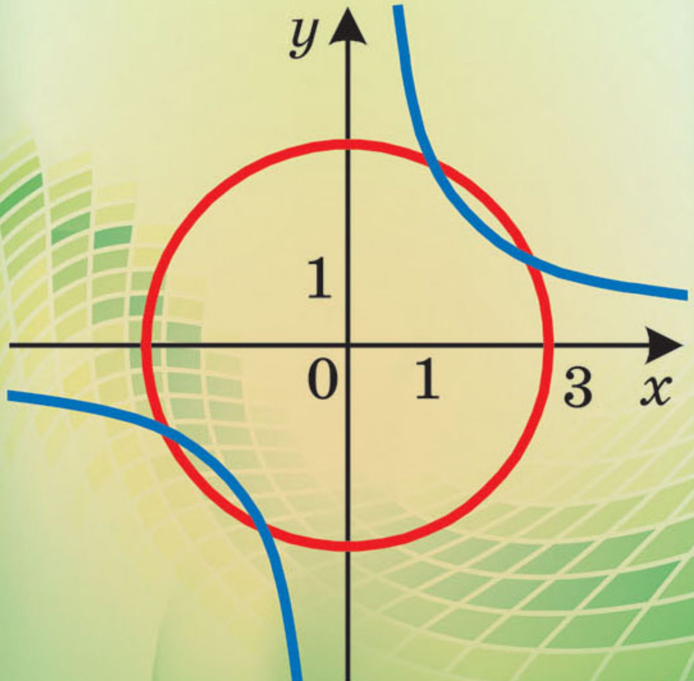
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

9

# АЛГЕБРА




ГІМНАЗІЯ

УДК 373.167.1:512
М52

*Рекомендовано*
*Министерством образования и науки Украины*
(приказ МОН Украины от 20.03.2017 № 417)

**Издано за счет государственных средств.**
**Продажа запрещена**

*Эксперты, которые проводили экспертизу данного учебника во время проведения конкурсного отбора проектов учебников для 9 класса общеобразовательных учебных заведений и сделали заключение о целесообразности предоставления учебнику грифа «Рекомендовано Министерством образования и науки Украины»:*

*Я. П. Сысак*, ведущий научный сотрудник отдела алгебры и топологии Института математики НАН Украины, доктор физико-математических наук;

*Н. В. Кравченко*, методист РМЦ отдела образования Красноградской районной государственной администрации Харьковской области, старший учитель;

*Ю. А. Андрух*, учитель математики Черновицкого многопрофильного лицея № 4, учитель-методист

**Мерзляк А. Г.**
М52 Алгебра : учеб. для 9 кл. общеобразоват. учеб. заведений с обуч. на рус. яз. : пер. с укр. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — Х. : Гимназия, 2017. — 272 с. : ил.
ISBN 978-966-474-303-4.

**УДК 373.167.1:512**



ISBN 978-966-474-303-4
ISBN 978-966-474-293-8 (укр.)

# От авторов

## ДОРОГИЕ ДЕВЯТИКЛАССНИКИ!

В этом учебном году вы продолжите изучать алгебру. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями. Хочется верить, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделен на три параграфа, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал. Самые важные сведения выделены **жирным *шрифтом*** и *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, приступать к которым мы советуем только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи, особенно отмеченные «звездочкой» (*). Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме из рубрики «Проверьте себя».

Десять пунктов учебника завершаются рубрикой «Учимся делать нестандартные шаги». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные алгебраические знания, а лишь здравый смысл, изобретательность и смекалка. Эти задачи полезны, как витамины. Они помогут вам научиться принимать неожиданные и нестандартные решения не только в математике, но и в жизни.

Если после выполнения домашних заданий останется свободное время, то рекомендуем обратиться к рубрикам «Когда сделаны уроки» и «Для тех, кто хочет знать больше». Материал, изложенный в них, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

## УВАЖАЕМЫЕ КОЛЛЕГИ!

Мы надеемся, что этот учебник станет надежным помощником в вашем нелегком и благородном труде, и будем искренне рады, если он вам понравится.

В книге собран обширный и разнообразный дидактический материал. Однако за один учебный год все задачи решить невозможно, да в этом и нет никакой необходимости. Вместе с тем гораздо удобнее работать, когда есть большой запас задач. Это позволит реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении.

