;

3) $-\frac{3}{8}x \leqslant -12$; 4) $-\frac{7}{6}x > 42$.

184. Решите неравенство и укажите три любых числа, являющихся его решениями:

1) $-3x < 12$; 2) $2x \geqslant 0$;
3) $-5x > -35$; 4) $4x \leqslant -13$.

185. Найдите множество решений неравенства:

1) $0{,}2x \geqslant 8$; 2) $-0{,}7x < 1{,}4$;
3) $10x \leqslant -1$; 4) $-8x > 0$.

186. Найдите множество решений неравенства:

1) $0{,}3x > 15$; 2) $-0{,}2x \leqslant 1{,}8$;
3) $100x \geqslant -2$; 4) $-5x < 0$.

187. Равносильны ли неравенства:

1) $2x \geqslant 8$ и $-x \leqslant -2$; 2) $3x < 6$ и $x + 1 < 3$?

188. Равносильны ли неравенства:

1) $5x \leqslant 5$ и $-x \geqslant -1$; 2) $2x > 8$ и $x - 1 < 5$?

189. При каких значениях x функция $y = -4x$ принимает значения:

1) больше чем -8; 2) меньше чем 12?

190. Решите неравенство:

1) $1 + 2x > 7$; 2) $3 - 5x \leqslant 2$; 3) $3x + 8 < 0$;
4) $9 - 12x \geqslant 0$; 5) $6 + x < 3 - 2x$; 6) $4x + 19 \leqslant 5x - 2$.

191. Найдите множество решений неравенства:

1) $1 + 6x \leqslant 7$; 2) $6x + 1 > -3$; 3) $3 - 2x \geqslant 0$;
4) $6 - 15x < 0$; 5) $4 + x > 1 - 2x$; 6) $4x + 7 \leqslant 6x + 1$.

192. При каких значениях x функция $y = 2x - 3$ принимает отрицательные значения?

193. При каких значениях x функция $y = 5 - 2x$ принимает положительные значения?

194. Найдите множество решений неравенства:

1) $4 - x > 3(2 + x)$; 2) $3(1 - x) \geqslant 2(2x - 2)$;
3) $2(3 + x) + (4 - x) \leqslant 0$; 4) $-(2 - 3x) + 4(x + 6) < 1$.

195. Решите неравенство:

1) $4(1 + x) < x - 2$; 2) $2 + x \geqslant 6(2x - 1)$;
3) $-(2x + 1) > 3(x + 2)$; 4) $5(x + 8) + 4(1 - x) \leqslant 0$.

196. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{x + 2}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$.

197. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{x - 1}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}$.

198. Решите неравенство:

1) $\dfrac{3x}{4} - x < 2$; 2) $\dfrac{5x}{3} + x \geqslant 16$.

3 Достаточный уровень

199. При каких значениях a неравенство $ax < 4$ имеет то же множество решений, что и неравенство:

1) $x < \frac{4}{a}$;   2) $x > \frac{4}{a}$?

200. При каких значениях b неравенство $bx \geqslant 7$ имеет то же множество решений, что и неравенство:

1) $x \geqslant \frac{7}{b}$;   2) $x \leqslant \frac{7}{b}$?

201. Составьте такое неравенство вида $ax > b$, чтобы множеством его решений был промежуток:

1) $(3; +\infty)$;   2) $(-\infty; 1)$.

202. Найдите все натуральные решения неравенства:

1) $x(x + 2) - x^2 > 4x - 7$;   2) $(x + 5)(x - 5) \leqslant x^2 - 5x$.

203. Найдите все натуральные решения неравенства:

1) $(x + 1)^2 - x^2 \geqslant 6x - 9$;
2) $(x - 1)(x + 2) < x^2 - 3x + 11$.

204. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $\frac{x + 3}{4} - \frac{x}{3} \leqslant 0$;   2) $\frac{x + 1}{2} - \frac{1 - 5x}{5} > x$.

205. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $\frac{x + 2}{7} - \frac{x}{5} \geqslant 0$;   2) $\frac{x - 1}{3} - \frac{1 - 4x}{2} < x$.

206. Найдите множество решений неравенства:

1) $2(3x + 1) - 3x > 3x$;   2) $x + \frac{x}{2} \geqslant \frac{3x}{2} + 2$;

3) $4(x + 1) \geqslant 2(x + 2) + 2x$;   4) $3(x - 1) - 2x < x - 3$.

207. Решите неравенство:

1) $3(2x + 1) - 6x \geqslant 5$;   2) $4(x + 1) - 3x > -(2 - x)$;

3) $x - \frac{x}{3} < \frac{2x}{3} - 1$;   4) $6(x + 1) - 3(x + 2) \leqslant 3x$.

208. Длина одной из сторон прямоугольника равна 8 см. Какова должна быть длина второй его стороны, чтобы площадь прямоугольника была меньше 96 см^2?

Высокий уровень

209. При каких значениях a корень уравнения:

1) $4x - 7 = a$ является числом положительным;
2) $5 + 2x = 3 - a$ является числом отрицательным?

210. Существует ли такое значение a, при котором:

1) неравенство $ax > 2$ не имеет решений;
2) решением неравенства $(a - 3)x < 7$ будет любое число?

В случае положительного ответа укажите это значение a.

211. При каких значениях b уравнение:

1) $x^2 + 6x - 2b = 0$ не имеет корней;
2) $bx^2 - 4x - 1 = 0$ имеет два различных корня?

212. При каких значениях a уравнение:

1) $x^2 + 8x - 4a = 0$ имеет два различных корня;
2) $ax^2 - 6x + 1 = 0$ не имеет корней?

213. Для всех значений a решите неравенство:

1) $ax > 3$; 2) $ax \geqslant 0$; 3) $ax < 0$; 4) $-ax < 5$.

214. Отношение двух натуральных чисел равно 2 : 5, а их сумма меньше числа 171. Какое наибольшее значение может принимать меньшее из этих чисел?

215. Отношение двух натуральных чисел равно 3 : 2, а их сумма больше числа 83. Какое наименьшее значение может принимать большее из этих чисел?

Упражнения для повторения

216. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{8})$; 2) $\sqrt{5^2 \cdot 2^4}$; 3) $(\sqrt{10} - \sqrt{7})(\sqrt{10} + \sqrt{7})$.

217. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 8, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y - x = 1, \\ 2x + 5y = 20. \end{cases}$

218. Турист проплыл 5 км на моторной лодке вверх по реке и вернулся назад на плоту. Найдите скорость течения, если на плоту турист двигался на 2 ч дольше, чем на лодке, а собственная скорость лодки равна 12 км/ч.

219. Докажите, что значение выражения

$$\left(\frac{1}{a^2 - 4a + 4} + \frac{1}{a^2 - 4}\right) : \frac{2}{(a-2)^2} - \frac{a}{a+2}$$

не зависит от значения переменной.

220. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 8, \text{ если } x < 1, \\ \dfrac{8}{x}, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ x - 2, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Математика вокруг нас

221. Семья из четырех человек планирует поехать из Киева во Львов или на поезде, или на своем автомобиле. Билет на поезд на одного человека стоит 240 грн. Автомобиль расходует 8 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе между городами равно 540 км, а цена бензина составляет 22 грн за литр. Во сколько обойдется семье самый дешевый вариант такого путешествия?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

222. Найдите пересечение промежутков:

1) $(-\infty; 5]$ и $[3; +\infty)$;
2) $(-\infty; 3]$ и $[5; +\infty)$;
3) $(-\infty; 3)$ и $(-\infty; 5]$;
4) $[3; +\infty)$ и $(5; +\infty)$.

223. Укажите три значения x, являющиеся решениями каждого из двух неравенств одновременно:

1) $x \leqslant 2$ и $x \geqslant -3$;
2) $x > -5$ и $x > 7$;
3) $x < 0$ и $x \geqslant -7$;
4) $x \leqslant 2$ и $x \leqslant 4$.

Интересные задачки для неленивых

224. В чемпионате по баскетболу приняли участие 6 команд, каждая из которых провела по 4 встречи с каждой из остальных команд-участниц. Ничьих в баскетболе не бывает. Известно, что пять команд выиграли соответственно 80 %, 60 %, 55 %, 40 % и 35 % из общего количества проведенных ими встреч. Какое место заняла шестая команда и какой у нее процент побед?

§ 7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ИХ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим задачу. Велосипедист за 2 ч преодолевает расстояние, большее чем 24 км, а за 3 ч – расстояние, меньшее чем 39 км. Найти скорость велосипедиста.

Решим ее. Пусть скорость велосипедиста равна x км/ч, тогда за 2 ч он преодолевает $2x$ км, а за 3 ч – $3x$ км. По условию задачи $2x > 24$ и $3x < 39$.

Нам нужно найти такие значения x, при которых верным будет как неравенство $2x > 24$, так и неравенство $3x < 39$, то есть нужно найти общие решения обоих неравенств. В таком случае объединяют неравенства в систему и говорят, что нужно *решить систему неравенств*:

$$\begin{cases} 2x > 24, \\ 3x < 39. \end{cases}$$

Так как оба неравенства – линейные, то получим *систему линейных неравенств с одной переменной*.

Решив каждое из неравенств системы, имеем систему:

$$\begin{cases} x > 12, \\ x < 13. \end{cases}$$

Значит, значение x должно удовлетворять условию: $12 < x < 13$.

Следовательно, скорость велосипедиста больше чем 12 км/ч, но меньше чем 13 км/ч.

Число 12,6 удовлетворяет каждому из неравенств системы

$$\begin{cases} 2x > 24, \\ 3x < 39. \end{cases}$$

И действительно, каждое из числовых неравенств $2 \cdot 12{,}6 > 24$ и $3 \cdot 12{,}6 < 39$ является верным. В таком случае говорят, что число 12,6 – решение данной системы неравенств.

***Решением системы неравенств с одной переменной* называют значение переменной, при котором верным является каждое из неравенств системы.**

Решить систему – означает найти все ее решения или доказать, что решений нет.

При решении системы неравенств целесообразно придерживаться следующей последовательности действий:

1) решить каждое из неравенств системы;
2) отметить множество решений каждого из неравенств на координатной прямой;
3) найти пересечение этих множеств, которое и будет множеством решений системы;
4) записать ответ.

Пример 1. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x + 2 < 11, \\ 4x - 5 \leqslant -1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Постепенно заменяя каждое из неравенств системы ему равносильным, но более простым, получим:

$$\begin{cases} 3x + 2 < 11, \\ 4x - 5 \leqslant -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x < 9, \\ 4x \leqslant 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < 3$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \leqslant 1$ (рис. 26). Множеством решений системы является пересечение этих множеств, то есть промежуток $(-\infty; 1]$.

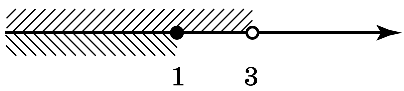


Рис. 26

О т в е т. $(-\infty; 1]$.

Ответ в примере 1 можно записать и так: $x \leqslant 1$.

Пример 2. Найти все целые решения системы неравенств:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 - x(x + 4) > 5, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} > -5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Найдем сначала все решения системы:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x > 5, \\ 3x + 2x > -30; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x > 4, \\ 5x > -30; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ x > -6. \end{cases}$$

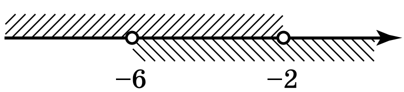


Рис. 27

Очевидно, решением системы является промежуток $(-6; -2)$.

Теперь найдем все целые числа, принадлежащие этому промежутку: $-5; -4; -3$. Таким образом, целыми решениями системы являются числа $-5; -4; -3$.

Ответ. $-5; -4; -3$.

Пример 3. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}2x - 5 \geqslant 0, \\ 0{,}3x - 6 < 0. \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$\begin{cases} 0{,}2x - 5 \geqslant 0, \\ 0{,}3x - 6 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}2x \geqslant 5, \\ 0{,}3x < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 25, \\ x < 20. \end{cases}$$

Отметив полученные решения неравенств системы на координатной прямой (рис. 28), видим, что общих точек у них нет, а значит, пересечением промежутков является пустое множество. Следовательно, система решений не имеет.

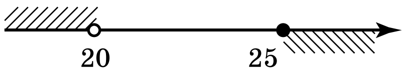


Рис. 28

Ответ. Решений нет.

Пример 4. Решить неравенство $5 < 2x - 7 \leqslant 9$.

Решение. Перепишем данное двойное неравенство в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 7 > 5, \\ 2x - 7 \leqslant 9. \end{cases}$$

Решим эту систему: $\begin{cases} 2x > 12, \\ 2x \leqslant 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 6, \\ x \leqslant 8. \end{cases}$

Таким образом, $6 < x \leqslant 8$, то есть $x \in (6; 8]$.

Ответ. $(6; 8]$.

Решение можно записать и так:

$$5 < 2x - 7 \leqslant 9 \quad \big| + 7$$

$$12 < 2x \leqslant 16 \quad \big| : 2$$

$$6 < x \leqslant 8.$$

А ответ можно также представить в виде: $6 < x \leqslant 8$.

1. Приведите пример системы линейных неравенств с одной переменной.
2. Что называют решением системы неравенств с одной переменной?
3. Что означает решить систему неравенств с одной переменной?

1 Начальный уровень

225. (*Устно*). Являются ли числа –2; –1; 0; 1; 2 решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} x < 2, \\ x < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 3, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x > 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 7, \\ x > 8? \end{cases}$

226. (*Устно*). Является ли число 2 решением системы:

1) $\begin{cases} 2x > 3, \\ x < 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ 3x < 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 0, \\ 3x \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geqslant -9, \\ 5x < 11? \end{cases}$

227. Является ли число –1 решением системы:

1) $\begin{cases} x > 0, \\ x < 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x > -2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < -1, \\ x > 3? \end{cases}$

2 Средний уровень

228. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x > 4, \\ x > 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 4, \\ x < 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 4, \\ x < 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 8. \end{cases}$

229. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x > 3, \\ x > 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 3, \\ x < 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 3, \\ x > 5. \end{cases}$

230. Найдите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} 3x > 6, \\ -4x > -12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x \leqslant 21, \\ -3x \geqslant -6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0,2x \geqslant 1, \\ 0,5x < 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1}{4}x < 2, \\ \dfrac{1}{3}x \leqslant 5. \end{cases}$

231. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5x < 15, \\ -4x < 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x < -5, \\ -7x > -28; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0,1x > 3, \\ 0,2x \leqslant 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{8}x < 5. \end{cases}$

232. Найдите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} x - 3 > 1, \\ x - 6 < 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 7 < -2, \\ x - 2 > 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 2 \leqslant -7, \\ -2x \geqslant -14. \end{cases}$

233. Решите систему неравенств и укажите два числа, являющиеся ее решениями:

1) $\begin{cases} 3x + 1 > 5x, \\ 5,2 - 2x < 0,6x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1,5x + 1 > 3x - 2, \\ x - 2 < 4 - 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 9 - x < 6x + 2, \\ x + 8 < 11. \end{cases}$

234. Решите систему неравенств и укажите два числа, являющиеся ее решениями:

1) $\begin{cases} x + 4 > 3x, \\ 1,4 - 0,2x > 0,5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - 1 < 7x + 2, \\ x + 1,8 > 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1,5x - 1 > 6,5x - 2, \\ x + 6 > 2 - 3x. \end{cases}$

235. Решите двойное неравенство:

1) $3 < 3x \leqslant 9$; 2) $-1 \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant 4$;

3) $0 \leqslant x - 1 \leqslant 5$; 4) $11 < x + 7 < 13$.

236. Решите двойное неравенство:

1) $2 \leqslant 2x < 10$; 2) $-2 < \dfrac{x}{5} \leqslant 1$;

3) $10 < x - 5 < 12$; 4) $7 \leqslant x + 1 \leqslant 8$.

237. Найдите все целые решения двойного неравенства:

1) $-2 \leqslant 2x < 4$; 2) $1,3 < x - 2 \leqslant 2,7$.

3 Достаточный уровень

238. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2{,}6 + x > 5(x + 1) - 6, \\ 2(x - 0{,}4) - x < 3x - 0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1{,}2(3 - x) - 6 > 0{,}8x, \\ -2(1 - 4x) - x < 5x. \end{cases}$

239. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2(x + 3) - 4 < x - 8, \\ 6x + 1 > 3(x + 1); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -(x - 2) - 3(x - 1) < 2x, \\ 12 - (x - 3) \leqslant 5x + 5. \end{cases}$

240. При каких значениях x каждая из функций $y = 0{,}3x - 1{,}8$ и $y = 0{,}2x - 1{,}2$ принимает неотрицательные значения?

241. Найдите все целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} > \dfrac{x + 1}{6}, \\ 2(x + 1) + 5 > 3(x - 5) + 14; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{5x + 3}{2} \leqslant 3x + 1, \\ (x + 1)x - 2 \leqslant x(x - 3) + 6. \end{cases}$

242. Найдите все целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} > \dfrac{x - 3}{3}, \\ 3(x + 1) - 5 < 2(x - 3) + 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{3x - 1}{4} \leqslant x - 2, \\ (x - 2)x - 5 \geqslant x(x + 1) - 29. \end{cases}$

243. Найдите наименьшее целое число, являющееся решением системы:

1) $\begin{cases} 5(2x - 1) + 3 > 2(x - 1) + 7x, \\ 6(1 - x) + 2 \geqslant 3(x + 1) - 7x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{3x + 2}{2} \geqslant 2(2x + 1), \\ (x + 5)(x - 3) \geqslant x(x - 1) - 21. \end{cases}$

244. Найдите наибольшее целое число, являющееся решением системы:

1) $\begin{cases} 3(2x-2)+7 > 4(x-1)-13, \\ 5(1-x)+3 \geqslant 2(x+1)-2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{5x+1}{3} \geqslant 4(2x+1), \\ (x+2)(x-5) \geqslant x(x+1)-10. \end{cases}$

245. Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

1) $\sqrt{2x+7}+\sqrt{1-5x}$; 2) $\sqrt{0,3x-6}+\dfrac{1}{\sqrt{4x-8}}$.

246. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{10-2x}+\sqrt{3x+18}$;

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-0,8}}+\sqrt{3x+0,06}$.

247. Найдите множество решений двойного неравенства:

1) $0 < \dfrac{x}{3}-1 \leqslant 2$; 2) $-2 < -\dfrac{x}{2}+3 < 4$;

3) $-5 < \dfrac{2x+1}{3} < -1$; 4) $0 \leqslant \dfrac{1-2x}{3} \leqslant 8$.

248. Решите двойное неравенство:

1) $-1 < \dfrac{x}{3}+1 \leqslant 0$; 2) $3 < -\dfrac{x}{5}+1 \leqslant 7$;

3) $4 \leqslant \dfrac{3x-1}{2} \leqslant 5$; 4) $2 < \dfrac{1-5x}{4} < 9$.

4 Высокий уровень

249. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2(x-1)-3(x-2)+x < 0, \\ 1,3x(x-2)-0,4 < x(1,3x-3); \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2,5x-0,5(8-x)-1,6 < x, \\ x+2,1 > 1,5(2x-1)-2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2-x > 2x(x-3)-x(2x-5), \\ 5-10x < 3x(2x-4)-x(6x-2); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}+7 > \dfrac{5x}{6}, \\ x-\dfrac{7x}{8} < \dfrac{x}{8}+4. \end{cases}$

250. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 4(x - 3) - (x + 5) > 3(x - 2), \\ 2(x + 3) - 5(x - 6) > 4(x - 2); \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6(x - 1) - 3 < 2(3x - 4), \\ x(x - 2) > (x + 3)(x - 3) - 11. \end{cases}$

251. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{x - 3} + \dfrac{1}{\sqrt{7 - x}} + \dfrac{1}{x^2 - 25}$;

2) $y = \sqrt{2x - 8} + \dfrac{x}{\sqrt{10 - x}} + \dfrac{7}{\sqrt{0,2x - 1}}$.

252. Найдите ОДЗ переменной в выражении:

1) $\sqrt{x - 2} + \dfrac{1}{\sqrt{6 - x}} + \dfrac{1}{x^2 - 16}$;

2) $\sqrt{3x - 6} + \dfrac{5}{\sqrt{8 - x}} + \dfrac{x}{\sqrt{0,5x - 1,5}}$.

253. Одна сторона треугольника равна 4 см, а вторая – 5 см. Какой длины может быть третья сторона треугольника при условии, что его периметр меньше 15 см?

254. При каких значениях a оба корня квадратного уравнения $x^2 - (a + 1)x - (a + 2a^2) = 0$ меньше числа 1?

255. При каких значениях a оба корня квадратного уравнения $x^2 - (2a + 1)x + (a^2 + a) = 0$ больше числа 3?

Упражнения для повторения

256. Известно, что $a > b$. Сравните:

1) $a - 2$ и $b - 2$; 2) $2,1a$ и $2,1b$;
3) $-a$ и $-b$; 4) $-8a$ и $-8b$.

257. Найдите множество решений неравенства:

1) $-5x \geqslant 15$; 2) $7 - x < 11 - 3x$.

258. Докажите неравенство $x^2 - 8x + 19 > 0$.

259. Дано: $10 < x < 20$; $2 < y < 5$. Оцените значение выражения:

1) $2x - y$; 2) $\dfrac{x}{y}$.

260. При каких значениях m уравнение $mx^2 + 4x - 8 = 0$ не имеет решений?

Математика вокруг нас

261. Даша и Маша вместе пропалывают грядку за 24 минуты, а одна Маша – за 40 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

Интересные задачки для нелевивых

262. (*Национальная олимпиада США, 1979 г.*). Решите уравнение $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599$ в целых числах.

Домашняя самостоятельная работа № 1

Каждое задание имеет четыре варианта ответа (А–Г), среди которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. Какое из чисел является решением неравенства $3x > 7$?

А. -2; **Б.** 0; **В.** 5; **Г.** 2.

2. Укажите промежуток, изображенный на рисунке 29.

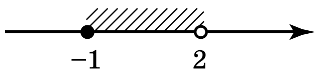


Рис. 29

А. $[-1;\ 2]$; **Б.** $[-1;\ 2)$;
В. $(-1;\ 2)$; **Г.** $(-1;\ 2]$.

3. Какое из неравенств является линейным с одной переменной?

А. $3x^2 > 7$; **Б.** $2 + 1 > 0$; **В.** $\frac{1}{2x + 7} < 3$; **Г.** $-3x > 8$.

4. Известно, что $a > b$. Укажите верное неравенство.

А. $\frac{a}{7} < \frac{b}{7}$; **Б.** $a + 3 < b + 3$; **В.** $-a > -b$; **Г.** $-2a < -2b$.

5. Решите неравенство $-3x \leqslant -15$.

А. $[5;\ +\infty)$; **Б.** $(-\infty;\ 5]$; **В.** $[-5;\ +\infty)$; **Г.** $(-\infty;\ -5)$.

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x - 2 < 7, \\ 2x \geqslant -4. \end{cases}$

А. $[-2;\ 3)$; **Б.** $[-2;\ 9)$; **В.** $(-\infty;\ -2]$; **Г.** $(9;\ +\infty)$.

7. Укажите выражение, принимающее положительные значения при любом значении x.

А. $-x^2$; **Б.** x^2; **В.** $x^2 + 2$; **Г.** $(x + 2)^2$.

8. Известно, что $2 < a < 5$ и $1 < b < 3$. Оцените значение выражения $4a - b$.

А. $5 < 4a - b < 19$; **Б.** $7 < 4a - b < 17$;
В. $-1 < 4a - b < 4$; **Г.** $9 < 4a + b < 23$.

9. Укажите число, не принадлежащее промежутку [2,5; 3,6).

А. $\sqrt{7}$; **Б.** $\sqrt{14}$; **В.** $2\frac{1}{2}$; **Г.** $\sqrt{11}$.

10. Оцените значение выражения $\frac{30}{5 - 2x}$, если $1 < x < 2$.

А. $3\frac{1}{3} < \frac{30}{5 - 2x} < 4\frac{2}{7}$; **Б.** $\frac{30}{5 - 2x} > 0$;
В. $15 < \frac{30}{5 - 2x} < 30$; **Г.** $10 < \frac{30}{5 - 2x} < 30$.

11. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{x - 2} + \frac{1}{\sqrt{8 - x}} + \frac{1}{x^2 - 9}.$$

А. $[2; 8)$; **Б.** $[2; 3) \cup (3; 8]$;
В. $[2; 3) \cup (3; 8)$; **Г.** $(2; 3) \cup (3; 8)$.

12. При каких значениях c уравнение $2x^2 + 4x - c = 0$ не имеет решений?

А. Таких значений c не существует; **Б.** $c < -2$;
В. $c \leqslant -2$; **Г.** $c > -2$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 1–7

1. Является ли решением неравенства $x + 2 > 7$ число:

1) 6; 2) -2; 3) 0; 4) 10?

2. Запишите промежутки, изображенные на рисунках 30–33:

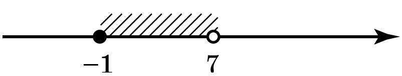


Рис. 30

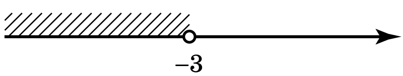


Рис. 31

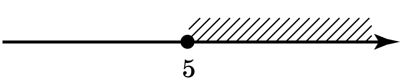


Рис. 32

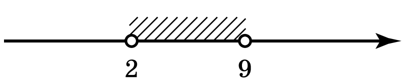


Рис. 33

3. Какие из неравенств являются линейными с одной переменной:

1) $-2x^2 > 6$; 2) $-2x > 6$; 3) $2 + 3 < 6$; 4) $\dfrac{1}{-2x} > 6$?

4. Известно, что $x > y$. Сравните:

1) $x + 2$ и $y + 2$; 2) $2x$ и $2y$; 3) $-x$ и $-y$; 4) $-4x$ и $-4y$.

5. Решите неравенство:

1) $-2x \geqslant 8$; 2) $3x - 4 > x + 8$.

6. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x + 3 < 5, \\ 4x \geqslant -4. \end{cases}$

7. Дано: $5 < a < 10$ и $2 < b < 4$. Оцените значение выражения:

1) $3a - b$; 2) $\dfrac{a}{b}$.

8. Докажите неравенство: $a^2 + 6a + 10 > 0$.

9. Найдите область определения функции:

$$y = \sqrt{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{7 - x}} + \frac{1}{x^2 - 4}.$$

Дополнительные задания

10. Докажите неравенство $(a + 1)(b + 4)(a + b) \geqslant 16ab$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

11. При каких значениях a уравнение $ax^2 - 2x - 8 = 0$ не имеет корней?

Упражнения для повторения главы 1

К § 1

263. Известно, что $m < n$. Может ли разность $m - n$ быть равна:

1) 2,7; 2) π; 3) 0; 4) $-3,8$?

264. Докажите неравенство:

1) $5(m - 3) > 5m - 16$; 2) $x(x + 10) + 2 > 10x$;

3) $(a - 7)(a + 10) < (a + 4)(a - 1)$; 4) $p(p - 6) < (p - 3)^2$;

5) $(m - 2)^2 > -4m$; 6) $p + 1 \leqslant \dfrac{(p + 2)^2}{4}$.

265. Какие из неравенств верны при любом значении a:

1) $(2a + 3)(2a - 3) < 4a^2 + 2a$;
2) $(3a - 2)(3a + 2) < 49a^2 + 0,6$;
3) $(3a - 1)^2 > 3a(3a - 2)$;
4) $7 > (3 - a)(3 + a)$?

266. Докажите неравенство:

1) $(m + 1)^2 \geqslant 4m$; 2) $(4b - 1)^2 > -8b$;
3) $\dfrac{a^2 + 1}{2} \geqslant a$; 4) $\dfrac{m}{m^2 + 1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

267. Сравните число m с нулем, если:

1) $2m < 3m$; 2) $m > 5m$; 3) $-m < -3m$; 4) $-4m > -5m$.

268. Докажите неравенство:

1) $m^2 + n^2 - 2m - 4n + 5 \geqslant 0$; 2) $2x^2 - 10xy + 25y^2 \geqslant 0$.

269. Сравните выражения:

1) $a^3 - b^3$ и $ab(b - a)$, если $a \geqslant b$;
2) $m^2 + n^2$ и $\dfrac{1}{2}$, если $m + n = 1$.

270. Расстояние между городом и деревней равно 20 км. Один из велосипедистов с постоянной скоростью проехал из деревни до города и вернулся назад. Второй велосипедист ехал из деревни до города со скоростью, на 1 км/ч большей скорости первого, а возвращался назад со скоростью, на 1 км/ч меньшей скорости первого. Кто из велосипедистов потратил на дорогу меньше времени?

271. Сравните площадь квадрата, сторона которого равна 6 см, с площадью произвольного прямоугольника, имеющего такой же периметр, что и квадрат.

К § 2

272. В каких неравенствах верно перенесли слагаемое из одной части в другую:

1) $m + 2 > 5$, $m > 5 + 2$; 2) $p - 7 \leqslant 2$, $p \leqslant 2 + 7$; 3) $9 > t - 7$, $9 + 7 > t$; 4) $10 \leqslant a + 5$, $10 - 5 \leqslant a$?

273. Замените звездочку знаком $>$ или $<$ так, чтобы утверждение было верным:

1) если $p > -2$, то $-2 * p$; 2) если $2 < a$, $a < b$, то $2 * b$.

274. Сравните числа:

1) $x+5$ и $y+5$, если $x<y$; 2) $m-2$ и $p-2$, если $p>m$;
3) $-m$ и $-n$, если $m>n$; 4) $12a$ и $12b$, если $a \geqslant b$;
5) $-3k$ и $-3p$, если $p<k$; 6) $\frac{c}{5}$ и $\frac{d}{5}$, если $d \geqslant c$.

275. Известно, что $a>b$. Разместите по возрастанию числа $a+3$; $b-3$; $a+1$; a; $b-1$; b.

276. Известно, что $x>y>0$. Сравните:

1) $8x$ и $5y$; 2) $3x$ и y; 3) $-3x$ и $-y$; 4) $-5x$ и $-2y$.

277. Оцените значение выражения, если $1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$:

1) $-2\sqrt{3}$; 2) $3+\sqrt{3}$; 3) $4-5\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

278. Известно, что $a>5$. Сравните с нулем значение выражения:

1) $2a-10$; 2) $35-7a$.

279. Оцените значение выражения $|x|$, если:

1) $-3<x<-1$; 2) $-7<x<1$.

К § 3

280. Выполните почленное сложение неравенств:

1) $x<3$ и $y<-3$; 2) $a>5$ и $b>7$.

281. Выполните почленное умножение неравенств:

1) $m>2$ и $n>1$; 2) $0<p<3$ и $0<q<5$.

282. Оцените значение выражения:

1) $ab+2$, где $1<a<5$ и $2<b<7$;
2) p^2-3, где $2<p<4$.

283. Верно ли утверждение:

1) если $x>2$, то $x^2>4$; 2) если $x<2$, то $x^2<4$;
3) если $x>2$, то $\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$; 4) если $x<2$, то $\frac{1}{x}>\frac{1}{2}$?

284. Оцените площадь квадрата с периметром P см, если известно, что $36<P<40$.

285. Сравните, если это возможно:

1) $3m+2n$ и 12, если $m>3$, $n>2$;

2) $b - 3a$ и 0, если $a > 8$, $b < 6$;
3) $x - 3y$ и 1, если $x < 8$, $y < 0$;
4) $p - 4q$ и 9, если $p < 8$, $q > 1$.

286. Оцените значение выражения:
1) $a^2 + 2a + 5$, если $0 < a < 1$;
2) $x^2 - 4x$, если $1 < x < 2$;
3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, если $10 < a < 20$, $5 < b < 10$;
4) $\frac{1}{mn} - 7$, если $1 < m < 2$, $0{,}3 < n < 0{,}5$.

287. Сравните x и y, если $x > a^2 + b^2$, $y < 2ab$.

288. Оцените площадь прямоугольника с периметром P см и стороной a см, если $20 < P < 30$, $5 < a < 6$.

289. Докажите неравенство:
1) $(x + 2y)\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y}\right) \geqslant 4$, где $x > 0$, $y > 0$;
2) $\left(\frac{1}{m^2} + pn\right)\left(\frac{4}{p^2} + mn\right)\left(\frac{9}{n^2} + pm\right) \geqslant 48$, где $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$.

К § 4

290. Какие из чисел -2; -1; 0; 1; 2 являются решениями неравенства:
1) $x < 1$; 2) $x \leqslant 1$; 3) $x > 1$; 4) $x \geqslant 1$?

291. Запишите три числа, являющиеся решениями как неравенства $x \leqslant 5$, так и неравенства $x > 3$.

292. Какие из чисел -1; 0; 3; 5; 7 удовлетворяют неравенству:
1) $\frac{1}{x} + x > 2$; 2) $\sqrt{x + 2} < 3$?

293. Найдите все натуральные решения неравенства
$$1 < \frac{10}{x} \leqslant 5.$$

294. Какие из решений уравнения $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ являются решениями неравенства $x^2 + 4x + 3 \leqslant 0$?

К § 5

295. Запишите три любых числа, принадлежащих промежутку:

1) $(-4;\ 5)$; 2) $[-2;\ 7)$; 3) $[3;\ +\infty)$;
4) $(-\infty;\ 7)$; 5) $[1;\ 17]$; 6) $(-\infty;\ -1)$;
7) $(4;\ 9]$; 8) $(5;\ +\infty)$; 9) $[-10;\ -9]$.

296. Найдите наименьшее и наибольшее целые числа, принадлежащие промежутку:

1) $(-7;\ 8)$; 2) $[-2;\ 3{,}8)$; 3) $(-0{,}2;\ 4]$; 4) $(-2{,}99;\ 1{,}98)$.

297. Запишите три числа из промежутка $\left[-\frac{2}{7};\ -\frac{1}{7}\right]$.

298. Можно ли найти наименьшее и наибольшее числа, принадлежащие промежутку $[1{,}6;\ 1{,}8)$?

299. Найдите пересечение и объединение множеств:

1) рациональных и действительных чисел;
2) натуральных чисел, кратных числу 3, и натуральных чисел, кратных числу 9.

К § 6

300. Решите неравенство:

1) $x - 3 \geqslant 0$; 2) $x + 5 < 0$; 3) $x + 2 > 0$; 4) $x - 6 < 0$.

301. Решите неравенство и укажите любых два целых числа, являющиеся его решениями:

1) $-4x > 12$; 2) $3x < 0$; 3) $-5x \leqslant -15$; 4) $2x \geqslant -7$.

302. Найдите множество решений неравенства:

1) $1 + 8x < 9$; 2) $4x - 7 > 0$; 3) $2 + 6x \leqslant 5 + 7x$;
4) $4x + 7 \geqslant 6x + 1$; 5) $3x \geqslant 5x + 1$; 6) $4 + 11x < 5 + 12x$.

303. Решите неравенство:

1) $\frac{2x}{5} < 1$; 2) $\frac{x}{7} \geqslant 0$; 3) $\frac{4x}{3} > 2$;
4) $\frac{5x}{8} \leqslant 0$; 5) $\frac{x+2}{20} \geqslant 1$; 6) $\frac{3-x}{2} \leqslant 1$.

304. При каких значениях x значение выражения $2x + 3$ меньше соответствующего значения выражения $4x - 7$?

305. При каких значениях y сумма дробей $\frac{y}{2}$ и $\frac{y}{3}$ больше 10?

306. Решите неравенство:

1) $6x^2 \geqslant 48 + 3x(2x + 4)$;

2) $(x + 6)(3x - 8) > 20 + 3(x^2 - 1)$;

3) $\frac{x-2}{4} - \frac{x+1}{3} \leqslant \frac{5x}{12}$;

4) $x - 1 < \frac{3x-1}{3} + \frac{x+1}{2}$.

307. Найдите наименьшее целое значение x, при котором значение дроби $\frac{3x+5}{2}$ меньше значения дроби $\frac{5x-7}{3}$.

308. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\frac{2}{3}(x + 1) - 8}$; 2) $y = \frac{\sqrt{x-5}}{x-7}$.

309. Длина одной стороны прямоугольника равна 6 см. Какой должна быть длина другой стороны, чтобы периметр прямоугольника превышал 30 см?

310. При каких значениях a уравнение:

1) $ax^2 + 2(a + 1)x + (a + 3) = 0$ не имеет корней;

2) $ax^2 - (2a + 1)x + (a + 2) = 0$ имеет два различных корня?

311. Решите неравенство для каждого значения a:

1) $5 + ax \geqslant a - 3x$; 2) $3(a - x) < 9 - ax$;

3) $(a + 1)x > a^2 - 1$; 4) $(a^2 - 4)x \leqslant a - 2$.

312. Спортсменка произвела по мишени 10 выстрелов. За каждый меткий выстрел ей насчитывают 3 очка, а в случае промаха из результата вычитают 1 очко. Известно, что спортсменка набрала более 17 очков. Каким может быть количество ее метких выстрелов?

К § 7

313. Является ли решением системы неравенств $\begin{cases} 2x > 4, \\ 3x < 12 \end{cases}$ число: 1) 3; 2) 2,7; 3) 1,7; 4) −1,8; 5) 3,9; 6) 4?

314. Найдите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} x - 3 \geqslant 0, \\ x + 5 \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 7 < 0, \\ x + 8 > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x \geqslant -4, \\ 2x < 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{8}x > 1, \\ \frac{1}{7}x \leqslant 1. \end{cases}$

315. Решите систему неравенств и укажите три числа, являющиеся ее решениями:

1) $\begin{cases} 3x + 2 > x + 4, \\ \dfrac{x}{3} < -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 2 \geqslant x - 1, \\ 3x - 1 < 1 - 2x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{2x - 1}{2} \leqslant 5, \\ \dfrac{x}{7} < 1. \end{cases}$

316. Решите двойное неравенство:

1) $4 \leqslant 8x < 24$; 2) $1 \leqslant \dfrac{x}{10} < 2$;

3) $0{,}1 < x + 1 < 1{,}1$; 4) $7{,}9 < x - 2 < 8{,}1$.

317. Найдите натуральные решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} \dfrac{2x + 3}{5} > \dfrac{3x + 4}{8}, \\ 3 - 2x > 5(x - 5); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(x - 1) > (x + 1)^2, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{3} > -7. \end{cases}$

318. При каких значениях x:

1) значение двучлена $2x - 5$ принадлежит промежутку $[-4; 2)$;

2) значение дроби $\dfrac{1 - 3x}{2}$ принадлежит промежутку $[0; 4]$?

319. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 4x - 1 < 0, \\ -2 \leqslant 2x \leqslant 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -9 \leqslant -x \leqslant -5, \\ 5 \leqslant \dfrac{2x - 1}{3} \leqslant 10. \end{cases}$

320. Сумма натурального числа с удвоенным следующим за ним числом больше чем 57. Сумма этого же числа с утроенным предыдущим числом меньше чем 74. Найдите это натуральное число.

321. Найдите все решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} x > 7, \\ x > 8, \\ x \leqslant 11; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x > 8, \\ 3x < 36, \\ -x < -5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 7 > 0, \\ -x > -8, \\ 2x - 15 \geqslant 0. \end{cases}$

322. При каких значениях a система имеет решения:

1) $\begin{cases} 3x > 15, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + a \geqslant 0, \\ 3x \leqslant -6? \end{cases}$

323. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x > 2, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 6, \\ x > a. \end{cases}$

324. Найдите значения a, при которых один из корней уравнения $x^2 + x + (a - a^2) = 0$ меньше нуля, а другой – больше 0,5.

325. Найдите, при каких значениях a оба корня квадратного уравнения $6x^2 + (5a + 2)x + (a^2 + a) = 0$ принадлежат промежутку $[-4; 0]$.

326. Количество единиц некоторого двузначного числа на 1 больше количества его десятков. Найдите это число, если оно больше 45, но меньше 66.

Фискальная математика[1]

Государственный бюджет Украины – это план формирования и использования финансовых ресурсов для обеспечения задач и функций государства, которые оно осуществляет через органы государственной власти и местного самоуправления в течение бюджетного периода. Основным источником формирования госбюджета, в частности наполнения его *доходной части*, являются налоги.

Налоги – это обязательные платежи, которые физические и юридические лица должны перечислять в государственный бюджет. Размер и сроки уплаты налогов устанавливаются законодательно и периодически пересматриваются. Размер налоговых начислений (*ставка налога*) может устанавливаться как в процентах, так и в абсолютной сумме. Наиболее весомыми для доходной части бюджета являются *налог на добавленную стоимость* (НДС) и *единый социальный взнос* (ЕСВ). НДС платит покупатель по ставке 20 % от стоимости товара (услуги), но учет и перечисление НДС в государственный бюджет осуществляет продавец (налоговый агент). ЕСВ взимается с работодателей по ставке 22 % от фонда заработной платы[2]. Доходная часть государственного бюджета также зависит и от других видов налогов, в частности, налога на доходы физических лиц, акцизного налога, пошлины, налога на прибыль предприятий, транспортного и земельного налогов и т. п. (найдите детальную информацию о разных видах налогов в Украине самостоятельно).

[1] Та, что имеет отношение к налоговой политике государства.
[2] Ставки налогов указаны по состоянию на 2017 год.

Попробуйте самостоятельно решить несколько задач, связанных с налогообложением.

1. В Украине в 2015 году налогообложению подлежали 15 888 автомобилей, а в 2016 году – 138 249 автомобилей. Ставка транспортного налога на каждый автомобиль составляла 25 000 грн в год. Насколько больше поступлений за счет транспортного налога получил государственный бюджет Украины в 2016 году по сравнению с 2015 годом?

2. Ставка налога на землю составляет 3,66 грн за 1 м^2, но в некоторых населенных пунктах этот налог может начисляться с определенным коэффициентом, например: в курортной местности Карпат, вдоль побережий Черного и Азовского морей, в густонаселенных областных центрах и т. п. Насколько большим будет размер земельного налога в Киеве по сравнению с Одессой за земельный участок площадью 250 м^2, если в Киеве и Одессе для ставки земельного налога действуют коэффициенты повышения: 3 – для Киева и 2 – для Одессы?

3. За использованный в садовом домике газ семья Петренко уплатила сумму, указанную в договоре с предприятием, предоставляющим услуги газоснабжения. НДС при этом составил 134 грн. Какая сумма (без НДС) указана в договоре газоснабжения садового домика этой семьи?

4. Семья Ковальчуков за ноябрь 2016 года получила от Укртелекома счет на сумму 48 грн. Сколько средств будет перечислено в качестве НДС после оплаты этого счета?

5. Военный сбор в 2016 году составил 1,5 % от заработной платы. В семье из трёх человек работают все. Заработная плата отца составляет 5400 грн, матери – 4800 грн, а сына – 4200 грн. Какую общую сумму военного сбора уплатят члены этой семьи за месяц? Какую общую сумму военного сбора уплатит семья в течение всего 2016 года, если их зарплата за это время не менялась?

6. Уплатив 18 % налога на доходы физических лиц и 1,5 % военного сбора со своей заработной платы, охранник супермаркета получил 4508 грн. Каков размер заработной платы у охранника? Сколько ЕСВ ежемесячно перечисляет владелец этого супермаркета в государственный бюджет за службу охраны, если в ней работают три охранника и начальник охраны, заработная плата которого в 1,2 раза больше заработной платы охранника?

Глава 2

Квадратичная функция

В этой главе вы:

- **познакомитесь** с квадратичной функцией;
- **узнаете**, что такое нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастания и убывания функции; наибольшее и наименьшее значения функции;
- **научитесь** выполнять преобразования графика функции; строить график квадратичной функции; решать квадратные неравенства и системы двух уравнений второй степени с двумя переменными.

§ 8. ФУНКЦИЯ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ И ГРАФИК ФУНКЦИИ

В 7 классе вы начали изучать одно из важнейших математических понятий – понятие функции.

Напомним, что

***функцией* (или *функциональной зависимостью*) называют такую зависимость, при которой каждому значению независимой переменной из некоторого множества соответствует единственное значение зависимой переменной.**

Независимую переменную еще называют ***аргументом***, а о зависимой переменной говорят, что она является ***функцией*** этого аргумента (или просто функцией). Например, если $y = x^2 + 2x - 3$, то y является функцией аргумента x.

Зависимость переменной y от переменной x записывают в виде: $y = f(x)$ (читают: «y равно f от x»). Символом $f(x)$ обозначают значение функции для значения аргумента, равного x.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = 5x + 2$. Можно записать, что $f(x) = 5x + 2$. Найдем, например, значение функции для $x = -3$, то есть найдем $f(-3)$. Имеем: $f(-3) = 5 \cdot (-3) + 2 = -13$. Найдем значение этой функции в точках, которые равны 0; a; $b - 1$. Получим:

$$f(0) = 5 \cdot 0 + 2 = 2;$$
$$f(a) = 5a + 2;$$
$$f(b - 1) = 5(b - 1) + 2 = 5b - 3.$$

Отметим, что в записи $y = f(x)$ вместо f можно использовать и другие буквы: g, φ, ψ и т. п.

Все значения, которые принимает независимая переменная (аргумент), образуют *область определения функции*.

Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *область значений функции*.

***Наибольшим значением функции* называют наибольшее число из области значений функции, а *наименьшим значением функции* — соответственно наименьшее такое число.**

Область определения функции $y = f(x)$ обычно обозначают $D(f)$, а область значений – $E(f)$.

Если функция задана формулой и при этом не указана ее область определения, то будем считать, что эта область состоит из всех значений аргумента, при которых формула функции имеет смысл.

Пример 2. Найти область определения функции:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$; 2) $g(x) = \dfrac{1}{x-8}$.

Решение. 1) Выражение $x^2 - 2x + 3$ имеет смысл при любом значении x, поэтому область определения функции – множество всех чисел, т. е. промежуток $(-\infty; +\infty)$.

2) Выражение $\dfrac{1}{x-8}$ имеет смысл при любом x, кроме числа 8, поэтому областью определения функции является множество $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Ответ. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Ответ можно было записать еще и так:
1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 2) $D(g) = (-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Пример 3. Найти область определения и область значений функции: 1) $f(x) = 2 - x^2$; 2) $g(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$.

Решение. 1) Областью определения функции $f(x)$ будет промежуток $(-\infty; +\infty)$. Чтобы найти область значений функции, оценим выражение $2 - x^2$ для всех значений x. Имеем:

$$x^2 \geqslant 0 \quad \big| \cdot (-1)$$
$$-x^2 \leqslant 0 \quad \big| + 2$$
$$2 - x^2 \leqslant 2.$$

Таким образом, $f(x) \leqslant 2$ при любом значении x, то есть областью значений функции $f(x)$ будет промежуток $(-\infty; 2]$.

2) Область определения функции $g(x)$ состоит из таких значений x, при которых выражения $x - 2$ и $2 - x$ одновременно принимают неотрицательные значения. Следовательно, чтобы найти эти значения, надо решить систему неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ 2 - x \geqslant 0; \end{cases} \text{ откуда получим, что } \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$

Очевидно, что решением системы является число 2, а значит, область определения функции $g(x)$ содержит лишь число 2. Чтобы найти область значений этой функции, достаточно вычислить $g(2)$. Имеем: $g(2) = \sqrt{2-2} + \sqrt{2-2} = 0$.

Ответ. 1) $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$, $E(f) = (-\infty;\ 2]$; 2) $D(g) = \{2\}$, $E(g) = \{0\}$.

Отметим, что наибольшим значением функции $f(x) = 2 - x^2$ является число 2, а наименьшего значения у нее не существует.

Напомним, что

графиком функции **называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.**

Пример 4. Построить график функции $f(x) = |x|$. По графику найти наибольшее и наименьшее значения функции.

Решение. Областью определения функции $f(x) = |x|$ является множество всех чисел. По определению модуля числа имеем: $|x| = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$, если $x < 0$. Следовательно, функцию $f(x) = |x|$ можно записать в виде:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

График этой функции на промежутке $[0;\ +\infty)$ совпадает с графиком функции $y = x$, а на промежутке $(-\infty;\ 0]$ – с графиком функции $y = -x$.

График функции $f(x) = |x|$ изображен на рисунке 34. Очевидно, что наименьшим значением этой функции является число 0, а наибольшего значения не существует.

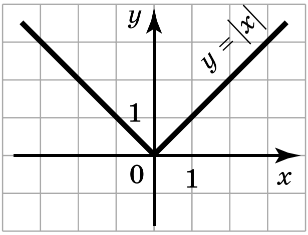


Рис. 34

Ответ. Наименьшее значение функции – 0, наибольшего не существует.

Начиная с XVII в. одним из важнейших математических и общенаучных понятий является понятие функции. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира.

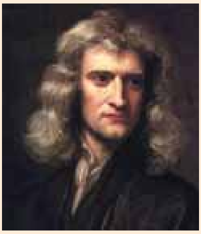
Идея функциональной зависимости восходит к древности, она содержится уже в первых математически выраженных соотношениях между величинами, в первых правилах действий над числами, в первых формулах для нахождения площади и объема тех или иных фигур и тел. Вавилонские ученые, которые 4–5 тысяч лет назад нашли для площади круга радиусом r грубо приближенную формулу $S = 3r^2$, установили тем самым, пусть и несознательно, что площадь круга является функцией от его радиуса.

Примерами таблично заданных функций являются астрономические таблицы вавилонян, античных греков и индийцев, таблицы квадратов и кубов чисел, также применявшиеся вавилонянами.

Явное и вполне сознательное применение понятия функции берет свое начало в XVII в. в связи с проникновением в математику идеи переменных. В «Геометрии» Декарта и в работах Ферма, Ньютона и Лейбница понятие функции имело, по сути, интуитивный характер и было связано либо з геометрическими, либо с механическими представлениями: ординаты точек кривых – функции от абсцисс; путь и скорость – функции от времени и т. п.


Рене Декарт (1596–1650)


Пьер Ферма (1601–1665)


Исаак Ньютон (1643–1727)


Готфрид Лейбниц (1646–1716)

Четкого представления понятия функции в XVII в. еще не было, однако путь к первому такому определению проложил Декарт, который систематически рассматривал в своей «Геометрии» (1637 г.) лишь те кривые, которые можно точно представить с помощью уравнений, притом преимущественно алгебраических. Постепенно понятие функции стало отождествляться таким образом с понятием *аналитического выражения* – формулы.

Слово *функция* (от латинского *functio* – совершение, выполнение) немецкий математик Лейбниц употреблял с 1673 г. в смысле *роли* (величина, выполняющая ту или иную функцию). Как термин в современном смысле выражение «функция от x» стало употребляться Лейбницем и И. Бернулли. Начиная с 1698 г. Лейбниц ввел также термины *переменная* и *константа*. Для обозначения произвольной функции от x Иоганн Бернулли применял знак ϕx, называя ϕ характеристикой функции. Лейбниц употреблял x^1, x^2 вместо современных $f_1(x)$, $f_2(x)$. Эйлер обозначал через $f : y$, $f : (x + y)$ то, что мы сейчас обозначаем через $f(x)$, $f(x + y)$, а Д'Аламбер писал уже так: fx или $f(x)$, то есть пришел к современному обозначению функции.

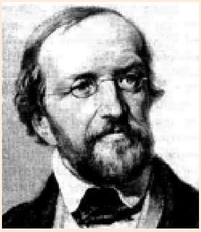
Явное определение функции было впервые дано в 1718 г. одним из учеников и сотрудников Лейбница, выдающимся швейцарским математиком Иоганном Бернулли: «Функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных».

Леонард Эйлер, выдающийся ученик Иоганна Бернулли, в своей работе «Введение в анализ бесконечных» (1748 г.) несколько уточнил определение своего учителя. Определение Л. Эйлера гласит: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств». Так понимали функцию на протяжении почти всего XVIII в.

Иоганн Бернулли (1667–1748)

Леонард Эйлер (1707–1783)

Бернард Больцано (1781–1848)



Петер Густав Дирихле (1805–1859)

В XIX в. идеи Эйлера получили дальнейшее развитие. Понятие функции как зависимости одной переменной от другой ввел чешский математик Б. Больцано, а обобщил – немецкий математик Дирихле. В 1837 г. он так сформулировал общее определение понятия функции: «y есть функция переменной x (на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$), если каждому значению x (на этом отрезке) соответствует совершенно определенное значение y, причем безразлично, каким образом установлено это соответствие – аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами».

Именно такое определение понятия функции в современном укороченном варианте встречается в большинстве школьных учебников, в том числе и в этом.

1. Что называют функцией?
2. Какую переменную называют независимой переменной (аргументом), а какую – зависимой?
3. Что называют областью определения функции?
4. Что называют областью значений функции?
5. Что называют графиком функции?

1 Начальный уровень

327. (*Устно*). Функция задана формулой $y = 3x - 7$. Назовите ее независимую переменную; зависимую переменную.

328. Найдите:

1) $f(2)$, $f(0)$, $f(-1)$, если $f(x) = 2x - 3$;
2) $g(0)$, $g(2)$, если $g(x) = x^2 + x$;
3) $\varphi(-2)$, $\varphi(3)$, если $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

329. Найдите:

1) $g(1)$, $g(0)$, $g(-3)$, если $g(x) = -x + 1$;
2) $f(0)$, $f(-1)$, если $f(x) = x^2 - x$;
3) $\psi(3)$, $\psi(-1)$, если $\psi(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$.

2 Средний уровень

330. $t(x) = x^2 - x + 5$. Найдите $t(-1) + t(0) + t(1)$.

331. $g(x) = 2x^2 + 3$. Найдите $g(0) + g(1) + g(2)$.

332. Дано: $f(x) = \sqrt{x} + x$, $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$. Сравните:

1) $f(0)$ и $g(1)$; 2) $f(4)$ и $g(3)$.

333. Дано: $f(x) = x - \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Вычислите:

1) $f(1) + g(3)$; 2) $f(9) - g(1)$.

334. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = 5 - 3x$;
2) $g(x) = \dfrac{30}{x}$;
3) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$;
4) $g(x) = \sqrt{x} + 9$;
5) $f(x) = \dfrac{3}{x-5}$;
6) $\psi(x) = \dfrac{7}{2x+8}$.

335. Найдите область определения функции:

1) $g(x) = 3x + 1$;
2) $f(x) = -\frac{60}{x}$;
3) $t(x) = 7 - \sqrt{x}$;
4) $f(x) = x^2 - 3x - 19$;
5) $g(x) = \frac{x}{x+3}$;
6) $\varphi(x) = \frac{9}{3x-9}$.

336. Найдите значение x, при котором значение функции $y = \frac{1}{3}x - 5$ равно: 1) 4; 2) −5; 3) 0; 4) −1.

337. При каком значении x значение функции $y = 7 - 3x$ равно:
1) 1; 2) 7; 3) 0; 4) −5?

338. Постройте график функции:

1) $y = 2x - 7$; 2) $y = 3$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = \sqrt{x}$.

339. Постройте график функции:

1) $y = 3x - 5$; 2) $y = \frac{4}{x}$; 3) $y = -2$; 4) $y = x^2$.

340. На рисунке 35 изображен график функции $y = f(x)$, область определения которой – промежуток $[-3; 3]$. Найдите:
1) $f(-3)$, $f(-1)$, $f(2)$;
2) значение x, если $f(x) = -1$, $f(x) = 2{,}5$;
3) наибольшее и наименьшее значения функции;
4) область значений функции.

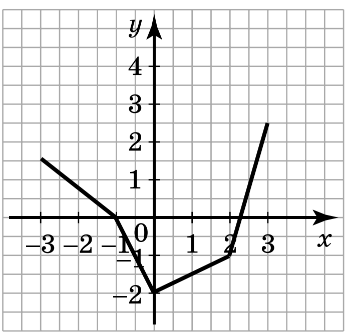


Рис. 35

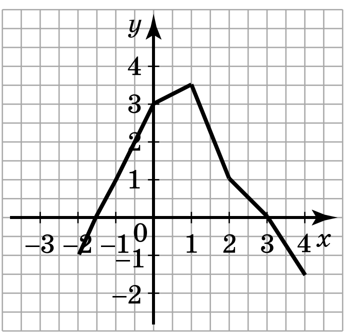


Рис. 36

341. На рисунке 36 изображен график функции $y = g(x)$, область определения которой – промежуток $[-2; 4]$. Найдите:

1) $g(-2)$, $g(0)$, $g(3)$;
2) значение x, если $g(x) = 1$, $g(x) = -1{,}5$;
3) наибольшее и наименьшее значения функции;
4) область значений функции.

3 Достаточный уровень

342. Проходит ли график функции $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 5}{x - 1}$ через точку: 1) $A(0;\ 5)$; 2) $B(1;\ -2)$; 3) $C(2;\ 7)$; 4) $D(-1;\ -3)$?

343. Принадлежит ли графику функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 5}{x + 1}$ точка:
1) $A(2;\ 2)$; 2) $B(0;\ -5)$; 3) $C(-1;\ -7)$; 4) $D(1;\ 0{,}5)$?

344. Найдите область определения функции:

1) $g(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$; 2) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 4}$;

3) $p(x) = \dfrac{5}{x^2 - 3x}$; 4) $t(x) = \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{2}{2x - 7}$;

5) $g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2x - 3}$; 6) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 1}$;

7) $\varphi(x) = \dfrac{x}{|x| + 2}$; 8) $t(x) = \dfrac{5}{|x - 2| - 3}$;

9) $f(x) = \sqrt{3x - 6}$; 10) $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{4x + 10}}$.

345. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$; 2) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

3) $\varphi(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2x}$; 4) $\psi(x) = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{3}{3x + 6}$;

5) $p(x) = \dfrac{5}{x^2 - x - 2}$; 6) $f(x) = \dfrac{2x}{|x| - 4}$;

7) $g(x) = \dfrac{x}{|x| + 1}$; 8) $f(x) = \dfrac{4}{|x + 1| - 2}$;

9) $f(x) = \sqrt{2x + 6}$; 10) $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{2x - 7}}$.

346. Дана функция: $f(x) = \begin{cases} 5 - x, \text{ если } x < -2, \\ x^2, \text{ если } -2 \leqslant x < 1, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

Найдите $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.

347. Известно, что $g(x) = kx + l$, причем $g(2) = -1$, $g(-4) = 17$. Найдите k и l.

348. Известно, что $f(x) = kx + l$, причем $f(1) = -4$, $f(-2) = -13$. Найдите k и l.

4 Высокий уровень

349. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 5$;
2) $g(x) = 3 - \sqrt{x}$;
3) $t(x) = |x| + 2$;
4) $g(x) = |x| - 3$;
5) $f(x) = x^2 + 5$;
6) $\varphi(x) = 9 - x^4$.

350. Постройте график функции:

1) $f(x) = \begin{cases} -x - 2, \text{ если } x < -3, \\ 1, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 2, \\ x - 1, \text{ если } x > 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x}, \text{ если } x < -2, \\ 1{,}5x, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{6}{x}, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

351. Постройте график функции:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, \text{ если } x < -2, \\ 3, \text{ если } -2 \leqslant x < 3, \\ 6 - x, \text{ если } x \geqslant 3. \end{cases}$$

352. Найдите область определения функции и постройте ее график:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$;
2) $g(x) = \dfrac{6x + 12}{x^2 + 2x}$;
3) $\varphi(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$;
4) $\psi(x) = \dfrac{|x| - 2}{|x| - 2}$.

353. Найдите область определения функции и постройте ее график:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$; 2) $g(x) = \dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$.

Упражнения для повторения

354. Вычислите:

1) $6^8 : 6^5 : 36$; 2) $(7^5 \cdot 49^2) : 7^{10}$; 3) $10^{-6} : 100^{-2}$.

355. Число -3 является корнем уравнения $x^2 + 2x - c = 0$. Найдите коэффициент c и второй корень уравнения.

356. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right) : \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

357. Сколько корней уравнения $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ являются решениями неравенства $x^2 - 4 < 0$?

Математика вокруг нас

358. В 2016 году налог на прибыль составлял 18 % заработной платы. Кроме того, из заработной платы удерживали 1,5 % военного сбора. В некой компании зарплата менеджера составляла 5200 грн. Какую сумму получал менеджер после уплаты налога на прибыль и военного сбора?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

359. Найдите нули функции:

1) $y = 2x - 6$; 2) $y = 3x + 24$; 3) $y = \dfrac{x + 1}{7}$; 4) $y = \dfrac{7}{x + 1}$.

360. Какая фигура является графиком функции:

1) $y = 4x$; 2) $y = \dfrac{4}{x}$; 3) $y = 3x - 7$;

4) $y = x^2$; 5) $y = -3$; 6) $y = \sqrt{x}$?

361. Постройте график функции:

1) $y = -3x$; 2) $y = \dfrac{6}{x}$; 3) $y = 2$;

4) $y = -\dfrac{8}{x}$; 5) $y = x^2$; 6) $y = \sqrt{x}$.

Интересные задачки для неленивых

362. Задумали некоторое натуральное двузначное число. Справа к нему дописали такое же число и из полученного числа вычли квадрат задуманного числа. Потом эту разность разделили на 4 % от квадрата задуманного числа, вследствие чего неполное частное и остаток оказались равны соответственно половине задуманного числа и задуманному числу. Найдите задуманное число.

§ 9. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 37. При $x = -2$ или $x = 3$ значение функции равно нулю, то есть $f(-2) = f(3) = 0$. В таком случае значения аргумента называют *нулями функции*.

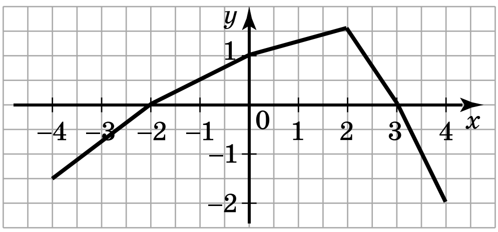


Рис. 37

Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют *нулем функции*.

Очевидно, что нули функции являются абсциссами *точек пересечения графика функции с осью абсцисс*, а ординаты этих точек равны нулю, так как точки лежат на оси абсцисс.

Следовательно, чтобы найти нули функции $y = f(x)$, нужно решить уравнение $f(x) = 0$.

Пример 1. Найти нули функции $h(x) = x^2 - 2x - 8$.

Решение. Решим уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$, получим: $x_1 = -2$; $x_2 = 4$. Следовательно, -2 и 4 – нули функции.

Ответ. -2; 4.

График, изображенный на рисунке 37, пересекает ось абсцисс в точках $(-2; 0)$ и $(3; 0)$.

Этот график пересекает также и ось ординат в точке $(0; 1)$. Абсцисса этой точки равна нулю, ведь точка лежит на оси ординат. Следовательно, ордината *точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью ординат* равна числу $f(0)$, то есть значению функции для значения аргумента, равного нулю.

Пример 2. Найти точки пересечения графика функции $h(x) = x^2 - 2x - 8$ с осями координат.

Решение. Так как -2 и 4 – нули функции $y = h(x)$, то ее график пересекает ось абсцисс в точках $(-2; 0)$ и $(4; 0)$.

Так как $h(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8$, то график функции $y = h(x)$ пересекает ось ординат в точке $(0; -8)$.

Нули функции $y = f(x)$ (рис. 37) разбивают ее область определения – промежуток $[-4; 4]$ – на три промежутка: $[-4; -2)$, $(-2; 3)$ и $(3; 4]$. Для значений x из промежутка $(-2; 3)$ точки графика лежат выше оси абсцисс, а для значений x из промежутков $[-4; -2)$ и $(3; 4]$ – ниже оси абсцисс. Следовательно, на промежутке $(-2; 3)$ функция принимает положительные значения, то есть $f(x) > 0$ при $x \in (-2; 3)$, а на каждом из промежутков $[-4; -2)$ и $(3; 4]$ – отрицательные значения, то есть $f(x) < 0$ при $x \in [-4; -2)$ или $x \in (3; 4]$.

Промежуток, на котором функция сохраняет свой знак, называют *промежутком знакопостоянства функции*.

Промежутки $[-4; -2)$, $(-2; 3)$ и $(3; 4]$ являются промежутками знакопостоянства функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 37.

Рассмотрим, как меняется (увеличивается или уменьшается) значение этой функции при изменении значений x от -4 до 4.

Из графика видим, что с увеличением значений x от -4 до 2 значения y увеличиваются (график «стремится» вверх), а с увеличением значений x от 2 до 4 значения y уменьшаются (график «стремится» вниз). Говорят, что на промежутке $[-4; 2]$ функция *возрастает* (или является *возрастающей*), а на промежутке $[2; 4]$ функция *убывает* (или является *убывающей*).

Функцию называют *возрастающей* на некотором промежутке, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции.
Функцию называют *убывающей* на некотором промежутке, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

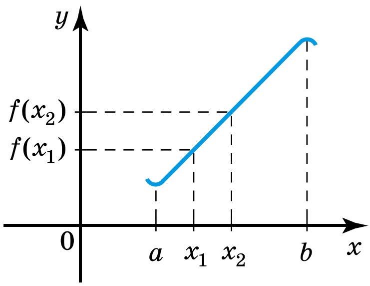


Рис. 38

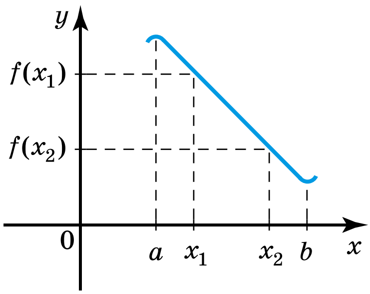


Рис. 39

Следовательно, по определению, функцию $y = f(x)$ называют возрастающей на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, имеет место неравенство: $f(x_2) > f(x_1)$.

На рисунке 38 изображен график функции $y = f(x)$, возрастающей на $[a; b]$. При этом $[a; b]$ называют *промежутком возрастания функции*.

Аналогично, по определению, функцию $y = f(x)$ называют убывающей на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, имеет место неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

На рисунке 39 изображен график функции $y = f(x)$, убывающей на $[a; b]$. При этом $[a; b]$ называют *промежутком убывания функции*.

Выясним, какими свойствами обладают некоторые из ранее изученных функций.

Пример 3. Рассмотрим свойства функции $y = kx + l$, где $k \neq 0$ (рис. 40 и 41).

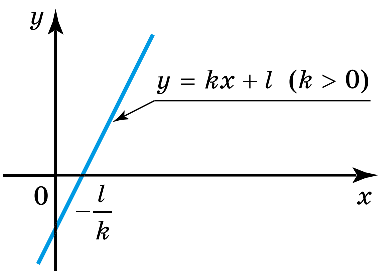


Рис. 40

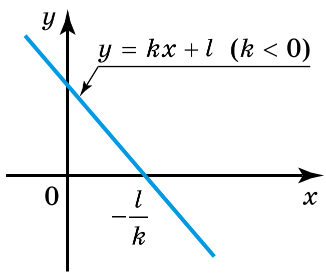


Рис. 41

1) Областью определения и областью значений функции является множество всех чисел.

2) Найдем нули функции, решив уравнение $kx + l = 0$, получим, что $x = -\frac{l}{k}$ – единственный нуль функции.

3) Найдем промежутки знакопостоянства функции.

Пусть $k > 0$. Решив неравенство $kx + l > 0$, получим: $x > -\frac{l}{k}$. Следовательно, $y > 0$ при $x > -\frac{l}{k}$.

Решив неравенство $kx + l < 0$, получим: $x < -\frac{l}{k}$. Следовательно, $y < 0$ при $x < -\frac{l}{k}$.

Пусть $k < 0$. Решив неравенство $kx + l > 0$, получим: $x < -\frac{l}{k}$. Следовательно, $y > 0$ при $x < -\frac{l}{k}$.

Решив неравенство $kx + l < 0$, получим: $x > -\frac{l}{k}$. Следовательно, $y < 0$ при $x > -\frac{l}{k}$.

4) Проверим функцию $f(x) = kx + l$ на возрастание и убывание.

Пусть $k > 0$ и $x_2 > x_1$, то есть $x_2 - x_1 > 0$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + l) - (kx_1 + l) = k(x_2 - x_1) > 0$, так как $k > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$.

Следовательно, при $k > 0$ функция на $(-\infty; +\infty)$ возрастает.

Пусть $k < 0$ и $x_2 > x_1$, то есть $x_2 - x_1 > 0$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + l) - (kx_1 + l) = k(x_2 - x_1) < 0$, так как $k < 0$ и $x_2 - x_1 > 0$.

Следовательно, при $k < 0$ функция на $(-\infty; +\infty)$ убывает.

5) Наибольшего и наименьшего значений у функции нет.

Пример 4. Рассмотрим свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ (рис. 42 и 43).

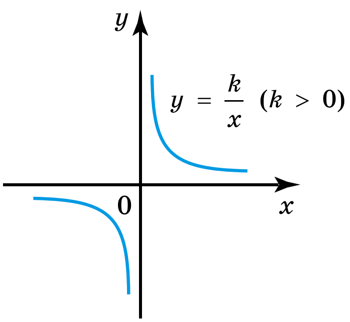


Рис. 42

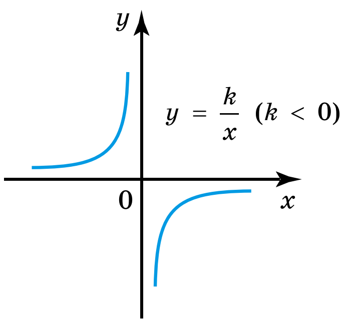


Рис. 43

1) Областью определения и областью значений функции является множество всех чисел, за исключением нуля.

2) Поскольку уравнение $\frac{k}{x} = 0$, где $k \neq 0$, решений не имеет, то у функции $y = \frac{k}{x}$ нет нулей.

3) Пусть $k > 0$. Тогда $\frac{k}{x} > 0$ при $x > 0$ и $\frac{k}{x} < 0$ при $x < 0$. Следовательно, $y > 0$ при $x > 0$ и $y < 0$ при $x < 0$.

Пусть $k < 0$. Тогда $\frac{k}{x} > 0$ при $x < 0$ и $\frac{k}{x} < 0$ при $x > 0$. Следовательно, $y > 0$ при $x < 0$ и $y < 0$ при $x > 0$.

4) При $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. При $k < 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

5) Наибольшего и наименьшего значений функция не имеет.

Пример 5. Рассмотрим свойства функции $y = x^2$ (рис. 44).

1) Область определения функции – множество всех чисел. Область значений – промежуток $[0; +\infty)$.

2) Уравнение $x^2 = 0$ имеет единственное решение: $x = 0$. Следовательно, число 0 – единственный нуль функции.

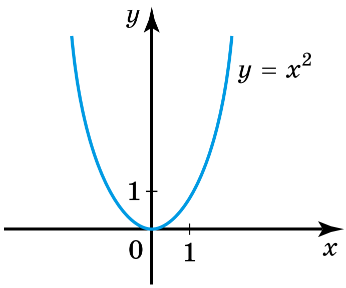


Рис. 44

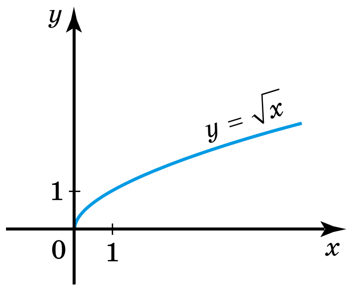


Рис. 45

3) $x^2 > 0$ при $x \neq 0$, то есть $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$ или $x \in (0; +\infty)$. Отметим, что не существует таких значений x, при которых $y < 0$, поскольку неравенство $x^2 < 0$ не имеет решений.

4) Функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

5) Наименьшее значение функции равно нулю, наибольшего – не существует.

Пример 6. Рассмотрим свойства функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 45).

1) Область определения и область значений функции – промежуток $[0; +\infty)$.

2) Уравнение $\sqrt{x} = 0$ имеет единственное решение – число 0, которое является нулем функции.

3) $\sqrt{x} > 0$ при $x > 0$, то есть $y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$. Нет таких значений x, чтобы имело место неравенство $y < 0$, так как неравенство $\sqrt{x} < 0$ не имеет решений.

4) Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

5) Наименьшее значение функции – число 0, наибольшего – не существует.

Систематизируем свойства этих функций в таблицу.

Свойства некоторых элементарных функций

Функция / Свойство	$y = kx + l$		$y = \frac{k}{x}$		$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$
	$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$		
Область определения	$(-\infty; +\infty)$		$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$		R	$[0; +\infty)$
Область значений	$(-\infty; +\infty)$		$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$		$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Нули функции	$x = -\frac{l}{k}$		не существуют		$x = 0$	$x = 0$
Промежутки знакопостоянства, $y > 0$	$x > -\frac{l}{k}$	$x < -\frac{l}{k}$	$x > 0$	$x < 0$	$x < 0$, $x > 0$	$x > 0$
Промежутки знакопостоянства, $y < 0$	$x < -\frac{l}{k}$	$x > -\frac{l}{k}$	$x < 0$	$x > 0$	–	–
Промежутки возрастания	R	–	–	$(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Промежутки убывания	–	R	$(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$	–	$(-\infty; 0]$	–
Наибольшее значение функции, y_{max}	–		–		–	–
Наименьшее значение функции, y_{min}	–		–		0	0

1. Что называют нулями функции?
2. Что называют промежутками знакопостоянства функции?
3. Какую функцию называют возрастающей на некотором промежутке, а какую – убывающей?
4. Используя рисунок 37, объясните, как по графику функции найти ее нули, промежутки знакопостоянства и промежутки возрастания и убывания.
5. Сформулируйте свойства функций $y = kx + l$ $(k \neq 0)$, $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

1 Начальный уровень

363. Найдите нули функции:

1) $y = 2x$; 2) $y = 2 - 5x$; 3) $y = x(x - 2)$; 4) $y = \frac{x}{x + 1}$.

364. Найдите нули функции:

1) $y = 3x$; 2) $y = 5x + 4$; 3) $y = x(x + 3)$; 4) $y = \frac{x - 1}{x}$.

365. (*Устно*). Какой – возрастающей или убывающей – является функция на своей области определения:

1) $y = 2x + 7$; 2) $y = -3x$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \frac{1}{3}x$?

366. Какой – возрастающей или убывающей – является функция на промежутке $(-\infty; +\infty)$:

1) $y = -2x - 5$; 2) $y = \frac{4}{5}x$; 3) $y = -0{,}01x$; 4) $y = 5x + 13$?

2 Средний уровень

367. Областью определения функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 46, является промежуток $[-3; 3]$. По графику найдите: 1) нули функции;
2) промежутки, на которых функция принимает положительные значения, и промежутки, на которых она принимает отрицательные значения;
3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
4) значение x, при котором функция принимает наибольшее значение, и само наибольшее значение функции; значение x, при котором функция принимает наименьшее значение, и само наименьшее значение функции.

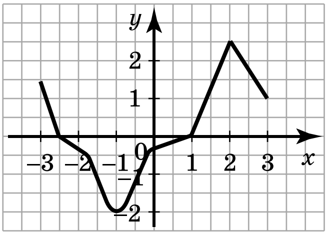


Рис. 46

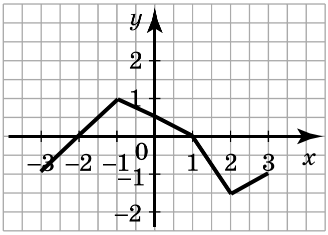


Рис. 47

368. Областью определения функции $y = g(x)$, график которой изображен на рисунке 47, является промежуток $[-3; 3]$. По графику найдите: 1) нули функции;
2) промежутки, на которых функция принимает положительные значения, и промежутки, на которых она принимает отрицательные значения;
3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
4) значение x, при котором функция принимает наибольшее значение, и само наибольшее значение функции; значение x, при котором функция принимает наименьшее значение, и само наименьшее значение функции.

369. Найдите нули функции (если они существуют):

1) $y = 5(x^2 + 1)$; 2) $y = \sqrt{x-2}$; 3) $y = \sqrt{9-x^2}$; 4) $y = \sqrt{x^2+5}$.

370. Найдите нули функции (если они существуют):

1) $y = 4(x^2 + 9)$; 2) $y = \sqrt{3+x}$; 3) $y = \sqrt{x^2-1}$; 4) $y = \sqrt{x^2+4}$.

371. Постройте схематически график функции $y = g(x)$, областью определения которой является промежуток $[-3; 5]$, так, чтобы: 1) нулем функции было число 2;
2) нулями функции были числа -1 и 4;
3) функция возрастала на промежутке $[-3; 2]$ и убывала на промежутке $[2; 5]$.

372. Постройте график функции и опишите ее свойства:
1) $y = 2x - 4$; 2) $y = -0{,}5x + 2$.

373. Постройте график функции и опишите ее свойства:

1) $y = -3x + 6$; 2) $y = \dfrac{1}{3}x - 1$.

3 Достаточный уровень

374. Не выполняя построения, найдите точки пересечения с осями координат графика функции:

1) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$; 2) $y = \sqrt{x+2}$; 3) $y = \dfrac{|x| - 1}{x + 1}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}$.

375. Не выполняя построения, найдите точки пересечения с осями координат графика функции:

1) $y = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}$; 2) $y = \sqrt{x + 9}$;

3) $y = \dfrac{|x| - 2}{x - 2}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x}$.

376. Постройте график функции и опишите ее свойства:

1) $y = \dfrac{6}{x}$; 2) $y = -\dfrac{8}{x}$.

377. Постройте график функции и опишите ее свойства:

1) $y = \dfrac{4}{x}$; 2) $y = -\dfrac{10}{x}$.

4 Высокий уровень

378. Сколько нулей имеет функция:

1) $f(x) = x(x^2 - 1)\sqrt{|x| + 2}$; 2) $g(x) = (x^2 - 4)\sqrt{|x| - 3}$?

379. Сколько нулей имеет функция:

1) $f(x) = x(x^2 - 9)\sqrt{|x| - 4}$; 2) $g(x) = (x^2 - 9)\sqrt{|x| + 2}$?

380. Постройте график функции и опишите ее свойства:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{x}, & \text{если } x < -2, \\ 2x, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{8}{x}, & \text{если } x > 2; \end{cases}$ 2) $g(x) = x + |x|$.

381. Постройте график функции и опишите ее свойства:

1) $g(x) = \begin{cases} -\dfrac{6}{x}, & \text{если } x < -2, \\ -1{,}5x, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ -\dfrac{6}{x}, & \text{если } x > 2; \end{cases}$ 2) $f(x) = x - |x|$.

Упражнения для повторения

382. Сравните числа:

1) $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{13}$; 2) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{7}$ и 8.

383. Решите неравенство:

1) $\frac{2-x}{10}+\frac{3-x}{5}<\frac{5x-3}{4}$; 2) $3<\frac{1-2x}{3}\leqslant 7$.

384. Из Херсона в Житомир выехали одновременно два автомобиля. Один из них двигался со скоростью на 10 км/ч больше, чем другой, а потому прибыл в Житомир на 1 ч раньше. Найдите скорость каждого автомобиля, если расстояние между городами равно 560 км.

385. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-5x+c=0$ удовлетворяют условию $3x_1=2x_2$. Найдите эти корни и коэффициент c.

Математика вокруг нас

386. У Богдана на счету в мобильном телефоне было 42 грн, а после звонка Алене осталось 38 грн 50 коп. Сколько минут длился разговор, если одна минута разговора стоит 25 коп.?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

387. 1) Постройте в одной системе координат графики функций $y = 2x$, $y = 2x - 3$ и $y = 2x + 4$.

2) Параллельны ли эти графики?

3) Как из графика функции $y = 2x$ получить график функции $y = 2x - 3$?

4) Как из графика функции $y = 2x$ получить график функции $y = 2x + 4$?

Интересные задачки для неленивых

388. Сравните дроби $\frac{222\,221}{333\,332}$ и $\frac{444\,443}{666\,663}$.

§ 10. ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Раньше вы строили только графики функций вида $y = kx + l$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ и $y = |x|$.

Рассмотрим некоторые преобразования графика функции $y = f(x)$, которые значительно расширят перечень функций, графики которых мы сможем построить.

1. Построение графика функции $y = f(x) \pm n$, где $n > 0$.

Пример 1. Построить в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} - 2$ и $y = \sqrt{x} + 3$.

Решение. Сначала составим таблицу значений каждой из данных функций для нескольких значений аргумента:

y \ x	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x} - 2$	−2	−1	0	1	2
$y = \sqrt{x} + 3$	3	4	5	6	7

Из таблицы ясно, что для одного и того же значения x значение функции $y = \sqrt{x} - 2$ на 2 меньше, а значение функции $y = \sqrt{x} + 3$ на 3 больше соответствующего значения функции $y = \sqrt{x}$. Поэтому график функции $y = \sqrt{x} - 2$ можно построить путем переноса каждой точки графика функции $y = \sqrt{x}$ вдоль оси y на 2 единицы вниз, а график функции $y = \sqrt{x} + 3$ – путем переноса каждой точки графика функции $y = \sqrt{x}$ вдоль оси y на 3 единицы вверх (рис. 48).

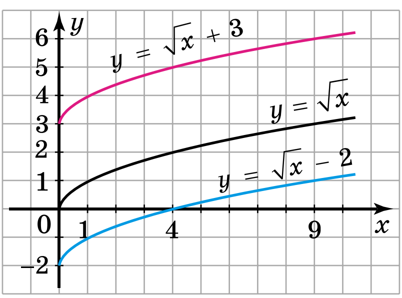


Рис. 48

Таким образом,

для построения графика функции $y = f(x) + n$, $n > 0$, достаточно график функции $y = f(x)$ перенести вдоль оси y на n единиц вверх;
для построения графика функции $y = f(x) - n$, $n > 0$, достаточно график функции $y = f(x)$ перенести вдоль оси y на n единиц вниз.

Замечание. Вместо переноса графика функции вверх (вниз), можно переносить ось x на то же расстояние в противоположном направлении.

2. Построение графика функции $y = f(x \pm m)$, где $m > 0$.

Пример 2. Построить в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = (x - 2)^2$.

Решение. Сначала составим таблицу значений каждой из данных функций для нескольких значений аргумента:

x / y	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = (x - 2)^2$	25	16	9	4	1	0	1	4

Для каждого $x = x_0$ значение функции $y = (x - 2)^2$ равно значению функции $y = x^2$ при $x = x_0 - 2$. В таблице это соответствие показано стрелками для значений функций $y = (x - 2)^2$ при $x = -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$ и $y = x^2$ при $x = -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2$ соответственно.

Следовательно, если все точки графика функции $y = x^2$ перенести вдоль оси x на 2 единицы вправо, то получим график функции $y = (x - 2)^2$ (рис. 49).

Пример 3. Построить в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = (x + 1)^2$.

Решение. Сначала составим таблицу значений каждой из данных функций для нескольких значений аргумента:

x / y	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = (x + 1)^2$	4	1	0	1	4	9	16

Рассуждая, как в примере 2, придем к выводу, что график функции $y = (x + 1)^2$ можно получить путем переноса графика функции $y = x^2$ вдоль оси x на 1 единицу влево (рис. 50).

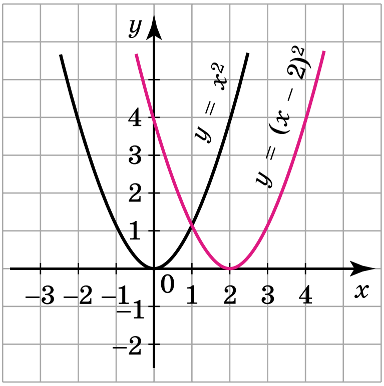


Рис. 49

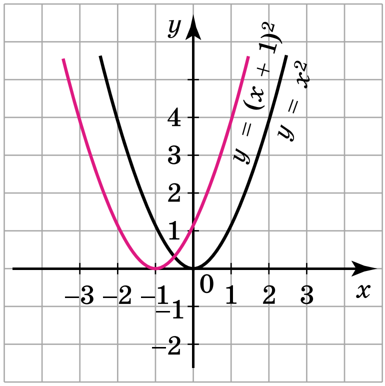


Рис. 50

Таким образом,

для построения графика функции $y = f(x - m)$, $m > 0$, достаточно график функции $y = f(x)$ перенести вдоль оси x на m единиц вправо;
для построения графика функции $y = f(x + m)$, $m > 0$, достаточно график функции $y = f(x)$ перенести вдоль оси x на m единиц влево.

Замечание. Вместо переноса графика функции влево (вправо) можно перенести ось y на то же расстояние в противоположном направлении.

3. Построение графика функции $y = -f(x)$.

Пример 4. Построить в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$.

Решение. Сначала составим таблицу значений данных функций для нескольких значений аргумента:

x / y	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = -\sqrt{x}$	0	–1	–2	–3	–4

Из таблицы видим, что значения функции $y = -\sqrt{x}$ для одних и тех же значений x противоположны соответствующим значениям функции $y = \sqrt{x}$. Графики этих функций изображены на рисунке 51.

Если провести отрезки, соединяющие точки графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$ для одного и того же значения x

(на рис. 51 они показаны пунктиром для $x = 1$, $x = 4$ и $x = 9$), то ось x будет их срединным перпендикуляром. В таком случае говорят, что графики *симметричны* относительно оси x.

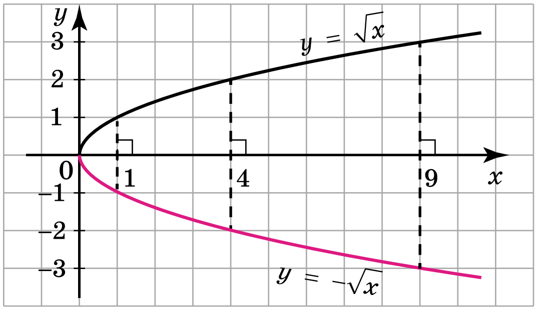


Рис. 51

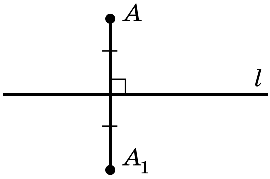


Рис. 52

Точки A и A_1 называют *симметричными* относительно прямой l, если прямая l является срединным перпендикуляром отрезка AA_1 (рис. 52).

Следовательно,

графики функций $y = -f(x)$ и $y = f(x)$ симметричны относительно оси x.

4. Построение графика функции $y = kf(x)$, где $k > 0$, $k \neq 1$.

Пример 5. Построить в одной системе координат графики функций $y = |x|$, $y = \frac{1}{2}|x|$ и $y = 2|x|$.

Решение. Сначала составим таблицу значений каждой из данных функций для нескольких значений аргумента:

y \ x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = \|x\|$	3	2	1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}\|x\|$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$y = 2\|x\|$	6	4	2	0	2	4	6

При любом x значение функции $y = \frac{1}{2}|x|$ в 2 раза меньше соответствующего значения функции $y = |x|$, а значение функции $y = 2|x|$ в 2 раза больше соответствующего значения функции $y = |x|$. Поэтому график функции $y = \frac{1}{2}|x|$ можно получить путем сжатия графика функции $y = |x|$ вдвое вдоль оси y (рис. 53), а график функции $y = 2|x|$ – путем растяжения графика функции $y = |x|$ вдвое вдоль оси y (рис. 54).

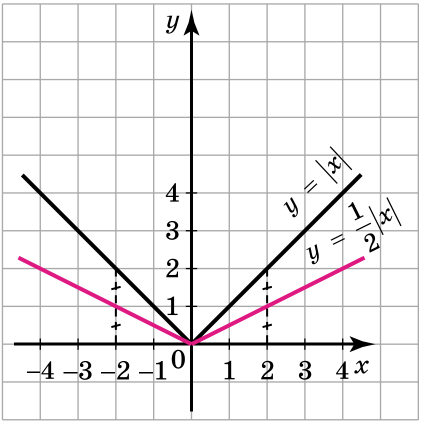


Рис. 53

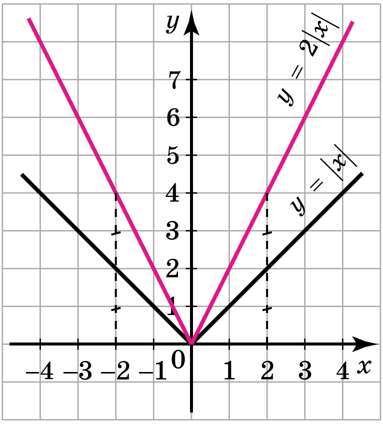


Рис. 54

Таким образом,

для построения графика функции $y = kf(x)$, где $k > 0$, $k \neq 1$, достаточно график функции $y = f(x)$ растянуть вдоль оси y в k раз, если $k > 1$, или сжать его вдоль оси y в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$.

Выполняя последовательно два и более преобразований, можно строить графики функций $y = f(x + m) + n$, $y = -kf(x)$, где $k > 0$, и другие.

Пример 6. Построить график функции $y = |x - 2| + 3$.

Решение. График функции $y = |x - 2| + 3$ можно получить путем переноса графика функции $y = |x|$ вдоль оси x на 2 единицы вправо, а затем – вдоль оси y на 3 единицы вверх. График изображен на рисунке 55.

Пример 7. Построить график функции $y = -2\sqrt{x}$.

Решение. Построим график функции $y = \sqrt{x}$. Растянув его вдвое вдоль оси y, получим график функции $y = 2\sqrt{x}$.

Графики функций $y = -2\sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{x}$ симметричны относительно оси x. Построение изображено на рисунке 56.

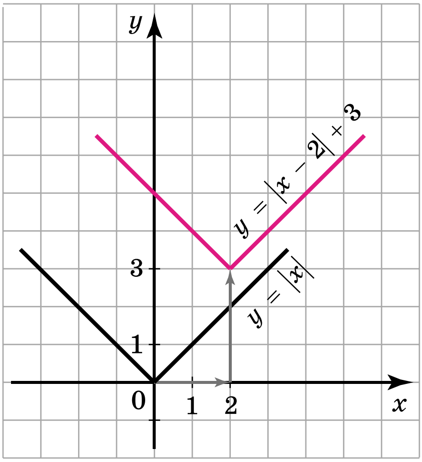


Рис. 55

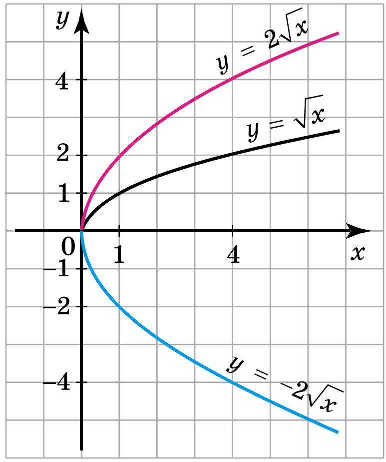


Рис. 56

5. Построение графика функции $y = |f(x)|$.

По определению модуля числа имеем:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Следовательно, для тех значений x, при которых $f(x) \geqslant 0$, соответствующие значения функций $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$ равны, а потому для таких значений x графики этих функций совпадают. Для тех значений x, при которых $f(x) < 0$, соответствующие значения функций $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$ являются противоположными числами, поэтому для таких значений x графики этих функций симметричны относительно оси x.

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ достаточно построить график функции $y = f(x)$ и ту его часть, которая лежит ниже оси x, симметрично отобразить относительно этой оси.

Пример 8. Построить график функции $y = |0{,}5x - 2|$.

Р е ш е н и е. Построим график функции $y = 0{,}5x - 2$. Затем ту его часть, которая лежит ниже оси x, симметрично отобразим относительно этой оси. График изображен на рисунке 57.

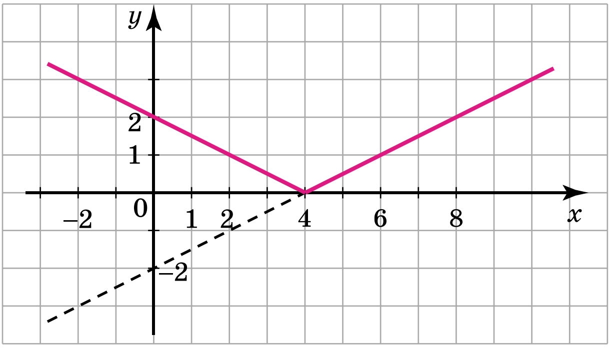


Рис. 57

Как, пользуясь графиком функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x) \pm n$, где $n > 0$; $y = f(x \pm m)$, где $m > 0$; $y = -f(x)$; $y = kf(x)$, где $k > 0$, $k \neq 1$?

1 Начальный уровень

389. (*Устно*). Какое преобразование графика функции $y = x^2$ нужно выполнить, чтобы получить график функции:

1) $y = x^2 + 2$; 2) $y = x^2 - 3$; 3) $y = (x - 2)^2$;
4) $y = (x + 1)^2$; 5) $y = -x^2$; 6) $y = 2x^2$?

2 Средний уровень

390. Постройте в одной системе координат графики функций:

1) $y = -x$, $y = -x + 3$ и $y = -x - 2$;
2) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x - 2}$ и $y = \sqrt{x + 3}$.

391. Постройте в одной системе координат графики функций:

1) $y = x$, $y = x + 2$ и $y = x - 3$;
2) $y = |x|$, $y = |x - 1|$ и $y = |x + 3|$.

392. На рисунке 58 изображен график функции $y = x^3$. Перенесите его в тетрадь и в той же системе координат карандашами разного цвета постройте графики функций:

1) $y = x^3 + 1$; 2) $y = x^3 - 2$;
3) $y = (x - 3)^3$; 4) $y = (x + 2)^3$.

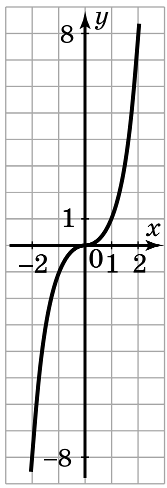


Рис. 58

393. На рисунке 58 изображен график функции $y = x^3$. Перенесите его в тетрадь и в той же системе координат карандашами разного цвета постройте графики функций:

1) $y = x^3 + 3$; 2) $y = x^3 - 1$;
3) $y = (x - 2)^3$; 4) $y = (x + 1)^3$.

394. (*Устно*). Какой из графиков на рисунке 59 соответствует функции:

1) $y = \sqrt{x - 4}$;
2) $y = \sqrt{x + 2}$;
3) $y = \sqrt{x} - 4$;
4) $y = \sqrt{x} + 2$?

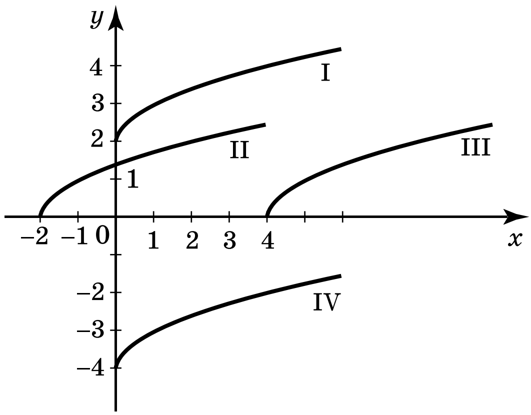


Рис. 59

3 Достаточный уровень

395. Постройте график функции:

1) $y = (x - 1)^2 + 3$; 2) $y = 4 - x^2$;
3) $y = (x + 2)^2 - 5$; 4) $y = (x + 3)^2 + 1$;
5) $y = -3 + (x - 2)^2$; 6) $y = -x^2 - 1$.

396. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x - 2} + 1$; 2) $y = 2 - \sqrt{x}$;
3) $y = -2 + \sqrt{x + 1}$; 4) $y = \sqrt{x + 4} + 2$;
5) $y = \sqrt{x - 1} - 3$; 6) $y = -\sqrt{x} - 1$.

397. Постройте график функции:

1) $y = 3|x|$; 2) $y = -4|x|$;
3) $y = \frac{1}{3}|x|$; 4) $y = -0,5|x|$.

398. Постройте график функции:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = -2x^2$; 3) $y = 0,25x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

399. (*Устно*). Какой из графиков на рисунке 60 соответствует функции:

1) $y = -2x^2$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$;

3) $y = -\frac{1}{2}x^2$; 4) $y = 2x^2$?

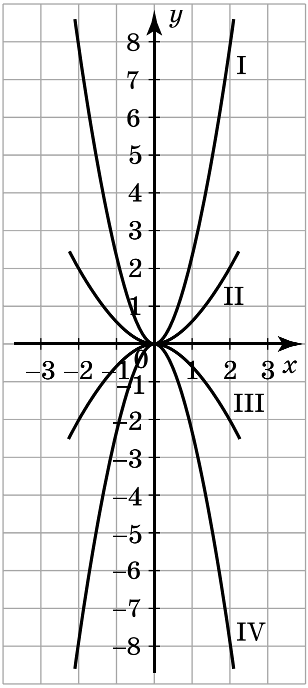


Рис. 60

400. Постройте график функции:

1) $y = \frac{6}{x} - 1$; 2) $y = \frac{6}{x - 1}$.

401. Постройте график функции:

1) $y = 1 + \frac{8}{x}$; 2) $y = \frac{8}{x + 1}$.

402. Дана парабола $y = x^2$. Запишите уравнение параболы, которую получат из данной путем переноса:

1) на 3 единицы вверх;
2) на 4 единицы вниз;
3) на 2 единицы влево;
4) на 5 единиц вправо;
5) на 2 единицы вправо и на 3 единицы вверх;
6) на 1 единицу влево и на 4 единицы вверх;
7) на 3 единицы вправо и на 1 единицу вниз;
8) на 5 единиц влево и на 5 единиц вниз.

403. Постройте график функции $y = (x + 1)^2 - 4$. По графику найдите: 1) нули функции; 2) область значений функции; 3) значения x, при которых функция принимает отрицательные значения;
4) промежуток возрастания функции.

404. Постройте график функции $y = (x - 2)^2 - 1$. По графику найдите: 1) нули функции; 2) область значений функции; 3) значения x, при которых функция принимает положительные значения; 4) промежуток убывания функции.

4 Высокий уровень

405. Решите графически уравнение:

1) $1 + \frac{5}{x} = \sqrt{x - 1}$;

2) $|x - 1| = (x + 1)^2$.

406. Решите графически уравнение:

1) $\sqrt{x+1} = \dfrac{9}{x} - 1$; 2) $(x-2)^2 = |x+4|$.

407. Постройте график функции $y = \dfrac{x+4}{x-2}$.

408. Постройте график функции $y = \dfrac{x+5}{x+1}$.

409. 1) Постройте график функции $y = |x^2 - 4|$.
2) Пользуясь графиком, найдите все значения a, при которых уравнение $|x^2 - 4| = a$ имеет ровно три корня.

Упражнения для повторения

410. Разложите на множители квадратный трехчлен:
1) $x^2 + 3x - 4$; 2) $2x^2 - x - 10$;
3) $-x^2 - 2x + 8$; 4) $-3x^2 + x + 2$.

411. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x+4)(x-4) - (x-3)(x+1) < -3, \\ \dfrac{2x-5}{9} \geqslant -1. \end{cases}$$

412. x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 6x + 3 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения $\dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2}$.

Математика вокруг нас

413. Автомобиль, двигавшийся в момент начала отсчета времени со скоростью $v_0 = 28$ м/с, начал тормозить с постоянным ускорением $a = 7$ м/с^2. Через t секунд после начала торможения он преодолел расстояние $s = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите, за какое время с момента начала торможения автомобиль преодолел 42 м.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

414. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:
1) $x^2 - 4x + 3$; 2) $x^2 + 2x$; 3) $-x^2 - 2x - 1$; 4) $x^2 + 6x - 2$.

415. Решите уравнение:

1) $x^2 - 2x = 0$; 2) $4x^2 - 36 = 0$;
3) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; 4) $3x^2 + 2x - 5 = 0$.