Материал рубрики «Когда сделаны уроки» можно использовать для организации работы математического кружка и факультативных занятий.

Желаем творческого вдохновения и терпения.

## Условные обозначения

$n^{\circ}$ — задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;

$n^{\bullet}$ — задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;

$n^{\bullet\bullet}$ — задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;

$n^{*}$ — задачи для математических кружков и факультативов;

◀ — окончание доказательства теоремы, решения примера;

 задания, которые можно выполнять с помощью компьютера;

 рубрика «Когда сделаны уроки».

**Зеленым** цветом отмечены номера задач, рекомендуемых для домашней работы, **синим** цветом — номера задач, которые с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса на усмотрение учителя можно решать устно.

# § 1 НЕРАВЕНСТВА

- В этом параграфе вы узнаете, в каком случае считают, что число $a$ больше (меньше) числа $b$; изучите свойства числовых неравенств; узнаете, что называют решением неравенства с одной переменной, решением системы неравенств с одной переменной.
- Вы научитесь оценивать значения выражений, доказывать неравенства, решать линейные неравенства и системы линейных неравенств с одной переменной.

## 1. Числовые неравенства

На практике вам часто приходится сравнивать величины. Например, площадь спортивного зала больше площади классной комнаты, площадь Украины (603,5 тыс. км$^2$) больше площади Франции (551,5 тыс. км$^2$), высота горы Роман-Кош (1545 м) меньше высоты горы Говерлы (2061 м), расстояние от Киева до Харькова (450 км) равно 0,011 длины экватора.

Результаты таких сравнений можно записывать в виде числовых неравенств, используя знаки $>$, $<$.

Если число $a$ больше числа $b$, то пишут: $a > b$; если число $a$ меньше числа $b$, то пишут: $a < b$.

Очевидно, что $12 > 7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$, $\sqrt{2} > 1$. Справедливость этих неравенств следует из правил сравнения действительных чисел, которые вы изучили в предыдущих классах.

Однако числа можно сравнивать не только с помощью изученных ранее правил. Другой способ, более универсальный, основан на таких очевидных соображениях: если разность двух чисел положительна, то уменьшаемое больше вычитаемого, если же разность отрицательна, то уменьшаемое меньше вычитаемого.

Эти соображения подсказывают, что удобно принять такое определение.

**Определение. Число $a$ больше числа $b$, если разность $a - b$ является положительным числом. Число $a$ меньше числа $b$, если разность $a - b$ является отрицательным числом.**

Это определение позволяет задачу о сравнении двух чисел свести к задаче о сравнении их разности с нулем. Например, чтобы сравнить значения выражений $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ и $2-\sqrt{3}$, рассмотрим их разность:

$$\frac{2}{2+\sqrt{3}}-\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-(4-3)}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Поскольку $\frac{1}{2+\sqrt{3}}>0$, то $\frac{2}{2+\sqrt{3}}>2-\sqrt{3}$.

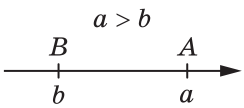



**Рис. 1.1**

Заметим, что разность чисел $a$ и $b$ может быть либо положительной, либо отрицательной, либо равной нулю, поэтому *для любых чисел $a$ и $b$ справедливо одно и только одно из таких соотношений: $a>b$, $a<b$, $a=b$.*

Если $a>b$, то точка, изображающая число $a$ на координатной прямой, лежит правее точки, изображающей число $b$ (рис. 1.1).

Часто в повседневной жизни мы пользуемся высказываниями «не больше», «не меньше». Например, в соответствии с санитарными нормами количество учеников в классе должно быть не больше 30. Дорожный знак, изображенный на рисунке 1.2, означает, что скорость движения автомобиля должна быть не меньше 30 км/ч.


**Рис. 1.2**

В математике для высказывания «не больше» используют знак $\leqslant$ (читают: «меньше или равно»), а для высказывания «не меньше» — знак $\geqslant$ (читают: «больше или равно»).

Если $a<b$ или $a=b$, то верно неравенство $a\leqslant b$.