416. Для функции $f(x) = x^2 + 4x - 5$ найдите:

1) $f(-2)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(0)$; 4) $f(1)$.

417. Завершите утверждение:

1) «Графиком функции $y = x^2$ является...».
2) «Ветви параболы $y = x^2$ направлены...».
3) «Функция $y = x^2$ убывает на промежутке...».
4) «Функция $y = x^2$ возрастает на промежутке...».

Интересные задачки для нелинивых

418. Известно, что $x - \frac{1}{x} = 1$. Найдите значение выражения:

1) $x^3 - \frac{1}{x^3}$; 2) $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

§ 11. ФУНКЦИЯ $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. ЕЕ ГРАФИК И СВОЙСТВА

Одной из важнейших функций в курсе математики является *квадратичная функция*.

Функцию вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют *квадратичной функцией*.

Математические модели многих реальных процессов в разнообразных сферах деятельности человека являются квадратичными функциями. В первую очередь это касается науки, в частности физики и экономики, а также техники.

Например, тело движется с ускорением a м/с^2 и к началу отсчета времени t с прошло расстояние s_0 м, имея в этот момент скорость v_0 м/с. Тогда зависимость расстояния s (в метрах), пройденного телом, от времени t (в секундах) при равноускоренном движении задается формулой:

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0.$$

Тогда, если $a = 6$, $v_0 = 2$, $s_0 = 10$, то $s = 3t^2 + 2t + 10$.

Задача. Зависимость между площадью использованной земли и валовым доходом из расчета на 10 гектаров сельскохозяйственных угодий в фермерском хозяйстве лесостепной полосы можно выразить функцией $y \approx -1{,}5x^2 + 9x + 9$, где x – площадь сельскохозяйственных угодий (в га), y – валовой доход на 10 гектаров сельскохозяйственных угодий (в тыс. грн). С какой площади хозяйство будет иметь наибольшую прибыль? Какова будет эта прибыль?

Решение. В формуле функции выделим полный квадрат:

$$-1{,}5x^2 + 9x + 9 = -1{,}5(x^2 - 6x - 6) = -1{,}5(x^2 - 6x + 9 - 9 - 6) =$$
$$= -1{,}5((x - 3)^2 - 15) = 22{,}5 - 1{,}5(x - 3)^2,$$

таким образом, $y \approx 22{,}5 - 1{,}5(x - 3)^2$.

Полученное выражение принимает наибольшее значение при $x = 3$. Следовательно, хозяйство получит наибольшую прибыль с площади в 3 гектара.

Размер прибыли – значение функции $y = 22{,}5 - 1{,}5(x - 3)^2$ при $x = 3$, то есть $y = y(3) = 22{,}5 - 1{,}5(3 - 3)^2 = 22{,}5$ (тыс. грн). Следовательно, наибольшая прибыль составит 22,5 тыс. грн.

Ответ. 3 га; 22,5 тыс. грн.

Рассмотрим свойства квадратичной функции и ее график. Начнем с ее частного случая.

Пусть в формуле квадратичной функции $b = c = 0$, тогда имеем функцию $y = ax^2$.

Графиком функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$, является парабола с вершиной в начале координат, ветви которой направлены вверх, если $a > 0$ (рис. 61), и вниз, если $a < 0$ (рис. 62). Значение $y = 0$ для функции $y = ax^2$ является наименьшим, если $a > 0$, и наибольшим, если $a < 0$.

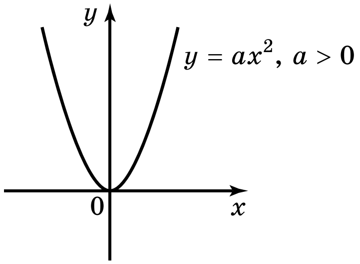


Рис. 61

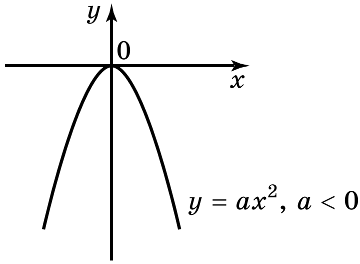


Рис. 62

Систематизируем свойства в виде таблицы.

Свойства функции $y = ax^2$, $a \neq 0$		
	$a > 0$	$a < 0$
Область определения	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значений	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
График	парабола с вершиной (0; 0)	
Направление ветвей	вверх	вниз
Нули функции	$x = 0$	
Промежутки знакопостоянства, $y > 0$	$(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$	–
Промежутки знакопостоянства, $y < 0$	–	$(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$
Возрастает на промежутке	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Убывает на промежутке	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$
Наибольшее значение функции	–	0
Наименьшее значение функции	0	–

Теперь рассмотрим функцию $y = ax^2 + bx + c$. Выделим из трехчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена: $ax^2 + bx + c =$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Таким образом, $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Обозначив $x_в = -\frac{b}{2a}$; $y_в = \frac{4ac - b^2}{4a}$, получим, что

$y = a(x - x_в)^2 + y_в$.

Следовательно, график функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух преобразований – переносов вдоль координатных осей.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ – парабола с вершиной в точке $(x_в; y_в)$, где $x_в = -\frac{b}{2a}$; $y_в = \frac{4ac - b^2}{4a}$ (рис. 63).

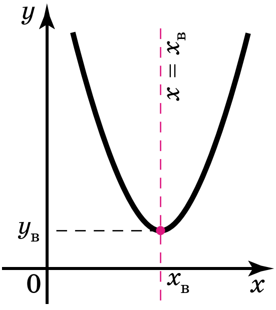


Рис. 63

Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ – вниз. Ветви параболы симметричны относительно прямой $x = x_в$. В этом случае говорят, что прямая $x = x_в$ является *осью симметрии* параболы (рис. 63).

Отметим, что абсциссу вершины параболы удобно находить по формуле $x_в = -\frac{b}{2a}$, а ординату $y_в$ – подставив найденное значение $x_в$ вместо x в формулу $y = ax^2 + bx + c$, таким образом $y_в = y(x_в)$.

При построении графика функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ следует соблюдать такую последовательность действий:

1) найти координаты вершины параболы $x_в = -\frac{b}{2a}$, $y_в = f(x_в)$ и обозначить ее на координатной плоскости;
2) построить еще несколько точек параболы и столько же точек, симметричных им относительно прямой $x = x_в$;
3) соединить полученные точки плавной линией.

Систематизируем свойства в виде таблицы.

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$		
	$a > 0$	$a < 0$
Область определения	$(-\infty; +\infty)$	
Область значений	$[y_в; +\infty)$	$(-\infty; y_в]$
График	парабола с вершиной $(x_в; y_в)$	
Направление ветвей	вверх	вниз
Нули функции	корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	
Возрастает на промежутке	$[x_в; +\infty)$	$(-\infty; x_в]$
Убывает на промежутке	$(-\infty; x_в]$	$[x_в; +\infty)$
Наибольшее значение функции	–	$y_в$
Наименьшее значение функции	$y_в$	–

Пример 1. Построить график функции $f(x) = x^2 - 4x - 5$ и описать ее свойства.

Р е ш е н и е. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты ее вершины:

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2, \qquad y_в = f(x_в) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9.$$

Таким образом, точка (2; −9) – вершина параболы. Тогда прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы.

Составим таблицу значений функции для нескольких пар точек параболы, симметричных относительно ее оси симметрии (благодаря симметрии ординаты в каждой такой паре будут одинаковы).

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
y	7	0	−5	−8	−9	−8	−5	0	7

Отметим вершину параболы и точки из таблицы на координатной плоскости. Соединим их плавной линией и получим график функции $f(x) = x^2 - 4x - 5$ (рис. 64).

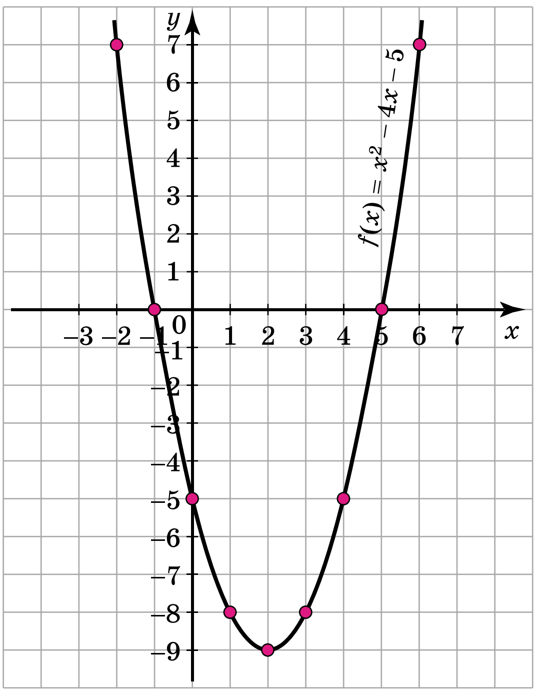


Рис. 64

Опишем свойства этой функции:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) $E(f) = [-9; +\infty)$;
3) нули функции: $x = -1$ и $x = 5$;
4) $y > 0$ при $x < -1$ или $x > 5$; $y < 0$ при $-1 < x < -5$;
5) функция возрастает на промежутке $[2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 2]$;
6) наименьшее значение функции: $y_{\min} = -9$.

Пример 2. Вершиной параболы $y = ax^2 + 8x + c$ является точка $A(-2; 4)$. Найти коэффициенты a и c.

Решение. Мы знаем, что $x_в = -\dfrac{b}{2a}$, а по условию $x_в = -2$, тогда $-2 = -\dfrac{8}{2a}$, откуда $a = 2$. Так как график функции проходит через точку $A(-2; 4)$, то, подставив координаты точки в формулу функции, получим верное равенство:

$4 = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + c$, откуда $c = 12$.

Ответ. $a = 2$; $c = 12$.

1. Какую функцию называют квадратичной?
2. Сформулируйте свойства функции $y = ax^2$.
3. Как называют график квадратичной функции и как его строят?
4. Сформулируйте свойства функции $y = ax^2 + bx + c$.

1 Начальный уровень

419. (*Устно*). Какая из функций является квадратичной:

1) $y = -2x^2$; 2) $y = -2x + 5$;
3) $y = 5x^2 - 3x$; 4) $y = \dfrac{1}{3x^2 - 2x + 5}$;
5) $y = 3x^3 - 2x^2 + 5$; 6) $y = 2x^2 + 3x - 9$?

420. Выпишите функции, являющиеся квадратичными:

1) $y = 4x - 7$; 2) $y = 4x^2 - 7x + 5$; 3) $y = 3x^2$;
4) $y = 2x^3 - 3x + 5$; 5) $y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{7}$; 6) $y = 9x^2 - 7$.

421. Графиком какой из функций является парабола? Укажите направление ее ветвей.

1) $y = \dfrac{6}{x}$; 2) $y = 6x^2 - 7$; 3) $y = -6x^2 + 5x + 5$;
4) $y = 6x - 7$; 5) $y = 0{,}01x^2$; 6) $y = -0{,}2x^2 - 5x$.

422. Принадлежит ли графику функции $y = x^2 - 3x$ точка:
1) $A(0;\ 0)$; 2) $B(1;\ 2)$; 3) $C(2;\ -3)$; 4) $D(-1;\ 4)$?

423. Принадлежит ли графику функции $y = x^2 + x$ точка:
1) $A(0;\ 1)$; 2) $B(2;\ 6)$; 3) $C(1;\ 2)$; 4) $D(-1;\ 1)$?

424. Покажите схематически, как расположен в координатной плоскости график функции:
1) $y = 10x^2$; 2) $y = -15x^2$.

425. Покажите схематически, как расположен в координатной плоскости график функции:
1) $y = -7x^2$; 2) $y = 5x^2$.

2 Средний уровень

426. Дана функция $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2$. 1) Заполните в тетради таблицу:

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
$f(x)$						

2) постройте график функции;
3) найдите по графику $f(-1{,}5)$, $f(2{,}5)$, $f(4{,}5)$;
4) найдите по графику значения x, при которых $f(x) = 1$, $f(x) = 3{,}5$;
5) найдите промежутки возрастания и убывания функции.

427. Дана функция $g(x) = \dfrac{1}{4}x^2$. 1) Заполните в тетради таблицу:

x	0	±1	±2	±3	±4
$g(x)$					

2) постройте график функции;
3) найдите по графику $g(-2{,}5)$, $g(1{,}5)$, $g(3{,}5)$;
4) найдите по графику значения x, при которых $g(x) = 1$, $g(x) = 2{,}5$;
5) найдите промежутки возрастания и убывания функции.

428. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = -2x^2$ с прямой:
1) $y = -8$; 2) $y = 10$; 3) $y = 4x$; 4) $y = -6x$.

429. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = 5x^2$ с прямой:
1) $y = 20$; 2) $y = -5$; 3) $y = 10x$; 4) $y = -5x$.

430. Определите направление ветвей, найдите координаты вершины и постройте схематически график квадратичной функции:

1) $y = x^2 - 8x + 7$; 2) $y = -x^2 + 2x - 3$;
3) $y = 0{,}2x^2 - 0{,}4x + 2$; 4) $y = -2x^2 + 6x - 3$.

431. Определите направление ветвей, найдите координаты вершины и постройте схематически график квадратичной функции:

1) $y = 3x^2 - 12x + 7$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

432. Не выполняя построения, найдите точки пересечения графика квадратичной функции с осями координат:

1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = 2x^2 - x - 3$;
3) $y = -x^2 + 8x + 9$; 4) $y = -3x^2 - 5x + 2$.

433. Не выполняя построения, найдите точки пересечения графика квадратичной функции с осями координат:

1) $y = x^2 + 4x - 5$; 2) $y = -5x^2 - 6x - 1$.

434. Постройте график функции:

1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = -x^2 + 6x$;
3) $y = x^2 + 4x + 5$; 4) $y = -x^2 + 2x + 3$.

435. Постройте график функции:

1) $y = x^2 + 4x$; 2) $y = -x^2 + 2x$;
3) $y = x^2 + 2x + 3$; 4) $y = -x^2 + 4x - 3$.

3 Достаточный уровень

436. Постройте график функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$. По графику найдите: 1) $f(1)$, $f(-2{,}5)$, $f(1{,}5)$;
2) значения x, при которых $f(x) = 5$, $f(x) = -4$, $f(x) = -2$;
3) нули функции;
4) решения неравенств: $f(x) \geqslant 0$, $f(x) < 0$;
5) наибольшее и наименьшее значения функции;
6) область значений функции;
7) промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

437. Постройте график функции $g(x) = -x^2 + 6x - 5$. По графику найдите: 1) $g(1)$, $g(2{,}5)$, $g(4{,}5)$;
2) значения x, при которых $g(x) = 4$, $g(x) = -5$, $g(x) = 2$;
3) нули функции;
4) решения неравенств: $g(x) > 0$, $g(x) \leqslant 0$;
5) наибольшее и наименьшее значения функции;
6) область значений функции;
7) промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

438. График квадратичной функции – парабола с вершиной в начале координат, проходящая через точку $A\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$. Задайте эту функцию формулой.

439. Постройте график квадратичной функции и по графику найдите область значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства и промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = -4x^2 + 8x$; 2) $y = 2x^2 - 8x + 6$;
3) $y = (x - 1)(x - 5)$; 4) $y = 2(x + 1)(x - 3)$.

440. Постройте график квадратичной функции и по графику найдите область значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства и промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = 2x^2 - 6x$; 2) $y = -3x^2 + 12x - 9$.

441. График функции $y = ax^2 + 2x + 3$ проходит через точку $B(1; -5)$. Найдите коэффициент a.

442. График функции $y = 2x^2 + bx + 5$ проходит через точку $A(1; 9)$. Найдите коэффициент b.

443. При каких значениях b осью симметрии параболы $y = x^2 + bx + c$ будет прямая: 1) $x = -1$; 2) $x = 5$? Влияет ли на ответ значение коэффициента c?

444. При каком значении a осью симметрии параболы $y = ax^2 - 6x + 7$ будет прямая $x = -1$?

445. Найдите точки параболы:

1) $y = x^2 - 6x + 10$, у которых абсцисса равна ординате;
2) $y = x^2 - 7x + 8$, у которых абсцисса и ордината – противоположные числа.

446. Найдите точки параболы:

1) $y = x^2 - 5x$, у которых абсцисса равна ординате;
2) $y = x^2 + 2x - 10$, у которых абсцисса и ордината – противоположные числа.

447. Докажите, что все точки параболы:

1) $y = x^2 - 2x + 3$ лежат выше оси x;
2) $y = -x^2 - 4x - 5$ лежат ниже оси x.

448. Найдите точки пересечения параболы $y = 2x^2 - 7x + 13$ с прямой $y = 2x + 3$.

449. Найдите точки пересечения параболы $y = 5x^2 - 7x - 3$ с прямой $y = -x - 4$.

450. Тело, падающее на землю, за t с преодолевает расстояние s м, где $s = \frac{gt^2}{2}$, $g \approx 10$ м/с^2. Через какое время тело достигнет поверхности земли, если в начальный момент оно находится на высоте 560 м?

4 Высокий уровень

451. Из лука выпустили стрелу вертикально вверх с начальной скоростью 50 м/с. Зависимость расстояния s (в метрах) от стрелы до земли от времени полета t (в секундах) задается формулой $s = 50t - 5t^2$. Постройте схематически график этой зависимости и по нему найдите:

1) какой наибольшей высоты достигнет стрела;
2) промежуток времени, в течение которого она летела вверх, и промежуток времени, в течение которого она падала вниз;
3) через сколько секунд после пуска стрела упала на землю.

452. Мяч подбросили вертикально вверх с начальной скоростью 15 м/с. Зависимость расстояния h (в метрах) от мяча до земли от времени полета t (в секундах) задается формулой $h = 15t - 5t^2$. Постройте схематически график этой зависимости и по нему найдите:

1) какой наибольшей высоты достигнет мяч;
2) промежуток времени, в течение которого он двигался вверх, и промежуток времени, в течение которого он падал вниз;
3) через сколько секунд после подбрасывания мяч упал на землю.

453. При каких значениях b и c точка $N(5;\ 7)$ является вершиной параболы $y = x^2 + bx + c$?

454. При каких значениях a и c точка $M(-3;\ -13)$ является вершиной параболы $y = ax^2 + 12x + c$?

455. Точка $M(3;\ -2)$ является вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$, пересекающей ось ординат в точке $N(0;\ 7)$. Найдите значения коэффициентов a, b и c.

456. При каком значении c наибольшее значение функции $y = -x^2 + 6x + c$ равно 16?

457. При каком значении c наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x + c$ равно 4?

458. При каких значениях c функция $y = x^2 + 8x + c$ при всех значениях x принимает только положительные значения?

459. При каких значениях c функция $y = -x^2 + 2x + c$ при всех значениях x принимает только отрицательные значения?

460. Постройте график функции:

1) $y = x^2 - 6|x| + 5$; 2) $y = |x^2 - 6x + 5|$.

461. Постройте график функции:

1) $y = x^2 - 4|x| + 3$; 2) $y = |x^2 - 4x + 3|$.

Упражнения для повторения

462. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x + 2}$; 2) $y = \sqrt{x} + 2$.

463. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

1) $f(x) = 3x^2$ и $g(x) = -6x$; 2) $\varphi(x) = x^2 + x$ и $\psi(x) = 2$.

464. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{3 + x}{3x^2 + 2x - 5}$; 2) $y = \sqrt{x - 5}$.

465. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = \dfrac{6}{x}$ и $y = x + 1$. Постройте графики данных функций и отметьте на них найденные точки.

466. Решите графически уравнение $\sqrt{x + 3} = \dfrac{4}{x} - 2$.

467. Найдите нули функции:

1) $f(x) = (x - 1)(x + 2)\sqrt{|x| - 3}$; 2) $g(x) = x(x - 3)\sqrt{|x| - 2}$.

Математика вокруг нас

468. Во внешнем независимом оценивании (ВНО) по математике, состоявшемся 12 июня 2015 года, приняли участие 121 716 человек. Задание № 30 правильно решили только 6,06 % от числа участников. Сколько участников ВНО правильно решили задание № 30?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

469. Какие из чисел $-2, -1, 0, 1, 2$ являются решениями неравенства:

1) $x^2 + 2x - 3 > 0$; 2) $x^2 + x - 2 \leqslant 0$;
3) $x^2 + x \geqslant 0$; 4) $x^2 - 3x < 0$?

470. Решите уравнение:

1) $x^2 - 3x - 4 = 0$; 2) $-2x^2 + 3x + 5 = 0$;
3) $x^2 + 18x = 0$; 4) $4x^2 - 9 = 0$.

Интересные задачки для неленивых

471. На какое натуральное число нужно разделить число 180, чтобы остаток от деления составил 25 % от частного?

Домашняя самостоятельная работа № 2

Каждое задание имеет четыре варианта ответа (А–Г), среди которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1 **1.** Дано $f(x) = x^2 - x$. Найдите $f(-1)$.

А. -2; **Б.** 0; **В.** 2; **Г.** 1.

2. Чтобы построить график функции $y = x^2 + 2$, нужно перенести график функции $y = x^2$ на 2 единицы...

А. влево; **Б.** вверх; **В.** вниз; **Г.** вправо.

3. Укажите квадратичную функцию:

А. $y = -2x^2 + 3x + 7$; **Б.** $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 5}$;

В. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$; **Г.** $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

2 **4.** Найдите нули функции $y = x^2 - 4x$.

А. 0; **Б.** 4; **В.** 0; -4; **Г.** 0; 4.

5. Укажите значение x, при котором значение функции $y = 2x + 5$ будет равно 7.

А. 7; **Б.** -1; **В.** 1; **Г.** 0.

6. Не выполняя построения, найдите все точки пересечения графиков функций $y = -3x^2$ и $y = 9x$.

А. (0; 0); **Б.** (0; 0), (−3; −27);
В. (0; 0), (−3; 0); **Г.** (0; 0), (3; 27).

3 **7.** Постройте схематически график функции $y = -x^2 + 2x - 3$ и укажите область значений этой функции.

А. $(-\infty; -2)$; **Б.** $[-2; +\infty)$;
В. $(-\infty; -2]$; **Г.** $(-\infty; 2]$.

8. Постройте схематически график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$ и укажите промежуток возрастания этой функции.

А. $(-\infty; 4]$; **Б.** $[-8; +\infty)$;
В. $[-4; +\infty)$; **Г.** $[4; +\infty)$.

9. Укажите область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{18 - 2x}}$.

А. $(-\infty; 9)$; **Б.** $(-\infty; +\infty)$;
В. $(-\infty; 9]$; **Г.** $(-\infty; -9)$.

4 **10.** Укажите область значений функции $y = 4 - \frac{1}{2}|x|$.

А. $(-\infty; 4)$; **Б.** $[4; +\infty)$; **В.** $(-\infty; 4]$; **Г.** $(-\infty; +\infty)$.

11. При каких значениях a и c точка $M(-1; 4)$ является вершиной параболы $y = ax^2 + 2x + c$?

А. $a = 1$, $c = 3$; **Б.** $a = 1$, $c = 5$;
В. $a = 1$, $c = -5$; **Г.** $a = -1$, $c = 7$.

12. Сколько нулей имеет функция $y = \frac{(x^2 - 9)\sqrt{|x| - 4}}{x}$?

А. 1; **Б.** 2; **В.** 3; **Г.** 4.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 8–11

1 **1.** Для функции $f(x) = x^2 + x$ найдите:
1) $f(0)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(-3)$.

2. Как из графика функции $y = x^2$ получить график функции:
1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = (x + 5)^2$?

3. Какие из функций являются квадратичными:

1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = \frac{1}{x^2 - 4x}$;

3) $y = x^3 + x + 3$; 4) $y = x^2 + x + 3$?

2 **4.** Найдите нули функции:
1) $y = -2x + 7$; 2) $y = x^2 - 5x + 6$.

5. Постройте график функции:
1) $y = \sqrt{x - 3}$; 2) $y = \sqrt{x} - 3$.

6. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = -4x^2$ и $y = 2x$.

7. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{15x}{2x^2 + 3x - 5}$; 2) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8 - 2x}}$.

8. Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 3$. По графику найдите:

1) область значений функции;

2) промежуток возрастания и промежуток убывания функции.

9. При каких значениях b и c точка $A(2; -1)$ является вершиной параболы $y = 2x^2 + bx + c$?

Дополнительные задания

10. Решите уравнение $\sqrt{x - 2} = \dfrac{6}{x} + 1$ графически.

11. Сколько нулей имеет функция $f(x) = x(x^2 - 1)\sqrt{|x| - 2}$?

§ 12. КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют *квадратными неравенствами* (или *неравенствами второй степени с одной переменной*).

Например, квадратными являются неравенства:

$$2x^2 + 3x - 5 > 0,\ 4x^2 - 8 \geqslant 0,\ 7x^2 - 9x < 0,\ x^2 - 9x + 17 \leqslant 0.$$

Решения квадратных неравенств можно рассматривать как промежутки, на которых квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные (для неравенств $ax^2 + bx + c > 0$), неотрицательные (для неравенств $ax^2 + bx + c \geqslant 0$), отрицательные (для неравенств $ax^2 + bx + c < 0$) и неположительные (для неравенств $ax^2 + bx + c \leqslant 0$) значения. Следовательно, чтобы решить квадратное неравенство, достаточно найти соответствующие промежутки знакопостоянства квадратичной функции.

Пример 1. Решить неравенство $x^2 + 3x - 4 < 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 + 3x - 4$. Графиком ее будет парабола, ветви которой направлены вверх. Выясним, пересекает ли парабола ось x, решив уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0$. Получим: $x_1 = 1$; $x_2 = -4$ – нули функции, то есть парабола пересекает ось x в точках с абсциссами 1 и –4. Строим схематически график данной функции, зная ее нули и направление ветвей (рис. 65). По графику определяем, что функция принимает отрицательные значения при $x \in (-4; 1)$. Следовательно, множеством решений неравенства $x^2 + 3x - 4 < 0$ является промежуток $(-4; 1)$.

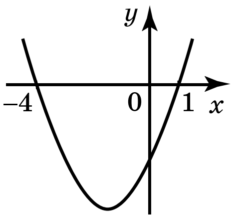


Рис. 65

Ответ. $(-4; 1)$.

Пример 2. Решить неравенство:

1) $x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$; 2) $x^2 + 3x - 4 > 0$;
3) $x^2 + 3x - 4 \geqslant 0$.

Решение. Рассмотрим схематическое изображение графика функции $y = x^2 + 3x - 4$ (рис. 65).

1) Неравенству $x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$ удовлетворяют те же значения x, что и неравенству $x^2 + 3x - 4 < 0$, а также числа –4 и 1 – нули функции, то есть те значения аргумента, при которых значение функции $y = x^2 + 3x - 4$ равно нулю. Значит, множеством решений неравенства $x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$ является промежуток $[-4; 1]$.

2) Из рисунка 65 видим, что функция $y = x^2 + 3x - 4$ принимает положительные значения при $x \in (-\infty; -4)$ или $x \in (1; +\infty)$. Множеством решений неравенства $x^2 + 3x - 4 > 0$ является объединение этих промежутков, то есть $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

3) Неравенству $x^2 + 3x - 4 \geqslant 0$ удовлетворяют те же значения x, что и неравенству $x^2 + 3x - 4 > 0$, включая нули функции $y = x^2 + 3x - 4$, то есть числа –4 и 1. Таким образом, множеством решений неравенства $x^2 + 3x - 4 \geqslant 0$ является $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

Ответ. 1) $[-4; 1]$; 2) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$;
3) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

Отметим, что для предложенного способа решения ни положение вершины параболы, ни расположение параболы относительно оси y значения не имеют. Важно лишь знать абсциссы точек пересечения параболы с осью x (нули функции) и направление ее ветвей (вверх или вниз).

Таким образом, решать квадратные неравенства следует в такой последовательности:

1) находим корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (если они существуют);
2) если у неравенства строгий знак (> или <), то корни квадратного трехчлена отмечаем на оси x «выколотыми» точками (они будут исключены из множества решений неравенства); если – нестрогий ($\geqslant$ или $\leqslant$), то корни отмечаем закрашенными точками (они будут включены в множество решений неравенства);
3) схематически строим график функции $y = ax^2 + bx + c$, учитывая направление ветвей параболы и точки ее пересечения с осью x (если они существуют);
4) находим на оси x промежутки, на которых функция $y = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет данному неравенству;
5) записываем ответ.

Пример 3. Найти область определения функции $y = \sqrt{3x - x^2}$.

Р е ш е н и е. Областью определения данной функции является множество решений неравенства $3x - x^2 \geqslant 0$.

1) Корни квадратного трехчлена $3x - x^2$ – числа 0 и 3.

2) Отмечаем корни на оси x закрашенными точками, так как знак неравенства – нестрогий.

3) Схематически строим график функции $y = 3x - x^2$. Это парабола, пересекающая ось x в точках 0 и 3, ветви которой направлены вниз (рис. 66).

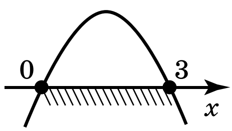


Рис. 66

4) Неравенство $3x - x^2 \geqslant 0$ имеет место при $x \in [0; 3]$.

О т в е т. [0; 3].

Пример 4. Решить неравенство $x^2 - 6x + 9 > 0$.

Р е ш е н и е. 1) Корень уравнения $x^2 - 6x + 9 = 0$ – число 3.

2) Отмечаем точку 3 на оси x «выколотой», потому что знак неравенства – строгий.

3) Схематически строим график функции $y = x^2 - 6x + 9$. Это парабола с вершиной на оси x, ее ветви направлены вверх (рис. 67). С осью x она имеет единственную общую точку – точку 3 (говорят, что парабола касается оси x).

4) Из рисунка 67 видим, что функция принимает положительные значения при любом значении x, кроме $x = 3$. Имеем множество решений неравенства: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

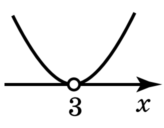


Рис. 67

О т в е т. $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство $-x^2 + 2x - 7 < 0$.

Решение. Уравнение $-x^2 + 2x - 7 = 0$ корней не имеет, так как $D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) = -24 < 0$. Следовательно, парабола $y = -x^2 + 2x - 7$ не пересекает ось x. Ветви параболы направлены вниз (рис. 68).

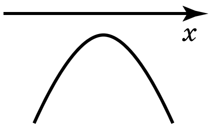


Рис. 68

Так как все точки параболы лежат ниже оси x, то множеством решений неравенства $-x^2 + 2x - 7 < 0$ является множество всех чисел: $(-\infty; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; +\infty)$.

Пример 6. Решить неравенство $-x^2 + 2x - 7 \geqslant 0$.

Решение. Из рисунка 68 видим, что ни одна из точек параболы не лежит выше оси x и не принадлежит ей, поэтому неравенство $-x^2 + 2x - 7 \geqslant 0$ не имеет решений.

Ответ. Нет решений.

Пример 7. Решить систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + 2x > 0, \\ x^2 + x - 12 \leqslant 0. \end{cases}$

Решение. Решениями системы неравенств являются общие решения неравенств системы. Следовательно, чтобы найти решения системы, нужно решить отдельно каждое из неравенств и найти их общие решения.

Множеством решений неравенства $x^2 + 2x > 0$ является $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. Множеством решений неравенства $x^2 + x - 12 \leqslant 0$ является $[-4; 3]$ (решите эти неравенства самостоятельно).

Изобразим на координатной прямой полученные множества решений (рис. 69). Множеством решений системы будет их пересечение, то есть $[-4; -2) \cup (0; 3]$.

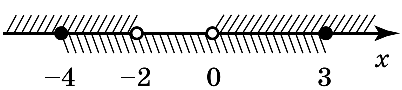


Рис. 69

Ответ. $[-4; -2) \cup (0; 3]$.

1. Какие неравенства называют квадратными?
2. Как решить квадратное неравенство?

1 Начальный уровень

472. (*Устно*). Какие из неравенств являются квадратными:

1) $2x + 3 > 0$; 2) $3x^2 - 7x - 5 \geqslant 0$; 3) $\dfrac{1}{x^2 - 5x} < 0$;

4) $9x^2 - 3x^3 \leqslant 0$; 5) $x^2 + 7x < 0$; 6) $x^2 + 9 \geqslant 0$?

473. Какие из чисел -3; 0; 2 являются решениями квадратного неравенства:

1) $x^2 - x > 0$; 2) $x^2 - x + 2 > 0$; 3) $4x^2 + 3x - 1 < 0$?

474. Какие из чисел -2; 0; 1 являются решениями квадратного неравенства:

1) $x^2 + x > 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 < 0$; 3) $3x^2 - x + 2 > 0$?

475. Используя схематическое изображение графика функции $y = 2x^2 + 3x - 5$ (рис. 70), запишите решения неравенства:

1) $2x^2 + 3x - 5 > 0$; 2) $2x^2 + 3x - 5 \geqslant 0$;
3) $2x^2 + 3x - 5 < 0$; 4) $2x^2 + 3x - 5 \leqslant 0$.

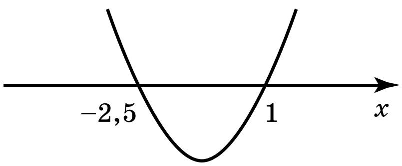


Рис. 70

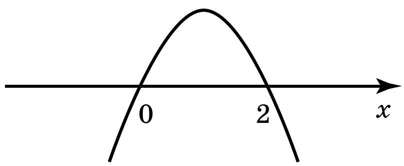


Рис. 71

476. Используя схематическое изображение графика функции $y = -x^2 + 2x$ (рис. 71), запишите решения неравенства:

1) $-x^2 + 2x < 0$; 2) $-x^2 + 2x \leqslant 0$;

3) $-x^2 + 2x > 0$; 4) $-x^2 + 2x \geqslant 0$.

2 Средний уровень

477. Решите неравенство:

1) $x^2 - 3x \geqslant 0$; 2) $x^2 + 5x < 0$;

3) $-x^2 + 8x \leqslant 0$; 4) $-x^2 - 7x > 0$.

478. Решите неравенство:

1) $x^2 - 6x < 0$; 2) $x^2 + 2x \geqslant 0$;

3) $-x^2 + 7x > 0$; 4) $-x^2 - x \leqslant 0$.

479. Решите неравенство:

1) $x^2 - 16 \leqslant 0$;
2) $x^2 - 4 > 0$;
3) $-x^2 + 1 \geqslant 0$;
4) $25 - x^2 < 0$.

480. Решите неравенство:

1) $x^2 - 36 > 0$;
2) $x^2 - 100 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 64 < 0$;
4) $9 - x^2 \geqslant 0$.

481. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 - 3x - 40 \geqslant 0$;
2) $x^2 - 8x + 15 < 0$;
3) $-x^2 + 6x + 7 \leqslant 0$;
4) $-x^2 - 5x - 4 > 0$.

482. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 - 7x + 12 \leqslant 0$;
2) $x^2 - 2x - 24 > 0$;
3) $-x^2 - x + 6 \geqslant 0$;
4) $-x^2 + 3x + 10 < 0$.

483. Найдите, при каких значениях x квадратный трехчлен:

1) $x^2 - 5x - 6$ принимает положительные значения;
2) $x^2 + x - 12$ принимает отрицательные значения.

484. Найдите, при каких значениях x квадратный трехчлен:

1) $x^2 - x - 2$ принимает отрицательные значения;
2) $x^2 + 2x - 8$ принимает положительные значения.

485. Решите неравенство:

1) $x^2 < 4$;
2) $x^2 \geqslant 100$;
3) $x^2 \leqslant 7x$;
4) $-x^2 > -3x$.

486. Решите неравенство:

1) $x^2 > 9$;
2) $x^2 \leqslant 1$;
3) $x^2 \geqslant 4x$;
4) $-x^2 < -5x$.

3 Достаточный уровень

487. Решите неравенство:

1) $x^2 + 2x - 7 > 0$;
2) $x^2 - x - 3 \leqslant 0$.

488. Решите неравенство:

1) $x^2 - 4x - 3 < 0$;
2) $x^2 + x - 5 \geqslant 0$.

489. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$;
2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{12 - x - x^2}}$.

490. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{3 - x^2 + 2x}$;
2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$.

491. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 + 10x + 25 \geqslant 0$;
2) $25 - 20x + 4x^2 < 0$;
3) $9x^2 - 6x + 1 > 0$;
4) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$;
5) $-x^2 - 2x - 1 < 0$;
6) $10x - x^2 - 25 \geqslant 0$;
7) $-25x^2 + 30x - 9 \leqslant 0$;
8) $-49x^2 - 70x - 25 > 0$.

492. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 + 8x + 16 < 0$;
2) $25x^2 - 10x + 1 \geqslant 0$;
3) $9 - 6x + x^2 \leqslant 0$;
4) $100x^2 - 120x + 36 > 0$;
5) $2x - x^2 - 1 \geqslant 0$;
6) $-64x^2 - 112x - 49 \leqslant 0$;
7) $-36x^2 + 60x - 25 > 0$;
8) $-x^2 + 16x - 64 < 0$.

493. Найдите все целые решения неравенства:

1) $2x^2 - 5x + 2 < 0$;
2) $9x - 2x^2 - 4 \geqslant 0$.

494. Найдите все целые решения неравенства:

1) $2x^2 - 7x + 3 \leqslant 0$;
2) $4 - 11x - 3x^2 > 0$.

495. Решите неравенство:

1) $x^2 + x + 7 \geqslant 0$;
2) $x^2 - 2x + 5 < 0$;
3) $-x^2 - 2x - 9 \leqslant 0$;
4) $-3x^2 + 4x - 5 > 0$.

496. Решите неравенство:

1) $6x^2 + x + 1 > 0$;
2) $x^2 - 3x + 7 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 4x - 9 < 0$;
4) $-x^2 - 2x - 5 \geqslant 0$.

497. Докажите, что при любом значении x имеет место неравенство:

1) $3x^2 - x + 1 > 0$;
2) $6x < x^2 + 10$.

498. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $4x^2 + 11x - 20 < 0$;
2) $-3x^2 + 11x + 34 \geqslant 0$.

499. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $-3x^2 - 11x + 14 \geqslant 0$;
2) $12x^2 + 16x - 3 < 0$.

500. Решите неравенство:

1) $2x^2 - 3x \leqslant 2(x - 1)$;
2) $4x(x + 2) > 5$;
3) $x(x - 8) > (2x - 1)^2$;
4) $3x(x - 2) + 1 > (x - 1)^2$.

501. Решите неравенство:

1) $4x(x - 1) \leqslant 3$;
2) $(x + 2)^2 < 2x(x + 3) + 5$.

502. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} + \dfrac{1}{x - 2}$;
2) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x - 2}$.

503. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 + 7x - 8 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \geqslant 0, \\ 2x - 6 > 0. \end{cases}$

504. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 18 \geqslant 0, \\ x < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 10x - 24 < 0, \\ 2x - 16 \geqslant 0. \end{cases}$

4 Высокий уровень

505. Найдите все целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ 0 \leqslant x < 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geqslant 0, \\ x^2 + x - 6 \leqslant 0. \end{cases}$

506. Найдите все целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geqslant 0, \\ -1 < x < 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 \geqslant 0, \\ x^2 - 9 \leqslant 0. \end{cases}$

507. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{(x - 4)^2} \leqslant 0;$ 2) $\dfrac{x^2 + x - 2}{|x - 2|} > 0.$

508. Найдите область допустимых значений переменной в выражении $\sqrt{x^2 - 9} + \dfrac{1}{\sqrt{4 + 3x - x^2}}$.

509. Найдите область определения функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}} + \sqrt{8x - x^2 - 15}.$$

510. При каких значениях a уравнение не имеет корней:

1) $x^2 - (a - 2)x + 4 = 0;$ 2) $(a + 1)x^2 + 5ax + 3a = 0?$

511. При каких значениях a уравнение имеет два различных корня:

1) $x^2 - ax + (2a - 3) = 0;$ 2) $ax^2 + (3a - 2)x + a = 0?$

512. При каких значениях a уравнение:

1) $x^2 - (a + 1)x + 9 = 0$ не имеет корней;

2) $ax^2 + (2a - 1)x + a = 0$ имеет два различных корня?

513. При каких значениях m решением неравенства является любое число: 1) $x^2 - (m + 2)x + (8m + 1) > 0;$

2) $mx^2 - 4x + m + 3 < 0?$

Упражнения для повторения

514. Постройте график функции $y = -x^2 + 2x + 8$. По графику найдите:

1) область значений функции;
2) промежуток возрастания функции.

515. Докажите, что $26x^2 - 10x + 2xy + y^2 + 2 > 0$ при любых значениях x и y.

516. Одним из корней уравнения $x^3 - 2x^2 - x + a = 0$ является число -1. Найдите остальные корни этого уравнения.

Математика вокруг нас

517. Бабушке Марии прописали лекарство, действующее вещество которого нужно принимать по 0,5 г 3 раза в день в течение 14 дней. В одной упаковке – 10 таблеток лекарства, по 0,25 г действующего вещества в каждой. Какого наименьшего количества упаковок лекарства хватит на весь курс лечения?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

518. Является ли пара чисел $(-1; 2)$ решением системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 4x - 5y = -14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y - x = 7, \\ 4x + 5y = 5? \end{cases}$

519. Решите систему уравнений графически:

1) $\begin{cases} 2x + 7y = -3, \\ 3x - y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 5y = -16, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$

520. Решите систему уравнений способом подстановки:

1) $\begin{cases} x + 7y = -5, \\ 3x - 4y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 4y = -19, \\ 7x - y = -3. \end{cases}$

521. Решите систему уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ 5x - 2y = -18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 5y = 11, \\ 3x + 5y = -1. \end{cases}$

Интересные задачки для неленивых

522. Известно, что числа a, b и $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ – рациональны. Можно ли утверждать, что числа $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ также рациональны?

§ 13. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

В 7 классе вы решали системы двух линейных уравнений с двумя переменными, то есть системы, в которых оба уравнения имеют вид $ax + by = c$, где a, b, c – числа, x и y – переменные. Таковой, например, является система:

$$\begin{cases} x + 3y = 2, \\ 2x - y = 11. \end{cases}$$

Напомним, что *решением системы уравнений с двумя переменными называют такую пару значений переменных, при которых каждое из уравнений системы обращается в верное числовое равенство*. Так, решением вышеприведенной системы является пара чисел $(5; -1)$, то есть $x = 5$; $y = -1$. Действительно: $5 + 3 \cdot (-1) = 2$ и $2 \cdot 5 - (-1) = 11$ – верные числовые равенства.

Уравнение $ax + by = c$ при условии, что хотя бы один из коэффициентов a или b не равен нулю, называют *уравнением первой степени с двумя переменными*. Его можно заменить равносильным ему уравнением $ax + by - c = 0$, левая часть которого – многочлен стандартного вида первой степени с двумя переменными, а правая – равна нулю.

Так можно определить степень любого уравнения с двумя переменными (а также и с большим количеством переменных). Для этого достаточно заменить уравнение равносильным ему уравнением, левая часть которого – многочлен стандартного вида, а правая – нуль. Степень многочлена и будет *степенью уравнения*.

Так, например, $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ – уравнение второй степени. Уравнение $(x^2 + y)^2 = x^4 + 3y^2 + 7$ равносильно уравнению $2x^2y - 2y^2 - 7 = 0$ и, следовательно, является уравнением третьей степени.

Рассмотрим системы уравнений с двумя переменными, в которых одно или оба уравнения являются уравнениями второй степени, и способы решения таких систем.

1. Решение систем уравнений второй степени с двумя переменными графически

Системы уравнений второй степени с двумя переменными графически решают так же, как и системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Напомним последовательность действий для решения системы уравнений графически:

1) построить графики уравнений в одной системе координат;
2) найти координаты их точек пересечения или убедиться, что графики не имеют общих точек;
3) если координаты точек пересечения – целые числа, то выполнить проверку; если нет – найти решения системы приближенно;
4) записать ответ.

В отличие от линейного уравнения, графиком которого является прямая, графики уравнений второй степени довольно разные. Так, например, график уравнения $y = x^2$ (или равносильного ему уравнения $y - x^2 = 0$) – парабола, график уравнения $y = \dfrac{6}{x}$ (или равносильного ему уравнения $xy = 6$) – гипербола, а график уравнения $x^2 + y^2 = 4$ – окружность.

Пример 1. Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Построим в одной системе координат графики уравнений $x^2 + y^2 = 16$ и $x + y = 4$ (рис. 72). График первого уравнения – окружность с центром в начале координат и радиусом 4. График уравнения $x + y = 4$ – прямая, проходящая через точки (–1; 5) и (3; 1). Графики имеют две общие точки (0; 4) и (4; 0). Проверкой убеждаемся, что эти пары чисел – решения системы.

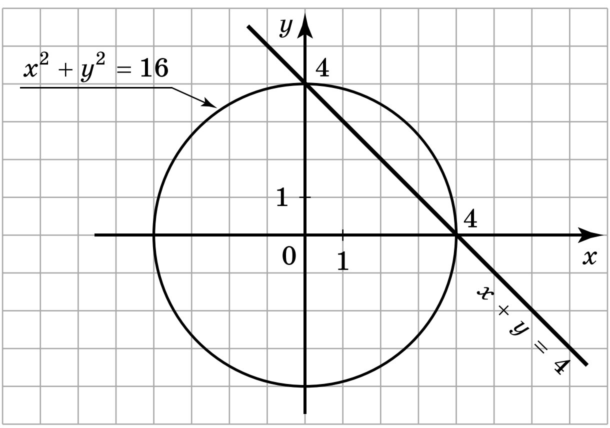


Рис. 72

О т в е т. (0; 4), (4; 0).

2. Решение систем уравнений второй степени с двумя переменными способом подстановки

Если в системе уравнений с двумя переменными одно из уравнений является уравнением первой степени, то такую систему легко решить *способом подстановки*. Напомним последовательность действий этого способа:

1) выразить в уравнении первой степени одну переменную через другую;
2) подставить полученное выражение во второе уравнение системы вместо соответствующей переменной;
3) решить полученное уравнение с одной переменной;
4) найти соответствующие значения второй переменной;
5) записать ответ.

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3y^2 - xy = -1, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$$

Решение. Выразим переменную x через переменную y из второго уравнения: $x = 5 - 3y$.

Подставим полученное выражение в первое уравнение вместо x, получим уравнение с переменной y:

$$3y^2 - (5 - 3y)y = -1.$$

После упрощений получим уравнение $6y^2 - 5y + 1 = 0$, корни которого $y_1 = 0,5$; $y_2 = \frac{1}{3}$.

По формуле $x = 5 - 3y$ найдем значения x, соответствующие полученным значениям y:

$$x_1 = 5 - 3 \cdot 0,5 = 3,5; \; x_2 = 5 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

Таким образом, система имеет два решения:

$$x_1 = 3,5, \; y_1 = 0,5 \text{ и } x_2 = 4, \; y_2 = \frac{1}{3}.$$

Оформить решение в тетради можно так:

$$\begin{cases} 3y^2 - xy = -1, \\ x + 3y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 3y^2 - xy = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 3y^2 - (5 - 3y)y = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 6y^2 - 5y + 1 = 0; \end{cases} \left| \begin{array}{l} D = 1, \\ y_1 = 0,5; \;\; y_2 = \dfrac{1}{3} \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} y = 0,5, \\ x = 5 - 3 \cdot 0,5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{3}, \\ x = 5 - 3 \cdot \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3,5, \\ y = 0,5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ. $(3,5;\ 0,5)$; $\left(4;\ \dfrac{1}{3}\right)$.

3. Решение систем уравнений второй степени с двумя переменными способом сложения

Как и для систем двух линейных уравнений с двумя переменными, этот способ используют, если в результате почленного сложения уравнений системы получается уравнение с одной переменной.

Пример 3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + xy = 20, \\ x - xy = -10. \end{cases}$

Решение. Сложим почленно уравнения системы, получим: $2x = 10$, то есть $x = 5$.

Подставив найденное значение x, например, в первое уравнение системы, получим: $5 + 5y = 20$, то есть $y = 3$.

Таким образом, $x = 5$, $y = 3$.

Оформить решение в тетради можно так:

$$\begin{cases} x + xy = 20, \\ x - xy = -10; \end{cases} \Big| +$$

$$\overline{ 2x = 10,}$$

$$x = 5.$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ 5 + 5y = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ 5y = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ. $(5;\ 3)$.

Пример 4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + 2xy = 21, \\ x + xy = 9. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Умножим второе уравнение на -2:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 21, \\ -2x - 2xy = -18. \end{cases}$$

Сложим почленно уравнения системы, получим: $x^2 - 2x = 3$. Имеем уравнение: $x^2 - 2x - 3 = 0$, корни которого: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Найдем соответствующие им значения y, подставив найденные значения x во второе уравнение исходной системы:

1) пусть $x = -1$, тогда $-1 - y = 9$, то есть $y = -10$;

2) пусть $x = 3$, тогда $3 + 3y = 9$, то есть $y = 2$.

О т в е т. $(-1; -10)$, $(3; 2)$.

4. Решение систем уравнений второй степени с двумя переменными с помощью замены переменных

Некоторые системы уравнений второй степени (а также системы, которые содержат уравнение высших степеней) удобно решать, используя замену переменных.

Пример 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Введем замену: $x + y = u$, $xy = v$. Получим систему уравнений второй степени с переменными u и v:

$$\begin{cases} u + v = 11, \\ uv = 30. \end{cases}$$

Решив эту систему способом подстановки (сделайте это самостоятельно), получим $u_1 = 5$, $v_1 = 6$ и $u_2 = 6$, $v_2 = 5$.

Вернемся к переменным x и y:

1) если $\begin{cases} u = 5, \\ v = 6, \end{cases}$ то $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$

Решив эту систему, получим: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 2$;

2) если $\begin{cases} u = 6, \\ v = 5, \end{cases}$ то $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5. \end{cases}$

Имеем еще две пары чисел: $x_3 = 5$, $y_3 = 1$; $x_4 = 1$, $y_4 = 5$.

О т в е т. $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(5; 1)$, $(1; 5)$.

А еще раньше...

Еще в древневавилонских текстах, датируемых III–II тысячелетиями до н. э., встречалось немало задач, сводившихся к системам уравнений второй степени. Вот одна из них.

Задача. *Площади двух своих квадратов я сложил и получил* $25\frac{5}{12}$. *Сторона второго квадрата равна* $\frac{2}{3}$ *стороны первого и еще 5. Найти стороны этих квадратов*.

Система уравнений к задаче в современной записи имеет вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\frac{5}{12}, \\ y = \frac{2}{3}x + 5. \end{cases}$$

Чтобы ее решить, автор возводит в квадрат левую и правую части второго уравнения:

$$y^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25$$

и подставляет найденное значение выражения y^2 в первое уравнение:

$$1\frac{4}{9}x^2 + 6\frac{2}{3}x = \frac{5}{12}.$$

Далее автор решает это уравнение, находя x, а затем y.

Диофант, не имея обозначений для нескольких неизвестных, при решении задачи выбирал неизвестную величину так, чтобы привести решение системы к решению единственного уравнения.

Задача. *Записать два числа, если известно, что их сумма равна* 20*, а сумма их квадратов* – 208.

Современные математики свели бы эту задачу к системе:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 + y^2 = 208. \end{cases}$$

Но Диофант в качестве неизвестной величины выбирал половину разности искомых чисел и получал (в современных обозначениях) систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = z, \\ \frac{1}{2}(x + y) = 10. \end{cases}$$

Сначала складывая эти уравнения, а затем вычитая первое из второго, Диофант получал, что $x = z + 10$, $y = 10 - z$, и подставлял найденные выражения во второе уравнение исходной системы:

$$x^2 + y^2 = (z + 10)^2 + (10 - z)^2 = 2z^2 + 200,$$

чтобы получить уравнение с одной переменной: $2z^2 + 200 = 208$, откуда $z = 2$. (Диофант рассматривал лишь неотрицательные числа, поэтому корня $z = -2$ не получил).

Тогда $x = 2 + 10 = 12$, $y = 10 - 2 = 8$.

В XVII–XVIII вв. приемы решения систем линейных уравнений в общем виде с помощью метода исключения неизвестных рассматривали математики Ферма, Ньютон, Лейбниц, Эйлер, Безу, Лагранж и другие.

Благодаря методу координат, который предложили в XVII в. Ферма и Декарт, появилась возможность решать системы уравнений графически.

1. Объясните на примерах, что называют степенью уравнения с двумя переменными.
2. Как решить систему уравнений с двумя переменными графически?
3. Как решить систему уравнений с двумя переменными способом подстановки? Способом сложения?

1 Начальный уровень

523. Является ли пара чисел $x = 2$, $y = 1$ решением системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x + y = 4? \end{cases}$

524. Является ли решением системы $\begin{cases} 2x^2 + y = -1, \\ x + y = -2 \end{cases}$ пара чисел: 1) $(1; -3)$; 2) $(0; -1)$?

2 Средний уровень

525. Постройте график функции $y = x^2 - 4$. С помощью графика решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = x + 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = 3x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = x - 6. \end{cases}$

526. Постройте график функции $y = -x^2 + 1$. С помощью графика решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = -x^2 + 1, \\ y = x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^2 + 1, \\ y = x + 2. \end{cases}$

527. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 4, \\ y = 4x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

528. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - x = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 6, \\ y = 6x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

529. Решите способом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} x = 4y, \\ y^2 + x + 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y = 0, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$

530. Решите способом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = -2x, \\ x^2 + y - 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 4y - 5, \\ y^2 + x = 0. \end{cases}$

531. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y + 2x = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

532. Найдите все решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} y - x = 2, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 2, \\ y^2 - x^2 = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 3x = 1, \\ x^2 + y^2 = 53. \end{cases}$

533. Решите способом сложения систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x - y^2 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ -x^2 + 4y = 19. \end{cases}$

534. Решите способом сложения систему уравнений:

1) $\begin{cases} y + x^2 = 10, \\ y - x^2 = -8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + x = 2, \\ -y^2 + 2x = 7. \end{cases}$

3 Достаточный уровень

535. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + 4x - y = 0, \\ x + y + 4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + 2. \end{cases}$

536. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + 6x - y = 0, \\ x + y + 6 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 + 3. \end{cases}$

537. Постройте схематически графики уравнений системы и определите количество ее решений:

1) $\begin{cases} xy = -4, \\ y - x^2 = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = 1. \end{cases}$

538. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 4y^2 + xy = 22, \\ x + 5y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + \dfrac{y}{2} = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ x^2 + xy + y^2 = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 1, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{12}. \end{cases}$

539. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3y^2 - xy = 2, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \dfrac{x}{3} + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 - xy - y^2 = 11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$

540. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения: 1) прямой $x + y = 5$ и параболы $y = x^2 - 7$; 2) окружности $x^2 + y^2 = 34$ и гиперболы $xy = 15$.

541. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + xy = 5, \\ x - xy = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ x^2 - y^2 = -21; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y^2 + xy = 36, \\ y^2 + xy = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - xy = -4, \\ 3x^2 - 2xy = -7. \end{cases}$

542. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} y + xy = 3, \\ y - xy = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y^2 + x^2 = 13, \\ 3y^2 - x^2 = 11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2 - xy = 10, \\ x^2 - xy = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy + 2y^2 = -1, \\ 3xy + y^2 = -8. \end{cases}$

4 Высокий уровень

543. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2xy - x = 10, \\ 2xy - y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - xy - y = 13, \\ x + xy - 2y = 2. \end{cases}$

544. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3xy + x = 8, \\ 3xy + y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + xy + 2y = -9, \\ 2x - xy - y = -2. \end{cases}$

545. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy(x + y) = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6}, \\ x - y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0, \\ (x - y)^2 + 3(x - y) - 4 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x - 2y}{x + y} - \dfrac{x + y}{x - 2y} = \dfrac{15}{4}, \\ 4x + 5y = 3. \end{cases}$

546. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - y)^2 + 4(x - y) + 4 = 0, \\ (x + y)^2 - 2(x + y) - 3 = 0. \end{cases}$

547. При каком значении a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a \end{cases}$ имеет:

1) единственное решение;

2) ровно три решения?

Упражнения для повторения

548. Решите неравенство $-3{,}4 \leqslant \dfrac{1-2x}{5} \leqslant 4{,}8.$

549. Теплоход проплыл 24 км по течению реки на 2 ч быстрее, чем 60 км против течения. Найдите скорость течения, если собственная скорость теплохода равна 22 км/ч.

550. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x}.$

Математика вокруг нас

551. Частное предприятие «Чебурашка» производит детские игрушки и продает их по цене $p = 50$ грн за единицу. Переменные затраты на единицу производимой продукции составляют $v = 30$ грн, а постоянные затраты предприятия составляют $f = 70\,000$ грн в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в гривнях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не менее 30 000 грн.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

552. Решите задачи с помощью системы уравнений.

1) Две тетради и один карандаш вместе стоят 24 грн, а одна тетрадь и два карандаша – 21 грн. Сколько стоит одна тетрадь и сколько – один карандаш?

2) Лодка за 1,5 ч движения по течению реки и 2 ч движения против течения преодолевает 62 км, а за 3 ч движения в стоячей воде и 1 ч движения против течения – 70 км. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

Интересные задачки для неленивых

553. (*Киевская математическая олимпиада, 1989 г.*) Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

§ 14. СИСТЕМА ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕКСТОВЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Напомним, что в 7 классе вы решали текстовые задачи с помощью систем линейных уравнений в такой последовательности, которую можно использовать и для решения более сложных задач:

1) обозначить некоторые две неизвестные величины переменными (например, x и y);
2) в соответствии с условием задачи составить систему уравнений;
3) решить полученную систему;
4) проверить соответствие найденных значений переменных условию задачи, ответить на вопрос задачи;
5) записать ответ.

Рассмотрим один из самых простых примеров, в котором система уравнений с двумя переменными является математической моделью текстовой задачи.

Задача 1. Сумма двух чисел равна 8, а их произведение равно 15. Найти эти числа.

Решение. Обозначим неизвестные числа через x и y. Тогда $x + y = 8$; $xy = 15$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Решив систему (сделайте это самостоятельно), получим: $x = 3$; $y = 5$ или $x = 5$; $y = 3$.

Следовательно, искомые числа – это 3 и 5.

Ответ. 3 и 5.

Отметим, что эту задачу, как и некоторые последующие в этом параграфе, можно решить и с помощью уравнения с одной переменной.

Система уравнений с двумя переменными может служить математической моделью прикладной задачи. Напомним, что прикладные задачи – это задачи, которые содержат нематематические понятия, но могут быть решены методами математики.

Напомним также, что прикладную задачу целесообразно решать в такой последовательности:

1) сформулировать задачу языком математики, то есть построить математическую модель задачи;
2) решить полученную математическую задачу;
3) проанализировать ответ и сформулировать его на языке исходной прикладной задачи.

Задача 2. Площадь земельного участка прямоугольной формы равна 60 м^2. Если длину этого участка уменьшить на 1 м, а ширину увеличить на 2 м, то получим земельный участок площадью 72 м^2. Найти длину ограждения данного участка.

Решение. Пусть длина данного участка равна x м, а ширина – y м. Тогда по условию $xy = 60$. После уменьшения длины на 1 м она станет равна $(x - 1)$ м, а после увеличения ширины на 2 м она станет равна $(y + 2)$ м. По условию: $(x - 1)(y + 2) = 72$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ (x-1)(y+2) = 72. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ xy + 2x - y - 2 = 72. \end{cases}$$

Так как из первого уравнения системы известно, что $xy = 60$, то во второе уравнение вместо xy подставим число 60. Получим:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ 60 + 2x - y - 2 = 72; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 60, \\ y = 2x - 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x(2x - 14) = 60, \\ y = 2x - 14. \end{cases}$$

Упростим первое уравнение системы: $x^2 - 7x - 30 = 0$. Его корни: $x_1 = 10$; $x_2 = -3$. Число -3 не удовлетворяет условию задачи, так как длина участка не может быть отрицательной. Таким образом, длина участка равна 10 м, и можем найти его ширину: $2 \cdot 10 - 14 = 6$ (м). Теперь найдем длину ограждения: $2(6 + 10) = 32$ (м).

Ответ. 32 м.

Задача 3. Из пункта A вышел пешеход. Через 50 мин после этого оттуда же в том же направлении выехал велосипедист и догнал пешехода на расстоянии 6 км от пункта A. Найти скорость пешехода и скорость велосипедиста, если велосипедист за 1 ч преодолевает на 1 км больше, чем пешеход за 2 ч.

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч – скорость пешехода, y км/ч – велосипедиста. Тогда пешеход преодолел 6 км за $\frac{6}{x}$ ч, а велосипедист – за $\frac{6}{y}$ ч. По условию пешеход был в дороге на 50 мин $= \frac{5}{6}$ ч больше, чем велосипедист, поэтому $\frac{6}{x} - \frac{6}{y} = \frac{5}{6}$.

Велосипедист за 1 ч преодолевает y км, а пешеход за 2 ч – $2x$ км. По условию $y - 2x = 1$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{6}{y} = \frac{5}{6}, \\ y - 2x = 1. \end{cases}$$

Решив ее (сделайте это самостоятельно) и учтя, что по смыслу задачи $x > 0$ и $y > 0$, получим: $x = 4$, $y = 9$.

О т в е т. Скорость пешехода – 4 км/ч, велосипедиста – 9 км/ч.

1. Сформулируйте последовательность действий для решения текстовых и прикладных задач с помощью системы уравнений.
2. Объясните, как с помощью системы уравнений решены задачи 1–3.

1 Начальный уровень

554. (*Устно*). Пусть x и y – некоторые числа, разность которых равна числу 5, а произведение – числу 6. Какая из данных систем уравнений соответствует условию задачи:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 6, \\ xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5? \end{cases}$

2 Средний уровень

555. Сумма двух чисел равна –3, а их произведение равно –28. Найдите эти числа.

556. Произведение двух чисел равно –12, а их сумма равна 1. Найдите эти числа.

557. Разность двух чисел равна 3, а разность квадратов большего и меньшего чисел равна –21. Найдите эти числа.

558. Разность двух натуральных чисел равна 2, а сумма их квадратов равна 52. Найдите эти числа.

559. Периметр земельного участка прямоугольной формы равен 100 м, а его площадь – 600 м^2. Найдите длину и ширину этого участка.

560. Сумма двух соседних сторон прямоугольника равна 18 см. Найдите эти стороны, если площадь прямоугольника равна 80 см^2.

561. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 17 см. Найдите катеты, если гипотенуза треугольника равна 13 см.

562. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см. Найдите катеты этого треугольника, если его гипотенуза равна 10 см.

3 Достаточный уровень

563. Сумма двух чисел равна 15, а разность обратных им чисел равна 0,1. Найдите эти числа.

564. Разность двух чисел равна 3, а сумма обратных им чисел равна 0,5. Найдите эти числа.

565. Найдите двузначное число, в 4 раза большее суммы своих цифр и в 3 раза большее произведения своих цифр.

566. Найдите двузначное число, которое в 1,5 раза больше произведения своих цифр и в 4 раза больше их суммы.

567. Каждый из двух принтеров должен напечатать текстовый файл объемом 120 страниц. Первый принтер за одну минуту печатает на 2 страницы меньше, чем второй, и потому работал на 3 мин дольше. Сколько страниц в минуту печатает каждый принтер?

568. Во время зимних каникул Яна и Оля должны были решить по 60 задач. Яна ежедневно решала на 1 задачу больше, чем Оля, и потому справилась с заданием на 2 дня раньше Оли. Сколько задач ежедневно решала каждая из девочек?

569. Имеется два куска кабеля разных марок. Масса первого куска равна 65 кг. А второй, который на 3 м длиннее первого и каждый метр которого на 2 кг тяжелее каждого метра первого куска, имеет массу 120 кг. Найдите длины этих кусков.

570. В кинотеатре было 320 мест, расположенных одинаковыми рядами. После капитального ремонта число мест в каждом ряду увеличилось на 4 и добавился еще один ряд, а мест стало 420. Сколько рядов стало в кинотеатре, если их было больше чем 15?

571. Два автомобиля одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились через час. После этого, не останавливаясь, они продолжили двигаться с той же скоростью. Один из них прибыл в город B на 35 мин позже, чем второй в город A. Найдите скорость каждого из автомобилей, если расстояние между городами 140 км.

572. Два велосипедиста выехали навстречу друг другу из Киева и Боярки, находясь на расстоянии 30 км. Через час они встретились и, не останавливаясь, продолжили движение с той же скоростью. Один из них прибыл в Боярку на 50 мин позже, чем другой в Киев. Найдите скорость каждого велосипедиста.

573. Из села Абрикосовка в село Вишенки, расстояние между которыми 9 км, вышел пешеход. Через 30 мин из села Вишенки навстречу ему выехал велосипедист и встретился с пешеходом через 30 мин после своего выезда. Найдите скорость пешехода и скорость велосипедиста, если пешеход преодолевает расстояние между селами на 2 ч 15 мин дольше, чем велосипедист.

574. Диагональ прямоугольника равна 10 см. Если одну из его сторон увеличить на 9 см, а другую оставить без изменений, то диагональ увеличится на 7 см. Найдите периметр исходного прямоугольника.

575. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см. Если один из его катетов увеличить на 4 см, а другой оставить без изменений, то гипотенуза нового треугольника будет равна 15 см. Найдите площадь исходного треугольника.

4 Высокий уровень

576. Два крана, открытых одновременно, наполняют бассейн за 2 ч. За сколько часов наполнится бассейн через каждый кран отдельно, если через один из них треть бассейна наполняется на 1,5 ч дольше, чем шестая часть бассейна через другой?

577. Отец и сын, работая вместе, выполняют некоторое задание за 6 дней. За сколько дней может выполнить это задание каждый из них, работая отдельно, если сыну для выполнения $\frac{4}{5}$ задания нужно на 8 дней больше, чем отцу для выполнения $\frac{2}{5}$ задания?

578. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 10 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. Через 1 ч им осталось пройти до встречи 1 км. Если бы один из пешеходов вышел на 15 мин раньше, то встреча состоялась бы на середине пути. Найдите скорость каждого из пешеходов.

579. Из двух городов, расстояние между которыми 72 км, навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились на середине пути, причем один из них выехал на 1 ч раньше второго. Если бы велосипедисты выехали одновременно, то встретились бы через 2 ч 24 мин. Найдите скорости велосипедистов.

580. Моторная лодка проплыла 33 км по течению реки и вернулась обратно за 3 ч 20 мин. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки, если известно, что 11 км по течению и 6 км против течения она преодолевает за 50 мин.

581. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 18 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Велосипедист, выехавший из пункта A, прибыл в пункт B через 24 мин после встречи, а второй велосипедист прибыл в пункт A через 54 мин после встречи. Найдите скорости велосипедистов.

Упражнения для повторения

582. Решите неравенство:

1) $x^2 + 5x \geqslant 0$; 2) $x^2 - 2x - 15 < 0$.

583. Найдите решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 9, \\ x^2 - y^2 = 9. \end{cases}$

584. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 2}$.

585. Вычислите: $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^2$.

Математика вокруг нас

586. В доме, в котором живут первоклассница Наташа и старшеклассник Сергей, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже по 4 квартиры. Наташа живет в квартире № 91, а Сергей – в квартире № 170. В каком подъезде и на каком этаже живет каждый из них?

Интересные задачки для неленивых

587. Упростите выражение:

$$2016 \cdot (2017^9 + 2017^8 + 2017^7 + \ldots + 2017^2 + 2018) + 1.$$

Домашняя самостоятельная работа № 3

Каждое задание имеет четыре варианта ответа (А–Г), среди которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1

1. Какое из неравенств является квадратным:

А. $2x^2 - 3x^3 \geqslant 0$; **Б.** $7x^2 - 9x + 12 \leqslant 0$;

В. $\dfrac{1}{3x^2 - 2x + 7} < 0$; **Г.** $2x - 9 > 0$?

2. Укажите число, являющееся решением неравенства $x^2 - 2x - 3 < 0$.

А. -2; **Б.** 2; **В.** 4; **Г.** -1.

3. Укажите решение системы уравнений $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - y^2 = 15. \end{cases}$

А. (1; 4); **Б.** (5; 0); **В.** (–4; 1); **Г.** (4; 1).

2

4. Решите неравенство $x^2 + 2x \leqslant 0$.

А. $[-2; 0]$; **Б.** $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$; **В.** $(-2; 0)$; **Г.** $[0; 2]$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

А. (–1; –3); **Б.** (3; 1);

В. (3; 1), (–1; –3); **Г.** (1; 3), (–3; –1).

6. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 21 см, а его площадь – 54 см^2. Найдите меньший катет треугольника.

А. 8 см; **Б.** 12 см; **В.** 10 см; **Г.** 9 см.

7. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{6 - x - x^2}}{x + 1}$.

А. $[-3; -1) \cup (-1; 2]$; **Б.** $(-\infty; +\infty)$;
В. $(-3; -1) \cup (-1; 2)$; **Г.** $[-3; 2]$.

8. Из двух пунктов, расстояние между которыми 6 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились через 1 ч 12 мин. Найдите скорость пешехода, шедшего быстрее, если на весь путь он потратил на 1 ч меньше, чем второй.

А. 2 км/ч; **Б.** 2,5 км/ч; **В.** 3 км/ч; **Г.** 4 км/ч.

9. Не выполняя построения, найдите все точки пересечения прямой $x + y = 3$ и параболы $y = x^2 + 1$.

А. (1; 2); **Б.** (1; 2), (−2; 5); **В.** (−1; 4), (2; 1); **Г.** (2; 1), (5; −2).

10. Укажите все решения системы уравнений $\begin{cases} x - 2xy = 6, \\ y - 2xy = 3. \end{cases}$

А. (2; −1), (1,5; −1,5); **Б.** (−1; 2), (−1,5; 1,5);
В. система не имеет решений; **Г.** (2; −1).

11. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 + (2 - a)x + 9 = 0$ имеет два различных корня.

А. $(-4; 8)$; **Б.** $(-\infty; -4] \cup [8; +\infty)$;
В. $(-\infty; -8) \cup (4; +\infty)$; **Г.** $(-\infty; -4) \cup (8; +\infty)$.

12. Мастер и ученик, работая вместе, выполняют некоторую работу за 6 ч. Работая самостоятельно, мастер выполняет $\frac{1}{5}$ часть работы на 3 ч быстрее, чем ученик $\frac{1}{3}$ часть работы. За сколько часов выполнит эту работу ученик, если будет работать самостоятельно?

А. 9 ч; **Б.** 10 ч; **В.** 12 ч; **Г.** 15 ч.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 12–14

1. Какие из неравенств являются квадратными:

1) $x^2 + x^3 - 3 \geqslant 0$; 2) $x^2 + 3x - 3 \geqslant 0$;

3) $4x - x^2 < 0$; 4) $\dfrac{1}{4x - x^2} < 0$?

2. Какие из чисел –1; 0; 1; 2; 3 являются решениями неравенства $x^2 - x - 2 \geqslant 0$?

3. Является ли решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ пара чисел: 1) (4; 0); 2) (1; 3)?

2 **4.** Решите неравенство:
1) $x^2 - 3x < 0$; 2) $x^2 - 7x - 30 \geqslant 0$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

6. Периметр прямоугольника равен 24 см, а его площадь – 35 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

3 **7.** Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{8 - x^2 + 2x}}{x - 1}$.

8. Из двух пунктов, расстояние между которыми 24 км, отправились одновременно навстречу друг другу велосипедист и пешеход и встретились через 2 ч. Найдите скорость каждого из них, если велосипедист потратил на весь путь на 3 ч меньше, чем пешеход.

4 **9.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 3xy - x = 5, \\ 3xy - y = 4. \end{cases}$

Дополнительные задания

4 **10.** Найдите, при каких значениях a не имеет корней уравнение $x^2 + (a - 3)x + 4 = 0$.

11. Два рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторое задание за 12 ч. За сколько часов может выполнить это задание каждый рабочий, работая один, если одному из них для выполнения четверти задания необходимо на 5 ч меньше, чем другому для выполнения трети задания?

Упражнения для повторения главы 2

К § 8

1 **588.** Найдите:
1) $f(1)$, $f(2)$, $f(-4)$, если $f(x) = x^2 - 1$;
2) $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$, если $g(x) = x^3 + 8$.

589. Укажите такое значение x (если оно существует), при котором значение функции $g(x) = \dfrac{6}{x}$ равно:

1) 6; 2) 1; 3) 0; 4) -100.

590. Принадлежит ли графику функции $y = 5x - 7$ точка:

1) $A(5; -18)$; 2) $B(0; -7)$; 3) $C(-1; -12)$; 4) $D(1; 2)$?

591. Постройте график функции $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$, где $-3 \leqslant x \leqslant 3$, предварительно заполнив в тетради таблицу ее значений:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

592. Приведите пример функции, областью определения которой является:

1) множество всех чисел;
2) множество всех чисел, кроме числа 3;
3) множество всех чисел, кроме чисел 2 и 9;
4) множество всех чисел, не меньших числа 5.

593. Тело двигалось прямолинейно. Зависимость пройденного им расстояния s (в км) от времени t (в ч) задается так:

$$s(t) = \begin{cases} 4t, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 2; \\ 8, & \text{если } 2 < t < 3; \\ 3t - 1, & \text{если } 3 \leqslant t \leqslant 4. \end{cases}$$

Найдите $s(1)$, $s(2)$, $s(2{,}5)$, $s(3)$, $s(4)$.

594. Принадлежит ли области значений функции $y = x^2 + 2x$ число: 1) 0; 2) -3; 3) -1; 4) 8?

595. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{3}{2|x| + x^2}$; 2) $g(x) = \dfrac{7x}{2 - \dfrac{1}{x}}$; 3) $\varphi(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}$;

4) $g(x) = \dfrac{7}{1 - \dfrac{1}{|x|}}$; 5) $\psi(x) = \dfrac{3}{1 + \dfrac{1}{|x|}}$;

6) $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}} + \dfrac{1}{x - 5}$; 7) $\varphi(x) = \sqrt{-x^2}$;

8) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x - 1}$; 9) $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$.

596. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$; 2) $g(x) = \sqrt{-(x-1)^2}$;

3) $\varphi(x) = \sqrt{4-x^2}$; 4) $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;

5) $t(x) = \sqrt{x^2+9} - 5$; 6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

597. Найдите область определения функции и постройте ее график:

1) $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-x-3}{2x^2-2}$; 2) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$.

К § 9

1 **598.** Возрастающей или убывающей на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ является функция:

1) $y = \dfrac{8}{x}$; 2) $y = -\dfrac{6}{x}$; 3) $y = -\dfrac{0{,}01}{x}$; 4) $y = \dfrac{7{,}51}{x}$?

2 **599.** Не выполняя построения, найдите точки пересечения графика функции с осями координат:

1) $f(x) = 2x - 4$; 2) $g(x) = \dfrac{1}{3}x - 6$;

3) $\varphi(x) = x^2 - 2x - 3$; 4) $\psi(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

3 **600.** Найдите нули функции (если они существуют):

1) $y = \dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$; 2) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2}$; 3) $y = x\sqrt{x-10}$.

601. Найдите промежуток, на котором значения функции $f(x) = 3x + 6$: 1) положительны; 2) отрицательны.

4 **602.** Постройте график функции и перечислите ее свойства:

1) $g(x) = \dfrac{8}{|x|}$; 2) $f(x) = 2|x| - 6$.

К § 10

1 **603.** Как из графика функции $y = |x|$ получить график функции:

1) $y = |x| + 4$; 2) $y = |x| - 3$; 3) $y = |x + 2|$;

4) $y = |x - 3|$; 5) $y = -|x|$; 6) $y = 3|x|$?

604. Постройте в одной системе координат графики функций:

1) $y = 2x$, $y = 2x - 3$, $y = 2x + 3$;
2) $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = (x + 2)^2$.

605. Постройте график функции:

1) $y = |x - 1| + 2$; 2) $y = 3 - |x|$; 3) $y = |x + 2| - 1$;
4) $y = -|x| - 1$; 5) $y = -4 + |x - 2|$; 6) $y = |x + 1| + 3$.

606. Постройте график функции:

1) $y = 3\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$; 3) $y = -3\sqrt{x}$; 4) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

607. Постройте график функции $y = \frac{12}{x + 3} - 4$.

По графику найдите:
1) область значений функции;
2) нули функции;
3) промежутки возрастания функции;
4) промежутки убывания функции;
5) значения x, при которых функция принимает положительные значения;
6) значения x, при которых функция принимает отрицательные значения.

608. 1) Постройте график функции $y = ||x - 1| - 2|$.
2) Пользуясь графиком, найдите такие значения a, при которых уравнение $||x - 1| - 2| = a$ имеет ровно три корня.

К § 11

609. Вверх или вниз направлены ветви параболы:

1) $y = 3x^2 - 2x + 7$; 2) $y = -x^2 + 5x + 9$;
3) $y = -5x^2$; 4) $y = 0{,}01x^2 + 5$?

610. Принадлежит ли графику функции $y = 20x^2$ точка:

1) $A(\sqrt{2};\ 40)$; 2) $B(-0{,}1;\ 2)$; 3) $C(-\sqrt{5};\ -100)$; 4) $D\left(\frac{1}{2};\ 5\right)$?

611. Найдите координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 + 2x - 7$; 2) $y = -3x^2 + 9x + 4$.

612. Найдите нули квадратичной функции:

1) $y = x^2 + 4x + 3$; 2) $y = -2x^2 - 3x - 1$;
3) $y = x^2 + 2x - 8$; 4) $y = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

613. Постройте график функции:

1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = 2x - x^2$;

3) $y = x^2 - 2x + 3$; 4) $y = -x^2 + 6x - 8$.

3 **614.** Постройте график функции $f(x) = 2x^2 + 4x$.
По графику найдите:
1) $f(1)$, $f(-0,5)$, $f(-2,5)$;
2) значения x, при которых $f(x) = 6$; $f(x) = -2$; $f(x) = 2$;
3) нули функции;
4) решение неравенств $f(x) < 0$ и $f(x) > 0$;
5) наибольшее и наименьшее значения функции;
6) область значений функции;
7) промежутки возрастания и убывания функции.

615. Известно, что точка $A(-1; 4)$ принадлежит графику функции $y = -2x^2 + 3x + c$. Найдите коэффициент c.

616. При каком значении a ось симметрии параболы $y = ax^2 + 8x + 1$ проходит через точку $A(2; -3)$?

617. Найдите область значений функции:

1) $y = \frac{1}{2}x^2$, если $x \in [-2; 4]$;

2) $y = -\frac{1}{3}x^2$, если $x \in [-9; 3]$.

618. На параболе $y = x^2 - 3x$ найдите точки, у которых разность ординаты и абсциссы равна 5.

619. При каких p и q график функции $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $A(-2; 22)$ и $B(1; 4)$?

4 **620.** Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x < -2, \\ 2x, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x^2, & \text{если } x > 2; \end{cases}$

2) $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x}$.

621. Решите графически уравнение $x^2 - 4x + 3 = \dfrac{12}{x}$.

622. Найдите наибольшее значение функции $y = -2x^2 + 6x - 5$, заданной на промежутке:

1) $[0; 2]$; 2) $[2; 4]$.

623. На рисунке 73 изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Пользуясь рисунком, для каждого из случаев (1–4) укажите знаки коэффициентов a, b, c и дискриминанта D квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

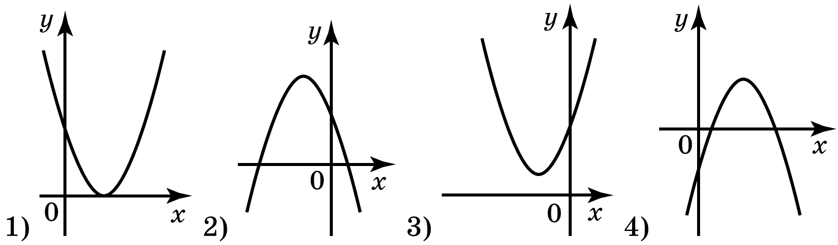


Рис. 73

624. D – дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Изобразите схематически график функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

1) $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ D > 0$;

2) $a < 0,\ c = 0,\ -\dfrac{b}{2a} > 0,\ D > 0$;

3) $a < 0,\ -\dfrac{b}{2a} < 0,\ D = 0$;

4) $a > 0,\ b < 0,\ D < 0$.

625. При каких значениях a функция $y = (a - 1)x^2 + 2x + 7$ принимает положительные значения при любых значениях x?

К § 12

626. На рисунке 74 схематически изображен график функции $y = x^2 - 4$. Пользуясь рисунком, запишите решения неравенства:

1) $x^2 - 4 > 0$; 2) $x^2 - 4 \geqslant 0$;
3) $x^2 - 4 < 0$; 4) $x^2 - 4 \leqslant 0$.

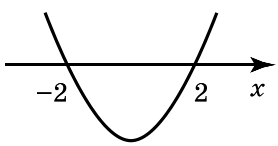


Рис. 74

627. Решите неравенство:

1) $x^2 + 7x > 0$; 2) $-x^2 - 5x \leqslant 0$;
3) $x^2 - 1 < 0$; 4) $-x^2 + 16 \geqslant 0$.

628. Найдите множество решений неравенства:

1) $2x^2 + 3x - 5 > 0$; 2) $3x^2 - 7x - 10 \leqslant 0$.

629. Решите неравенство:

1) $x^2 > 0{,}04$; 2) $-x^2 \leqslant -\frac{9}{25}$; 3) $3x^2 \geqslant x$; 4) $-5x^2 < 2x$.

630. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 - 2x - 9 \geqslant 0$; 2) $x^2 - 11 + 4x < 0$;

3) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0$; 4) $6x + x^2 + 9 \geqslant 0$;

5) $-x^2 - 8x - 16 < 0$; 6) $x^2 + x + 9 \geqslant 0$.

631. Решите неравенство:

1) $\frac{x^2 - 1}{4} > 5 + x$; 2) $(x - 4)(x - 5) \leqslant 2$;

3) $6x^2 - 14x + 12 \geqslant (x - 3)^2$; 4) $\frac{x^2 - 4}{3} < \frac{x - 2}{2}$.

632. Одна сторона прямоугольника на 2 см меньше другой. Какой длины может быть эта сторона, если площадь прямоугольника меньше, чем 35 см^2?

633. При каких положительных значениях x имеет место неравенство $x^2 \leqslant 4x + 21$?

634. Найдите все решения неравенства $0{,}8x^2 + x - 0{,}3 \leqslant 0$, принадлежащие промежутку $\left[-2; -\frac{4}{3}\right]$.

635. При каких значениях c множеством решений неравенства $x^2 - 10x + c < 0$ является промежуток:

1) $(2; 8)$; 2) $(1; 9)$?

636. Запишите двойное неравенство в виде системы неравенств и решите его:

1) $1 < x^2 \leqslant 4$; 2) $0 < x^2 + x \leqslant 6$.

637. При каких значениях a решением неравенства $x^2 - (a^2 - 2a - 3)x + a^2 + 2 < 0$ является промежуток $(2; 3)$?

638. При каких значениях m графики функций $y = mx^2 - x$ и $y = mx + 1 - 2m$ не имеют общих точек?

639. Решите уравнение $x^2 - 2(a - 1)x - (9a + 5) = 0$ относительно переменной x.

640. Для каждого значения a решите неравенство (x – переменная): 1) $x^2 + x(2 + a) + 2a < 0$;
2) $x^2 - x(a - 3) - (2a^2 + 6a) \geqslant 0$.

641. Для каждого значения m решите систему неравенств (x – переменная):

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geqslant 0, \\ x < m; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 < 0, \\ x \geqslant m. \end{cases}$

К § 13

642. Является ли решением системы $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$ пара чисел:

1) (3; 0); 2) (4; 1); 3) (–4; –1); 4) (–1; –4)?

643. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^2, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x = 3. \end{cases}$

644. Решите способом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 + y - 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 2x = 5, \\ xy = 18. \end{cases}$

645. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = 2(x - 1)^2 + 3, \\ xy = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 4, \\ y = -x^2 + 6x - 8. \end{cases}$

646. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

647. Найдите все решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} 5y^2 + x^2 = 29, \\ 2y^2 + x^2 = 17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2y = 5, \\ 5x^2 + 3y = 39; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2 + xy = 10, \\ 2x^2 + 5xy = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y} = 1, \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y} = 0. \end{cases}$

648. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = |x - 3|, \\ \frac{1}{4}xy - 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = |x| - 1, \\ y - x^2 + 1 = 0. \end{cases}$

649. Найдите все решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy - x - 2y = 7, \\ 3xy - x - 3y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ y^2 - xy = -2. \end{cases}$

650. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 11, \\ \frac{x}{y}(x + y) = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x + 3y}{x - y} - \frac{x - y}{x + 3y} = \frac{24}{5}, \\ 5x + 8y = 18. \end{cases}$

К § 14

651. Разность двух чисел равна 3, а их произведение равно 10. Найдите эти числа.

652. Сумма двух чисел равна 12, а разность их квадратов – 24. Найдите эти числа.

653. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если их сумма равна 12 см, а площадь треугольника – 16 см^2.

654. Произведение двух чисел равно 20, а сумма первого числа с утроенным вторым равна 19. Найдите эти числа.

655. Диагональ прямоугольника равна 15 см, а его площадь – 108 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

656. Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна 41 см^2, а площадь треугольника – 10 см^2. Найдите катеты треугольника.

657. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 34. Если к этому числу прибавить 18, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

658. Площадь прямоугольника равна 40 см^2. Если одну из его сторон увеличить на 2 см, а другую – на 1 см, то получим прямоугольник площадью 60 см^2. Найдите периметр исходного прямоугольника.

659. Из города A в город B, расстояние между которыми 240 км, одновременно выехали два автомобиля. Через 2 ч оказалось, что первый проехал на 20 км больше, чем второй. Найдите скорость каждого автомобиля, если на весь путь первый потратил на 20 мин меньше, чем второй.

660. В несколько одинаковых корзин разложили поровну 24 кг малины. Если бы в каждую корзину клали на 1 кг малины больше, то 2 корзины оказались бы лишними. Сколько было корзин?

661. (*Задача Маклорена*). Несколько человек обедали вместе и по счету должны были уплатить 175 шиллингов. Оказалось, что у двоих не было при себе денег. Поэтому каждому из остальных пришлось уплатить на 10 шиллингов больше, чем приходилось на его долю. Сколько человек обедало?

4 **662.** Какое двузначное число на 4 меньше суммы квадратов его цифр и на 5 больше их удвоенного произведения?

663. Периметр участка прямоугольной формы равен 360 м. Если длину участка уменьшить на 20 м, а ширину – на 30 м, то площадь участка уменьшится вдвое. Найдите размеры участка, если его длина больше ширины.

664. Две бригады, работая вместе, могут выполнить некоторое задание за 12 ч. Если половину работы выполнит первая бригада, а вторая ее закончит, то вся работа будет выполнена за 25 ч. За сколько часов может выполнить это задание каждая бригада, работая отдельно?

665. Рабочий должен был изготовить 200 деталей. Первые два дня он выполнял дневную норму, а потом ежедневно делал на 4 детали больше, чем предусмотрено нормой. Поэтому уже за день до окончания срока было изготовлено 208 деталей. Сколько деталей ежедневно должен был делать рабочий по норме?

Глава 3
Числовые последовательности

В этой главе вы:

- **познакомитесь** с числовой последовательностью, арифметической и геометрической прогрессиями; формулами n-го члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы n первых членов этих прогрессий;
- **научитесь** решать задачи, в том числе прикладные, связанные с арифметической и геометрической прогрессиями.

§ 15. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пример 1. Запишем в порядке возрастания четные натуральные числа: 2; 4; 6; 8; 10; ... .

Получим *последовательность* четных натуральных чисел. На первом месте в ней число 2, на втором – число 4, на пятом – 10. Если и далее записывать четные натуральные числа, то, например, на десятом месте окажется число 20, на сотом – число 200. Вообще, для любого натурального числа n можно указать натуральное четное число, стоящее на n-м месте. Этим числом будет $2n$.

Числа, образующие последовательность, называют соответственно первым, вторым, третьим, четвертым и т. д. *членами последовательности*. Члены последовательности принято обозначать буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена последовательности. Например: a_1, a_2, a_3, a_4, ... (читают: «a первое, a второе, a третье, a четвертое» и т. д.). В нашем примере $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, ... Член последовательности с номером n называют *n-м членом последовательности* и обозначают a_n. Саму последовательность принято обозначать (a_n).

Рассмотрим два соседних члена последовательности с номерами k и $k + 1$, а именно a_k и a_{k+1}. Член a_{k+1} называют *следующим* за a_k, а член a_k – *предыдущим* к a_{k+1}.

Поскольку в последовательности четных натуральных чисел на n-м месте стоит число $2n$, то можем записать, что

$a_n = 2n$. Таким образом, имеем *формулу n-го члена последовательности четных натуральных чисел*.

Эта последовательность содержит бесконечное число членов. Такую последовательность называют *бесконечной*. В записи бесконечной последовательности после перечисления нескольких ее первых членов ставят многоточие. Если же последовательность содержит конечное число членов, то ее называют *конечной*.

Пример 2. Последовательность двузначных натуральных чисел 10; 11; 12; ...; 98; 99 является конечной. Она содержит 90 членов и может быть задана формулой n-го члена: $a_n = n + 9$.

Зная формулу n-го члена последовательности, можем найти любой ее член.

Пример 3. Последовательность задана формулой $b_n = n^2 - n$. Найдем несколько ее членов: $b_1 = 1^2 - 1 = 0$ – первый член, $b_7 = 7^2 - 7 = 42$ – седьмой, $b_{20} = 20^2 - 20 = 380$ – двадцатый, $b_{100} = 100^2 - 100 = 9900$ – сотый.

Формула n-го члена является достаточно удобным, но не единственным способом задания последовательности.

Пример 4. Конечную последовательность можно задать *перечислением ее членов*. Например, (c_n): 1; 8; 17; 9.

Пример 5. Последовательность можно задать *описанием ее членов*. Например, последовательность натуральных делителей числа 18, записанных в порядке возрастания, выглядит так: 1; 2; 3; 6; 9; 18.

Пример 6. Конечную последовательность можно задать и в *виде таблицы*. Например:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	4	3	1	0	−2	−5	−10

Последовательность можно задавать, указав первый или несколько первых членов последовательности, а затем – формулу, позволяющую найти остальные члены последовательности через предыдущие. Такую формулу называют *рекуррентной*, а способ задания последовательности – *рекуррентным*.

Пример 7. Пусть первый член последовательности (x_n) равен 2, а каждый следующий равен квадрату предыдущего, то есть $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n^2$. Тогда по известному первому члену можно найти второй: $x_2 = x_1^2 = 2^2 = 4$, по известному второму можно найти третий: $x_3 = x_2^2 = 4^2 = 16$ и так далее.

Получим последовательность: 2; 4; 16; 256; 65 536; ... .

Пример 8. Найдем третий, четвертый и пятый члены последовательности (y_n), заданной рекуррентно: $y_1 = 2$, $y_2 = -3$, $y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n$.

Получим:

$y_3 = 2y_2 + y_1 = 2 \cdot (-3) + 2 = -4;$

$y_4 = 2y_3 + y_2 = 2 \cdot (-4) + (-3) = -11;$

$y_5 = 2y_4 + y_3 = 2 \cdot (-11) + (-4) = -26.$

Последовательности, рассмотренные выше, являются *числовыми последовательностями*, так как состоят из чисел. Иногда рассматривают последовательности, членами которых являются выражения, функции и т. п. В дальнейшем будем рассматривать только числовые последовательности.

А еще раньше...

Математики уже очень давно занимаются изучением числовых последовательностей.

Понятие числовой последовательности возникло и развилось задолго до создания учения о функции. Вот примеры бесконечных числовых последовательностей, известных еще в древности:

1) 1, 2, 3, 4, 5, ... – последовательность натуральных чисел;

2) 2, 4, 6, 8, 10, ... – последовательность четных чисел;

3) 1, 3, 5, 7, 9, ... – последовательность нечетных чисел;

4) 1, 4, 9, 16, 25, ... – последовательность квадратов натуральных чисел;

5) 2, 3, 5, 7, 11, ... – последовательность простых чисел;

6) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ – последовательность чисел, обратных натуральным.

Для всех этих последовательностей, кроме пятой, можно записать формулу n-го члена. Для последовательности простых чисел формула n-го члена не была известна древним математикам... Нет ее и поныне!

Одной из наиболее известных является числовая последовательность, которую называют *последовательностью Фибоначчи* в честь итальянца *Л. Пизанского (Фибоначчи)* (ок. 1170 – ок. 1250). Он первым рассмотрел последовательность чисел, два первых члена которой – единицы и каждый член которой, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих:

$$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144 \ldots .$$

Лишь несколько веков спустя была найдена формула n-го члена последовательности Фибоначчи:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

1. Приведите пример числовой последовательности.
2. Назовите три первых члена этой последовательности.
3. Приведите пример числовой последовательности, заданной формулой n-го члена.
4. Как еще можно задавать числовые последовательности?
5. Какую последовательность называют бесконечной, а какую – конечной?

1 Начальный уровень

666. (*Устно*). Дана последовательность: 2; 4; 7; 10; 15.

1) Сколько у нее членов?
2) Назовите первый и последний члены этой последовательности.
3) Какой номер у члена последовательности, равного 10?
4) Какой член последовательности следует за членом последовательности, равным 4?
5) Какой член последовательности предшествует члену последовательности, равному 15?

667. Последовательность задана формулой $a_n = 5n - 1$. Найдите первый, пятый и седьмой члены этой последовательности.

668. Последовательность задана формулой $b_n = 4n + 3$. Найдите первый, четвертый и восьмой члены этой последовательности.

669. Запишите четыре первых члена последовательности:

1) нечетных натуральных чисел, взятых в порядке возрастания;
2) кубов натуральных чисел, взятых в порядке возрастания;
3) однозначных натуральных чисел, взятых в порядке убывания.

670. Запишите пять первых членов последовательности:

1) квадратов натуральных чисел, взятых в порядке возрастания;
2) двузначных натуральных чисел, взятых в порядке убывания.

2 Средний уровень

671. Найдите четыре первых члена последовательности (x_n), заданной формулой n-го члена:

1) $x_n = 4n^2 - 17$; 2) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}$; 3) $x_n = \dfrac{2n-17}{n+3}$; 4) $x_n = \dfrac{n^3}{2^n}$.

672. Найдите три первых члена последовательности (y_n), заданной формулой n-го члена:

1) $y_n = 2n^2 + 3$; 2) $y_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$; 3) $y_n = \dfrac{4n - 5}{n + 1}$; 4) $y_n = \dfrac{3^n}{n^2}$.

673. Последовательность задана формулой $b_n = 4n + 17$. Найдите номер члена последовательности, равного 65.

674. Последовательность задана формулой $a_n = 5 - 3n$. Найдите номер члена последовательности, равного 46.

675. 1) Задайте таблицей пять первых членов последовательности натуральных чисел, кратных числу 3.

2) Найдите номер члена этой последовательности, равного числу 12.

3 Достаточный уровень

676. Последовательность задана формулой $y_n = 2n^2 - 18n + 7$. Какие из чисел являются членами этой последовательности:

1) 7; 2) −29; 3) 50; 4) 79?

Для чисел, являющихся членами последовательности, укажите их номера.

677. Последовательность задана формулой $x_n = n^2 - 4n + 9$. Какие из чисел являются членами этой последовательности:

1) 69; 2) 68; 3) 5; 4) 6?

Для чисел, являющихся членами последовательности, укажите их номера.

678. Найдите пять первых членов последовательности (c_n), заданной рекуррентно:

1) $c_1 = 8$, $c_{n+1} = c_n - 5$;

2) $c_1 = -3$, $c_{n+1} = 2 \cdot c_n + 3$;

3) $c_1 = -2$, $c_2 = 3$, $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$;

4) $c_1 = 0$, $c_2 = -5$, $c_{n+2} = \dfrac{c_{n+1}}{c_n + 1}$.

679. Найдите пять первых членов последовательности (y_n), заданной рекуррентно:

1) $y_1 = 5$, $y_{n+1} = 2y_n - 7$;

2) $y_1 = 16$, $y_2 = 1$, $y_{n+2} = \dfrac{y_n}{2y_{n+1}}$.

4 Высокий уровень

680. Найдите наибольший член последовательности, заданной формулой n-го члена:

1) $a_n = 26 - n^2$; 2) $b_n = -2n^2 + 16n$;
3) $c_n = (-1)^n$; 4) $y_n = -n^2 + 5n$.

681. Найдите наименьший член последовательности, заданной формулой n-го члена:

1) $x_n = 2n^2 - 3$; 2) $a_n = n^2 - 8n - 5$.

682. Докажите, что последовательность (p_n), в которой $p_n = 2n^2 + 6n - 5$, не содержит наибольшего члена, а последовательность (t_n), в которой $t_n = -n^2 - 4n$, не содержит наименьшего члена.

Упражнения для повторения

2 **683.** Товар стоил 150 грн. Через некоторое время он подорожал до 165 грн. На сколько процентов выросла цена?

3 **684.** Вычислите: $\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-3} + \dfrac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}+3}$.

4 **685.** Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$

Математика вокруг нас

686. До установки счетчиков некая семья за пользование водой ежемесячно платила 560 грн. После установки двух счетчиков (для холодной и горячей воды) ежемесячная плата за воду уменьшилась до 350 грн. Один счетчик воды стоит 370 грн, а его установка – 120 грн. Через какое наименьшее количество месяцев экономия на платежах за воду превысит расходы на приобретение и установку счетчиков, если тарифы на воду не изменятся?

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

687. 1) Запишите числовую последовательность, содержащую десять членов, первый член которой равен 2, а каждый следующий – на 3 больше предыдущего.

2) Запишите формулу n-го члена этой последовательности.

688. Найдите закономерность и продолжите ряд чисел еще на четыре числа:

1) 42, 45, 48, 51, ...; 2) 6, 1, −4, −9, ...;
3) 15, 0, −15, −30, ...; 4) −13, −9, −5, −1, ...

Интересные задачки для неленивых

689. Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$

§ 16. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА. ФОРМУЛА *n*-ГО ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Рассмотрим числовую последовательность, первый член которой равен 4, а каждый следующий, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с числом 3:

$$4;\ \overset{+3}{\frown}\ 7;\ \overset{+3}{\frown}\ 10;\ \overset{+3}{\frown}\ 13;\ \overset{+3}{\frown}\ 16;\ \overset{+3}{\frown}\ 19;\ \ldots .$$

Такую последовательность называют *арифметической прогрессией*.

Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, называют *арифметической прогрессией*.

Это число называют *разностью арифметической прогрессии* и обозначают буквой d (от начальной буквы латинского слова *differentia* – разность). Значит, если (a_n) – арифметическая прогрессия, то имеют место равенства:

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d,\ a_4 = a_3 + d,\ \ldots .$$

Таким образом, для любого натурального n получим равенство:

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d.}$$

Тогда:

$$\boldsymbol{d = a_{n+1} - a_n,}$$

то есть

разность арифметической прогрессии можно найти, если от любого члена прогрессии, начиная со второго, отнять предыдущий.

Пусть первый член арифметической прогрессии равен a_1, а ее разность равна d. Тогда:

$a_2 = a_1 + d;$
$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$
$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d;$
$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d.$

Заметим, что в каждой из полученных формул коэффициент у разности d на 1 меньше порядкового номера члена прогрессии, для которого записана эта формула. Действительно, чтобы найти a_n, имея a_1 и d, нужно $n - 1$ раз прибавить к a_1 число d, то есть к a_1 прибавить $(n - 1)d$. Таким образом:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + d(n - 1).}$$

Получили *формулу n-го члена арифметической прогрессии*.

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы.

Пример 1. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия, $a_1 = 32{,}8$, $d = -0{,}4$. Найти двадцатый член этой последовательности.

Решение.

$a_{20} = a_1 + d(20 - 1) = a_1 + 19d = 32{,}8 + 19(-0{,}4) = 25{,}2.$

Ответ. 25,2.

Пример 2. Принадлежит ли арифметической прогрессии 7; 10; 13; ... число: 1) 82; 2) 102?

Решение. В данной прогрессии $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, тогда $d = a_2 - a_1 = 3$. Запишем формулу n-го члена этой прогрессии:

$$a_n = 7 + 3(n - 1) = 3n + 4, \text{ то есть } a_n = 3n + 4.$$

1) Допустим, число 82 является членом прогрессии (a_n). Тогда существует такое натуральное число n, что $a_n = 82$, то есть $3n + 4 = 82$. Имеем уравнение: $3n + 4 = 82$, откуда получим, что $n = 26$.

Следовательно, число 82 является двадцать шестым членом арифметической прогрессии, то есть $a_{26} = 82$.

2) Рассуждая аналогично, имеем: $3n + 4 = 102$, откуда $n = 32\dfrac{2}{3}$.

Полученное число $32\dfrac{2}{3}$ не является натуральным, а значит, арифметическая прогрессия числа 102 не содержит.

Ответ. 1) Да; 2) нет.

Пример 3. Кубики сложены рядами так, что в верхнем ряду 4 кубика, а в каждом следующем ниже ряду – на одно и то же количество кубиков больше, чем в предыдущем. Известно, что в шестом ряду 14 кубиков. Сколько кубиков в третьем ряду?

Решение. Так как в каждом следующем ряду на одно и то же количество кубиков больше, чем в предыдущем, то числа, равные количеству кубиков в рядах, образуют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 4$, $a_6 = 14$, следовательно, нам нужно найти a_3.

Для начала найдем разность d этой прогрессии. Из формулы n-го члена $a_6 = a_1 + 5d$ получим уравнение: $14 = 4 + 5d$, откуда $d = 2$.

Теперь, зная значение d, найдем a_3:

$$a_3 = a_1 + 2d = 4 + 2 \cdot 2 = 8.$$

Следовательно, в третьем ряду 8 кубиков.

Заметим, что найти d можно было и без использования уравнения, например выразив d из формулы 6-го члена прогрессии. Действительно, поскольку $a_6 = a_1 + 5d$, то

$$d = \frac{a_6 - a_1}{5} = \frac{14 - 4}{5} = 2.$$

Ответ. 8 кубиков.

Докажем несколько важных свойств арифметической прогрессии.

1. Любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим двух соседних с ним членов, то есть

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}, \text{ где } \boldsymbol{n \in N,\ n \geqslant 2}.$$

Доказательство. Используем формулу n-го члена арифметической прогрессии, тогда:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + d((n-1)-1) + a_1 + d((n+1)-1)}{2} =$$

$$= \frac{2a_1 + d(n - 1 - 1 + n)}{2} = \frac{2a_1 + 2d(n-1)}{2} = \frac{2a_1}{2} + \frac{2d(n-1)}{2} =$$

$$= a_1 + d(n-1) = a_n.$$

По одной из версий именно с этим свойством арифметической прогрессии связано ее название.

2. Любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим двух равноудаленных от него членов, то есть

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}}, \text{ где } \boldsymbol{n \in N,\ k \in N,\ k < n,\ n \geqslant 2}.$$

Свойство доказывается аналогично предыдущему свойству.

3. Если $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{s}$ – натуральные числа и $\boldsymbol{k + l = p + s}$, то $\boldsymbol{a_k + a_l = a_p + a_s}$.

Доказательство. Используем формулу n-го члена, тогда:
$a_k + a_l = a_1 + d(k - 1) + a_1 + d(l - 1) = 2a_1 + d(k + l - 2)$;
$a_p + a_s = a_1 + d(p - 1) + a_1 + d(s - 1) = 2a_1 + d(p + s - 2)$.

Но $k + l = p + s$, поэтому $2a_1 + d(k + l - 2) = 2a_1 + d(p + s - 2)$, то есть $a_k + a_l = a_p + a_s$.

4. Любую арифметическую прогрессию можно задать формулой $\boldsymbol{a_n = dn + b}$, где $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$ – некоторые числа.

Доказательство. По формуле n-го члена имеем:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) = dn + (a_1 - d).$$

Обозначив $a_1 - d = b$, получим: $a_n = dn + b$.

5. Последовательность $\boldsymbol{a_n}$, заданная формулой вида $\boldsymbol{a_n = dn + b}$, где $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$ – некоторые числа, является арифметической прогрессией.

Доказательство. Рассмотрим разность $(n + 1)$-го и n-го членов этой последовательности:

$$a_{n+1} - a_n = d(n + 1) + b - (dn + b) = dn + d + b - dn - b = d.$$

Получим, что для любого n имеет место равенство $a_{n+1} = a_n + d$. Следовательно, последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, разность которой равна d.

А еще раньше...

Первые представления об арифметической прогрессии появились еще до нашей эры. В древнеегипетском папирусе Ахмеса (II тыс. до н. э.) есть такая задача: «*Тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 людьми, разность же между каждым человеком и его соседом равна $\frac{1}{8}$ меры*». Решение задачи сводится к нахождению десяти членов арифметической прогрессии:

$a+\frac{1}{8}$, $a+\frac{2}{8}$, ..., $a+\frac{9}{8}$, сумма которых равна 10.

Задачи на арифметические прогрессии есть и в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах».

Первые из дошедших до нас задач на прогрессии связаны с запросами хозяйственной жизни и общественной практики, как, например, распределение продуктов, деление наследства и т. п.

У древних греков теория арифметических прогрессий была связана с так называемой непрерывной арифметической пропорцией:

$$a - b = b - c.$$

Здесь числа a, b и c образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{c-a}{2}$.

Таким образом, прогрессии рассматривались как бы продолжениями пропорций, вот почему эпитет *арифметическая* был перенесен с пропорций на прогрессии. Это еще одна из версий, почему эта прогрессия получила именно такое название.

1. Какую последовательность называют арифметической прогрессией?
2. Какое число называют разностью арифметической прогрессии?
3. Как можно найти разность арифметической прогрессии?
4. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии.
5. Сформулируйте и докажите свойства арифметической прогрессии.

1 Начальный уровень

690. Какие из последовательностей являются арифметическими прогрессиями? Назовите их первый член и разность.

1) 2; 5; 8; 11; 2) 4; 4; 4; 4; 3) 0; 1; 5; 10;
4) 4; −4; 4; −4; 5) −5; −4; −3; −2; 6) 0; 1; 0; 2.

691. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

1) натуральных чисел: 1; 2; 3; 4; 5; ...;
2) квадратов натуральных чисел: 1; 4; 9; 16; 25; ...;
3) нечетных натуральных чисел: 1; 3; 5; 7; 9; ...;
4) правильных дробей с числителем 1: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; ...?

2 Средний уровень

692. Запишите пять первых членов арифметической прогрессии (a_n), если известны ее разность и первый член:

1) $a_1 = 5$, $d = 4$; 2) $a_1 = 4{,}7$, $d = -0{,}7$.

693. Запишите четыре первых члена арифметической прогрессии (a_n), если известны ее разность и первый член:

1) $a_1 = 4$, $d = -2$; 2) $a_1 = 3{,}8$, $d = 0{,}2$.

694. Найдите три следующих члена арифметической прогрессии 4,2; 3,8; 3,4; ... .

695. Найдите четыре следующих члена арифметической прогрессии 5,7; 6,1; 6,5; ... .

696. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Найдите:

1) a_7, если $a_1 = 3$, $d = -8$; 2) a_{12}, если $a_1 = 2{,}7$, $d = 0{,}4$.

697. (a_n) – арифметическая прогрессия, $a_1 = -15$, $d = 3{,}7$. Найдите: 1) a_2; 2) a_5; 3) a_{10}; 4) a_{101}.

698. Найдите разность, десятый и восемнадцатый члены арифметической прогрессии:

1) $1; \frac{1}{2}; 0; \ldots;$ 2) $0; 1{,}5; 3; \ldots$.

699. Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n), если: 1) $a_2 = 8$, $d = -5$; 2) $a_{10} = 7$, $d = 4$.

700. Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n), если: 1) $a_2 = -7$, $d = 4$; 2) $a_8 = 5$, $d = -2$.

701. Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен 8, а одиннадцатый – 33.

702. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -5$, $a_9 = 7$.

703. Тело за первую секунду преодолело 5 м, а за каждую следующую – на 2 м больше, чем за предыдущую. Сколько метров преодолело тело за шестую секунду; за десятую секунду?

704. Учащийся прочел книгу за 10 дней. В первый день он прочитал 40 страниц, а в каждый следующий читал на 3 страницы меньше, чем в предыдущий. Сколько страниц прочитал учащийся в третий день; в последний день?

3 Достаточный уровень

705. Между числами 3 и 7 вставьте:
1) одно число; 2) два числа; 3) три числа
таких, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

706. Между числами 15 и 30 вставьте четыре таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

707. Найдите формулу n-го члена арифметической прогрессии:

1) $2x$, $5x$, $8x$, ...; 2) $\frac{m-1}{m}$, 1, $\frac{m+1}{m}$, ...

708. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_{18} = 5$, $a_{19} = 3$; 2) $a_4 = 11$, $a_{20} = 43$.

709. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (c_n), если:

1) $c_{17} = 3$, $c_{18} = 6$; 2) $c_8 = -22$, $c_{14} = -40$.

710. Содержит ли арифметическая прогрессия 5; 8; 11; ... число:

1) 92; 2) 112?

711. В арифметической прогрессии (x_n) $x_1 = 12$, $d = -2{,}5$. Является ли членом этой прогрессии число:

1) −7; 2) −23?

712. Найдите номер первого отрицательного члена арифметической прогрессии (y_n), у которой $y_1 = 12$; $d = -0{,}4$.

713. Найдите номер первого положительного члена арифметической прогрессии −5; −4,8; −4,6; ... .

714. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 5n - 7$. Найдите:

1) разность прогрессии; 2) значение суммы $a_5 + a_6 + a_7$.

715. При каких значениях x числа $x^2 + 2$, $4x - 2$ и x являются последовательными членами арифметической прогрессии?

716. При каких значениях y числа $y + 3$, $2y + 3$ и $y^2 - 1$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

4 Высокий уровень

717. При каком значении m числа $m^2 - 4$, m, $2m + 3$ и $4m^2 + 5$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

718. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Найдите: 1) $a_5 + a_{19}$, если $a_1 + a_{23} = -37$;
2) a_{17}, если $a_{10} + a_{24} = 5$.

719. Последовательность (b_n) – арифметическая прогрессия. Найдите: 1) $b_9 + b_{11}$, если $b_1 + b_{19} = -25$;
2) $b_7 + b_{13}$, если $b_{10} = 2{,}7$.

720. Докажите, что если числа $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2 и c^2 также образуют арифметическую прогрессию.

721. Докажите, что если числа a^2, b^2 и c^2 образуют арифметическую прогрессию, то числа $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

Математика вокруг нас

722. Для перевозки 40 тонн груза на расстояние 1200 км можно воспользоваться услугами одной из трех компаний-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей перевозчиков приведены в таблице. Во сколько обойдется самый дешевый вариант перевозки указанного груза?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (грн на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	800	3,5
Б	1000	5
В	2300	12

Упражнения для повторения

723. Упростите выражение:

1) $-4p^2t \cdot (-0{,}5p^3t^4)$; 2) $\dfrac{39p^3}{5a} : 13p^7a^5$.

724. Решите уравнение:

1) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$;

2) $(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$.

725. Кратно ли значение выражения $8^6 - 4^7$ числу 6?

726. Найдите область определения функции:

$$y = \sqrt{10 - 9x - x^2} + \frac{x + 1}{x^2 - 3x}.$$

Интересные задачки для неленивых

727. Докажите неравенство $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)+1 \geqslant 0$.

§17. СУММА n ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Рассмотрим n первых членов арифметической прогрессии (a_n): $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. Обозначим через S_n их сумму:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Найдем формулу для вычисления этой суммы. Запишем эту сумму дважды, разместив в первом случае слагаемые в порядке возрастания их номеров, а во втором – в порядке убывания:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$;

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$.

Теперь сложим эти равенства почленно и получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). \ (*)$$

Но по свойству 3 из предыдущего параграфа: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_{n-1} + a_2$, то есть каждая сумма в скобках равенства (*) равна $a_1 + a_n$, так как $1 + n = 2 + n - 1 = 3 + n - 2 = \ldots = n - 1 + 2$. Тогда правая часть равенства (*) состоит из n слагаемых, каждое из которых равно $a_1 + a_n$. Следовательно,

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n).$$

Разделив обе части этого равенства на 2, получим формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \qquad (1)$$

Если в формуле (1) по формуле n-го члена заменить a_n выражением $a_1 + d(n - 1)$, получим:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

или

$$\boldsymbol{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.} \qquad \textbf{(2)}$$

Получили еще одну формулу для вычисления суммы n первых членов арифметической прогрессии, которой удобно пользоваться, если известны первый член и разность прогрессии.

Применим формулы (1) и (2) для решения примеров.

Пример 1. Найти сумму тридцати первых членов арифметической прогрессии 4; 7; 10; ... .

Решение.

1-й способ. Так как $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, то $d = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$ и $a_{30} = a_1 + 29d = 4 + 29 \cdot 3 = 91$.

Тогда по формуле (1): $S_{30} = \dfrac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \dfrac{4 + 91}{2} \cdot 30 = 1425.$

2-й способ. Так как $a_1 = 4$, и легко найти, что $d = 3$, используем формулу (2):

$$S_{30} = \frac{2a_1 + 29d}{2} \cdot 30 = \frac{2 \cdot 4 + 3(30-1)}{2} \cdot 30 = 1425.$$

Ответ. 1425.

Пример 2. Найти сумму восемнадцати первых членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = -2n + 7$.

Решение. Поскольку последовательность задана формулой $a_n = dn + b$, где $d = -2$; $b = 7$, то она является арифметической прогрессией (по свойству 5 из предыдущего параграфа).

Имеем:

$$a_1 = -2 \cdot 1 + 7 = 5, \quad a_{18} = -2 \cdot 18 + 7 = -29.$$

Найдем S_{18}:

$$S_{18} = \frac{a_1 + a_{18}}{2} \cdot 18 = \frac{5 + (-29)}{2} \cdot 18 = -216.$$

Ответ. −216.

Пример 3. Найти сумму всех натуральных чисел, кратных числу 7 и не превышающих 999.

Решение. Натуральные числа, кратные числу 7, образуют арифметическую прогрессию: 7; 14; 21; 28; ..., которую можно задать формулой $a_n = 7n$.

Найдем, сколько членов этой прогрессии не превышают числа 999. Для этого решим неравенство $7n \leqslant 999$ и получим, что $n \leqslant 142\frac{5}{7}$.

Следовательно, 142 члена прогрессии не превышают 999. Найдем их сумму, то есть S_{142}.

Имеем: $a_1 = 7$, $a_{142} = 7 \cdot 142 = 994$. Тогда:

$$S_{142} = \frac{7 + 994}{2} \cdot 142 = 71\,071.$$

Ответ. 71 071.

Пример 4. Из двух точек, расстояние между которыми 100 м, одновременно навстречу друг другу начинают двигаться два объекта. Первый движется равномерно со скоростью 9 м/с, а второй за первую секунду проходит 7 м, а за каждую следующую на 2 м больше, чем за предыдущую. Через сколько секунд они встретятся?

Решение. Пусть объекты встретятся через n секунд. Первый за это время преодолеет $9n$ м. Расстояния, которые преодолеет второй объект за первую, вторую, третью и следующие секунды, образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 7$, $d = 2$. Тогда за n секунд второй объект преодолеет расстояние S_n, которое можно вычислить по формуле:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 7 + 2(n-1)}{2} \cdot n =$$
$$= (7 + (n-1)) \cdot n = (n+6)n = n^2 + 6n.$$

По условию $9n + (n^2 + 6n) = 100$, тогда $n^2 + 15n - 100 = 0$, откуда $n_1 = 5$, $n_2 = -20$. Второй корень не удовлетворяет задаче. Следовательно, $n = 5$, то есть встреча произойдет через 5 с.

Ответ. 5 с.

А еще раньше...

Уже в V в. до н. э. греки знали несколько прогрессий и их суммы, в частности:

1) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$;

3) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$ и другие.

С вычислением суммы арифметической прогрессии связана интересная история, произошедшая с выдающимся немецким математиком *Карлом Гауссом* (1777–1855), который, еще учась в школе, проявил чрезвычайные математические способности. Однажды учитель предложил ученикам найти сумму ста первых натуральных чисел. Юный Гаусс мгновенно получил результат. Он заметил, что значения сумм 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, ... одинаковы, а количество таких сумм равно 50:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = 101 \cdot 50 = 5050.$$

101

101

101

Запишите формулы для нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии.

1 Начальный уровень

728. Найдите S_8 – сумму восьми первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 5$, $a_8 = 10$.

729. Найдите S_{10} – сумму десяти первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 7$, $a_{10} = 15$.

2 Средний уровень

730. Найдите сумму восемнадцати первых членов арифметической прогрессии (c_n), если $c_1 = 17$, $d = -2$.

731. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 15$, $d = -3$.

732. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии:

1) 2; −1; −4; ...; 2) 5; 6,5; 8; ... .

733. Найдите сумму тридцати первых членов арифметической прогрессии:

1) 5; 8; 11; ...; 2) 0; −2,5; −5; ... .

734. Найдите сумму шестидесяти первых членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_n = -5n + 17$.

735. Найдите сумму восьмидесяти первых членов арифметической прогрессии (y_n), если $y_n = 3n - 19$.

736. Найдите сумму:

1) сорока первых натуральных чисел;
2) натуральных чисел от 1 до 70.

737. Найдите сумму девятнадцати первых натуральных чисел.

738. Дрова сложены так, что в нижнем ряду лежит 15 колод, а в каждом следующем на одну колоду меньше, чем в предыдущем. Сколько всего колод в двенадцати рядах?

739. В одном из секторов цирка 14 рядов, причем в первом ряду 5 мест, а в каждом следующем на одно место больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в этом секторе?

3 Достаточный уровень

740. Найдите сумму:

1) всех натуральных чисел от 125 до 317 включительно;
2) всех натуральных чисел, кратных числу 5 и не превышающих числа 350;
3) всех натуральных чисел, кратных числу 9 и не превышающих числа 470;
4) всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

741. Найдите сумму:

1) всех натуральных чисел, кратных числу 7 и не превышающих числа 420;
2) всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

742. Найдите сумму восьми первых членов арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 5$, $a_5 = -7$; 2) $a_5 = 13$, $a_9 = 19$.

743. Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии (x_n), если:

1) $x_1 = 4$, $x_6 = -31$; 2) $x_3 = 13$, $x_7 = 23$.

744. Найдите первый член арифметической прогрессии, если сумма первых пятнадцати членов этой прогрессии равна 375, а разность прогрессии равна 3.

745. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 7$, а сумма восьми ее первых членов равна 168.

746. Найдите сумму положительных членов арифметической прогрессии 19; 17; 15; ... .

747. Найдите сумму отрицательных членов арифметической прогрессии -23; -20; -17; ... .

748. Сколько нужно взять первых членов арифметической прогрессии 4; 6; 8; ..., чтобы их сумма была равна 270?

4 Высокий уровень

749. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с двадцатого по сороковой включительно, если первый член прогрессии равен 8, а ее разность равна $-0{,}6$.

750. Найдите сумму членов арифметической прогрессии 2; 5; 8; ... с десятого по двадцатый включительно.

751. Решите уравнение:

1) $6 + 10 + 14 + \ldots + (4x - 2) = 448$;
2) $33 + 30 + 27 + \ldots + x = 195$.

752. Решите уравнение:

1) $7 + 11 + 15 + \ldots + (4x - 1) = 297$;
2) $11 + 8 + 5 + \ldots + x = -221$.

753. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 + a_5 = 16$, $a_3a_4 = 88$.

754. Из пункта A выехал грузовик, двигающийся со скоростью 40 км/ч. Одновременно из пункта B в том же направлении отправился легковой автомобиль, за первый час проехавший 50 км, а за каждый следующий час – на 5 км больше, чем за предыдущий. Через сколько часов легковой автомобиль догонит грузовик, если расстояние между пунктами A и B равно 135 км?

Упражнения для повторения

2 **755.** Между какими двумя последовательными целыми числами находится число:

1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $-\sqrt{5}$; 4) $-\sqrt{17}$?

3 **756.** Решите неравенство: $6x - 40 > (3x - 8)(3x + 8)$.

757. Решите уравнение: $(2x^2 - 1)(x^2 + 3) = x^2(x^2 + 7)$.

4 **758.** Постройте график функции

$$y = \frac{x^3 + 3x^2}{x + 3} + \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}.$$

Математика вокруг нас

759. К электросети подключены приборы, общее сопротивление которых $R_1 = 90$ Ом. Параллельно с ними хотят подключить еще и электрообогреватель. Определите наименее возможное сопротивление R_2 этого обогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление находят по формуле $R_{общ} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети ее общее сопротивление должно быть не меньше 9 Ом.

Решите и подготовьтесь к изучению нового материала

760. Запишите конечную последовательность, состоящую из шести членов, первый член которой равен 1, а каждый следующий втрое больше предыдущего.

761. Найдите закономерность и продолжите ряд чисел, записав четыре следующих числа:

1) 3; 6; 12; 24; ...;
2) 64; 32; 16; 8; ...;
3) 1; –3; 9; –27; ...;
4) 25 000; –2500; 250; –25; ... .

Интересные задачки для неленивых

762. (*Задача Стенфордского университета*). Найдите все значения m, при которых уравнение $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$ имеет четыре корня, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии.

§ 18. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА. ФОРМУЛА n-ГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Рассмотрим числовую последовательность, первый член которой равен 3, а каждый следующий, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на число 2:

$$\overset{\cdot 2}{\frown}\ \ \overset{\cdot 2}{\frown}\ \ \overset{\cdot 2}{\frown}\ \ \overset{\cdot 2}{\frown}\ \ \overset{\cdot 2}{\frown}$$
$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ 96;\ \ldots .$$

Такую последовательность называют *геометрической прогрессией*.

***Геометрической прогрессией* называют последовательность отличных от нуля чисел, каждое из которых, начиная со второго, равно предыдущему, умноженному на одно и то же число.**

Это число называют знаменателем геометрической прогрессии и обозначают буквой q (от первой буквы французского слова *quotient* – частное). Поэтому если (b_n) – геометрическая прогрессия, то верны следующие равенства:

$$b_2 = b_1 q;\ \ b_3 = b_2 q;\ \ b_4 = b_3 q;\ \ \ldots .$$

Следовательно, для любого натурального n получим:

$$b_{n+1} = b_n q.$$

Тогда

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то есть

знаменатель геометрической прогрессии можно найти, если любой член прогрессии, начиная со второго, разделить на предыдущий.

Заметим, что поскольку члены геометрической прогрессии отличны от нуля, то и знаменатель q не может быть равным нулю, то есть $q \neq 0$.

Если $q = 1$, то геометрическая прогрессия будет состоять из одинаковых чисел. Например, если $b_1 = -5$ и $q = 1$, то получим геометрическую прогрессию:

$$-5;\ -5;\ -5;\ -5;\ -5;\ \ldots .$$

Заметим, что полученную последовательность можно также считать и арифметической прогрессией, первый член которой равен -5, а разность равна нулю.

Пусть первый член геометрической прогрессии равен b_1, а знаменатель равен q. Тогда

$$b_2 = b_1 q;$$
$$b_3 = b_2 q = (b_1 q)q = b_1 q^2;$$
$$b_4 = b_3 q = (b_1 q^2)q = b_1 q^3;$$
$$b_5 = b_4 q = (b_1 q^3)q = b_1 q^4 \text{ и т. д.}$$

Заметим, что в каждой из полученных формул показатель степени числа q на 1 меньше порядкового номера члена прогрессии, для которого записана эта формула. Действительно, чтобы найти b_n, имея b_1 и q, нужно $n - 1$ раз умножить b_1 на q, то есть b_1 умножить на q^{n-1}. Имеем:

$$\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}.}$$

Получили *формулу n-го члена геометрической прогрессии.*

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы.

Пример 1. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_1 = -27$, $q = \frac{1}{3}$. Найти b_6.

Решение. $b_6 = b_1 q^{6-1} = b_1 q^5 = -27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{1}{9}$.

Ответ. $-\frac{1}{9}$.

Пример 2. Найти знаменатель q геометрической прогрессии (b_n), если $b_5 = 4$, $b_7 = 36$.

Решение.

1-й способ. $b_5 = b_1 q^4$, $b_7 = b_1 q^6$. Тогда $\frac{b_7}{b_5} = \frac{b_1 q^6}{b_1 q^4} = q^2$.

При этом $\frac{b_7}{b_5} = \frac{36}{4} = 9$, то есть $q^2 = 9$, откуда $q = 3$ или $q = -3$.

2-й способ. $\ldots\ b_5 \overset{\cdot q}{\frown} b_6 \overset{\cdot q}{\frown} b_7;\ \ldots$.

Так как $b_7 = b_6 q = (b_5 q)q = b_5 q^2$, то $q^2 = \frac{b_7}{b_5} = \frac{36}{4} = 9$, откуда $q = 3$ или $q = -3$.

Ответ. $q = 3$ или $q = -3$.

Пример 3. Дан равносторонний треугольник со стороной 8 см. Середины его сторон являются вершинами второго треугольника, а середины сторон второго являются вершинами третьего и т. д. (рис. 75). Найти площадь пятого треугольника, построенного по тому же принципу.

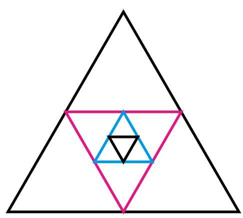


Рис. 75

Решение. Пусть S_1; S_2; S_3; ... – площади первого, второго, третьего и т. д. треугольников. Найдем S_1:

$$S_1 = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Поскольку стороны каждого следующего треугольника являются средними линиями предыдущего, то длина стороны каждого следующего треугольника будет вдвое меньше длины стороны предыдущего. Тогда сторона второго треугольника равна 4 см, а его площадь $S_2 = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ (см^2). Сторона третьего треугольника равна 2 см, тогда $S_3 = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ (см^2). Очевидно, что S_3 в 4 раза меньше, чем S_2, а S_2 в 4 раза меньше, чем S_1, то есть приходим к выводу, что площадь каждого следующего треугольника в 4 раза меньше площади предыдущего, и поэтому найденные числовые значения площадей S_1; S_2; S_3; ... являются последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{4}$, первый член которой равен $16\sqrt{3}$. Тогда числовое значение площади пятого треугольника является соответственно пятым членом этой прогрессии. Значит,

$$S_5 = S_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-1} = 16\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{\sqrt{3}}{16} \text{ (см}^2\text{)}.$$

О т в е т. $\frac{\sqrt{3}}{16}$ см^2.

Докажем некоторые важные *свойства геометрической прогрессии*.

1. Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух соседних с ним членов, то есть

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ где } n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии. Тогда:

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1q^{(n-1)-1} \cdot b_1q^{(n+1)-1} = b_1^2q^{n-2+n} = b_1^2q^{2n-2} =$$
$$= (b_1q^{n-1})^2 = b_n^2.$$

Если все члены геометрической прогрессии являются положительными числами, то $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, то есть каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим двух соседних с ним членов.

По одной из версий именно с этим свойством геометрической прогрессии и связано ее название.

2. Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух равноудаленных от него членов, то есть

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \text{ где } n \in N,\ k \in N,\ k < n.$$

Свойство доказывается аналогично предыдущему свойству.

3. Если k, l, p и s – натуральные числа и $k + l = p + s$, то $b_k \cdot b_l = b_p \cdot b_s$.

Доказательство. Воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии:

$b_k \cdot b_l = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 q^{l-1} = b_1^2 q^{(k+l)-2}$;

$b_p \cdot b_s = b_1 q^{p-1} \cdot b_1 q^{s-1} = b_1^2 q^{(p+s)-2}$.

Но $k + l = p + s$, поэтому $b_1^2 q^{(k+l)-2} = b_1^2 q^{(p+s)-2}$.

Следовательно, $b_k b_l = b_p b_s$.

А еще раньше...

В уже неоднократно здесь упоминавшемся папирусе Ахмеса содержится следующая задача, в которой необходимо найти сумму n членов геометрической прогрессии: «*У семи человек по семи кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев, из каждого колоса может вырасти по 7 мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?*».

В своей работе «Псаммит» Архимед впервые сопоставил арифметическую и геометрическую прогрессии:

1; 2; 3; 4; 5; ...

10; 10^2; 10^3; 10^4; 10^5; ...

и указал на связь между ними, например: $10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$, то есть для умножения двух членов геометрической прогрессии достаточно сложить соответствующие члены арифметической прогрессии и взять полученную сумму в качестве показателя 10.

У древних греков теория геометрических прогрессий была связана с так называемой непрерывной геометрической пропорцией:

$$a : b = b : c,$$

в которой числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{\frac{c}{a}}$. Этой связью и объясняется одна из версий названия прогрессии – *геометрическая*.

1. Какую последовательность называют геометрической прогрессией?
2. Какое число называют знаменателем геометрической прогрессии?
3. Может ли знаменатель геометрической прогрессии быть равным нулю? Единице?
4. Как найти знаменатель геометрической прогрессии?
5. Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии.
6. Сформулируйте и докажите свойства геометрической прогрессии.

1 Начальный уровень

763. Какие из последовательностей являются геометрическими прогрессиями? Назовите их первый член и знаменатель.

1) 3; 6; 12; 2) 7; 7; 7; 3) 1; 2; 3;
4) 8; –8; 8; 5) 9; 3; 1; 6) 2; 4; 6.

764. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) натуральных чисел: 1; 2; 3; 4; 5; ...;
2) натуральных степеней числа 2: 2; 4; 8; 16; 32; ...;
3) натуральных степеней числа –5: –5; 25; –125; 625; ...;
4) кубов натуральных чисел: 1; 8; 27; 64; 125; ...?

2 Средний уровень

765. Найдите четыре первых члена геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q, если:

1) $b_1 = 10$, $q = 2$; 2) $b_1 = -20$, $q = 0{,}1$;
3) $b_1 = -5$, $q = -3$; 4) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$.

766. Найдите пять первых членов геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q, если:

1) $b_1 = 125$, $q = -\frac{1}{5}$; 2) $b_1 = 0{,}5$, $q = 10$.

767. (x_n) – геометрическая прогрессия, $x_1 = \frac{1}{32}$, $q = -2$. Найдите:

1) x_2; 2) x_5; 3) x_8; 4) x_k.

768. (y_n) – геометрическая прогрессия, $y_1 = 81$, $q = -\frac{1}{3}$. Найдите:

1) y_2; 2) y_4; 3) y_7; 4) y_k.

769. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Найдите:

1) b_6, если $b_1 = 1$, $q = 2$;
2) b_5, если $b_1 = 125$, $q = -\frac{1}{5}$;
3) b_7, если $b_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$;
4) b_4, если $b_1 = \sqrt{2}$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

770. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Найдите:

1) b_5, если $b_1 = 2$, $q = -1$;
2) b_4, если $b_1 = -128$, $q = \frac{1}{2}$;
3) b_7, если $b_1 = 64$, $q = -\frac{1}{4}$;
4) b_3, если $b_1 = 3$, $q = -\sqrt{2}$.

771. Найдите шестой и n-й члены геометрической прогрессии:
1) 10 000; 1000; 100; ...;
2) 3; –6; 12; ... .

772. Найдите пятый и n-й члены геометрической прогрессии:
1) 20; 5; 1,25; ...;
2) 4; –8; 16; ... .

773. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если:
1) $b_4 = 40$, $q = 2$;
2) $b_3 = 27$, $q = -3$.

774. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если:
1) $b_3 = 100$, $q = -2$;
2) $b_4 = 64$, $q = 4$.

775. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Найдите b_7, если $b_6 = 4$, $b_8 = 9$.

776. Материальная точка за первую секунду преодолела 5 м, а за каждую следующую – втрое больше предыдущего расстояния. Сколько метров преодолела материальная точка за четвертую секунду?

777. Ломаная состоит из пяти звеньев. Первое из них равно 48 см, а каждое следующее вдвое короче предыдущего. Какова длина пятого (самого короткого) звена?

3 Достаточный уровень

778. Докажите, что последовательность (x_n), заданная формулой $x_n = 3 \cdot 4^n$, является геометрической прогрессией. Найдите ее первый член и знаменатель.

779. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), у которой:
1) $b_7 = 12$, $b_9 = 48$;
2) $b_8 = 9$, $b_{11} = 243$;
3) $b_{16} = 16$, $b_{18} = 9$;
4) $b_{30} = 1$, $b_{33} = -1$.

780. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), у которой: 1) $b_{10} = 11$, $b_{12} = 99$; 2) $b_{10} = 27$, $b_{13} = 1$.

781. Запишите геометрическую прогрессию из пяти членов, у которой третий член равен 10, а знаменатель равен -2.

782. Запишите геометрическую прогрессию из шести членов, у которой четвертый член равен 80, а знаменатель равен -4.

783. Последовательность (x_n) – геометрическая прогрессия. Найдите x_5, если $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{8}$.

784. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Найдите b_1, если $b_4 = -1$, $b_6 = -100$.

785. Последовательность (c_n) – геометрическая прогрессия. Найдите:

1) c_1, если $c_3 = 10$, $c_5 = \frac{1}{10}$; 2) c_6, если $c_1 = 2$, $c_3 = 8$.

786. Под микроскопом рассматривают 5 клеток, которые размножаются делением пополам раз в минуту. Сколько клеток образуется через одну минуту; через три минуты; через шесть минут?

4 Высокий уровень

787. Между числами 1 и 64 вставьте: 1) одно число; 2) два числа таких, чтобы они вместе с данными образовали геометрическую прогрессию.

788. Геометрическая прогрессия (b_n) состоит из пяти членов: $\frac{1}{2}$, x_2, x_3, 4, x_5. Найдите x_2, x_3, x_5.

789. При каком значении x числа $x + 3$, $2x$ и $5x - 4$ являются последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите эти числа.

790. При каком значении y числа y, $2y + 3$ и $4y + 3$ являются последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите эти числа.

791. Докажите, что если числа a, b и c являются последовательными членами геометрической прогрессии, то имеет место равенство: $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

792. Для некоторых чисел x, y, z, ни одно из которых не равно нулю, имеет место равенство:

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = (xy + yz)^2.$$

Докажите, что x, y, z – последовательные члены геометрической прогрессии.

793. Дан квадрат со стороной 16 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата, а середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего и т. д. Найдите площадь шестого квадрата, построенного этим способом.

Упражнения для повторения

2 **794.** Вычислите: 1) 2^7; 2) 4^6; 3) $3^5 - 1$; 4) $(3 - 1)^5$.

3 **795.** Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_2 + a_4 = 14$; $a_6 + a_9 = 32$; 2) $a_2 + a_6 = 4$; $a_4 a_3 = 6$.

796. Докажите, что от значения переменной значение выражения $\frac{a + 3}{2a + 2} - \frac{a + 1}{2a - 2} + \frac{2}{a^2 - 1}$ не зависит.

4 **797.** Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $5x^2 + 7x - 9 = 0$. Не решая уравнения, найдите $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1$.

798. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$.

Математика вокруг нас

799. После дождя уровень воды в колодце может подняться. Олег засекает время t падения в колодец небольших камешков и вычисляет расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h – расстояние до воды в метрах, t – время падения в секундах. В один из дней время падения камешков составило 0,9 с, а после нескольких дождливых дней – 0,8 с. На сколько метров поднялся уровень воды в колодце за эти дни?

Интересные задачки для неленивых

800. О последовательности (a_n) известно, что $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n$. Найдите формулу n-го члена этой последовательности.

§ 19. ФОРМУЛА СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Бухгалтерам и работникам банков часто приходится решать задачи на проценты. Рассмотрим задачу о начислении *процентного дохода*. С экономической точки зрения процентный доход можно считать вознаграждением, которое платит лицо или учреждение (заемщик) за пользование в течение определенного времени определенной суммой средств, полученных от другого лица или учреждения (кредитора). Размер этого вознаграждения зависит от суммы средств и срока пользования ими.

Задача 1. Вкладчик открыл в банке депозит в размере 10 000 грн под 11 % годовых (то есть банк обязан выплатить процентный доход в размере 11 % в год от начальной суммы вклада). Какой процентный доход получит вкладчик через год?

Решение. 11 % = 0,11, поэтому вкладчик получит $0{,}11 \cdot 10\,000 = 1100$ (грн) процентного дохода.

Ответ. 1100 грн.

Если вкладчик решил держать средства в банке более года, не добавляя новых средств и не забирая вложенных, то определить сумму средств на счету вкладчика через несколько лет можно с помощью *формулы сложных процентов*.

Пусть вкладчик положил в банк A_0 грн под p % годовых, A_0 еще называют *начальным капиталом*. Через год банк начислит вкладчику $\frac{A_0 p}{100}$ грн процентного дохода. Поэтому на счету вкладчика через год будет $A_0 + \frac{A_0 p}{100} = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ грн – *наращенный капитал*. Обозначим $A_1 = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. За второй год вкладчику будет начислено $\frac{A_1 p}{100}$ грн процентного дохода (ведь теперь банк начисляет p % годовых от числа A_1), и его вклад будет равен:

$$A_1 + \frac{A_1 p}{100} = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) =$$

$$= A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Рассуждая аналогично и применяя формулу n-го члена геометрической прогрессии (b_n), где $b_1 = A_0$ и $q = 1 + \frac{p}{100}$, придем к выводу, что через n лет наращенный капитал будет равен:

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ грн.}$$

Таким образом,

начальный капитал A_0, вложенный в банк под p % годовых, через n лет станет наращенным капиталом A_n, размер которого определяется по формуле:

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

которую называют *формулой сложных процентов*.

Задача 2. Вкладчик открыл в банке депозит на 5000 грн под 12 % годовых. Сколько средств будет на счету вкладчика через 3 года? Какой процентный доход получит вкладчик через 3 года?

Решение. $A_0 = 5000$, $p = 12$ %, $n = 3$. Тогда:

$$A_3 = 5000\left(1 + \frac{12}{100}\right)^3 = 7024{,}64 \text{ (грн).}$$

Процентный доход можно найти как разность $A_3 - A_0$.

Таким образом, $A_3 - A_0 = 7024{,}64 - 5000 = 2024{,}64$ (грн).

Ответ. 7024,64 грн, 2024,64 грн.

По формуле сложных процентов можно решать и другие задачи, не связанные с наращиванием капитала.

Задача 3. Население города составляет 30 000 жителей. Каждый год количество населения уменьшается на 0,2 %. Сколько жителей будет в этом городе через 10 лет?

Решение. Так как население города ежегодно уменьшается на один и тот же процент, и это процент от количества населения каждого предыдущего года, а не от начального количества жителей, то можно воспользоваться формулой сложных процентов.

Имеем, $A_0 = 30\,000$, $p = -0{,}2$ (так как население уменьшается, то $p < 0$), $n = 10$. Тогда:

$$A_{10} = 30\ 000\left(1 - \frac{0{,}2}{100}\right)^{10} \approx 29\ 405 \text{ (жит.).}$$

Ответ. 29 405 жителей.

1. Что такое процентный доход?
2. Запишите формулу сложных процентов.

3 Достаточный уровень

801. Вкладчик внес на депозитный счет 10 000 грн под 11 % годовых.

1) Сколько средств будет на счету вкладчика через 3 года? Через 5 лет?

2) Какой процентный доход получит вкладчик через 3 года? Через 5 лет?

802. Вкладчик открыл в банке депозитный счет на 20 000 грн под 12 % годовых.

1) Сколько средств будет на его счету через 2 года? Через 4 года?

2) Какой процентный доход получит вкладчик через 2 года? Через 4 года?

803. Вкладчик открыл депозит на 8000 грн под 9 % годовых. Составьте формулу для вычисления процентного дохода вкладчика через n лет. Вычислите по этой формуле процентный доход для случаев $n = 2$, $n = 3$.

804. Какую минимальную сумму средств нужно внести на депозит под 12 % годовых, чтобы через 2 года иметь на счету более 10 000 грн? Ответ округлите до целого числа гривень.

4 Высокий уровень

805. Какую сумму нужно внести на депозит под 10 % годовых, чтобы получить через 2 года прибыль в размере 1218 грн?

806. Какую сумму нужно внести на депозит под 5 % годовых, чтобы получить через 2 года прибыль в размере 820 грн?

807. Товар стоит 2000 грн. Ежемесячно цена товара снижается на 3 %. Какой будет цена товара через:

1) 3 месяца; 2) полгода?

Ответ округлите до сотых гривни.

808. Население города составляет 50 000 человек и ежегодно уменьшается на 1 %. Каким будет население города через: 1) 5 лет; 2) 10 лет?

809. Какой процент годовых должен насчитывать банк, чтобы через три года начальный размер вклада увеличился в $1\frac{91}{125}$ раза?

§ 20. СУММА n ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Рассмотрим n первых членов геометрической прогрессии (b_n): $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n$.

Обозначим через S_n их сумму:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n.$$

Найдем формулу для вычисления этой суммы. Имеем (учитывая формулу n-го члена геометрической прогрессии):

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Вычтем почленно из этого равенства предыдущее:

$$S_nq - S_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n) -$$
$$- (b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}) = b_1q^n - b_1 = b_1(q^n - 1).$$

Таким образом, $S_nq - S_n = b_1(q^n - 1)$ и $S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1)$.

Если $q \neq 1$, получаем *формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии*:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}}. \qquad \textbf{(1)}$$

Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену и тогда $S_n = nb_1$.

Заметим, что полученную формулу (1) можно записать и так:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Так как $b_n = b_1q^{n-1}$, то формулу (1) можно записать и по-другому. Действительно,

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1q^{n-1}q - b_1}{q - 1} = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}.$$

Таким образом,

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}. \qquad (2)$$

Получили еще одну формулу для вычисления суммы n первых членов геометрической прогрессии, которой удобно пользоваться, если известны первый и n-й члены прогрессии и ее знаменатель.

Применим эти формулы для решения упражнений.

Пример 1. Найти сумму первых семи членов геометрической прогрессии $2; -6; 18; \ldots$.

Решение. *1-й способ*. По условию:

$$b_1 = 2,\ b_2 = -6,\ q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Тогда по формуле (1):

$$S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{2((-3)^7 - 1)}{-3 - 1} = \frac{2 \cdot (-2188)}{-4} = 1094.$$

2-й способ. Известно, что $b_1 = 2$, $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{2} = -3$, тогда

$$b_7 = b_1 q^6 = 2 \cdot (-3)^6 = 1458.$$

По формуле (2):

$$S_7 = \frac{b_7 q - b_1}{q - 1} = \frac{1458 \cdot (-3) - 2}{-3 - 1} = 1094.$$

Ответ. 1094.

Пример 2. Найти сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = 8$, $b_4 = 32$.

Решение. $b_4 = b_1 q^3 = (b_1 q)q^2 = b_2 q^2$, тогда $q^2 = \frac{b_4}{b_2} = \frac{32}{8} = 4$, следовательно, $q = 2$ или $q = -2$.

Таким образом, существуют две прогрессии, удовлетворяющие условию задачи:

1) если $q = 2$, то $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{8}{2} = 4$; $S_6 = \frac{4(2^6 - 1)}{2 - 1} = 252$;

2) если $q = -2$, то

$$b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{8}{-2} = -4;\ S_6 = \frac{4((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = -84.$$

Ответ. 252 или -84.

Пример 3. Сократить дробь

$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{x^6 - 1}.$$

Р е ш е н и е. Слагаемые в числителе дроби являются последовательными членами геометрической прогрессии $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$, первый член которой равен 1, а знаменатель равен x. Из условия следует, что $x \neq 1$.

Найдем сумму всех шести членов этой прогрессии по формуле (1) и сократим данную в условии дробь:

$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{x^6 - 1} = \frac{\frac{1 \cdot (x^6 - 1)}{x - 1}}{x^6 - 1} = \frac{1}{x - 1}.$$

О т в е т. $\frac{1}{x - 1}$.

А еще раньше...

Древняя индийская задача-легенда гласит, что изобретатель шахматной игры Сета в награду за свою остроумную выдумку попросил у индийского царя Шерама столько зерен пшеницы, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую – два, на третью – четыре, на четвертую – восемь и т. д., пока не заполнятся все клетки.

Царь удивился, что изобретатель пожелал столь мало, и приказал придворным математикам подсчитать необходимое количество зерен. Каково же было изумление царя, когда он узнал, что не сможет выдать обещанную награду, так как необходимое число зерен равно

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Чтобы получить столько зерен, потребовалось бы собрать урожай с площади, в 2000 раз превышающей всю поверхность Земли. А для хранения такого урожая понадобился бы амбар, который при высоте 4 м и ширине 10 м тянулся бы на 300 000 000 км, то есть вдвое дальше, чем от Земли до Солнца.

Запишите формулы, по которым вычисляют сумму n первых членов геометрической прогрессии.

1 Начальный уровень

810. Найдите S_5 – сумму пяти первых членов геометрической прогрессии (b_n), у которой $b_1 = 1$, $q = 2$.

811. Найдите S_4 – сумму четырех первых членов геометрической прогрессии (b_n), у которой $b_1 = 1$, $q = 3$.

2 Средний уровень

812. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$; 2) $b_1 = -17$, $q = -2$;

3) $b_1 = 32$, $q = -\frac{1}{2}$; 4) $b_1 = 5\sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}$.

813. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = 32$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_1 = 5$, $q = -2$;

3) $b_1 = 27$, $q = -\frac{1}{3}$; 4) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$.

814. Найдите сумму четырех первых членов геометрической прогрессии:

1) $16; -8; 4; \ldots;$ 2) $1{,}5; 3; 6; \ldots;$

3) $4; 4^2; 4^3; \ldots;$ 4) $\sqrt{3}; 3; 3\sqrt{3}; \ldots$.

815. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии:

1) $1{,}5; 6; 24; \ldots;$ 2) $-4; 2; -1; \ldots;$

3) $2; 2^2; 2^3; \ldots;$ 4) $2; \sqrt{2}; 1; \ldots$.

816. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Найдите:

1) S_7, если $b_1 = 2$, $q = -3$; 2) S_8, если $b_1 = -1$, $q = 4$.

817. Используя формулу (2) этого параграфа, вычислите сумму чисел, являющихся последовательными членами геометрической прогрессии:

1) $1 + 3 + 9 + \ldots + 729$; 2) $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \ldots + 2$.

818. Используя формулу (2) этого параграфа, вычислите сумму чисел, являющихся последовательными членами геометрической прогрессии:

1) $2 + 4 + 8 + \ldots + 128$; 2) $\frac{1}{5} + 1 + 5 + \ldots + 625$.

819. На пяти участках высадили смородину. На первом участке 16 кустов, а на каждом следующем в 1,5 раза больше, чем на предыдущем. Сколько всего кустов смородины высадили на пяти участках?

820. Одна из сторон четырехугольника равна 12,5 см, а каждая следующая – в 1,2 раза длиннее предыдущей. Найдите периметр четырехугольника.

3 Достаточный уровень

821. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии (b_n), у которой:
1) $b_2 = 6$, $q = 2$; 2) $b_3 = 8$, $q = -4$.

822. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии (b_n), у которой: 1) $b_2 = 8$, $q = 4$; 2) $b_3 = 27$, $q = -3$.

823. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Найдите:

1) S_8, если $b_3 = \frac{1}{4}$, $b_4 = \frac{1}{8}$;
2) S_5, если $b_1 = 5$, $b_3 = 45$, $q > 0$;
3) S_4, если $b_2 = 8$, $b_4 = 2$, $q < 0$;
4) S_7, если $b_1 = 5$, $b_4 = 40$.

824. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Найдите:

1) S_7, если $b_2 = \frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$;
2) S_8, если $b_1 = 9$, $b_3 = 36$, $q > 0$;
3) S_4, если $b_2 = 25$, $b_4 = 1$, $q < 0$;
4) S_6, если $b_1 = 1$, $b_4 = 27$.

825. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), у которой: 1) $q = 2$, $S_6 = 315$; 2) $q = -\frac{2}{3}$, $S_4 = 13$.

826. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), у которой: 1) $q = -2$, $S_6 = -63$; 2) $q = \frac{1}{3}$, $S_5 = 121$.

827. Сократите дробь:

1) $\frac{1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8}{x^{10} - 1}$; 2) $\frac{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5}{x^6 - 1}$.

4 Высокий уровень

828. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_2 = 125$, $b_4 = 5$. Найдите S_5.

829. Последовательность (c_n) – геометрическая прогрессия, $c_3 = 27$, $c_5 = 3$. Найдите S_6.

830. (*Из книги Я. Г. Перельмана «Живая математика», 1967 г.*). Один незнакомец предложил богачу-миллионеру уговор: незнакомец будет целый месяц приносить богачу ежедневно по сотне тысяч рублей, не даром, разумеется, но плата пустяшная. В первый день богач должен будет по уговору заплатить всего только одну копейку. За вторую сотню тысяч – 2 копейки, за третью сотню тысяч – 4 копейки, за четвертую – 8, за пятую – 16. И так ровно 30 дней, каждый день вдвое больше против предыдущего. Богач согласился. Кто из них при таком уговоре останется в выигрыше? Учтите, что 1 рубль = 100 копеек.

831. Последовательность (c_n) – геометрическая прогрессия, $c_5 - c_3 = 144$, $c_4 - c_2 = 48$. Найдите S_6.

832. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_6 - b_4 = 48$, $b_3 - b_5 = 24$. Найдите S_5.

833. Найдите, сколько членов геометрической прогрессии (b_n) просуммировали, если:

1) $b_1 = 15$, $q = 2$, $S_n = 945$;
2) $b_1 = 2$, $b_n = 128$, $S_n = 254$;
3) $q = 3$, $b_n = 486$, $S_n = 726$.

Упражнения для повторения

2 **834.** Решите неравенство:

1) $5(x - 2) \leqslant x + 26$; 2) $2x^2 - 3x - 5 > 0$.

3 **835.** Найдите сумму всех отрицательных членов прогрессии

$$-4{,}8;\ -4{,}4;\ -4;\ \ldots\ .$$

836. Вычислите: $\left(\dfrac{\sqrt{7}+3}{\sqrt{7}-3} - \dfrac{\sqrt{7}-3}{\sqrt{7}+3}\right)^2$.

837. Вкладчик положил в банк на два разных счета средства на общую сумму 60 000 грн. По первому из них банк начисляет 10 % годовых, а по второму – 7 %. Через год вкладчик получил 4800 грн прибыли. Сколько средств он положил на каждый из счетов?

838. Докажите, что значение выражения

$$\frac{a-20}{(a-5)^2} : \left(\frac{a}{a^2-25} - \frac{a-8}{a^2-10a+25}\right)$$

при $a < -5$ является положительным.

839. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y}{2x} - \frac{x}{y} = \frac{1}{2}; \\ y^2 - 5xy + 2x^2 = 32. \end{cases}$$

Математика вокруг нас

840. В трех салонах мобильной связи один и тот же смартфон продают в кредит на разных условиях. Условия кредитования представлены в таблице.

Салон	Цена смартфона, грн	Начальный взнос (в % от цены)	Срок кредита (месяцев)	Ежемесячный платеж, грн
Альфа	2500	15	12	200
Бета	2620	10	6	425
Гамма	2375	20	12	190

Определите, в каком из салонов приобрести смартфон в кредит выгоднее всего, и посчитайте окончательную сумму, в которую обойдется покупка.

Интересные задачки для неленивых

841. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. Через 2 ч в том же направлении выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с мотоциклистом. Если бы мотоциклист и легковой автомобиль одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они встретились бы через 1 ч 20 мин. За какое время каждый из них преодолевает путь от A до B?

Домашняя самостоятельная работа № 4

Каждое задание имеет четыре варианта ответа (А–Г), среди которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. Последовательность задана формулой $x_n = 3n - 7$. Найдите x_7.

А. 7; **Б.** 14; **В.** −7; **Г.** 28.

2. Укажите последовательность, являющуюся арифметической прогрессией:

А. 2; 4; 6; **Б.** 2; 4; 5; **В.** 0; 1; 8; **Г.** 1; 3; 9.

3. Укажите последовательность, являющуюся геометрической прогрессией:

А. 0; 1; 8; **Б.** 4; 5; 6; **В.** 1; 2; 4; **Г.** −2; −3; −4.

4. Тело за первую секунду преодолело 15 м, а за каждую следующую – на 2 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние преодолело тело за седьмую секунду?

А. 30 м; **Б.** 24 м; **В.** 3 м; **Г.** 27 м.

5. Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 7$, $a_2 = 4$.

А. −130; **Б.** −65; **В.** −100; **Г.** 65.

6. Найдите пятый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 3$, $q = -2$.

А. 24; **Б.** −96; **В.** −48; **Г.** 48.

7. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 14{,}5$, $d = -2{,}5$. Укажите число, являющееся членом этой прогрессии.

А. −21; **Б.** −22; **В.** −23; **Г.** −24.

8. Найдите сумму натуральных чисел, кратных числу 8 и не превышающих 400.

А. 20 400; **Б.** 10 600; **В.** 10 200; **Г.** 9800.

9. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Найдите S_6, если $b_2 = 2$, $b_4 = 8$ и $q < 0$.

А. −21; **Б.** 21; **В.** 63; **Г.** −63.

10. Найдите наименьший член последовательности $x_n = n^2 - 6n - 8$.

А. -16; **Б.** -17;
В. -18; **Г.** его не существует.

11. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Найдите $a_4 + a_{18}$, если $a_{11} = -8$.

А. найти невозможно; **Б.** -4; **В.** -16; **Г.** 16.

12. При каких значениях x числа $x - 2$, $x + 1$ и $5x + 1$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

А. 3; **Б.** -3; **В.** 0,25, -3; **Г.** $-0,25$, 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 15–20

1. Последовательность задана формулой $x_n = 4n + 5$. Найдите:

1) x_{10}; 2) x_{25}.

2. Какие из последовательностей являются арифметическими прогрессиями:

1) 3; 1; 2; 2) 4; 2; 0; 3) 1; 3; 9; 4) 1; 11; 21?

3. Какие из последовательностей являются геометрическими прогрессиями:

1) 7; -14; 28; 2) 5; 6; 7; 3) 4; 2; 1; 4) 3; 1; 0?

4. Ученик прочел книгу за 5 дней. В первый день он прочитал 36 страниц, а в каждый следующий день читал на 4 страницы меньше, чем в предыдущий. Сколько страниц прочитал ученик за последний день?

5. Найдите седьмой член и сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 5$, $a_2 = 8$.

6. Найдите шестой член и сумму восьми первых членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -1$, $q = 2$.

7. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия, $a_1 = 18,5$, $d = -1,5$. Является ли членом этой прогрессии число:

1) 2,5; 2) 5?

8. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных числу 6 и не превышающих 540.

9. При каких значениях x числа $x - 1$, $x + 2$ и $5x + 6$ являются последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите эти числа.

Дополнительные задания

10. Найдите наибольший член последовательности $y_n = -n^2 + 4n - 5$.

11. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Найдите a_{15}, если $a_8 + a_{22} = 7$.

Упражнения для повторения главы 3

К § 15

842. Последовательность задана формулой $a_n = 7n - 19$. Найдите:

1) a_1; 2) a_5; 3) a_{100}; 4) a_{1000}.

843. Запишите пять первых членов последовательности натуральных двузначных чисел, которые:

1) при делении на 7 дают в остатке 1;
2) при делении на 6 дают в остатке 5.

844. Найдите количество положительных членов последовательности $a_n = 15 - 2n$.

845. Найдите первый отрицательный член последовательности $x_n = 7 - \frac{1}{3}n$.

846. Найдите наименьший член последовательности $b_n = 4n - 5$.

847. Подберите одну из возможных формул n-го члена последовательности:

1) 1; 3; 5; 7; 9; ...; 2) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; ...;

3) 1; 4; 9; 16; 25; ...; 4) 2; 4; 8; 16; 32; ...;

5) −1; 1; −1; 1; −1; ...; 6) 1; 3; 1; 3; 1; ... .

848. Последовательность задана формулой $a_n = n^2 - 4n - 7$. Сколько членов, не превышающих числа −2, содержит эта последовательность?

К § 16

849. Является ли арифметической прогрессией последовательность натуральных чисел, кратных числу 5?

850. Найдите разность и шестой член арифметической прогрессии 2,7; 2,4; 2,1; … .

851. Последовательность (x_n) – арифметическая прогрессия. Найдите:

1) x_1, если $x_{12} = -8$, $d = -3$;

2) d, если $x_1 = 0$, $x_9 = -28$.

852. Задайте формулой n-го члена арифметическую прогрессию:

1) $-5; -2; 1; \ldots;$ 2) $7; 7\frac{1}{4}; 7\frac{1}{2}; \ldots$.

853. Ломаная состоит из восьми звеньев. Длина первого звена равна 12 см, а каждое следующее звено на 0,5 см короче предыдущего. Найдите длину третьего звена; восьмого звена.

854. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Докажите, что:

1) $a_{10} = a_3 + 7d$; 2) $a_7 + a_3 = a_1 + a_9$.

855. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Найдите:

1) a_{10}, если $a_1 = 8$, $a_5 = 2$;

2) a_{100}, если $a_{40} = -20$, $d = -3$.

856. Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия 8; 7,7; 7,4; …?

857. Найдите наибольший отрицательный член арифметической прогрессии (a_n), у которой $a_1 = -8{,}9$, $d = 0{,}2$.

858. Периметр треугольника равен 39 см, причем длины его сторон образуют арифметическую прогрессию. Можно ли найти длину хотя бы одной из них?

859. Углы некоторого треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что один из них равен 60°.

860. Первый член арифметической прогрессии равен 7. Найдите второй и третий ее члены, если они являются квадратами двух последовательных натуральных чисел.

861. Докажите, что если a, b и c – три последовательных члена арифметической прогрессии, то:

1) $c^2 = (a + 2b)^2 - 8ab$; 2) $\left(\frac{a - c}{2}\right)^2 = b^2 - ac$.

К § 17

862. Найдите S_{100} – сумму ста первых членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 2$, $a_{100} = 198$.

863. Найдите сумму пятидесяти первых членов арифметической прогрессии (a_n), у которой $a_1 = 5$, $a_2 = 7{,}5$.

864. Найдите сумму всех целых отрицательных чисел, начиная с числа -20 и заканчивая числом -1.

865. Длины сторон шестиугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите периметр шестиугольника, если самая короткая его сторона равна 10 см, а самая длинная – 20 см.

866. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии (y_n) с разностью d, если:

1) $y_{30} = 15$, $d = 2$; 2) $y_7 = 5$, $d = -3$.

867. Разность арифметической прогрессии (a_n) равна d. Найдите:

1) d, если $a_1 = 4$; $S_{10} = 175$; 2) a_1, если $d = 5$; $S_8 = 196$.

868. Анна взяла в библиотеке роман объемом 324 страницы. В первый день она прочитала 20 страниц, а в каждый следующий день читала на 4 страницы больше, чем в предыдущий. За сколько дней Анна прочла роман?

869. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если сумма первых десяти ее членов равна 170, а сумма первых двадцати ее членов равна 540.

870. В арифметической прогрессии (a_n):

1) $a_3 + a_7 = 18$. Найдите S_9; 2) $a_{11} = 5$. Найдите S_{21}.

871. Найдите сумму всех натуральных чисел, которые меньше числа 100 и не кратны числу 4.

872. Упростите выражение:

1) $\frac{p \cdot p^2 \cdot \ldots \cdot p^n}{p \cdot p^3 \cdot \ldots \cdot p^{2n-1}}$; 2) $\frac{c^2 \cdot c^4 \cdot c^6 \cdot \ldots \cdot c^{2n}}{c \cdot c^2 \cdot c^3 \cdot \ldots \cdot c^n}$.

К § 18

873. Является ли геометрической прогрессией последовательность натуральных степеней числа a ($a \neq 0$):

$$a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots?$$

874. Известно два первых члена геометрической прогрессии: 0,5 и 1,5. Найдите ее следующих четыре члена.

875. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_3 = 8$, $b_4 = 32$;
2) $b_4 = 2$, $b_6 = 18$ и $q > 0$.

876. Длины трех отрезков образуют геометрическую прогрессию. Найдите средний по величине отрезок, если меньший из отрезков равен 1 см, а больший – 9 см.

877. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, у которой третий и четвертый члены соответственно равны 8 и -16.

878. Среди членов геометрической прогрессии (b_n) есть как положительные, так и отрицательные члены, $b_2 = 8$, $b_4 = 72$. Найдите b_1.

879. Все члены геометрической прогрессии (c_n) положительны, причем $c_4 = 125$, $c_6 = 5$. Найдите c_8 и c_9.

880. Между числами 27 и 12 вставьте такое отрицательное число, чтобы вместе с данными оно образовало геометрическую прогрессию.

881. Число 768 является членом геометрической прогрессии 3; 6; 12; ... . Найдите его номер.

882. При каком значении x числа $x - 1$, $3 - 3x$ и $4x + 1$ являются последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите эти числа.

883. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 + b_3 = 6$, $b_2 + b_4 = 12$;
2) $b_4 - b_2 = 18$, $b_5 - b_3 = 36$.

884. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию? Если да, укажите знаменатель такой прогрессии.

К § 20

885. Найдите сумму трех первых членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 8$, $q = -2$.

886. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Найдите:

1) S_4, если $b_1 = -2$, $q = 10$;
2) S_5, если $b_1 = -60$, $q = 2$;
3) S_6, если $b_1 = 0{,}1$, $q = -3$;
4) S_7, если $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$.

887. Используя формулу суммы геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1}$, представьте в виде дроби выражение:

1) $1 + p + p^2 + \ldots + p^8$, где $p \neq 1$;
2) $c^8 + c^7 + \ldots + c^3$, где $c \neq 1$.

888. На плоскости построены пять квадратов. Сторона первого равна 3 см, а сторона каждого следующего вдвое больше стороны предыдущего. Найдите сумму площадей этих квадратов.

889. Докажите, что последовательность (x_n), заданная формулой $x_n = 0{,}2 \cdot 5^{n-1}$, является геометрической прогрессией. Найдите сумму шести первых ее членов.

890. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а пятый равен 81, если известно, что ее члены с четными номерами – отрицательны.

891. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, у которой $b_5 + b_4 = 72$, $b_4 - b_2 = 18$. Найдите S_8.

892. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 84. Найдите сумму восьми первых членов этой прогрессии.

893. Найдите первый член, знаменатель и количество просуммированных членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_5 - b_1 = 45$, $b_3 + b_1 = 15$, $S_n = -63$.

894. Найдите геометрическую прогрессию, которая состоит из шести членов, если сумма ее членов с нечетными номерами равна 273, а сумма членов с четными номерами – 1092.

895. (*Задача о распространении слухов из книги Я.И. Перельмана «Живая математика», 1967 г.*). В провинциальный город с 50-тысячным населением в 8 ч утра приехал житель столицы и привез свежую, всем интересную новость. В гостинице, где приезжий остановился, он сообщил новость только трем местным жителям; это заняло, скажем, четверть часа. Итак, в 8 ч 15 мин утра новость была известна в городе всего только четверым: приезжему и 3 местным жителям. Узнав интересную новость, каждый из трех граждан поспешил рассказать ее 3 другим. Это потребовало, допустим, также четверти часа. Каждый из 9 вновь узнавших поделился в ближайшие четверть часа с 3 другими гражданами. И так далее. В котором часу (приблизительно) новость станет известна всем жителям города?

Глава 4

Основы комбинаторики, теории вероятностей и статистики

В этой главе вы:

- **познакомитесь** с комбинаторными правилами сложения и умножения; понятиями вероятного, достоверного, невозможного событий;
- **научитесь** вычислять относительную частоту и вероятность случайного события; представлять статистические данные в виде таблиц, диаграмм, графиков.

§ 21. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ. КОМБИНАТОРНЫЕ ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Комбинаторика – раздел математики, занимающийся вопросом выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными условиями.

Рассмотрим примеры задач комбинаторики.

Пример 1. Сколькими способами легкоатлет, собираясь на тренировку, может выбрать себе пару спортивной обуви, имея 5 пар кроссовок и 2 пары кед?

Очевидно, что выбрать одну из имеющихся пар обуви, кроссовки *или* кеды, можно $5 + 2 = 7$ способами.

Обобщая, приходим к *комбинаторному правилу сложения*:

если некоторый элемент A можно выбрать k_1 способами, а элемент B (независимо от выбора элемента A) – k_2 способами, то выбрать A *или* B можна $k_1 + k_2$ способами.

Это правило справедливо также для трех и более элементов.

Пример 2. В меню школьной столовой предлагается на выбор 4 вида пирожков и 3 вида сока. Сколько разных вариантов выбора завтрака, состоящего из одного пирожка и одного стакана сока, имеется у учащегося этой школы?

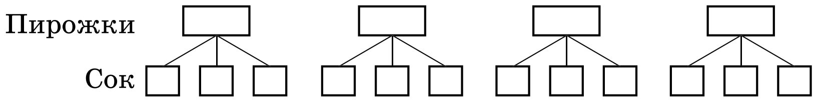


Рис. 76

Пирожок можно выбрать 4 способами *и* к каждому пирожку выбрать сок 3 способами (рис. 76). Следовательно, учащийся имеет $4 \cdot 3 = 12$ вариантов выбора завтрака.

Обобщая, приходим к *комбинаторному правилу умножения*:

если некоторый элемент *A* можно выбрать k_1 способами *и* после каждого такого выбора (независимо от выбора элемента *A*) другой элемент *B* можно выбрать k_2 способами, то пару объектов *A и B* можно выбрать $k_1 \cdot k_2$ способами.

Это правило справедливо также для трех и более элементов.

Пример 3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если в числе: 1) цифры не повторяются; 2) цифры могут повторяться?

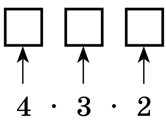


Рис. 77

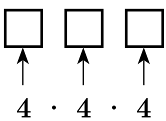


Рис. 78

Р е ш е н и е. 1) Первую цифру можем выбрать 4 способами (рис.77). Так как после выбора первой цифры их останется три (ведь цифры в нашем случае повторяться не могут), то вторую цифру можем выбрать 3 способами. И наконец, третью цифру можем выбрать из оставшихся двух – то есть 2 способами. Следовательно, количество искомых трехзначных чисел будет равно $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

2) Применим комбинаторное правило умножения. Так как цифры в числе могут повторяться, то каждую из цифр искомого числа можно выбрать 4 способами (рис. 78), и тогда таких чисел будет $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

О т в е т. 1) 24 числа; 2) 64 числа.

Отметим, что решить подобные задачи без применения комбинаторного правила умножения можно только путем перебора всех возможных вариантов чисел, удовлетворяющих условию задачи. Но такой способ решения является слишком долгим и громоздким.

Пример 4. Сколько четных пятизначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7, 8, 9, если цифры в числе не повторяются?

Р е ш е н и е. Четное пятизначное число можно получить, если последней его цифрой будет 6 или 8. Чисел, у которых последней является цифра 6, будет $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (рис. 79),

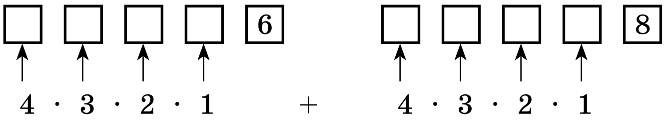


Рис. 79

а тех, у которых последней является цифра 8, – также 24. По комбинаторному правилу сложения всего четных чисел будет $24 + 24 = 48$.

О т в е т. 48.

Пример 5. Азбука племени АБАБ содержит всего две буквы – «а» и «б». Сколько слов в языке этого племени состоит: 1) из двух букв; 2) из трех букв?

Р е ш е н и е. 1) аа, ба, аб, бб (всего четыре слова); 2) ааа, ааб, аба, абб, ббб, бба, баб, баа (всего восемь слов).

Заметим, что найденное количество слов соответствует комбинаторному правилу умножения. Так как на каждое место есть два «претендента» – «а» и «б», то слов, состоящих из двух букв, будет $2 \cdot 2 = 4$, а из трех букв – $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Пример 6. В футбольной команде из 11 игроков надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Р е ш е н и е. Капитаном можно выбрать любого из 11 игроков, а его заместителем – любого из 10 оставшихся игроков. Таким образом (по правилу умножения), имеем $11 \cdot 10 = 110$ разных способов.

Пример 7. В Стране Чудес 10 городов и каждые два из них соединяет авиалиния. Сколько авиалиний в этой стране?

Р е ш е н и е. Так как каждая авиалиния соединяет два города, то одним из них может быть любой из 10 городов, а другим – любой из 9 оставшихся. Следовательно, количество авиалиний равно $10 \cdot 9 = 90$. Но при этом каждую из авиалиний мы учли дважды. Поэтому всего их будет $90 : 2 = 45$.

Комбинаторные задачи неразрывно связаны с задачами теории вероятностей, еще одного раздела математики, который мы рассмотрим в следующих параграфах учебника.

А еще раньше...

В китайских рукописях, относящихся к XIII–XII в. до н. э. встречаются упоминания о вопросах, близких к комбинаторным. Некоторые комбинаторные задачи решали и в Древней Греции. В частности, Аристоксен из Тарента (IV в. до н. э.), ученик Аристотеля, перечислил различные комбинации длинных и коротких слогов в стихотворных размерах. А Папп Александрийский в IV в. н. э. рассматривал число пар и троек, которые можно получить из трех элементов, допуская их повторения. Некоторые элементы комбинаторики были известны и в Индии во II в. до н. э. Индийцы умели вычислять числа, известные нам как коэффициенты формулы бинома Ньютона. Позднее, в VIII в. н. э., арабы нашли и саму эту формулу, и ее коэффициенты, которые сейчас вычисляют с помощью комбинаторных формул или «треугольника Паскаля».

Свой нынешний вид упомянутые комбинаторные формулы приобрели благодаря средневековому ученому Леви бен Гершону (XIV в.) и французскому математику П. Эригону (XVII в.).

В III в. н. э. сирийский философ Порфирий для классификации понятий составил специальную схему, получившую название «древо Порфирия». Сейчас подобные деревья используются для решения определенных задач комбинаторики в разнообразных областях знаний. Некоторые ранее неизвестные комбинаторные задачи рассмотрел Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в своей знаменитой «Книге абака» (1202 г.), в частности, о нахождении наименьшего набора различных гирь, позволяющего взвесить груз с любой целочисленной массой, не превышающей заданного числа. Со времен греческих математиков были известны две последовательности, каждый член которых получали по определенному правилу из предыдущих, – арифметическая и геометрическая прогрессии. А Фибоначчи впервые в одной из задач выразил член последовательности через два предыдущих, используя формулу, которую назвали рекуррентной. В дальнейшем метод рекуррентных формул стал одним из мощнейших для решения комбинаторных задач.

Как ни странно, развитию комбинаторики в значительной степени способствовали азартные игры, которые были очень популярны в XVI в. В частности, вопросами определения разнообразных комбинаций в игре в кости в то время занимались такие известные итальянские математики, как Д. Кардано, Н. Тарталья и др. А наиболее полно изучил этот вопрос в XVII в. Галилео Галилей.

Современные комбинаторные задачи высокого уровня сложности связаны с объектами в других отраслях математики: определителями, конечными геометриями, группами, математической логикой и т. п.

1. Что изучает комбинаторика?
2. Сформулируйте комбинаторные правила сложения и умножения.

1 Начальный уровень

896. На тарелке лежит 5 яблок и 8 слив. Сколькими способами с тарелки можно взять:

1) один фрукт; 2) одно яблоко и одну сливу?

897. В классе 10 юношей и 15 девушек. Сколькими способами можно выбрать:

1) одного учащегося из этого класса;
2) пару учащихся – юношу и девушку?

898. Костюм состоит из блузки и юбки. Сколько разных костюмов можно составить из 5 видов блузок и 4 видов юбок?

899. В магазине продается 7 видов ручек и 5 видов тетрадей. Сколькими способами можно выбрать комплект из одной ручки и одной тетради?

2 Средний уровень

900. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7, 8, если цифры в числе не повторяются?

901. Сколько трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, если цифры в числе не повторяются?

902. Сколькими способами можно выбрать пару из одного гласного и одного согласного звука в слове «график»?

903. Сколькими способами можно выбрать пару из одного гласного и одного согласного звука в слове «число»?

904. Сколькими способами можно выстроить в ряд 6 учащихся?

905. 10 участников шахматного турнира играют в зале за 5 шахматными столами. Сколькими способами можно разместить шахматистов за этими столами, если и участники всех партий, и цвет фигур каждого участника известны?

906. Из города A в город B ведут 3 дороги, а из города B в город C – 2 дороги (рис. 81). Сколькими способами почтальон может пройти из города A в город C?

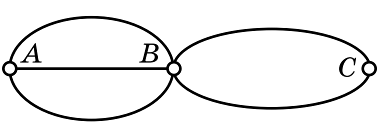


Рис. 81

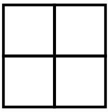


Рис. 82

907. Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 (рис. 82) можно закрасить в зеленый или красный цвет. Сколькими разными способами можно раскрасить всю таблицу?

3 Достаточный уровень

908. Сколькими способами из 5 членов президиума собрания можно выбрать председателя и секретаря?

909. В секции легкой атлетики тренируется 8 спортсменов. Сколькими способами между ними можно распределить этапы эстафеты 4 по 100 м (то есть каждый из четырех атлетов, участвующих в эстафете, должен пробежать один из этапов: или первый, или второй, или третий, или четвертый)?

910. Игральный кубик* бросают дважды. Сколько разных пар чисел можно при этом получить?

911. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей выпадения аверса и реверса** можно при этом получить?

912. Сколько разных трехзначных чисел можно составить только из нечетных цифр, если:

1) цифры в числе не повторяются;
2) цифры в числе могут повторяться?

913. Сколько разных двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе:

1) не повторяются; 2) могут повторяться?

914. Сколькими способами можно сложить в ряд 2 белых шарика и по одному черному, красному и зеленому, если белые шарики должны располагаться по обоим концам ряда?

915. Сколькими способами на книжной полке можно расставить учебники по шести разным предметам так, чтобы учебник по алгебре был крайним слева?

---

* *Игральным кубиком* (или *игральной костью*) называют кубик, грани которого обозначены числами от 1 до 6.

** *Аверс* (в простореч. – «орел» или «герб») – лицевая сторона монеты; *реверс* (в простореч. – «решка») – обратная сторона монеты.

Высокий уровень

916. Сколько разных шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе не повторяются?

917. Сколько разных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 8, если цифры в числе не повторяются?

918. Сколько разных правильных несократимых дробей можно составить из чисел 2, 3, 5, 7, 12 так, чтобы числитель и знаменатель в них были разными?

919. В турнире «Кубок Васюков» приняли участие 10 шахматистов, каждый из которых сыграл партию с каждым из соперников. Сколько партий было сыграно в этом турнире?

920. В премьер-лиге по футболу приняли участие 16 команд, каждая из которых провела по две встречи с каждым из соперников. Сколько всего матчей было сыграно?

921. Сколько разных нечетных четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе не повторяются?

922. Сколько разных четных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе не повторяются?

Упражнения для повторения

923. Упростите выражение:
1) $-4x(3x + 9) + 1{,}5x(8x - 2)$;
2) $(x - 2)^2 - (x + 1)(x - 1)$.

924. Найдите координаты точек параболы $y = 2x - x^2$, сумма абсциссы и ординаты которых равна 2.

925. Решите уравнение:
1) $2x^3 + 3x^2 - 5x = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.

926. Постройте график уравнения $|x - y| = 3$.

Математика вокруг нас

927. Мастер спорта по легкой атлетике во время тренировки пробежал 400 м за 50 секунд. Найдите его среднюю скорость на дистанции. Ответ представьте в километрах в час.

Интересные задачки для неленивых

928. (*Международный математический конкурс «Кенгуру», 2016 г.*). В классе 20 учащихся. Все сидят за партами по двое. Ровно треть мальчиков сидит с девочками, и ровно половина девочек сидит с мальчиками. Сколько мальчиков в классе?

§22. СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ. ЧАСТОТА И ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Любая точная наука изучает не сами явления, происходящие в природе, а их математические модели. В математических задачах часто рассматривают события, которые, в зависимости от определенных условий, могут или произойти, или не произойти. Такие *события* называют *случайными*.

Теория вероятностей – раздел математики, в котором изучаются закономерности случайных событий.

Предположим, проводят определенное испытание (эксперимент, наблюдение, опыт и т. п.), исход которого нельзя предсказать заранее. Такие *испытания* в теории вероятностей называют *случайными*. При этом целесообразно проводить только такие испытания, которые можно повторить, хотя бы теоретически, произвольное количество раз в одинаковых условиях.

Случайными испытаниями являются, например, подбрасывание монеты или игрального кубика, покупка лотерейного билета, стрельба по мишени и т. п.

Таким образом,

***случайное испытание* – это испытание (эксперимент, наблюдение, опыт), исход которого зависит от случая и которое можно повторить многократно при одних и тех же условиях.**

Исходом случайного испытания является *случайное событие*.

***Случайное событие* – это событие, которое при одних и тех же условиях может произойти, а может и не произойти.**

Примерами случайных событий могут быть «выпадение единицы при подбрасывании игрального кубика», «выпадение аверса при подбрасывании монеты», «выигрыш 10 грн при покупке лотерейного билета» и т. п. Такие события, как «закипание воды при ее нагревании до 100 °C» или «уменьшение длины провода при его охлаждении», нельзя назвать случайными, потому что они – закономерные.

Случайные события, как правило, обозначают большими латинскими буквами: A, B, C, D, ...

Пример 1. В ящике лежат только белые и черные шары. Из него наугад вынимают один шар. Какие из событий A, B, C, D при этом могут произойти:

A – вынут белый шар;
B – вынут черный шар;
C – вынут зеленый шар;
D – вынут шар?

Решение. Так как из ящика может быть вынуто только то, что в нем находится, то вынуть белый или черный шар можно, а зеленый – нет. Можем также утверждать, что любой предмет, вынутый наугад из ящика, будет шаром, поскольку там нет ничего, кроме шаров. Следовательно, события A и B могут произойти (а могут и не произойти); событие C не может произойти, а событие D обязательно произойдет.

Ответ. A, B, D.

***Событие*, которое в данных условиях обязательно произойдет, называют *достоверным*.**
***Событие*, которое в данных условиях никогда не произойдет, называют *невозможным*.**

В примере 1 события A и B – случайные, D – достоверное событие, C – невозможное событие.

Пример 2. Допустим, проводят случайное испытание, например, стрелок стреляет по мишени. Нас интересует, как математически оценить шансы стрелка попасть по мишени в одних и тех же неизменных условиях.

Чтобы это выяснить, рассмотрим понятия *частоты события* и *относительной частоты события*.

Если в неизменных условиях проведено n случайных испытаний и событие A произошло в $n(A)$ случаях, то число $n(A)$ называют *частотой события* A, а отношение $\frac{n(A)}{n}$ – *относительной частотой события* A.

Пример 3. Испытание состоит в подбрасывании игрального кубика 150 раз подряд. Пусть событием A будет выпадение шестерки. При проведении испытания это событие произошло 24 раза. Число 24 – частота события A, а отношение $\frac{24}{150} = \frac{4}{25} = 0{,}16$ – относительная частота события A.

Относительная частота события может измениться, если изменить количество испытаний или провести другую серию испытаний в тех же условиях.

Пример 4. В разные годы разные ученые проводили испытание, состоявшее в многократном подбрасывании монеты, и рассматривали событие A – выпадение аверса. Результаты всех этих испытаний представлены в таблице в порядке возрастания количества испытаний.

№ п/п	Исследователь	Годы жизни	Количество подбрасываний монеты, n	Количество выпадений аверса, $n(A)$	Относительная частота $\frac{n(A)}{n}$
1	Ж. Бюффон	1707–1788	4040	2048	0,5069
2	Де Морган	1806–1871	4092	2048	0,5005
3	В. Феллер	1906–1970	10 000	4979	0,4979
4	К. Пирсон	1857–1936	12 000	6019	0,5016
5	У. Джевонс	1835–1882	20 480	10 379	0,5068
6	К. Пирсон	1857–1936	24 000	12 012	0,5005
7	В. Романовский	1879–1954	80 640	40 151	0,4979

Понятно, что разные ученые использовали разные монеты, но само испытание и рассматриваемое ими событие можно считать одинаковыми. Эти испытания, проведенные в разные эпохи и в разных странах, дают приблизительно один и тот же результат: относительная частота события A близка к числу 0,5. В данном случае число 0,5 называют *статистической вероятностью события*.

Если при проведении достаточно большого количества случайных испытаний значение относительной частоты случайного события A становится близким к некоторому определенному числу, то это число называют *статистической вероятностью события A*.

Вероятность принято обозначать латинской буквой p (первая буква французского слова *probabilite* и латинского *probabilitas*, что в переводе означает «возможность», «вероятность»). Тогда в примере 4: $p(A) = 0{,}5$, или же $p = 0{,}5$.

Приходим к выводу, что

вероятность случайного события можно найти с достаточно большой точностью, если случайное испытание проводить много раз. Чем больше проведено испытаний, тем более близким будет значение относительной частоты случайного события к вероятности этого события.

Вернемся к вопросу, сформулированному в Примере 2, то есть к математической оценке шансов стрелка попасть по мишени. Теперь ясно, что такую математическую оценку дает вероятность. Чтобы оценить вероятность попадания стрелка по мишени (событие A), нужно, чтобы стрелок совершил достаточно большое количество выстрелов (в одних и тех же условиях). Тогда относительную частоту события A можно будет считать вероятностью попадания стрелка по мишени. Пусть, например, в течение некоторого времени сделано 1000 выстрелов, из которых 781 оказался метким. Тогда относительную частоту $\frac{781}{1000} = 0{,}781$ можно считать вероятностью попадания этого стрелка по данной мишени.

Если известна вероятность события A, то можно приблизительно оценить, сколько раз в определенном количестве испытаний произойдет событие A.

Пример 5. Вероятность попадания стрелка по мишени равна 0,781. Сколько метких выстрелов приблизительно будет у этого стрелка в серии из 50 выстрелов?

Р е ш е н и е. Пусть в серии из 50 выстрелов было x попаданий. Тогда $\frac{x}{50}$ – относительная частота метких выстрелов. Если считать, что относительная частота попаданий приблизительно равна вероятности, то $\frac{x}{50} \approx 0{,}781$, то есть $x \approx 39$.

О т в е т. 39 метких выстрелов.

А еще раньше...

Теорию вероятностей нередко называют «наукой о случайном». На многих примерах можно убедиться в том, что массовые случайные явления тоже имеют свои закономерности, знание которых можно успешно использовать в практической деятельности человека.

Еще в древности люди заметили, что несколько охотников, бросив копья одновременно, могут поразить зверя с большей вероятностью, чем один охотник. Этот вывод не был научным, а основывался на наблюдениях и опыте.

Как наука теория вероятностей зародилась в XVII в. На ее развитие повлияли насущные потребности науки и практики того времени, в частности в деле страхования, которое распространялось благодаря бурному развитию торговых связей и путешествий. Удобной моделью для решения задач и анализа понятий теории вероятностей были для ученых азартные игры. Об этом заметил еще Гюйгенс в своей книге «О расчетах в азартной игре» (1657 г.), которая стала первой в мире книгой по теории вероятностей. Дальнейшему развитию теории вероятностей (XVII–XVIII вв.) способствовали работы Б. Паскаля, Д. Бернулли, Ж.Л. Д'Аламбера, Д. Крега, Т. Симпсона, П. Ферма, Т. Байеса и др.

Важный вклад в теорию вероятностей сделал швейцарский математик Я. Бернулли (1654–1705): он доказал закон больших чисел в самом простом случае независимых испытаний в книге «Аналитическая теория вероятностей».

В 1718 г. английский математик А. Муавр (1667–1754) опубликовал книгу «Теория случая», в которой исследовал закономерности, присущие случайным явлениям.

Впервые основы теории вероятностей изложил французский математик П. Лаплас (1749–1827).

В дальнейшем теория вероятностей развивалась благодаря работам француза С. Пуассона (1781–1840) и россиян П.Л. Чебышева (1821–1894), А.А. Маркова (1856–1922) и А.М. Ляпунова (1857–1918).

Свой вклад в развитие теории вероятностей сделали и украинские математики: Б.В. Гнеденко (1912–1996), И.И. Гихман (1918–1985), А.В. Скороход (1930–2011), М.И. Ядренко (1932–2004).

1. Что изучает теория вероятностей?
2. Что такое случайное испытание?
3. Что такое случайное событие?
4. Какое событие называют достоверным; невозможным?
5. Что называют частотой и что – относительной частотой события?
6. Что называют статистической вероятностью события?

1 Начальный уровень

929. (*Устно*). Какие события являются случайными:
1) при бросании игрального кубика выпадет 6;
2) при температуре 0 °C вода замерзнет;
3) лотерейный билет выиграет 200 грн;
4) сразу после 1 марта наступит 2 марта;
5) фамилия наугад выбранного девятиклассника будет начинаться с буквы «А»;
6) длина окружности радиуса 5 см будет равна 10π см?

930. (*Устно*). Какие из событий – достоверны, а какие – невозможны:
1) солнце взойдет на востоке;
2) при бросании игрального кубика количество выпавших очков будет кратно числу 11;
3) выбранное наугад трехзначное число, состоящее из цифр 7, 8, 9, будет больше числа 600;
4) двузначное число, состоящее из цифр 1 и 2, будет кратно числу 10;
5) выпадет белый снег;
6) количество дней наугад выбранного месяца будет большим, чем 31?

931. Какие из событий случайны, достоверны, невозможны:
1) выиграть партию в шахматы у равного себе соперника;
2) крокодил будет летать;
3) при бросании двух игральных кубиков в сумме выпадет больше 12 очков;
4) поезд Харьков–Львов опоздает;
5) 5 мая следующего года будет солнечно;
6) следующим днем за пятницей будет суббота;
7) следующим днем за понедельником будет воскресенье;
8) датой рождения случайного встречного будет 30 мая;
9) датой рождения случайного встречного будет 31 июня;
10) из коробки с зелеными и черными шарами будет вынут зеленый шар?

932. Приведите по два примера достоверных, невозможных, случайных событий.

2 Средний уровень

933. Перенесите таблицу в тетрадь и для каждого испытания укажите пример достоверного, невозможного, случайного события.

№ п/п	Испытание	Достоверное событие	Невозможное событие	Случайное событие
1	Вытягивание наугад шара из коробки с белыми и черными шарами			
2	Отрывание листка в отрывном календаре			
3	Вытягивание наугад карты из колоды карт			
4	Составление двузначного числа из цифр 3 и 4			

934. Перенесите таблицу в тетрадь и для каждого испытания укажите пример достоверного, невозможного и случайного события.

№ п/п	Испытание	Достоверное событие	Невозможное событие	Случайное событие
1	Вытаскивание наугад конфеты из коробки с конфетами из белого и черного шоколада			
2	Составление двузначного числа из цифр 8 и 9			
3	Определение даты рождения некоего человека			
4	Определение числа дней наугад выбранного года			

935. Случайное испытание заключалось в выполненном 200 раз подбрасывании игрального кубика. Результаты испытания занесены в таблицу. Перенесите ее в тетрадь и вычислите относительную частоту выпадения каждого числа.

Число	1	2	3	4	5	6
Количество выпадений числа	33	32	35	34	36	30
Относительная частота выпадения числа						

936. Выполнили пять серий испытаний, по 50 подбрасываний монеты в каждой. Результаты занесены в таблицу. Перенесите ее в тетрадь и вычислите относительную частоту события A в каждой из серий.

Серия	1	2	3	4	5
Выпадение аверса (событие A)	23	26	24	25	28
Относительная частота события A					

937. Известно, что в партии из 1000 батареек обычно попадаются 3 бракованные. Какова вероятность приобрести бракованную батарейку из такой партии?

938. В заводской партии, насчитывающей 10 000 деталей, 15 оказались бракованными. Какова вероятность того, что взятая наугад из партии деталь будет бракованной?

3 Достаточный уровень

939. (*Устно*). Стрелок сделал два выстрела по мишени: один раз попал, и один раз – нет. Можно ли утверждать, что у этого стрелка вероятность попадания по мишени в данных условиях равна 0,5? Почему?

940. Чтобы выяснить, какой цвет волос у жителей города преобладает, а какой – встречается реже всего, исследователи разошлись по разным частям города и записывали цвет волос каждого встретившегося им жителя. Результаты этого исследования занесены в таблицу.

Цвет волос	шатены	блондины	брюнеты	рыжие
Количество людей	423	238	222	87

Оцените (с точностью до сотых) вероятность того, что выбранный наугад житель города:

1) шатен; 2) брюнет; 3) не блондин; 4) не рыжий.

941. В условиях предыдущей задачи оцените (с точностью до сотых) вероятность того, что выбранный наугад житель города:

1) рыжий; 2) блондин; 3) не шатен; 4) не брюнет.

942. Придя в компьютерный клуб, трое друзей сняли там свои шляпы. Когда они уходили, внезапно погас свет, и каждый взял шляпу наугад. Какие из следующих событий случайны, невозможны, достоверны:

1) каждый взял свою шляпу;
2) каждый ушел в шляпе;
3) все надели чужие шляпы;
4) двое надели чужие шляпы, а один – свою;
5) один надел чужую шляпу, а двое – свои?

943. (*Проектная деятельность*). Возьмите произвольный текст на украинском языке, выберите в нем подряд любые пять строк. Вычислите относительную частоту в этих строках каждой из букв «а» и «й» и сравните полученные значения.

944. (*Проектная деятельность*). Возьмите произвольный текст на русском языке, выберите в нем подряд любые десять строк. Вычислите относительную частоту в этих строках каждой из букв «р» и «ф» и сравните полученные значения.

945. (*Устно*). На основе задач 943, 944 дайте ответ на вопрос: почему на клавиатуре компьютера буквы «а» и «р» расположены ближе к центру, а буквы «й» и «ф» – ближе к краю.

946. Проверили 1000 деталей, из которых 5 оказались бракованными.

1) Сколько приблизительно бракованных деталей будет в партии из 1800 деталей?
2) Сколько приблизительно деталей было в партии, если среди них выявили 12 бракованных?

947. Среди 200 опрошенных жителей города 198 имеют мобильный телефон.

1) Сколько приблизительно мобильных телефонов будет у 500 опрошенных жителей этого города?
2) Сколько приблизительно жителей города было опрошено, если владельцев мобильных телефонов среди них оказалось 693?

4 Высокий уровень

948. Известно, что баскетболист со штрафного броска попадает в корзину с вероятностью, большей чем 0,8, но меньшей чем 0,83. Сколько приблизительно штрафных бросков он выполнил во время тренировки, если промахнулся 4 раза?

949. Известно, что стрелок попадает в мишень с вероятностью, большей чем 0,89, но меньшей чем 0,9. Сколько приблизительно выстрелов он сделал во время тренировки, если допустил 6 промахов?

Упражнения для повторения

950. Выполните действие:

1) $\dfrac{6a + 7}{2a - 1} + \dfrac{4a + 8}{1 - 2a}$; 2) $32p^3n^2 \cdot \dfrac{n^7}{8p^6}$.

951. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков уравнений $x^2 + y^2 = 16$ и $x - y = 4$. Постройте графики этих уравнений и отметьте на них найденные точки.

952. Решите неравенство:

$15x + (4x + 1)(3x - 8) > (4x - 5)(4x + 5) + 27$.

953. Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $5x^2 + 7x - 9 = 0$. Не решая уравнения, найдите $x_1^3x_2 + x_2^3x_1$.

954. Постройте график функции $y = \dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$.

Математика вокруг нас

955. До марта 2017 года действовали следующие тарифы на электроэнергию для населения:

Объем потребления в месяц	**Тариф (коп. за 1 кВт · ч, с НДС)**
Населению (в том числе, которое проживает в жилых домах, оборудованных кухонными электроплитами)	
– За объем, потребленный до 100 кВт · ч электроэнергии (включительно)	71,4
– За объем, потребленный свыше 100 до 600 кВт · ч	129,0
– За объем, потребленный свыше 600 кВт · ч электроэнергии	163,8

Счетчик электроэнергии на 1 ноября показывал 12 615 киловатт-часов, а на 1 декабря – 12 807 киловатт-часов. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь? Ответ дайте в гривнях.

Интересные задачки для нелинивых

956. (*Задача Эйлера*). Найдите число, четвертая степень которого, разделенная на его половину и увеличенная на 14,25, будет равна 100.

§23. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Проводить многократные испытания для определения статистической вероятности события достаточно сложно, а иногда – невозможно. Однако во многих прикладных задачах вероятность можно определить, используя *классическое определение вероятности*.

Рассмотрим пример.

Пример 1. В ящике лежат два шара: белый и черный. Из ящика наугад вынимают один шар.

Рассмотрим события:

A – вынут белый шар;

B – вынут черный шар;

C – вынут красный шар;

D – вынут шар.

Как известно из предыдущего параграфа, событие C – невозможное, событие D – достоверное, а события A и B – случайные.

Так как белых и черных шаров в ящике поровну, то шансы быть вынутым у черного шара будут теми же, что и у белого. Никаких других шаров в ящике нет, поэтому, если испытание с вытаскиванием шара проводить многократно, каждый раз возвращая шар в ящик, можно сделать вывод, что приблизительно в половине случаев будет вынут белый шар и еще в половине случаев – черный.

В данных условиях число 0,5 (половина) – это статистическая вероятность случайного события «вынуть белый шар».

Эту вероятность получим, если количество белых шаров, то есть 1, разделим на количество всех шаров ($1 + 1 = 2$).

Сформулируем *классическое определение вероятности*:

вероятность случайного события A равна отношению количества случаев, способствующих появлению события A, к количеству всех возможных случаев.

В виде формулы это определение можно записать так:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

где n – количество всех возможных случаев; m – количество случаев, способствующих появлению события A.

Иногда вероятность представляют в процентах, тогда $p(A) = 50\ \%$.

Возвращаясь к примеру 1, можно легко найти вероятности событий B, C и D: $p(B) = \frac{1}{2} = 0,5$; $p(C) = \frac{0}{2} = 0$; $p(D) = \frac{2}{2} = 1$.

Таким образом, приходим к важному выводу:

вероятность достоверного события равна 1, вероятность невозможного события равна 0; вероятность случайного события равна любому числу от 0 до 1.

Вероятности событий A и B в данном испытании одинаковы, потому что $p(A) = p(B) = 0,5$. Такие события называют *равновероятными*.

Равновероятные события **– события, вероятность которых одинакова в данном испытании.**

Рассмотрим еще примеры.

Пример 2. Из 30 учеников класса 12 имеют по алгебре оценки высокого уровня. Какова вероятность того, что наугад выбранный учащийся этого класса имеет по алгебре оценку высокого уровня?

Решение. Имеем: $n = 30$, $m = 12$, $p = \frac{m}{n} = \frac{12}{30} = 0,4$.

Ответ. 0,4.

Пример 3. Одновременно бросили два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков:

1) равна 6; 2) меньше 5?

Решение. Составим таблицу суммы очков, которые могут выпасть на двух игральных кубиках, брошенных одновременно. $n = 36$ – количество всех возможных событий.

II \ I	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1) Имеем 5 случаев, когда сумма очков на обоих кубиках равна 6, поэтому $m = 5$ и $p = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$.

2) Имеем 6 случаев, когда сумма очков на обоих кубиках меньше чем 5. Поэтому $m = 6$ и $p = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ. 1) $\frac{5}{36}$; 2) $\frac{1}{6}$.

Пример 4. В коробке лежат шары: 20 черных, 25 зеленых, а остальные – белые. Сколько белых шаров в коробке, если вероятность вытащить белый шар:

1) равна $\frac{1}{4}$; 2) меньше чем $\frac{1}{5}$?

Решение. Пусть в коробке x белых шаров. Тогда:

$$m = x \text{ и } n = 20 + 25 + x = 45 + x.$$

Следовательно, вероятность вытащить белый шар равна $\frac{x}{45 + x}$.

1) По условию $\frac{x}{45 + x} = \frac{1}{4}$, тогда $4x = 45 + x$; то есть $x = 15$.

2) По условию $\frac{x}{45 + x} < \frac{1}{5}$. Чтобы решить неравенство, умножим обе его части на положительное число $5(45 + x)$, получим:

$$5x < 45 + x, \text{ откуда } x < 11,25.$$

Следовательно, если вероятность вытащить белый шар меньше, чем $\frac{1}{5}$, то в коробке не более 11 белых шаров.

Ответ. 1) 15; 2) не более 11.

Пример 5. Владелец мобильного телефона забыл две последние цифры своего PIN-кода, но помнит, что они разные. Найти вероятность того, что он разблокирует телефон с первой попытки.

Решение. Двумя последними цифрами PIN-кода могут быть следующие комбинации: 00, 01, 02, 03, ... , 97, 98, 99. Всего их 100. Но среди них есть 10 комбинаций, с одинаковыми цифрами: 00, 11, 22, ... , 88, 99. Так как владелец телефона помнит, что цифры разные, то он будет выбирать из 90 комбинаций ($100 - 10 = 90$). Следовательно, $n = 90$. Ищем вероятность того, что владелец получит доступ к телефону с первой попытки, а значит, $m = 1$. Тогда $p = \frac{m}{n} = \frac{1}{90}$.

Ответ. $\frac{1}{90}$.

1. Как найти вероятность случайного события A?
2. Какова вероятность достоверного события? Невозможного события?
3. В каких пределах может изменяться вероятность случайного события?
4. Какие события называют равновероятными в данном испытании?

1 Начальный уровень

957. Приведите пример: 1) равновероятных событий; 2) событий, которые не равновероятны в данном испытании.

2 Средний уровень

958. Какова вероятность того, что:
1) следующим днем после 30 марта будет 1 апреля;
2) следующим днем после понедельника будет вторник?

959. Какова вероятность того, что:
1) следующим днем после 30 апреля будет 1 мая;
2) следующим днем после среды будет вторник?

960. На вопрос викторины получили 60 правильных ответов, в том числе и твой. Для определения единственного победителя наугад вытягивают карточку с фамилией. Какова вероятность того, что приз получишь именно ты?

961. Из 30 экзаменационных билетов ученик не выучил только один. Какова вероятность того, что именно этот билет он вытянет на экзамене?

962. В ящике 25 белых шаров и 15 черных. Какова вероятность вытащить наугад из ящика:
1) белый шар; 2) черный шар?

963. В классе 18 юношей и 12 девушек. Учитель наугад вызывает к доске одного ученика. Какова вероятность того, что это будет:
1) юноша; 2) девушка?

964. Являются ли равновероятными события:
1) A_1 – из 20 карточек с числами от 1 до 20 будет вытянута карточка с числом 1;
A_2 – из 20 карточек с числами от 1 до 20 будет вытянута карточка с числом 20;

2) B_1 – из коробки с 3 белыми и 7 черными шарами будет вынут белый шар;
B_2 – из коробки с 3 белыми и 7 черными шарами будет вынут черный шар;
3) C_1 – при бросании кубика выпадет простое число;
C_2 – при бросании кубика выпадет составное число;
4) D_1 – из коробки, где половина карандашей – красные, а половина – синие, будет вынут красный карандаш;
D_2 – из коробки, где половина карандашей – красные, а половина – синие, будет вынут синий карандаш?

965. Известно, что в партии из 1000 деталей 2 – бракованные. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь:
1) бракованная;
2) качественная?

966. В магазине выяснилось, что в партии из 400 смартфонов 2 – бракованные. Какова вероятность того, что наугад выбранный из этой партии смартфон:
1) бракованный;
2) качественный?

967. В корзине 5 красных, 3 зеленых и 2 желтых яблока. Наугад берут одно яблоко. Какова вероятность того, что оно окажется:
1) красным; 2) зеленым;
3) красным или желтым; 4) не красным?

968. В коробке 6 красных, 3 зеленых и 1 синий карандаш. Из коробки наугад вытаскивают один карандаш. Какова вероятность того, что этот карандаш:
1) зеленый; 2) красный;
3) зеленый или синий; 4) не зеленый?

3 Достаточный уровень

969. (*Задача Д'Аламбера*.) Какова вероятность того, что при двух бросках монета хотя бы раз упадет аверсом вверх?

970. Из натуральных чисел от 1 до 30 учащийся наугад выбирает одно. Какова вероятность того, что это число будет делителем числа 30?

971. Какова вероятность того, что наугад выбранное натуральное число от 1 до 15 будет делителем числа 15 или простым числом?

972. Имеем новый отрывной календарь невисокосного года. Отрываем в нем наугад один листок. Найдите вероятность того, что:

1) на листке число 1;
2) на листке число 31;
3) число на листке делится на 5.

973. Имеем новый отрывной календарь високосного года. Отрываем в нем наугад один листок. Найдите вероятность того, что:

1) на листке число 2;
2) на листке число 30;
3) число на листке кратно числу 10.

974. Одновременно бросили два игральных кубика. Какова вероятность того, что на кубиках:

1) выпадет одинаковое число очков;
2) сумма очков будет равна 10;
3) сумма очков не превысит числа 3;
4) сумма очков будет четным числом.

975. Одновременно бросили два игральных кубика. Найдите вероятность того, что:

1) на кубиках выпадет разное число очков;
2) сумма очков на кубиках будет равна 7;
3) сумма очков на кубиках будет не меньше чем 11;
4) сумма очков на кубиках будет нечетным числом.

976. Составьте таблицу произведения очков, которые выпадут на двух игральных кубиках при их одновременном броске, аналогичную таблице суммы очков (см. **Пример 3** этого параграфа). Найдите вероятность того, что произведение очков:

1) будет равно 12;
2) будет равно 11;
3) будет меньше 5;
4) будет больше 26;

977. В коробке лежит 12 синих карандашей и несколько красных. Сколько красных карандашей в коробке, если вероятность вытащить из нее наугад:

1) синий карандаш равна 0,75;
2) красный карандаш равна $\frac{2}{5}$;
3) синий карандаш больше чем 0,5;
4) красный карандаш меньше чем $\frac{2}{3}$?

978. В коробке 6 белых и несколько черных шаров. Сколько черных шаров в коробке, если вероятность вынуть из нее наугад:

1) белый шар равна 0,6;
2) черный шар равна 0,25;
3) белый шар меньше чем 0,5;
4) черный шар больше чем $\frac{1}{4}$?

4 Высокий уровень

979. В коробке 3 черные ручки, несколько зеленых и несколько красных. Сколько зеленых ручек в коробке и сколько красных, если вероятность вынуть наугад зеленую ручку равна 0,2, а красную – 0,5?

980. В ящике 8 белых платков, несколько красных и несколько в клетку. Сколько в ящике красных платков и сколько в клетку, если вероятность вытащить наугад красный платок равна 0,5, а в клетку – 0,1?

981. Юра, направляясь в гости к Ане, купил букет из 5 белых и нескольких красных роз. Сколько красных роз в букете, если вероятность взять из него наугад красную розу больше чем 0,5, но меньше чем 0,6, при этом цветов в букете нечетное количество?

982. В миске лежит 10 вареников с картофелем и несколько – с мясом. Сколько вареников с мясом в миске, если вероятность того, что один взятый наугад вареник будет с мясом, больше чем 0,2, но меньше чем 0,5?

983. Какова вероятность того, что выбранное наугад двузначное число делится на 3?

984. Карточки с номерами 1, 2, 3, 4 выложили в ряд. Какова вероятность того, что карточки с четными номерами окажутся рядом?

985. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что:
1) аверсов выпадет больше, чем реверсов;
2) выпадет два реверса;
3) все монеты упадут одинаковой стороной;
4) аверсов выпадет не более одного?

Упражнения для повторения

2 **986.** Сократите дробь: 1) $\frac{14p^{24}n^5}{2p^8n^{10}}$; 2) $\frac{9a^2 - 6a + 1}{9a^2 - 1}$.

987. Решите уравнение: 1) $6x^2 + 18x = 0$; 2) $5x^2 - 20 = 0$.

988. Постройте график функции $y = -4x + x^2$. Используя график функции, найдите: 1) область значений функции; 2) промежуток возрастания функции.

989. Докажите, что значение выражения при $a < -5$

$$\frac{a-20}{(a-5)^2} : \left(\frac{a}{a^2-25} - \frac{a-8}{a^2-10a+25}\right)$$

положительно.

990. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{y}{2x} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}; \\ y^2 - 5xy + 2x^2 = 32. \end{cases}$

Математика вокруг нас

991. На графике показана зависимость крутящего момента двигателя от количества его оборотов в минуту (рис. 82). На оси абсцисс отложено количество оборотов в минуту, на оси ординат – крутящий момент в Н · м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближенно вычисляется по формуле $v = 0{,}036n$, где n – количество оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был не меньше чем 120 Н · м? Ответ представьте в километрах в час.

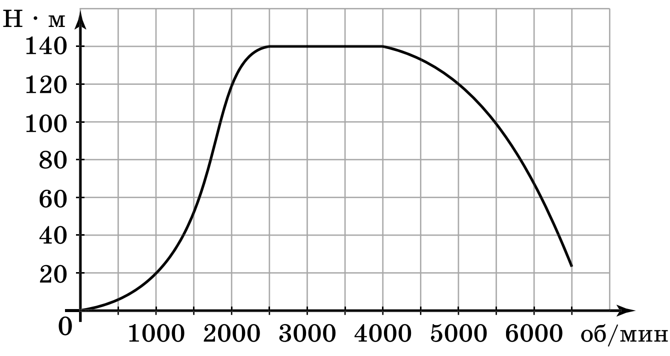


Рис. 82

Интересные задачки для неленивых

992. Известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней и $a + b + c < 0$. Можно ли определить знак числа c? В случае положительного ответа, укажите знак числа c.

§24. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СТАТИСТИКЕ. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ. СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДАННЫХ И ИХ ОБРАБОТКИ

В практической деятельности часто приходится собирать, обрабатывать и анализировать разнообразные данные, связанные с явлениями, процессами и событиями массового характера. Эти данные называют *статистическими*. Ответы на вопросы, связанные со статистическими данными, помогает найти *математическая статистика*.

***Математическая статистика* — раздел математики, изучающий математические методы систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов.**

Слово «статистика» происходит от латинского *status*, что переводится как «положение», «состояние».

Пример 1. На государственной итоговой аттестации по математике 50 девятиклассников получили следующие баллы:

5	10	4	7	8	9	6	4	11	6
9	2	11	5	6	7	5	8	6	10
8	7	3	10	8	12	9	6	11	7
11	5	6	4	7	5	3	9	5	10
4	6	7	9	8	4	7	5	7	6

Систематизируем эти данные соответственно уровням учебных достижений в виде таблицы: начальный уровень (1–3 балла), средний уровень (4–6 баллов), достаточный уровень (7–9 баллов), высокий уровень (10–12 баллов). В первый столбец впишем названия уровней учебных достижений. Для каждой оценки будем делать отметку черточкой во втором столбце, в соответствующей уровню оценки строке. В третий столбец впишем суммарное количество учеников, получивших оценку соответствующего уровня:

<table>
<tr><th>Уровень учебных достижений</th><th>Подсчет количества учеников</th><th>Сумма</th></tr>
<tr><td>Начальный</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Средний</td><td>𝍸 𝍸 𝍸 𝍸</td><td>20</td></tr>
<tr><td>Достаточный</td><td>𝍸 𝍸 𝍸 |||</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Высокий</td><td>𝍸 ||||</td><td>9</td></tr>
</table>

После обработки результаты статистических исследований представляют в более наглядном и сжатом виде, например в виде таблиц, графиков, диаграмм*.

Пример 2. Представим результаты статистического исследования из Примера 1 несколькими способами.

1) В виде *таблицы*.

Уровень учебных достижений	Количество учащихся
Начальный	3
Средний	20
Достаточный	18
Высокий	9

или

Уровень учебных достижений	Начальный	Средний	Достаточный	Высокий
Количество учащихся	3	20	18	9

2) В виде *столбчатой диаграммы*, которую в статистике называют *гистограммой* (рис. 83).

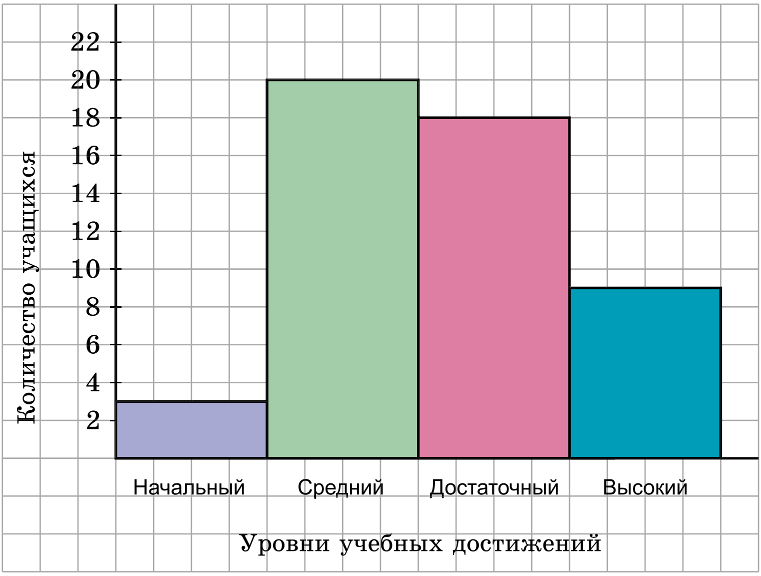


Рис. 83

* Столбчатые и круговые диаграммы строили в 6 классе.

3) В виде *круговой диаграммы*. На рисунке 84 представлена круговая диаграмма распределения количества учащихся соответственно уровням учебных достижений (в %).

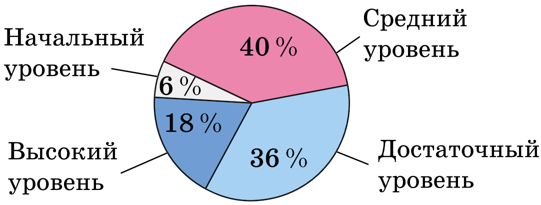


Рис. 84

Результаты статистических исследований представляют в виде графика в тех случаях, когда статистические данные отображают изменения некоторой величины в течение определенного промежутка времени (нескольких дней, месяцев, лет).

Пример 3. В таблицу внесены данные о чистой прибыли малого предприятия (в тыс. грн) за каждый из последних восьми лет.

Год	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Прибыль, тыс. грн	25,3	29,6	40,1	45,3	50,1	62,3	74,5	82,1

Представим эти статистические данные в виде *графика* (рис. 85).

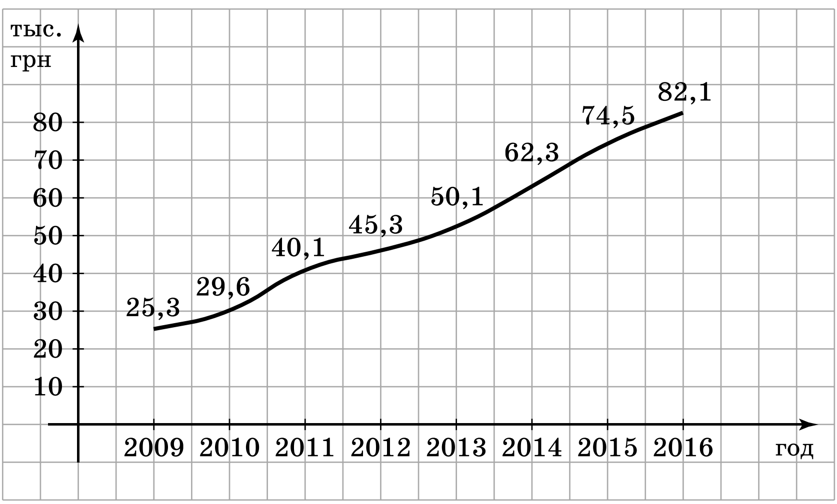


Рис. 85

Представлять результаты статистических исследований в виде таблиц, диаграмм, графиков можно с помощью специальных программных средств, например *Microsoft Excel* или аналогичных программ, с которыми вы уже научились работать на уроках информатики.

Средним значением статистических измерений **называют среднее арифметическое статистических данных.**

Напомним, чтобы найти среднее арифметическое нескольких чисел, нужно их сумму разделить на их количество.

Пример 4. Каково среднее значение чистой прибыли малого предприятия за восемь последних лет (см. **пример 3**).

Решение.

$$\frac{25,3 + 29,6 + 40,1 + 45,3 + 50,1 + 62,3 + 74,5 + 82,1}{8} =$$

$$= \frac{409,3}{8} = 51,1625 \text{ (тыс. грн)}$$

Ответ. 51,1625 тыс. грн.

В приведенных выше примерах мы рассмотрели вопрос систематизации небольшого количества статистических данных. А как можно исследовать и систематизировать явления массового характера, охватывающие тысячи и более исследуемых объектов?

Пример 5. С центральной площади небольшого городка отправляются четыре автобуса № 1, № 2, № 3 и № 4. Местная власть хочет выяснить, на каком из маршрутов должно быть больше автобусов, а на каком – меньше. Решение этой проблемы связано с определенными закономерностями и объективными условиями жизни жителей городка. Конечно, ответ можно найти, опросив всех жителей города, но это слишком долго и дорого.

На практике же делают *выборку*, то есть опрашивают избирательно несколько десятков или сотен человек, после чего систематизируют данные в виде таблицы. Пусть, например, было опрошено 200 жителей города, пользующихся автобусами № 1, № 2, № 3 и № 4. Житель, пользующийся несколькими маршрутами, должен был назвать маршрут, которым пользуется чаще всего. Полученные статистические данные систематизировали в виде таблицы:

Маршрут	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Количество пользователей маршрута	48	56	36	60

Полученную таблицу называют *частотной*, а числа во второй ее строке – *частотами*. Эти числа показывают, как часто встречается в выборке то или иное значение. Сумму частот всех значений выборки называют *объемом выборки*. В нашем примере объемом выборки является число 200, то есть количество опрошенных жителей, ведь $48 + 56 + 36 + 60 = 200$.

Относительной частотой значения выборки называют записанное в процентах отношение его частоты к объему выборки. Например, относительная частота маршрута № 1 равна $\frac{48}{200} \cdot 100\ \% = 24\ \%$.

Если, например, город должен распределить 50 автобусов между маршрутами № 1, № 2, № 3 и № 4, то на маршрут № 1 целесообразно выделить 12 автобусов: $50 \times 0{,}24 = 12$, то есть 24 % от 50. Представим окончательные результаты исследования в виде таблицы:

Маршрут	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Частота	48	56	36	60
Относительная частота	24 %	28 %	18 %	30 %
Количество автобусов, которое целесообразно выделить	12	14	9	15

1. Какие данные называют статистическими?
2. Что изучает математическая статистика?
3. Как представляют результаты статистических исследований?
4. Что в статистике называют гистограммой?
5. Что называют средним значением статистических измерений?
6. Что называют объемом выборки? Частотой выборки? Относительной частотой выборки?

1 Начальный уровень

993. Во время ежегодного медосмотра измерили (в см) рост десяти студенток и получили следующие данные:
169; 173; 167; 169; 172; 170; 171; 175; 164; 173.
Найдите среднее значение этих измерений.

994. Измерили (в м) рост десяти девятиклассников, которые участвовали в конкурсе «Мужество класса», и получили следующие данные:
1,67; 1,72; 1,68; 1,70; 1,73; 1,80; 1,68; 1,81; 1,78; 1,67.
Найдите среднее значение этих измерений.

2 Средний уровень

995. В таблице представлены статистические данные по количеству медалей, завоеванных украинскими спортсменами на летних Олимпийских играх. Постройте гистограмму количества золотых медалей, завоеванных украинскими спортсменами.

Год олимпиады	Золотые	Серебряные	Бронзовые	Всего
1996	9	2	12	23
2000	3	10	10	23
2004	9	5	9	23
2008	7	5	15	27
2012	6	5	8	19
2016	2	5	4	11

996. В таблице представлены статистические данные по количеству медалей, завоеванных украинскими школьниками на международных математических олимпиадах за последние четыре года. Постройте гистограмму общего количества медалей, завоеванных украинскими школьниками на международных математических олимпиадах.

Год	Золотые	Серебряные	Бронзовые	Всего
2013	1	3	1	5
2014	2	3	1	6
2015	2	3	1	6
2016	0	2	4	6

997. В таблице представлены статистические данные по местам, которые занимала футбольная команда «Днепр» в десяти последних чемпионатах Украины по футболу. По данным таблицы постройте график.

Год	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Место	4	3	6	4	4	4	4	2	3	3

3 Достаточный уровень

998. Используя данные таблицы к задаче **995**, постройте круговую диаграмму распределения золотых, серебряных и бронзовых медалей на летних Олимпийских играх 2008 года.

999. Используя данные таблицы к задаче **996**, постройте круговую диаграмму распределения золотых, серебряных и бронзовых медалей на Международной математической олимпиаде 2015 года.

4 Высокий уровень

1000. (*Проектная деятельность.*) 1) Систематизируйте в частотную таблицу данные выборки о размере обуви, полученные в результате опроса 40 женщин.

36	38	35	37	38	39	36	38	37	38
39	34	37	38	35	36	39	37	38	39
37	39	35	38	36	38	40	35	37	36
38	37	39	36	38	35	38	37	34	36

2) Найдите частоты и относительные частоты значений выборки.

3) Обувная фабрика планирует ежегодно производить 10 000 пар женской обуви. Какое количество пар обуви каждого размера целесообразно производить?

1001. (*Проектная деятельность.*) 1) Систематизируйте в частотную таблицу данные выборки о размере обуви, полученные в результате опроса 40 мужчин.

42	39	41	43	40	42	41	44	42	43
44	42	40	38	43	41	42	44	41	43
45	41	42	40	43	39	44	41	43	42
42	43	39	42	40	44	41	42	43	40

2) Найдите частоты и относительные частоты значений выборки.

3) Обувная фабрика планирует ежегодно производить 20 000 пар мужской обуви. Какое количество пар обуви каждого размера целесообразно производить?

Упражнения для повторения

1002. Цена письменного стола 4000 грн. Какой будет цена этого стола после:

1) снижения цены на 5 %; 2) повышения цены на 10 %?

1003. Расстояние между селами, равное 18 км, велосипедист планировал проехать за определенное время. Но так как он двигался со скоростью на 3 км/ч меньше запланированной, то потратил на дорогу на 12 мин больше, чем должен был. С какой скоростью ехал велосипедист?

1004. Вкладчик положил на банковский депозит 20 000 грн под 10 % годовых.

1) Какая сумма будет на его депозитном счете через 3 года?

2) Какой процентный доход получит вкладчик через 3 года?

Математика вокруг нас

1005. Налог на добавленную стоимость (НДС) в Люксембурге составляет 15 %, в Венгрии – 25 %, а в Украине – 20 % от цены товара. Какую сумму НДС при покупке планшета придется заплатить в каждой из этих стран, если его цена (без НДС) в Венгрии составляет 31 250 форинтов, а курс форинта таков: 100 форинтов равны 0,32 евро и 9,17 гривни.

Интересные задачки для неленивых

1006. (*Киевская областная олимпиада юных математиков, 2016 г.*). Сколько существует трехзначных чисел с ненулевыми цифрами, имеющих следующее свойство: при любой перестановке цифр будет получаться трехзначное число, делящееся на 4 без остатка?

Домашняя самостоятельная работа № 5

Каждое задание имеет четыре варианта ответа (А–Г), среди которых только один является правильным. Выберите правильный вариант ответа.

1. В классе 9 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно выбрать старосту в этом классе?

А. 9; **Б.** 10; **В.** 19; **Г.** 90.

2. Укажите, какое из событий является случайным.

А. наугад выбранные сутки будут иметь 24 часа;
Б. у игрального кубика окажется шесть граней;
В. следующим днем после пятницы будет суббота;
Г. наугад выбранное трехзначное число будет кратно числу 7.

3. Среднее значение статистических данных 8, 7, 9, 10 и 7 равно:

А. 41; **Б.** 8,2; **В.** 7; **Г.** 10,25.

4. Случайное испытание состояло в бросании игрального кубика и было проведено 100 раз. Результаты занесены в таблицу. Какова относительная частота выпадения числа 6?

Число	1	2	3	4	5	6
Количество выпадений числа	18	15	16	15	19	17

А. 0,17; **Б.** 17; **В.** 0,017; **Г.** 1,7

5. В наборе новогодних игрушек 6 красных шариков, 3 белых и 1 желтый. Какова вероятность того, что взятый из набора наугад шарик не будет красным?

А. 0,6; **Б.** 0,4; **В.** 0,3; **Г.** 0,1

6. На графике (рис. 86) показано, какие места занимала волейбольная команда «Сатурн» в пяти последних чемпионатах области по волейболу. В каком году, 2013 или 2015, команда «Сатурн» заняла более высокое место?

А. в 2013 году; **Б.** в 2015 году;
В. в 2013 и 2015 годах команда «Сатурн» заняла одно и то же место;
Г. невозможно определить

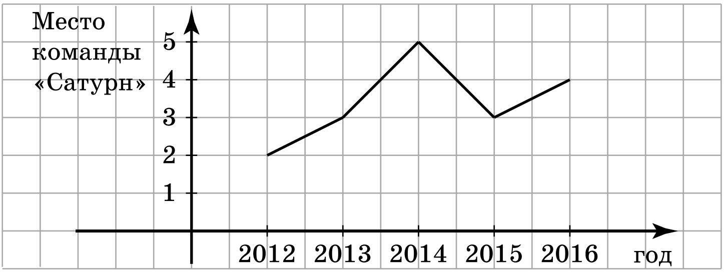


Рис. 86

7. В баскетбольной команде из 5 девушек надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

А. 5; **Б.** 10; **В.** 20; **Г.** 25.

8. Среди 100 опрошенных жителей небольшого города 97 имеют мобильный телефон. Какое число будет наиболее близким к количеству владельцев мобильных телефонов, если опросить 200 жителей этого города?

А. 194; **Б.** 98; **В.** 190; **Г.** 199.

9. Учащийся называет наугад одно из натуральных чисел от 1 до 24. Какова вероятность того, что названное число будет делителем числа 24?

А. $\frac{1}{2}$; **Б.** $\frac{7}{24}$; **В.** $\frac{3}{8}$; **Г.** $\frac{1}{3}$.

10. Сколько разных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 7, 9, если цифры в каждом числе не повторяются?

А. 256; **Б.** 24; **В.** 18; **Г.** 9

11. Известно, что биатлонист попадает в мишень с вероятностью, большей чем 0,8, но меньшей чем 0,85. Какое число наиболее точно отражает приблизительное количество произведенных во время тренировки выстрелов, если биатлонист попал в мишень 14 раз?

А. 17; **Б.** 20; **В.** 22; **Г.** 15.

12. В коробке 4 черные ручки, несколько синих и несколько красных. Сколько синих ручек в коробке, если вероятность наугад вынуть синюю ручку равна 0,5, а красную – 0,3?

А. 9; **Б.** 8; **В.** 12; **Г.** 10.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ К § 21–24

1. На полке стоит 7 сборников стихотворений и 3 сборника рассказов. Сколькими способами с полки можно взять:

1) любой сборник;
2) сборник стихотворений и сборник рассказов?

2. Какие из событий являются случайными:

1) при бросании игрального кубика выпадет 5 очков;
2) площадь круга радиусом 8 см будет равна 64π см^2;
3) следующим днем после 31 декабря будет 1 января;
4) приобретенный лотерейный билет окажется выигрышным?

3. Измерили (в см) рост пяти девятиклассниц и получили следующие данные: 160, 164, 158, 161, 162. Найдите среднее значение этих измерений.

4. Выполнили пять серий по 100 бросков монеты в каждой. Результаты исследований занесены в таблицу. Перенесите ее в тетрадь и вычислите относительную частоту события A в каждой из серий.

Серия	1	2	3	4	5
Выпадение аверса (событие A)	47	51	50	48	53
Относительная частота события A					

5. В ящике 11 белых, 4 черных и 5 зеленых шаров. Наугад вынимают один из них. Какова вероятность того, что он окажется:

1) белым; 2) не зеленым?

6. В таблицу занесены места, которые занимала футбольная команда «Металлист» в пяти последних чемпионатах области по футболу. По данным таблицы постройте график.

Год	2012	2013	2014	2015	2016
Место	5	3	6	2	4

7. В секции плавания тренируется 7 спортсменок. Сколькими способами между ними можно распределить этапы эстафеты 4 по 100 м свободным стилем (то есть каждая из четырех пловчих, участвующих в эстафете, проплывает свой этап: или первый, или второй, или третий, или четвертый)?

8. Было проверено 500 деталей, из которых 2 оказались бракованными.

1) Сколько приблизительно бракованных деталей будет в партии из 1500 деталей?
2) Сколько приблизительно было деталей в партии, если среди них оказалось 8 бракованных?

9. В шкафу лежит 10 зеленых, несколько черных и несколько серых пар носков. Сколько черных и сколько серых пар носков в шкафу, если вероятность взять наугад пару черных носков равна 0,3, а серых – 0,2?

Дополнительные задания

10. Сколько разных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 7, 9, если цифры в числе не повторяются?

11. Известно, что баскетболистка попадает в корзину со штрафного броска с вероятностью, большей чем 0,7, но меньшей чем 0,75. Сколько приблизительно штрафных бросков она выполнила во время тренировки, если попала в корзину 12 раз?

Упражнения для повторения главы 4

К § 21

1 **1007.** В танцевальном клубе занимаются 7 юношей и 9 девушек. Сколькими способами можно выбрать из них одну танцевальную пару для участия в конкурсе?

2 **1008.** Сколькими способами из звуков слова «туман» можно выбрать пару из одного гласного и одного согласного?

1009. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, белый, черный и зеленый шары?

1010. Из букв разрезной азбуки сложили слово «книга». Сколько разных последовательностей букв можно получить, переставляя буквы этого слова?

3 **1011.** Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1 и 2, если цифры в числе могут повторяться?

1012. Сколько можно составить разных четырехзначных чисел, используя только нечетные цифры, если цифры в числе могут повторяться?

1013. Сколько разных двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе:
1) могут повторяться;
2) не могут повторяться?

1014. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя в классе из 28 учащихся?

1015. Сколькими способами можно пошить двухцветный флаг из полос одинаковой ширины, если имеется шелк восьми разных цветов?

1016. В ряд выкладывают любые три буквы из слова «закон». Сколько разных последовательностей букв при этом можно получить?

4 **1017.** Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если цифры в числе не повторяются?

1018. Сколько существует четырехзначных чисел, все цифры которых четные и не повторяются?

1019. Сколько существует разных вариантов составления шифра из четырех цифр, если цифры в шифре:

1) могут повторяться; 2) не могут повторяться?

1020. В школьном расписании предусмотрено 5 уроков в день. Сколько разных вариантов расписания на один день можно составить, если в классе изучают 9 предметов и один и тот же предмет в один день не может повторяться?

1021. Во время встречи 8 мужчин обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано?

К § 22

1 **1022.** Какие из данных событий случайны, достоверны, невозможны:

1) перворазрядник по шахматам проиграет партию равному по силе сопернику;
2) при бросании игрального кубика выпадет число 11;
3) при бросании двух монет одновременно выпадет два аверса;
4) датой рождения случайного встречного будет 1 июня;
5) датой рождения случайного встречного будет 30 февраля;
6) из коробки, где лежат 6 зеленых и 5 красных карандашей будет вынут карандаш;
7) следующим днем после 1 декабря будет 2 декабря;
8) следующим днем после 2 декабря будет 1 декабря?

2 **1023.** Перенесите таблицу в тетрадь и для каждого испытания укажите пример достоверного, невозможного, случайного событий.

№ п/п	Испытание	Достоверное событие	Невозможное событие	Случайное событие
1	Бросание двух игральных кубиков одновременно			
2	Вытягивание платка из коробки, где лежат красные и зеленые платки			
3	Составление трехзначного числа из цифр 1, 2, 3			
4	Количество дней наугад выбранного месяца года			

1024. Были выполнены четыре серии по 100 бросков монеты в каждой. Результаты испытания занесены в таблицу. Перенесите ее в тетрадь и вычислите относительную частоту события А в каждой серии.

Серия	1	2	3	4
Выпадение аверса (событие A)	51	50	47	49
Относительная частота события A				

1025. Известно, что в партии из 10 000 тонометров 9 окажутся бракованными. Какова вероятность того, что наугад выбранный из этой партии тонометр будет бракованным?

1026. Исследователи разошлись по разным частям городка и записывали рост мужчин, которые им встречались, чтобы выяснить, мужчин какого роста в городке больше, а какого – меньше. Результаты этого исследования занесены в таблицу.

Рост, см	до 161	161–170	171–180	181–190	выше 190
Количество опрошенных	15	142	241	79	53

Оцените (с точностью до сотых) вероятность того, что рост выбранного наугад мужчины этого городка будет:
1) менее 161 см;
2) от 171 до 180 см;
3) более 180 см;
4) менее 181 см.

1027. (*Проектная деятельность*.) Выберите произвольный текст на украинском языке, а в нем – любые шесть строк подряд. Вычислите относительные частоты в этих строках букв «о» и «ц» и сравните полученные значения.

1028. В серии из 100 выстрелов стрелок попал в цель 84 раза.
1) Сколько приблизительно попаданий будет в серии из 150 выстрелов?
2) Сколько приблизительно выстрелов сделал стрелок, если среди них было 189 попаданий?

1029. Сергей играет в настольный теннис лучше, чем Василий, поэтому выигрывает партию с вероятностью, большей чем 0,6, но меньшей чем 0,7. Сколько приблизительно партий сыграли между собой ребята, если Сергей выиграл 5 партий?

К § 23

2 **1030.** 1) Все ли равновероятные события имеют вероятность, равную 0,5?

2) Приведите примеры двух равновероятных событий, вероятность которых не равна 0,5.

1031. В лотерее из 500 билетов 50 являются выигрышными. Какова вероятность выиграть в этой лотерее, если приобрести один билет?

1032. Игральный кубик бросают один раз. Найдите вероятность того, что выпавшее число очков:

1) будет делителем числа 9;
2) будет не больше числа 2;
3) будет не меньше числа 2;
4) будет квадратом натурального числа.

3 **1033.** В ящике a синих и b красных шаров. Из ящика забирают один красный шар, а затем – берут наугад еще один шар. Какова вероятность того, что он тоже окажется красным?

1034. Бросают две одинаковые монеты. Какое из событий более вероятно: A – монеты выпадут одинаковыми сторонами или B – монеты выпадут разными сторонами?

1035. В коробке 25 карточек, пронумерованных от 1 до 25. Из коробки наугад вытягивают одну карточку. Какова вероятность того, что на ней написано число:

1) 1; 2) 26; 3) четное;
4) нечетное; 5) кратное числу 5; 6) простое;
7) однозначное; 8) двузначное;
9) в записи которого есть цифра 2;
10) в записи которого нет цифры 1?

1036. Бросили два игральных кубика. Какова вероятность того, что модуль разности выпавших чисел будет равен 1?

4 **1037.** На десяти карточках записаны цифры от 0 до 9. Сначала берут наугад одну карточку, а потом, не возвращая ее назад, – еще одну. Из этих карточек образуется двузначное число: на первой карточке – десятки этого числа, на второй – единицы (например, если получилось 01 – это будет означать число 1). Найдите вероятность того, что полученное число:

1) кратно числу 3; 2) является делителем 99; 3) кратно числу 11.

1038. На пяти карточках записаны цифры от 1 до 5. Наугад берут одну карточку, запоминают число, записанное на ней, и возвращают карточку назад. Затем опять берут наугад одну карточку. Найдите вероятность того, что:

1) оба раза взяли одну и ту же карточку;

2) в первый раз взяли карточку с большим числом, чем во второй раз.

1039. В коробке 3 белых, 5 черных и несколько зеленых шаров. Сколько в коробке зеленых шаров, если вероятность того, что выбранный наугад шар является белым, больше чем 0,2, а вероятность того, что он зеленый, больше чем 0,4?

К § 24

1 **1040.** В таблице представлена информация о местах, которые занимала футбольная команда «Волынь» (г. Луцк) в пяти последних чемпионатах Украины по футболу.

Год	2012	2013	2014	2015	2016
Место	12	13	13	9	12

Какое место в среднем занимала команда «Волынь» в пяти последних чемпионатах?

2 **1041.** По данным таблицы предыдущей задачи постройте график.

3 **1042.** (*Проектная деятельность.*) Узнайте (из газет или Интернета) данные о количестве мячей, забитых командой вашего региона в последних десяти матчах чемпионата Украины по футболу. Постройте гистограмму и круговую диаграмму по этим данным.

4 **1043.** (*Проектная деятельность.*) 1) Узнайте и систематизируйте в частотную таблицу данные о результатах последней контрольной работы по алгебре в вашем классе.

2) Найдите частоты и относительные частоты выборки.

3) *Мода выборки* – это значение, которое встречается в выборке чаще всего. Найдите моду выборки.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ ЗА КУРС АЛГЕБРЫ 9 КЛАССА

1. Сравните a и b, если:

1) $a - b = 5$; 2) $a - b = -4{,}1$.

2. Запишите промежутки, изображенные на рисунках 87 и 88.

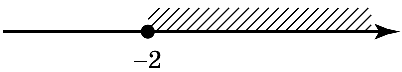


Рис. 87

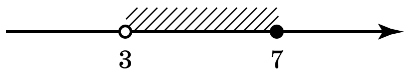


Рис. 88

3. Дано $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$. Найдите: 1) $f(0)$; 2) $f(3)$.

4. Решите неравенство:

1) $-3x < 12$; 2) $4x - x^2 \geqslant 0$.

5. Найдите девятый член и сумму первых десяти членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 9$, $d = -2$.

6. Известно, что в партии из 2000 деталей 5 являются бракованными. Какова вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется:

1) бракованной;
2) качественной?

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = -7. \end{cases}$

8. Постройте график функции $y = x^2 + 4x - 5$. По графику найдите:

1) область значений функции;
2) промежуток возрастания функции.

9. Докажите, что $x^2 + y^2 - 2(2x - y) + 5 \geqslant 0$ при любых значениях переменных x и y.

Задачи повышенной сложности

К главе 1

1044. Докажите неравенство:

1) $(x^3 - y^3)(x - y) \geqslant 3xy(x - y)^2$;
2) $(x^2 - y^2)(x^4 - y^4) \leqslant (x^3 - y^3)^2$.

1045. Докажите неравенство:

1) $9x^2 + 25 \geqslant 30|x|$; 2) $x^2 - 4x + 5 \geqslant 2|x - 2|$.

1046. Докажите, что для неотрицательных значений переменных x и y имеет место неравенство:

1) $x^3 + y^3 \geqslant x^2y + xy^2$; 2) $(x + y)^3 \leqslant 4(x^3 + y^3)$.

1047. Докажите, что если $x \geqslant y$, то:

1) $x^3 - y^3 \geqslant x^2y - yx^2$; 2) $x^5 - y^5 \geqslant x^4y - xy^4$.

1048. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, то имеет место неравенство $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

1049. Докажите, что:

1) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3$;

2) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} < 2$.

1050. Докажите неравенство: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{120}{121} > \frac{1}{11}$.

1051. Процент учащихся 9-го класса, владеющих тремя иностранными языками (английским, французским и немецким), находится в пределах от 2,9 % до 3,1 %. Определите, какое наименьшее количество учащихся может быть в этом классе. Сколько учащихся этого класса владеют тремя иностранными языками?

1052. Правильно ли, что:

1) если $a^2b \leqslant 0$, то $b \leqslant 0$; 2) если $\frac{a^2}{b} \geqslant 0$, то $b > 0$;

3) если $a^2b > 0$, то $b > 0$; 4) если $\frac{a^2}{b} < 0$, то $b < 0$?

1053. Между числами $\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{7}$ найдите число, равное квадрату рационального числа. Сколько существует таких чисел?

1054. Какая дробь ближе к единице: правильная или обратная ей неправильная?

1055. Решите уравнение с тремя переменными:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{y+1}{\sqrt{y}} + \frac{z+1}{\sqrt{z}} = 6.$$

1056. Докажите неравенство:

$$\left(1 + \frac{x^2}{yz}\right)\left(1 + \frac{y^2}{xz}\right)\left(1 + \frac{z^2}{xy}\right) \geqslant 8, \text{ где } x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

1057. Известно, что $x > 0$. Найдите наименьшее значение выражения: 1) $x + \dfrac{4}{x}$; 2) $\dfrac{x^2 + 15x + 36}{x}$.

1058. Известно, что $y > 0$. Найдите наибольшее значение выражения: 1) $\dfrac{y}{9 + y^2}$; 2) $\dfrac{y^2}{9y^4 + 4}$.

1059. Докажите, что если $x + y + z = 7$ и $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, то $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} < 5$.

1060. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{2 - \sqrt{5}(x + \sqrt{5}) - 2x}.$$

1061. Для всех значений параметра m решите неравенство:

1) $3(2m - x) < mx + 1$;

2) $5(3m + x) < mx - 7$.

1062. Существует ли такое значение a, чтобы решением системы $\begin{cases} x \leqslant 6, \\ x < a \end{cases}$ был промежуток:

1) $(-\infty; 7)$; 2) $(-\infty; 6)$; 3) $(-\infty; 6]$; 4) $(-\infty; 5)$?

К главе 2

1063. Докажите, что график функции $y = (x - a)(x - b) - c^2$ при любых значениях a, b и c имеет с осью x хотя бы одну общую точку.

1064. Постройте график функции:

1) $y = (x^2 - 5)^2 - (x^2 - 3)^2$;

2) $y = (x - 1)^2(x - 2) - (x - 2)^2(x - 1)$.

1065. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3}{(\sqrt{x})^2} - \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} - 2$; 2) $y = x^2 - 2x - (\sqrt{2x - 4})^2$.

1066. Прямая $x = 2$ является осью симметрии графика функции $y = ax^2 - (a + 6)x + 9$. Постройте график этой функции.

1067. При каком значении a область значений функции $y = x^2 - 2x + a$ совпадает с областью определения функции $y = \sqrt{2x - a}$?

1068. Постройте график функции:

1) $y = ||x^2 - 1| - 3|$; 2) $y = \dfrac{|x|}{|x| - 2}$.

1069. Докажите, что неравенство $\dfrac{x - a}{x - b} < 0$ равносильно неравенству $(x - a)(x - b) < 0$, а неравенство $\dfrac{x - a}{x - b} > 0$ равносильно неравенству $(x - a)(x - b) > 0$.

1070. Используя результаты предыдущей задачи, решите неравенство:

1) $\dfrac{x}{x - 2} > 0$; 2) $\dfrac{x + 3}{x - 1} < 0$; 3) $\dfrac{2x - 7}{x} > 0$; 4) $\dfrac{2x - 7}{5x + 1} < 0$.

1071. Решите неравенство:

1) $|x^2 + 3x| > 4$; 2) $|x^2 + 4x| < 5$;

3) $|2x^2 + 5x - 4| \leqslant 3$; 4) $|2 + 4x - 3x^2| \geqslant 2$.

1072. Найдите множество решений неравенства:
$(x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 \leqslant 0$.

1073. При каких значениях a областью определения функции $y = \sqrt{(a + 1)x^2 - 2(a - 1)x + (3a - 3)}$ является множество всех действительных чисел?

1074. При каких значениях m квадратный трехчлен $mx^2 - 7x + 4m$ принимает отрицательные значения при любых значениях x?

1075. При каких значениях a неравенство $\dfrac{x^2 + ax - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$ имеет место при любых значениях x?

1076. При каких значениях b двойное неравенство

$$-9 < \frac{3x^2 + bx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$$

имеет место при любом значении x?

1077. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значений a:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x| = 2? \end{cases}$

1078. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x + 1| + |y + 1| = 8, \\ |x + 1| = 2y - 5. \end{cases}$

1079. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y - 9 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 1 = 0. \end{cases}$

1080. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy = 15, \\ x^2 + x + y^2 + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -12, \\ x^2 - x + y^2 + y = 18. \end{cases}$

1081. Найдите все решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 26. \end{cases}$

1082. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$

1083. Найдите все решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$

1084. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \dfrac{2y}{x} = 1, \\ x^2 + y^2 + \dfrac{4x}{y} = 22; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2} + 2xy = \dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \dfrac{21}{4}. \end{cases}$

1085. С помощью замены $y = mx$ решите систему уравнений, левые части которых являются однородными многочленами:

1) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$

1086. Две точки движутся по окружности. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать за 1 мин на два оборота больше. Сколько оборотов в минуту совершает каждая из точек?

1087. Дорога из пункта A в пункт B сначала идет вверх, а потом – вниз (рис. 89). Туристы поднимаются по ней со скоростью на 1 км/ч меньшей, чем спускаются. На путь из A в B они тратят 4 часа, а на обратный – 4 ч 10 мин. С какой скоростью туристы поднимаются вверх и с какой – спускаются, если длина дороги из A в B равна 14 км?

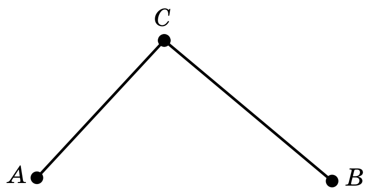


Рис. 89

1088. Два поезда, длина которых 490 м и 210 м, равномерно двигаются навстречу друг другу по параллельным путям. Машинист первого из них увидел встречный поезд на расстоянии 700 м, после чего через 28 с поезда встретились. Определите скорость каждого поезда, если первый из них проезжает мимо неподвижного наблюдателя на 35 с дольше, чем второй.

1089. Из одного места в одном направлении одновременно отправились два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, а второй – 60 км/ч. Через полчаса из того же места и в том же направлении выехал автомобиль, который догнал первого мотоциклиста через 1 ч 15 мин после того, как догнал второго. Определите скорость автомобиля.

1090. Два автомобиля выехали одновременно из двух городов навстречу друг другу и после встречи продолжили движение в том же направлении. Скорость одного автомобиля на 30 км/ч больше скорости другого, и он прибыл в пункт назначения через 2 ч после встречи. Другой автомобиль прибыл в свой пункт назначения через 4,5 ч после встречи. Найдите скорость каждого автомобиля.

1091. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу: первый из пункта A, второй из пункта B. Когда они встретились, первый прошел на 1 км больше второго. Через 45 мин после встречи первый пешеход прибыл в пункт B. Второй пешеход пришел в пункт A через 1 ч 20 мин после встречи. Найдите расстояние между пунктами A и B.

1092. Андрей, Петр и Сергей, работая вместе, могут почистить ведро картошки за 12 мин, Андрей, Петр и Юрий – за 15 мин, а Сергей и Юрий – за 20 мин. За сколько минут они выполнят эту работу, работая вчетвером?

1093. Тому Сойеру поручили покрасить забор. Если он будет делать это самостоятельно, то закончит красить на 8 ч позже, чем если бы делал это вместе с Геком. Если же красить будет только Гек, то выполнит эту работу на 4,5 ч позже, чем если бы делал это вместе с Томом. За какое время ребята покрасят забор, работая вместе?

1094. Сплавили два сорта чугуна с разным процентным содержанием хрома. Если одного сорта взять в 5 раз больше, чем второго, то процентное содержание хрома в сплаве будет вдвое большим, чем его процентное содержание в меньшей из сплавляемых частей. Если же взять одинаковое количество обоих сортов, то сплав будет содержать 8 % хрома. Определите процентное содержание хрома в каждом из этих двух сортов чугуна.

1095. В 17 ч из своего дома на стадион выехал на велосипеде болельщик Сергей, двигаясь с запланированной скоростью и рассчитывая приехать на футбольный матч в 18 ч 30 мин, за полчаса до его начала. В 17 ч 20 мин брат Сергея Петр заметил, что Сергей забыл билет, и позвонил ему на мобильный. Сергей тут же развернул велосипед и, увеличив скорость на 3 км/ч, поехал домой, а Петр со скоростью 5 км/ч вышел ему навстречу. Во время встречи Петр отдал Сергею билет, и тот с той же скоростью отправился на стадион. В итоге Сергей приехал на стадион за 20 мин до начала матча. Каково расстояние от дома Сергея до стадиона и с какой скоростью он планировал ехать?

К главе 3

1096. *Последовательность* называют *возрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего. Какие из последовательностей возрастающие:

1) $a_n = 5n - 7$; 2) $b_n = 3 - 4n$; 3) $c_n = (-1)^n$;

4) $x_n = \dfrac{6}{n}$; 5) $y_n = -\dfrac{8}{n}$; 6) $a_n = n^2 + 7n$;

7) $b_n = n^3$; 8) $c_n = n^2 - 8n$; 9) $x_n = (1 - n)^2$?

1097. *Последовательность* называют *убывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего. Какие из последовательностей убывающие:

1) $c_n = \dfrac{1}{2}n - 8$; 2) $a_n = 4 - 5n$; 3) $b_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{2}$;

4) $x_n = \dfrac{10}{n}$; 5) $y_n = -\dfrac{1}{n}$; 6) $c_n = -n^2 - n$;

7) $g_n = -(n + 1)^3$; 8) $b_n = -2n^2 + 10n$; 9) $x_n = \dfrac{1}{n^5}$?

1098. Найдите сумму n первых членов последовательности (x_n), если $x_n = \dfrac{1}{n(n + 1)}$.

1099. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия с положительными членами. Докажите, что сумма n первых членов последовательности (x_n), где $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$, равна $\dfrac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}$.

1100. Между числами –19,88 и 19,91 вставлено n чисел, которые вместе с данными образуют арифметическую прогрессию. При каком значении n разность этой прогрессии принадлежит области определения функции $y = \sqrt{-x^2 + 7|x| - 12}$?

1101. Докажите, что если a, b и c – три последовательных члена арифметической прогрессии, то числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$ и $b^2 + bc + c^2$ в указанном порядке также образуют арифметическую прогрессию.

1102. Докажите, что если стороны прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию, то ее разность равна радиусу окружности, вписанной в этот треугольник.

1103. Пусть дана последовательность концентрических окружностей (то есть окружностей, имеющих общий центр) с центром в точке $A(-6; 8)$ таких, что их радиусы R_n образуют арифметическую прогрессию с первым членом 1,6 и разностью 0,4. Существует ли в этой последовательности окружность, проходящая через начало координат? Если существует, то какой у нее номер?

1104. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Известно, что $a_{2m} + a_{2k} = 0$. Докажите, что $a_{m+k} = 0$.

1105. В арифметической прогрессии $S_m = S_n$, $m \neq n$. Докажите, что $S_{m+n} = 0$.

1106. Известно, что при любом значении n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности находится по формуле $S_n = 2n^2 + 3n$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией, и найдите ее разность.

1107. Последовательность чисел 1; 8; 22; 43; ... обладает следующим свойством – разности двух соседних чисел образуют арифметическую прогрессию 7; 14; 21; ... . Найдите номер члена последовательности, равного 35 351.

1108. В возрастающей арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, состоящей из целых чисел, наибольший член равен сумме квадратов остальных членов. Найдите эту прогрессию.

1109. Докажите, что если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то его высоты также образуют геометрическую прогрессию.

1110. Последовательность (b_n) – конечная геометрическая прогрессия. Докажите, что $\dfrac{S_n - b_n}{S_n - b_1} = \dfrac{1}{q}$.

1111. a, b, c – последовательные члены геометрической прогрессии. Докажите, что $\dfrac{a^2 + b^2}{a} = \dfrac{b^2 + c^2}{c}$.

1112. Две геометрические прогрессии имеют одинаковое количество членов. Первый член и знаменатель первой прогрессии равны соответственно 20 и $\dfrac{3}{4}$, а первый член и знаменатель второй соответственно равны 4 и $\dfrac{2}{3}$. Если перемножить члены этих прогрессий с одинаковыми номерами, то сумма всех произведений будет равна $158\frac{3}{4}$. Найдите, сколько членов в этих прогрессиях.

1113. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 257, а произведение второго и предпоследнего членов равно 256. Найдите количество членов прогрессии, если их сумма равна 511.

1114. Найдите все прогрессии, которые одновременно являются и арифметическими, и геометрическими.

1115. Сумма трех последовательных членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если из первых двух ее членов вычесть по 1, а к третьему прибавить 1, то три полученных числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите три исходных числа.

1116. Сумма трех чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 91. Если к этим числам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получим три числа, образующих арифметическую прогрессию. Найдите седьмой член геометрической прогрессии.

1117. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если ко второму из них прибавить 2, то они образуют арифметическую прогрессию. Если же после этого к третьему числу прибавить 16, то прогрессия опять станет геометрической. Найдите три исходных числа.

1118. Предприятие ежегодно увеличивало объем своей продукции на один и тот же процент и за два года увеличило производство вдвое. Найдите процент, на который ежегодно увеличивался объем продукции этого предприятия.

К главе 4

1119. На полке вплотную друг к другу стоят 50 книг, часть – по физике, часть – по математике. Известно, что ни одна книга по физике не стоит рядом с другой книгой по физике, а каждая книга по математике обязательно стоит рядом с другой книгой по математике. Каким может быть наибольшее количество книг по физике?

1120. В квадрате 2017×2017 закрашены все клетки на каждой из диагоналей. Наугад выбирают одну клетку. Какова вероятность того, что она не закрашена?

1121. Телефонный номер Николая состоит из семи разных цифр. Наталья хочет ему позвонить, помня, что все цифры его номера разные, но забыла две последние цифры. Какова вероятность того, что, набирая номер телефона наугад, Наталья с первой попытки дозвонится Николаю?

1122. Из отрезков длиной 1; 3; 5; 7 и 9 см выбирают наугад три. С какой вероятностью из этих трех отрезков можно будет построить треугольник?

1123. Какова вероятность того, что в январе выбранного наугад года будет пять суббот?

1124. В шахматном турнире участвовало 10 гроссмейстеров, двое из которых – украинцы. Каждый из гроссмейстеров сыграл по одной партии с каждым из соперников. Любитель шахмат Александр Семенович решил посмотреть одну из партий турнира, выбрав ее наугад. Какова вероятность того, что в этой партии встречались:

1) два украинских гроссмейстера;
2) украинский гроссмейстер с зарубежным?

1125. Учащийся наугад выбирает одно из чисел от 1920 до 2019. Какова вероятность того, что это число можно будет записать в виде $2^a - 2^b$, где a и b – натуральные числа?

1126. Все грани куба с ребром 1 м окрашены. Куб распилили на 1000 кубиков с ребром 10 см. Из этих кубиков выбирают наугад один. Какова вероятность того, что у него:

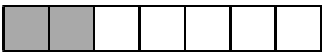
1) окрашены 3 грани;
2) окрашены 2 грани;
3) окрашена одна грань;
4) ни одна из граней не окрашена?

ОБРАЗЕЦ ВАРИАНТА АТТЕСТАЦИОННОЙ ПИСЬМЕННОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Задания 1–12 имеют по четыре варианта ответа, из которых только ОДИН ответ ПРАВИЛЬНЫЙ. Выберите правильный, по вашему мнению, вариант ответа.

1. Какая часть полоски закрашена?



А) $\frac{2}{5}$; Б) $\frac{5}{7}$; В) $\frac{1}{7}$; Г) $\frac{2}{7}$.

2. Сколько килограммов сушеных яблок можно получить из 9 кг свежих, если из 30 кг свежих яблок получается 3 кг сушеных?

А) 0,8 кг; Б) 0,09 кг; В) 1,8 кг; Г) 0,9 кг.

3. Укажите уравнение, корнем которого является число 6.

А) $0x = 6$; Б) $5x = 30$; В) $-5x = 30$; Г) $5x = -30$.

4. Упростите выражение $(m - 3t)(m + 3t) - m^2$.

А) $-9t^2$; Б) $-3t^2$; В) $2m^2 - 9t^2$; Г) $-2m^2 - 9t^2$.

5. Выполните действие $3\sqrt{2} + \sqrt{2}$.

А) $3\sqrt{4}$; Б) $3\sqrt{2}$; В) $4\sqrt{2}$; Г) $2\sqrt{2}$.

6. Вычислите $\left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-7}$.

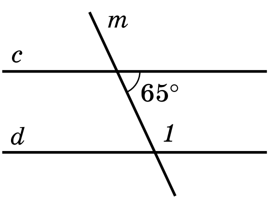
А) 16; Б) 4; В) $\frac{1}{16}$; Г) -16.

7. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_3 = 14$, $q = -2$. Найдите b_2.

А) 7; Б) -7; В) 12; Г) 16.

8. Укажите множество решений неравенства $x^2 - 25 \le 0$.

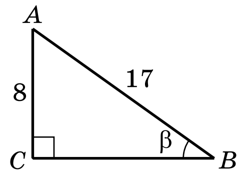
А) $(-5; 5)$; Б) $[-5; 5]$;
В) $(-\infty; 5]$; Г) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$.



9. Прямые c и d параллельны, m – их секущая. Укажите градусную меру угла *1*.

А) 65°; Б) 105°;
В) 115°; Г) 125°.

10. По рисунку найдите $\cos\beta$.



А) $\frac{15}{17}$; Б) $\frac{8}{17}$; В) $\frac{8}{15}$; Г) $\frac{17}{15}$.

11. Укажите координаты середины отрезка, концами которого являются точки $K(-2;\ 1)$ и $L(6;\ -13)$.

А) $(-2;\ 6)$; Б) $(-2;\ -6)$; В) $(4;\ -12)$; Г) $(2;\ -6)$.

12. В квадрат, площадь которого 16 см^2, вписана окружность. Найдите длину этой окружности.

А) 2π см; Б) 8π см; В) 4π см; Г) 16π см.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Решите задания 13–16. Запишите ответ к каждому из них.

13. Упростите выражение $\left(\dfrac{a+7b}{a^2-7ab}-\dfrac{a-7b}{a^2+7ab}\right):\dfrac{28b^2}{49b^2-a^2}$.

14. Найдите наименьшее целое значение x, при котором разность дробей $\dfrac{29-3x}{2}$ и $\dfrac{x+7}{3}$ будет отрицательной.

15. Найдите область значений функции $y = 2x^2 + 4x - 1$.

16. При каких значениях b векторы $\vec{m}(-12;\ b)$ и $\vec{n}(3b;\ -9)$ коллинеарны?

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

Решения заданий 17–19 должны быть обоснованы. В них нужно записать последовательные логические действия и пояснения, сделать ссылки на математические факты, из которых следует то или иное утверждение. При необходимости проиллюстрировать решения схемами, графиками, таблицами.

17. Поезд задержался в пути на 30 мин. Чтобы прибыть вовремя, машинист поезда на перегоне длиной 225 км увеличил скорость на 5 км/ч по сравнению с запланированной. С какой запланированной скоростью должен был двигаться поезд?

18. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y - xy + x = 2, \\ y + xy - 3x = 0. \end{cases}$

19. Углы параллелограмма относятся как $9 : 11$. Найдите угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 1

16. 1) $\sqrt{5} - 2 = \dfrac{1}{\sqrt{5} + 2}$; 2) $\sqrt{7} - \sqrt{3} > \dfrac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

17. 1) $\sqrt{3} - 1 > \dfrac{1}{\sqrt{3} + 1}$; 2) $4 + \sqrt{15} = \dfrac{1}{4 - \sqrt{15}}$. **18.** 1) Указание. $a^2 + 10a + 26 = (a + 5)^2 + 1$. **23.** 2) Указание. $a^2 + b^2 - (4(a + b) - 8) = (a - 2)^2 + (b - 2)^2$; 3) $m^2 + n^2 + 1 - (m + n + mn) = \dfrac{(m^2 - 2mn + n^2) + (m^2 - 2m + 1) + (n^2 - 2n + 1)}{2}$. **24.** 3) Указание. Докажите, что $(a + 1)^3 - 4(a^3 + 1) = -3(a + 1)(a - 1)^2$. **26.** 2) Указание. $\dfrac{3m}{5n} + \dfrac{5n}{12m} - (-1) = \dfrac{(6m + 5n)^2}{60mn}$. **28.** $m^3 + n^3 > mn(m + n)$. **29.** Произведение первого и четвертого выражений меньше произведения второго и третьего. **32.** 8 дней. **33.** 1,5. **34.** 2505 грн. **38.** $65\dfrac{5}{11}$ км/ч. **55.** 1) $a > 0$; 2) $a < 0$; 3) $a > 0$; 4) $a > 0$. **56.** 1) $x < 0$; 2) $x > 0$; 3) $x > 0$; 4) $x < 0$. **57.** 1) Да; 2) нет. **58.** 1) $x + 2 > y$; 2) $y - 3 < x$; 3) $-x + 1 < -y + 1$; 4) $-x < -y + 8$; 5) $-(x + 1) < -y$; 6) сравнить невозможно. **59.** 1) $a - 2 < b$; 2) $b + 3 > a$; 3) $-a + 2 > -b + 2$; 4) $-b - 7 < -a$; 5) $-a > -(b + 3)$; 6) сравнить невозможно. **60.** 1) $3{,}1 < 2x + 0{,}7 < 3{,}7$; 2) $3{,}5 < 5 - x < 3{,}8$; 3) $-0{,}6 < \dfrac{x}{3} - 1 < -0{,}5$; 4) $-13 < 2 - 10x < -10$. **61.** 1) $2{,}2 < 3a - 0{,}2 < 3{,}4$; 2) $2{,}8 < 4 - a < 3{,}2$; 3) $3{,}4 < \dfrac{a}{2} + 3 < 3{,}6$; 4) $4 < 10 - 5a < 6$. **62.** 1) $4 < \dfrac{20}{a} < 10$; 2) $0{,}1 < \dfrac{1}{3a + 4} < 1$. **63.** 1) $10 < \dfrac{100}{x} < 20$; 2) $0{,}2 < \dfrac{1}{2x - 3} < 1$. **64.** $4{,}2 < a < 5$. **65.** $48 < p < 51$. **66.** 1) $x > y$; 2) $x < y$. **67.** 1) $a < b$; 2) $a > b$. **68.** $3 < \dfrac{12}{7 - 3a} < 12$. **69.** $3 < \dfrac{27}{13 - 2b} < 9$. **70.** $\dfrac{6}{x} > 3$ или $\dfrac{6}{x} < -3$. **72.** 1) -3; 2) -4. **74.** 12,25. **75.** Модель B ($R = 32{,}5$), модель A ($R = 28$). **76.** Говерла, Днепр. **92.** Нет. **95.** 1) $2{,}5 < \dfrac{a}{b} < 10$; 2) $\dfrac{2}{15} < \dfrac{4b}{3a} < \dfrac{8}{15}$. **96.** 1) $\dfrac{2}{5} < \dfrac{x}{y} < 4$; 2) $\dfrac{5}{8} < \dfrac{5y}{2x} < \dfrac{25}{4}$. **97.** $10{,}8 < P < 12{,}4$. **98.** $28 < P < 34$. **99.** $63° < \angle A < 70°$. **102.** Указание. Используйте неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим и почленное умножение неравенств. **103.** См. указание к предыдущему номеру. **104.** Указание. Воспользуйтесь тем, что $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ при $x > 0$. **106.** 100 г 6-процентного и 200 г 3-процентного. **107.** $4\frac{2}{3}$. **109.** 1) 96,5 км/ч; 2) 0,63 км/ч. **114.** 1. **124.** −1; −2. **125.** 1; 2; 3; 4. **126.** 1) Любое число, кроме 0; 2) любое число, кроме 0; 3) любое число; 4) $x = 0$; 5) любое число, кроме 1; 6) любое число; 7) нет решений; 8) $x = 1$; 9) нет решений. **127.** 1) Любое число; 2) любое число, кроме −2; 3) нет решений; 4) $x = -2$; 5) нет решений; 6) любое число. **128.** 1) Любое число, кроме −2; 2) нет решений; 3) любое число, кроме 0; 4) любое число, кроме 0 и −1; 5) любое положительное число; 6) 1 и любое отрицательное число. **129.** 1) Любое число, кроме 3; 2) нет решений; 3) любое число, кроме 0; 4) любое число, кроме 0 и 1; 5) любое положительное число, кроме 3; 6) любое отрицательное число. **133.** ≈ 122 см. **140.** На $16\frac{2}{3}$ %. **164.** 1) $A \cup B$; 2) $A \cap C$; 3) $B \cap C$. **165.** 1) $A \cup C$; 2) $A \cap C$; 3) $B \cap C$. **168.** 60 км/ч. **169.** 6 или −6. **173.** 1) На 5-й мин; 2) за 5 мин; 3) за 2 мин; 4) на 30 °С. **174.** −4; 2. **199.** 1) $a > 0$; 2) $a < 0$. **200.** 1) $b > 0$; 2) $b < 0$. **202.** 1) 1; 2; 3; 2) 1; 2; 3; 4; 5. **203.** 1) 1; 2; 2) 1; 2; 3. **204.** 1) 9; 2) 0. **205.** 1) 5; 2) 0. **206.** 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) нет решений. **207.** 1), 3) Нет решений; 2), 4) $(-\infty; +\infty)$. **208.** Меньше чем 12 см. **209.** 1) $a > -7$; 2) $a > -2$. **210.** 1) $a = 0$; 2) $a = 3$. **211.** 1) $b < -4{,}5$; 2) $-4 < b < 0$ или $b > 0$. **212.** 1) $a > -4$; 2) $a > 9$. **213.** 1) Если $a < 0$, то $x < \frac{3}{a}$; если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $x > \frac{3}{a}$; 2) если $a < 0$, то $x \leqslant 0$; если $a = 0$, то x − любое число; если $a > 0$, то $x \geqslant 0$; 3) если $a < 0$, то $x > 0$; если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $x < 0$; 4) если $a < 0$, то $x < -\frac{5}{a}$; если $a = 0$, то x − любое число; если $a > 0$, то $x > -\frac{5}{a}$. **214.** 48. **215.** 51. **218.** 2 км/ч. **221.** 950,4 грн. **224.** Последнее, у нее 30 % побед. **241.** 1) 6; 7; 2) 1; 2. **242.** 1) −5; −4; −3; −2; −1; 2) 7; 8. **243.** 1) 1; 2) −2. **244.** 1) 1; 2) −1. **249.** 1), 3) Нет решений; 2) $x < 2{,}8$; 4) x − любое число. **250.** 1) Нет решений; 2) $x < 10$. **251.** 1) [3; 5) ∪ (5; 7); 2) (5; 10). **252.** 1) [2; 4) ∪ (4; 6); 2) (3; 8). **253.** От 1 см до 6 см. **254.** $-1 < a < 0$. **255.** $a > 3$. **259.** 1) $15 < 2x - y < 38$; 2) $2 < \frac{x}{y} < 10$. **260.** $m < -\frac{1}{2}$. **261.** За 60 мин. **262.** Нет корней. **265.** 2), 3). **267.** 1) $m > 0$; 2) $m < 0$; 3) $m < 0$; 4) $m > 0$. **269.** 1) $a^3 - b^3 \geqslant ab(b - a)$; 2) $m^2 + n^2 \geqslant \frac{1}{2}$. **270.** Первый.

271. Площадь квадрата больше. **276.** 1) $8x > 5y$; 2) $3x > y$; 3) $-3x < -y$; 4) $-5x < -2y$. **278.** 1) $2a - 10 > 0$; 2) $35 - 7a < 0$. **279.** 1) $1 < |x| < 3$; 2) $0 \leqslant |x| < 7$. **283.** 1), 3) Да; 2), 4) нет. **284.** $81 < S < 100$. **285.** 1) $3m + 2n > 12$; 2) $b - 3a < 0$; 3) сравнить невозможно; 4) $p - 4q < 9$. **286.** 1) $5 < a^2 + 2a + 5 < 8$; 2) $-4 < x^2 - 4x < -3$; 3) $\frac{3}{20} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{3}{10}$; 4) $-6 < \frac{1}{mn} - 7 < -3\frac{2}{3}$. **287.** $x > y$. **288.** $20 < S < 60$. **293.** 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. **294.** -1 и -2. **298.** Наименьшее число 1,6, наибольшего не существует. **307.** 30. **308.** 1) $[11; +\infty)$; 2) $[5; 7) \cup (7; +\infty)$. **309.** Больше 9 см. **310.** 1) $a > 1$; 2) $a < 0$ или $0 < a < \frac{1}{4}$. **311.** 1) Если $a < -3$, то $x \leqslant \frac{a-5}{a+3}$; если $a = -3$, то x – любое число; если $a > -3$, то $x \geqslant \frac{a-5}{a+3}$; 2) если $a < 3$, то $x > -3$; если $a = 3$, то решений нет; если $a > 3$, то $x < -3$; 3) если $a < -1$, то $x < a - 1$; если $a = -1$, то решений нет; если $a > -1$, то $x > a - 1$; 4) если $a < -2$ или $a > 2$, то $x \leqslant \frac{1}{a+2}$; если $a = -2$, то решений нет; если $-2 < a < 2$, то $x \geqslant \frac{1}{a+2}$; если $a = 2$, то x – любое число. **312.** 7, 8, 9 или 10. **317.** 1) 1; 2; 3; 2) натуральных решений нет. **319.** 2) $[8; 9]$. **320.** 19. **322.** 1) $a > 5$; 2) $a \geqslant 2$. **323.** 1) Если $a \leqslant 2$, то решений нет; если $a > 2$, то $2 < x < a$; 2) если $a \leqslant 6$, то $x > 6$; если $a > 6$, то $x > a$. **324.** $a < -0{,}5$ или $a > 1{,}5$. **325.** $0 \leqslant a \leqslant 8$. **326.** 56.

Фискальная математика

1. На 3 059 025 тыс. грн. **2.** На 915 грн. **3.** 670 грн. **4.** 8 грн. **5.** 216 грн; 2592 грн. **6.** 5600 грн; 5174,4 грн.

Глава 2

344. 7) x – любое число; 8) $(-\infty; -1) \cup (-1; 5) \cup (5; +\infty)$; 9) $[2; +\infty)$; 10) $(-2{,}5; +\infty)$. **345.** 7) x – любое число; 8) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$; 9) $[-3; +\infty)$; 10) $(3{,}5; +\infty)$. **347.** $k = -3$, $b = 5$. **348.** $k = 3$, $b = -7$. **349.** 1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3]$; 3) $[2; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$; 5) $[5; +\infty)$; 6) $(-\infty; 9]$. **355.** $c = 3$, $x_2 = 1$. **356.** $-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. **357.** Один. **358.** 4186 грн. **362.** 50. **374.** 1) $(0; 3)$, $(-3; 0)$; 2) $(0; \sqrt{2})$, $(-2; 0)$; 3) $(0; -1)$, $(1; 0)$; 4) $(2; 0)$. **375.** 1) $(0; -5)$, $(5; 0)$; 2) $(0; 3)$, $(-9; 0)$; 3) $(0; 1)$, $(-2; 0)$; 4) $(-3; 0)$. **378.** 1) 3; 2) 2. **379.** 1) 2; 2) 2. **383.** 1) $x > 1$; 2) $-10 \leqslant x < -4$. **384.** 70 км/ч и 80 км/ч. **385.** $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $c = 6$. **386.** 14 мин. **388.** Первая дробь меньше. **403.** 1) $x = -3$, $x = 1$; 2) $[-4; +\infty)$; 3) $-3 < x < 1$; 4) $[-1; +\infty)$. **404.** 1) $x = 1$, $x = 3$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $x < 1$ или $x > 3$; 4) $(-\infty; 2]$. **405.** 1) $x = 5$; 2) $x = -3$, $x = 0$. **406.** 1) $x = 3$; 2) $x = 0$, $x = 5$.

407. Указание. $\dfrac{x+4}{x-2} = \dfrac{x-2+6}{x-2} = \dfrac{x-2}{x-2} + \dfrac{6}{x-2} = \dfrac{6}{x-2} + 1.$

408. Указание. $\dfrac{x+5}{x+1} = \dfrac{x+1+4}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+1} + \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{4}{x+1} + 1.$

409. 2) $a = 4$. **411.** $-2 \leqslant x < 5$. **412.** 10. **413.** 2 с. **418.** 1) 4; 2) 7. **438.** $y = \dfrac{1}{12}x^2$. **441.** $a = -10$. **442.** $b = 2$. **443.** 1) $b = 2$; 2) $b = -10$. **444.** $a = -3$. **445.** 1) (2; 2) и (5; 5); 2) (4; −4) и (2; −2). **446.** 1) (0; 0) и (6; 6); 2) (2; −2) и (−5; 5). **448.** (2,5; 8) и (2; 7). **449.** (1; −5) и (0,2; −4,2). **450.** ≈ 10,6 с. **451.** 1) 125 м; 2) поднималась в первые 5 с, спускалась в следующие 5 с; 3) через 10 с. **452.** 1) 11,25 м; 2) поднимался в первые 1,5 с, спускался в следующие 1,5 с; 3) через 3 с. **453.** $b = -10$, $c = 32$. **454.** $a = 2$, $c = 5$. **455.** $a = 1$, $b = -6$, $c = 7$. **456.** $c = 7$. **457.** $c = 8$. **458.** $c > 16$. **459.** $c < -1$. **466.** 1. **467.** 1) −3; 3; 2) −2; 2; 3. **468.** 7376 человек. **471.** На 11. **487.** 1) $(-\infty; -1 - 2\sqrt{2}) \cup (-1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$; 2) $\left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$. **488.** 1) $(2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7})$; 2) $\left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup$ $\cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$. **491.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $\varnothing$; 3) $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$; 4) $\{4\}$; 5) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; 6) $\{5\}$; 7) $(-\infty; +\infty)$; 8) $\varnothing$. **492.** 1) Нет решений; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $\{3\}$; 4) $(-\infty; 0{,}6) \cup (0{,}6; +\infty)$; 5) $\{1\}$; 6) $(-\infty; +\infty)$; 7) $\varnothing$; 8) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$. **493.** 1) 1; 2) 1; 2; 3; 4. **494.** 1) 1; 2; 3; 2) −3; −2; −1; 0. **495.** 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) нет решений. **496.** 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) нет решений. **498.** 1) −3; 2) −2. **499.** 1) 1; 2) 0. **500.** 1) $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$; 2) $(-\infty; -2{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$; 3) $\left(-1; -\dfrac{1}{3}\right)$; 4) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **501.** 1) $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$; 2) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. **502.** 1) $[-1; 2) \cup (2; 3]$; 2) $(-\infty; -2] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$. **503.** 1) (0; 1); 2) $(3; +\infty)$. **504.** 1) $(-\infty; -4{,}5]$; 2) [8; 12). **505.** 1) 0; 1; 5; 6; 2) −3; 1; 2. **506.** 1) 0; 1; 3; 4; 5; 2) 1; 2; 3. **507.** 1) $[3; 4) \cup (4; 5]$; 2) $(-\infty; -2) \cup$ $\cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$. **508.** [3; 4). **509.** (4; 5]. **510.** 1) $-2 < a < 6$; 2) $0 < a < \dfrac{12}{13}$. **511.** 1) $a < 2$ или $a > 6$; 2) $a < 0$ или $0 < a < 0{,}4$, или $a > 2$. **512.** 1) $-7 < a < 5$; 2) $a < 0$ или $0 < a < \dfrac{1}{4}$. **513.** 1) $0 < m < 28$; 2) $m < -4$. **516.** $a = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. **517.** 9 упаковок. **522.** Да. **533.** 1) (2; 1), (2; −1); 2) нет решений. **534.** 1) (3; 1), (−3; 1); 2) нет решений. **535.** 1) (−4; 0), (−1; −3); 2) (0; 2). **536.** 1) (−6; 0), (−1; −5); 2) (0; 3). **537.** 1) Одно решение; 2) четыре решения. **538.** 1) (3; 2),

$(-42;\ 11)$; 2) $(5;\ 0)$, $(3;\ 4)$; 3) $(-2;\ 4)$, $(2;\ 2)$; 4) $(4;\ 3)$, $\left(\frac{3}{7};\ -\frac{4}{7}\right)$.

539. 1) $(-1;\ -1)$, $(5;\ 2)$; 2) $(3;\ 2)$, $(-1{,}2;\ 3{,}4)$; 3) $(3;\ -1)$, $(-3;\ 2)$; 4) $(2;\ 3)$, $(15;\ -10)$. **540.** 1) $(3;\ 2)$, $(-4;\ 9)$; 2) $(3;\ 5)$, $(5;\ 3)$, $(-3;\ -5)$, $(-5;\ -3)$. **541.** 1) $\left(3{,}5;\ \frac{3}{7}\right)$; 2) $(2;\ 5)$, $(2;\ -5)$, $(-2;\ 5)$, $(-2;\ -5)$; 3) $(1;\ 4)$, $(-1;\ -4)$; 4) $(1;\ 5)$, $(-1;\ -5)$. **542.** 1) $\left(5;\ \frac{1}{2}\right)$; 2) $(1;\ 2)$, $(1;\ -2)$, $(-1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$; 3) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$; 4) $(-3;\ 1)$, $(3;\ -1)$. **543.** 1) $(2;\ 3)$, $(-2{,}5;\ -1{,}5)$; 2) $(4;\ -1)$, $(2;\ -3)$. **544.** 1) $(2;\ 1)$, $\left(-1\frac{1}{3};\ -2\frac{1}{3}\right)$; 2) $(-1;\ -8)$, $\left(-4\frac{1}{3};\ 2\right)$.

545. 1) $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$; 2) $(3;\ 2)$, $(-2;\ -3)$; 3) $(1;\ 0)$, $(-1{,}5;\ 2{,}5)$; 4) $(2;\ -1)$, $\left(\frac{21}{53};\ \frac{15}{53}\right)$. **546.** 1) $(3;\ 2)$, $(-10;\ 15)$; 2) $(-1{,}5;\ 0{,}5)$, $(0{,}5;\ 2{,}5)$. **547.** 1) $a = 2$; 2) $a = -2$. **548.** $[-11{,}5;\ -9]$. **549.** 2 км/ч. **551.** 5000. **552.** 1) Тетрадь – 9 грн, карандаш – 6 грн; 2) 18 км/ч; 2 км/ч. **555.** –7 и 4. **556.** 4 и –3. **557.** –2 и –5. **558.** 6 и 4. **559.** 20 м и 30 м. **560.** 8 см и 10 см. **561.** 5 см и 12 см. **562.** 6 см и 8 см. **563.** 5 и 10 или 30 и –15. **564.** 6 и 3 или 1 и –2. **565.** 24. **566.** 48. **567.** 8 с./мин и 10 с./мин. **568.** Яна – 6 задач, Оля – 5 задач. **569.** 5 м и 8 м или 19,5 м и 22,5 м. **570.** 21 ряд. **571.** 60 км/ч и 80 км/ч. **572.** 12 км/ч и 18 км/ч. **573.** 3 км/ч и 12 км/ч. **574.** 28 см. **575.** 30 см^2. **576.** 6 ч и 3 ч. **577.** Отец за 10 дней, сын – за 15 дней. **578.** 4 км/ч и 5 км/ч. **579.** 12 км/ч и 18 км/ч. **580.** 20 км/ч и 2 км/ч. У к а з а н и е. Для решения полученной системы используйте метод замены переменной. **581.** 18 км/ч и 12 км/ч. У к а з а н и е. Пусть скорость велосипедиста, ехавшего из A в B, – x км/ч, а другого – y км/ч. По условию задачи имеем систему уравнений $\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{9}{10}y = 18, \\ \frac{18}{y} - \frac{18}{x} = \frac{9}{10} - \frac{2}{5}. \end{cases}$

584. $[-3;\ 2) \cup (2;\ 3]$. **585.** 8. **586.** Наталья живет в третьем подъезде на 5 этаже, Сергей – в пятом подъезде на 7 этаже. **587.** 2017^{10}. **594.** 1), 3), 4) Да; 2) нет. **595.** 1) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 0) \cup \cup \left(0;\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$; 3) $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -1) \cup \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 6) $(2;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$; 7) $x = 0$; 8) $x = -1$; 9) $x = 0$. **596.** 1) 0; 2) 0; 3) $[0;\ 2]$; 4) $(0;\ 1]$; 5) $[-2;\ +\infty)$; 6) $\left(0;\ \frac{1}{4}\right]$. **600.** 1) Не существуют; 2) 1; 3) 10. **601.** 1) $(-2;\ +\infty)$;

2) $(-\infty;\ -2)$. **607.** 1) $(-\infty;\ -4) \cup \cup\ (-4;\ +\infty)$; 2) $x = 0$; 3) нет таких промежутков; 4) $(-\infty;\ -3)$ и $(-3;\ +\infty)$; 5) $-3 < x < 0$; 6) $x < -3$ или $x > 0$. **608.** $a = 2$. **615.** $c = 9$. **616.** $a = -2$. **617.** 1) $[0;\ 8]$; 2) $[-27;\ 0]$. **618.** $(-1;\ 4)$, $(5;\ 10)$. **619.** $p = -5$; $q = 8$. **621.** $x = 4$. **622.** 1) $-0{,}5$; 2) -1. **623.** 1) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D = 0$; 2) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D > 0$; 3) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D < 0$; 4) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$, $D > 0$. **625.** $a > \frac{8}{7}$. **631.** 1) $(-\infty;\ -3) \cup (7;\ +\infty)$; 2) $[3;\ 6]$; 3) $\left(-\infty;\ \frac{3}{5}\right] \cup [1;\ +\infty)$; 4) $\left(-\frac{1}{2};\ 2\right)$. **632.** Меньше чем 5 см. **633.** $0 < x \leqslant 7$. **634.** $-1{,}5 \leqslant x \leqslant -\frac{4}{3}$. **635.** 1) $c = 16$; 2) $c = 9$. **636.** 1) $[-2;\ -1) \cup (1;\ 2]$; 2) $[-3;\ -1) \cup (0;\ 2]$. **637.** $a = -2$. **638.** $m < -\frac{1}{7}$ или $m > 1$. **639.** Если $a \leqslant -6$ или $a \geqslant -1$, то $x_{1,2} = a - 1 \pm \pm \sqrt{a^2 + 7a + 6}$; если $-6 < a < -1$, то решений нет. **640.** 1) Если $a < 2$, то $-2 < x < -a$; если $a = 2$, то решений нет; если $a > 2$, то $-a < x < -2$; 2) если $a < -1$, то $x \leqslant 2a$ или $x \geqslant -a - 3$; если $a = -1$, то x − любое число; если $a > -1$, то $x \leqslant -a - 3$ или $x \geqslant 2a$. **641.** 1) Если $m \leqslant -2$, то $x < m$; если $-2 < m \leqslant 3$, то $x \leqslant -2$; если $m > 3$, то $x \leqslant -2$ или $3 \leqslant x < m$; 2) если $m \leqslant -4$, то $-4 < x < 2$; если $-4 < m < 2$, то $m \leqslant x < 2$; если $m \geqslant 2$, то система не имеет решений. **645.** 1) $(2;\ 5)$; 2) система не имеет решений. **646.** 1) $(6;\ 2)$, $(2;\ 6)$; 2) $(3;\ -4)$, $(-3;\ 4)$, $(-4;\ 3)$, $(4;\ -3)$. **647.** 1) $(3;\ 2)$, $(-3;\ 2)$, $(-3;\ -2)$, $(3;\ -2)$; 2) $(3;\ -2)$, $(-3;\ -2)$; 3) $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$; 4) $(6;\ 10)$. **648.** 1) $(4;\ 1)$; 2) $(-1;\ 0)$, $(0;\ -1)$, $(1;\ 0)$. **649.** 1) $(-1;\ -2)$, $(-2{,}5;\ -1)$; 2) $(3;\ 1)$, $(-3;\ -1)$. **650.** 1) $(6;\ 2)$, $\left(\frac{8}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; 2) $(2;\ 1)$, $\left(\frac{126}{11};\ -\frac{54}{11}\right)$. **651.** 5 и 2 или −2 и −5. **652.** 5 и 7. **653.** 4 см и 8 см. **654.** 4 и 5 или 15 и $\frac{4}{3}$. **655.** 12 см и 9 см. **656.** 4 см и 5 см. **657.** 35. **658.** 28 см или 26 см. **659.** 90 км/ч и 80 км/ч. **660.** 8. **661.** 7. **662.** 25 или 85. **663.** 100 × 80 м. **664.** 20 ч и 30 ч. **665.** 20 деталей.

Глава 3

676. 1) $y_9 = 7$; 2) $y_3 = y_6 = -29$; 3) не является членом последовательности; 4) $y_{12} = 79$. **677.** 1) $x_{10} = 69$; 2) не является членом последовательности; 3) $x_2 = 5$; 4) $x_1 = x_3 = 6$. **678.** 1) $c_1 = 8$, $c_2 = 3$, $c_3 = -2$, $c_4 = -7$, $c_5 = -12$; 2) $c_1 = -3$, $c_2 = -3$, $c_3 = -3$, $c_4 = -3$, $c_5 = -3$; 3) $c_1 = -2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $c_4 = 4$, $c_5 = 5$; 4) $c_1 = 0$, $c_2 = -5$, $c_3 = -5$, $c_4 = 1{,}25$, $c_5 = -0{,}3125$. **679.** 1) $y_1 = 5$, $y_2 = 3$, $y_3 = -1$, $y_4 = -9$, $y_5 = -25$; 2) $y_1 = 16$, $y_2 = 1$, $y_3 = 8$, $y_4 = \frac{1}{16}$; $y_5 = 64$. **680.** 1) $a_1 = 25$; 2) $b_4 = 32$; 3) $c_{2k} = 1$, где k – натуральное число; 4) $y_2 = y_3 = 6$. **681.** 1) $x_1 = -1$; 2) $a_4 = -21$. **684.** –7. **685.** (0; 2), (0; –2), (–3; –1), (3; 1). **686.** Через 5 месяцев. **689.** (1; 2; 3); (–1; –2; –3). **705.** 1) 5; 2) $4\frac{1}{3}$; $5\frac{2}{3}$; 3) 4; 5; 6. **706.** 18; 21; 24; 27. **707.** 1) $a_n = -x + 3xn$; 2) $a_n = \frac{m-2}{m} + \frac{1}{m}n$. **708.** 1) $a_1 = 39$, $d = -2$; 2) $a_1 = 5$, $d = 2$. **709.** 1) $c_1 = -45$, $d = 3$; 2) $c_1 = -1$, $d = -3$. **710.** 1) Да; 2) нет. **711.** 1) Нет; 2) да. **712.** 32. **713.** 27. **714.** 1) $d = 5$; 2) 69. **715.** $x = 1$ или $x = 6$. **716.** $y_1 = -1$ или $y = 4$. **717.** $m = 1$. **718.** 1) –37; 2) 2,5. **719.** 1) –25; 2) 5,4. **723.** 1) -1; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 2) $1 \pm \sqrt{2}$. **724.** Да. **725.** $[-10; 0) \cup (0; 1]$. **726.** 96 000 грн. **740.** 1) 42 653; 2) 12 425; 3) 12 402; 4) 1635. **741.** 1) 12 810; 2) 123 525. **742.** 1) –44; 2) 98. **743.** 1) –275; 2) 192,5. **744.** 4. **745.** 4. **746.** 100. **747.** –100. **748.** 15. **749.** –197,4. **750.** 484. **751.** 1) 15; 2) –3 или 6. **752.** 1) 12; 2) –37. **753.** 610. **754.** 6 ч. **757.** $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$. **759.** 10 Ом. **762.** 6 или $-\frac{6}{19}$. **778.** $x_1 = 12$, $q = 4$. **779.** 1) $q = 2$ или $q = -2$; 2) $q = 3$; 3) $q = \frac{3}{4}$ или $q = -\frac{3}{4}$; 4) $q_1 = -1$. **780.** 1) $q = 3$ или $q = -3$; 2) $q = \frac{1}{3}$. **781.** 2,5; –5; 10; –20; 40. **782.** $-\frac{5}{4}$; 5; –20; 80; –320; 1280. **783.** $x_5 = \frac{1}{32}$. **784.** $b_1 = \frac{1}{1000}$ или $b_1 = -\frac{1}{1000}$. **785.** 1) $c_1 = 1000$; 2) $c_6 = 64$ или $c_6 = -64$. **786.** 10 клеток; 40 клеток; 320 клеток. **787.** 1) 1; 8; 64 или 1; –8; 64; 2) 1; 4; 16; 64. **788.** $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_5 = 8$. **789.** 4; 2; 1 при $x = 1$, и –9; –24; –64 при $x = -12$. **790.** –1; 1; –1 при $y = -1$. **793.** 8 см^2. **795.** 1) $a_1 = 3$, $d = 2$; 2) $a_1 = 5$, $d = -1$. **797.** –10,008. **799.** На 85 см. **800.** $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$. **801.** 1) 13 676,31 грн; 16 850,58 грн; 2) 3676,31 грн; 6850,58 грн. **802.** 1) 25 088 грн; 31 470,39 грн; 2) 5088 грн; 11 470,39 грн. **803.** $8000(1{,}09^n - 1)$; 1504,8 грн; 2360,23 грн. **804.** 7972 грн. **805.** 5800 грн. **806.** 8000 грн. **807.** 1) 1825,35 грн; 2) 1665,94 грн. **808.** 1) 47 550 человек; 2) 45 219 человек. **809.** 20 %. **819.** 211. **820.** 67,1 см. **821.** 1) 189; 2) –409,5. **822.** 1) 682; 2) 183. **823.** 1) $1\frac{127}{128}$; 2) 605; 3) –10; 4) 635. **824.** 1) $1\frac{364}{729}$; 2) 2295; 3) –104; 4) 364. **825.** 1) 5; 2) 27. **826.** 1) 3; 2) 81. **827.** 1) $\frac{1}{x^2 - 1}$; 2) $-\frac{1}{x + 1}$. **828.** 781 или –521. **829.** 364 или 182. **830.** Незнакомец, предложивший уговор. Богач получил 3 000 000 руб., а заплатил 10 737 418,23 руб. **831.** 728. **832.** –22.

833. 1) 6; 2) 7; 3) 5. **835.** −31,2. **836.** 252. **837.** 20 000 грн под 10 % годовых и 40 000 грн под 7 % годовых. **839.** (2; −2); (−2; 2). **840.** В салоне «Гамма», 2755 грн. **841.** Легковушка за 2 ч, мотоциклист за 4 ч. **844.** 7. **845.** $x_n = 7 - \frac{1}{3}n$. **846.** $b_1 = -1$. **847.** 1) $a_n = 2n - 1$; 2) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 3) $a_n = n^2$; 4) $a_n = 2^n$; 5) $a_n = (-1)^n$; 6) $a_n = (-1)^n + 2$. **848.** 5. **855.** 1) −5,5; 2) −200. **856.** 27. **857.** $a_{45} = -0{,}1$. **858.** Да; средняя сторона равна 13 см. **859.** 16; 25 или 4; 1. **866.** 1) −420; 2) −615. **867.** 1) 3; 2) 7. **868.** 9 дней. **869.** $a_1 = 8$, $d = 2$. **870.** 1) 81; 2) 105. **871.** 3750. **872.** 1) $p^{\frac{n-n^2}{2}}$; 2) $c^{\frac{n^2+n}{2}}$. **877.** 2; −4; 8; −16; 32. **878.** $-\frac{8}{3}$. **879.** $c_8 = \frac{1}{5}$, $c_9 = \frac{1}{25}$. **880.** −18. **881.** 9. **882.** 1; −3; 9, если $x = 2$. **883.** 1) $b_1 = 1{,}2$, $q = 2$; 2) $b_1 = 3$, $q = 2$. **884.** Могут, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}}$. **888.** 3069 см². **889.** 781,2. **890.** 61. **891.** 765. **892.** 510 или $15\frac{15}{16}$. **893.** $b_1 = 3$, $q = -2$, $n = 6$. **894.** 1; 4; 16; 64; 256; 1024. **895.** В 10 ч 30 мин.

Глава 4

904. 720. **905.** 120. **906.** 6. **907.** 16. **908.** 20. **909.** 1680. **910.** 36. **911.** 8. **912.** 1) 60; 2) 125. **913.** 1) 20; 2) 25. **914.** 6. **915.** 120. **916.** 600. **917.** 18. **918.** 8. **919.** 45. **920.** 240. **921.** 48. **922.** 24. **924.** (1; 1), (2; 0). **925.** 1) −2,5; 0; 1; 2) −2; 2; 3. **927.** 28,8 км/ч. **928.** 12. **939.** Нет. **940.** 1) ≈0,44; 2) ≈0,23; 3) ≈0,75; 4) ≈0,91. **941.** 1) ≈0,09; 2) ≈0,25; 3) ≈0,56; 4) ≈0,77. **942.** 1), 3), 4) Случайная; 2) достоверная; 5) невозможная. **946.** 1) 9; 2) 2400. **947.** 1) 495; 2) 700. **948.** 21 или 22, или 23. **949.** От 55 до 59 выстрелов. **952.** (−2,5; −1). **953.** −10,008. **955.** 190,08 грн. **956.** 3,5. **969.** $\frac{3}{4}$. **970.** $\frac{4}{15}$. **971.** $\frac{8}{15}$. **972.** 1) $\frac{12}{365}$; 2) $\frac{7}{365}$; 3) $\frac{71}{365}$. **973.** 1) $\frac{2}{61}$; 2) $\frac{11}{366}$; 3) $\frac{35}{366}$. **974.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{2}$. **975.** 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{2}$. **976.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 0; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{1}{12}$. **977.** 1) 4; 2) 8; 3) меньше 12; 4) меньше 24. **978.** 1) 4; 2) 2; 3) больше 6; 4) больше 2. **979.** Зеленых – 2 ручки, красных – 5. **980.** 10 красных платков и 2 в клетку. **981.** 6 красных роз. **982.** 3 или 4 вареника. **983.** $\frac{1}{3}$ **984.** $\frac{1}{2}$. **985.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{2}$. **990.** (2;−2), (−2;2). **991.** 72 км/ч.

992. $c < 0$. **1003.** 15 км/ч. **1004.** 1) 26 620 грн, 2) 6620 грн. **1005.** В Люксембурге – 15 евро, в Венгрии – 7812,5 форинтов, в Украине – 573,13 грн. **1006.** 8 чисел. **1010.** 120. **1011.** 8. **1012.** 625. **1013.** 1) 25; 2) 20. **1014.** 756. **1015.** 56. **1016.** 60. **1017.** 48. **1018.** 96. **1019.** 1) 10000; 2) 5040. **1020.** 15120. **1021.** 28. **1026.** 1) 0,03; 2) 0,45; 3) 0,25; 4) 0,75. **1028.** 1) 126; 2) 225. **1029.** 8 партий. **1033.** $\frac{b-1}{a+b-1}$. **1034.** Равновероятные события. **1035.** 1) $\frac{1}{25}$; 2) 0; 3) $\frac{12}{25}$; 4) $\frac{13}{25}$; 5) $\frac{1}{5}$; 6) $\frac{9}{25}$; 7) $\frac{9}{25}$; 8) $\frac{16}{25}$; 9) $\frac{8}{25}$; 10) $\frac{13}{25}$. **1036.** $\frac{5}{18}$. **1037.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{30}$; 3) 0. **1038.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{2}{5}$. **1039.** 6.

Задачи повышенной сложности

1045. 2) Указание. $x^2 - 4x + 5 - 2|x - 2| = (x - 2)^2 - 2|x - 2| + 1 = (|x - 2| - 1)^2 \geqslant 0$. **1048.** Указание. Рассмотрите разность квадратов левой и правой частей. **1049.** 1) Указание. Замените последнее число 6 в левой части неравенства на 9. **1050.** Указание. Рассмотрите $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{120}{121}$ и $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{119}{120}$. Докажите, что $x > y$, поэтому $x^2 > xy$. **1051.** 33 учащихся, из которых 1 владеет тремя иностранными языками. **1052.** 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) да. **1053.** Например $\frac{16}{25}$. Существует бесконечное множество таких чисел. **1054.** Правильная. **1055.** $x = y = z = 1$. **1057.** 1) 4; 2) 27. Указание. Используйте неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. **1058.** 1) $\frac{1}{6}$. Указание. $\frac{9 + y^2}{2} \geqslant 3y$, поэтому $\frac{y}{9 + y^2} \leqslant \frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$. **1059.** Указание. $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x + y + z + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \leqslant$ $\leqslant 7 + 2\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2}\right)$. **1060.** $x \leqslant 3(2 - \sqrt{5})$. **1061.** 1) Если $m < -3$, то $x < \frac{6m-1}{m+3}$; если $m = -3$, то x – любое число; если $m > -3$, то $x > \frac{6m-1}{m+3}$; 2) если $m < 5$, то $x < \frac{15m+7}{m-5}$; если $m = 5$, то неравенство не имеет решений; если $m > 5$, то $x > \frac{15m+7}{m-5}$. **1062.** 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) да. **1063.** Указание. $y = x^2 - (a + b)x + (ab - c^2)$. Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - (a + b)x + (ab - c^2)$ равен $(a - b)^2 + 4c^2$. **1066.** Указание. $a = 2$. **1067.** $a = 2$. **1070.** 1) $x < 0$ или $x > 2$; 2) $-3 < x < 1$; 3) $x < 0$ или $x > 3{,}5$;

4) $-\frac{1}{5} < x < 3{,}5$. **1071.** 1) $x < -4$ или $x > 1$; 2) $-5 < x < 1$; 3) $-3{,}5 \leqslant x \leqslant -\frac{5+\sqrt{33}}{4}$ или $\frac{\sqrt{33}-5}{4} \leqslant x \leqslant 1$; 4) $x \leqslant -\frac{2}{3}$ или $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$, или $x \geqslant 2$. **1072.** $-3 \leqslant x \leqslant -1$. **1073.** $a \geqslant 1$. **1074.** $m < -\frac{7}{4}$. **1075.** $-6 < a < 2$. **1076.** $-3 < b < 6$. **1077.** 1) Если $|a| > 2\sqrt{2}$, система не имеет решений; если $|a| = 2\sqrt{2}$, система имеет единственное решение; если $|a| < 2\sqrt{2}$, система имеет два решения; 2) если $|a| < 2$, система не имеет решений; если $|a| = 2$, система имеет два решения; если $|a| > 2$, система имеет четыре решения. **1078.** (2; 4), (−4; 4). **1079.** (1; 2), $\left(-\frac{239}{146}; \frac{117}{146}\right)$. **1080.** 1) Система не имеет решений; 2) (4; −3), (3; −4). **1081.** 1) (2; 1), (1; 2); 2) (3; 1), (−1; −3). **1082.** $x = y = 4$, $z = -4$. **1083.** 1) (3; 1), (1; 3). Указание. Замена $x + y = u$, $xy = v$; 2) (3; 5), (5; 3). **1084.** 1) (3; 1), (−3; −1), $\left(\frac{14\sqrt{106}}{53}; \frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$, $\left(-\frac{14\sqrt{106}}{53}; -\frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$; 2) (2; 1), (1; 2), (−1; −2), (−2; −1), $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$. **1085.** 1) (3; 2), (−3; −2), $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; 2) (2; 1), (−2; −1). **1086.** 6 и 4. **1087.** 3 км/ч и 4 км/ч. **1088.** 10 м/с и 15 м/с. **1089.** 100 км/ч. **1090.** 90 км/ч, 60 км/ч. **1091.** 7 км. **1092.** 10 мин. **1093.** 6 ч. **1094.** 11 %; 5 %. **1095.** 18 км; 12 км/ч. Указание. Пусть x км/ч – запланированная Сергеем скорость, а y км – расстояние от дома до стадиона. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y = 1{,}5x; \\ \frac{1}{3} + \frac{x}{3(x+8)} + \frac{y - \frac{5x}{3(x+8)}}{x+3} = 1\frac{2}{3}. \end{cases}$$

1096. 1), 5), 6), 7), 9). **1097.** 2), 4), 6), 7), 9). **1098.** $\frac{n}{n+1}$. **1100.** 9; 10; 11; 12. **1103.** Да; $n = 22$. **1106.** $d = 4$. **1107.** 101. **1108.** −1; 0; 1; 2. **1112.** 7. **1113.** 9. **1114.** Только последовательности одинаковых, отличных от нуля, чисел. **1115.** 3; 5; 7. **1116.** 5103 или $\frac{7}{81}$.

1117. 1; 3; 9 или $\frac{1}{9}$; $-\frac{5}{9}$; $\frac{25}{9}$. **1118.** ≈41,4 %. **1119.** 17. **1120.** $\left(\frac{2016}{2017}\right)^2$. **1121.** $\frac{1}{20}$. **1122.** 0,3. **1123.** $\frac{3}{7}$. **1124.** 1) $\frac{1}{45}$; 2) $\frac{16}{45}$. **1125.** $\frac{1}{50}$. **1126.** 1) $\frac{1}{125}$; 2) $\frac{12}{125}$; 3) $\frac{48}{125}$; 4) $\frac{64}{125}$.

Ответы к заданиям «Домашняя самостоятельная работа»

№ задания / № работы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	Б	Г	Г	А	Б	В	А	Б	Г	В	Б
2	В	Б	А	Г	В	Б	В	Г	А	В	Б	Б
3	Б	Б	Г	А	В	Г	А	В	Б	А	Г	Г
4	Б	А	В	Г	Б	Г	В	В	Б	Б	В	Г
5	В	Г	Б	А	Б	В	В	А	Г	В	А	Г

Ответы к варианту аттестационной письменной работы по математике

Часть первая

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
А				X		X				X		
Б			X				X	X				
В					X				X			X
Г	X	X									X	

Часть вторая

13. $-\frac{1}{b}$. **14.** 7. **15.** $[-3; +\infty)$. **16.** -6; 6.

Часть третья

17. 45 км/ч. **18.** (2; 2), (0,5; 1). **19.** 81°.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Російською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Головний редактор *Наталія Заблоцька*. Редактор *Оксана Єргіна*.
Обкладинка *Тетяни Кущ*. Художнє оформлення *Василя Марущинця*.
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*. Коректор *Любов Федоренко*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 16,5. Обл.-вид. арк. 15,04.
Тираж 5494 пр. Вид. № 1897. Зам. №

Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 5088 від 27.04.2016.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ», вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4526 від 18.04.2013.