Если $a>b$ или $a=b$, то верно неравенство $a\geqslant b$.

Например, неравенства $7\leqslant 7$, $7\leqslant 15$, $-3\geqslant -5$ верны. Заметим, что, например, неравенство $7\leqslant 5$ неверно.

Знаки $<$ и $>$ называют знаками **строгого неравенства**, а знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ называют знаками **нестрогого неравенства**.

**ПРИМЕР 1** Докажите, что при любых значениях $a$ верно неравенство

$$(a+1)(a+2)>a(a+3).$$

*Решение.* Для решения достаточно показать, что при любом значении $a$ разность левой и правой частей данного неравенства положительна. Имеем:

$$(a+1)(a+2)-a(a+3)=a^2+2a+a+2-a^2-3a=2. ◄$$

В таких случаях говорят, что **доказано неравенство**

$$(a+1)(a+2)>a(a+3).$$

**ПРИМЕР 2** Докажите неравенство $(a-3)^2<2a^2-6a+10$, где $a$ — любое действительное число.

*Решение.* Рассмотрим разность левой и правой частей данного неравенства:

$$(a-3)^2-(2a^2-6a+10)=a^2-6a+9-2a^2+6a-10=-a^2-1=-a^2+(-1).$$

При любом значении $a$ имеем: $-a^2\leqslant 0$. Сумма неположительного и отрицательного чисел является числом отрицательным. Значит, $-a^2+(-1)<0$. Отсюда следует, что $(a-3)^2<2a^2-6a+10$ при любом значении $a$. ◄

**ПРИМЕР 3** Докажите неравенство $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

*Решение.* Рассмотрим разность левой и правой частей данного неравенства. Имеем:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Выражение $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ принимает неотрицательные значения при любых неотрицательных значениях переменных $a$ и $b$. Следовательно, доказываемое неравенство верно. ◄

Заметим, что выражение $\sqrt{ab}$ называют **средним геометрическим** чисел $a$ и $b$.

Итак, мы доказали, что *среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического*.

**ПРИМЕР 4** Докажите, что $a^2-ab+b^2\geqslant 0$ при любых значениях $a$ и $b$.

*Решение.* Имеем:

$$a^2-ab+b^2=a^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2.$$

Поскольку $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2\geqslant 0$ и $\frac{3}{4}b^2\geqslant 0$ при любых значениях $a$ и $b$, то $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqslant 0$ при любых значениях $a$ и $b$.

Следовательно, $a^2-ab+b^2\geqslant 0$ при любых значениях $a$ и $b$. ◄

?

1. В каком случае считают, что число $a$ больше числа $b$?
2. В каком случае считают, что число $a$ меньше числа $b$?
3. Как расположена на координатной прямой точка, изображающая число $a$, относительно точки, изображающей число $b$, если $a > b$?
4. Какой символ используют для высказывания «не больше» и как этот символ читают?
5. Какой символ используют для высказывания «не меньше» и как этот символ читают?
6. В каком случае верно неравенство $a \leqslant b$?
7. В каком случае верно неравенство $a \geqslant b$?
8. Поясните, какие знаки называют знаками строгого, а какие — нестрогого неравенства.

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.1.**° Сравните числа $a$ и $b$, если:
1) $a - b = 0{,}4$; 2) $a - b = -3$; 3) $a - b = 0$.

**1.2.**° Известно, что $m < n$. Может ли разность $m - n$ быть равной числу:
1) 4,6; 2) −5,2; 3) 0?

**1.3.**° Какое из чисел, $x$ или $y$, больше, если:
1) $x - y = -8$; 2) $y - x = 10$?

**1.4.**° Как расположена на координатной прямой точка $A(a)$ относительно точки $B(b)$, если:
1) $a - b = 2$; 3) $a - b = 0$;
2) $a - b = -6$; 4) $b - a = \sqrt{2}$?

**1.5.**° Могут ли одновременно выполняться неравенства:
1) $a > b$ и $a < b$; 2) $a \geqslant b$ и $a \leqslant b$?

**1.6.**° Сравните значения выражений $(a-2)^2$ и $a(a-4)$ при значении $a$, равном: 1) 6; 2) −3; 3) 2. Можно ли по результатам выполненных сравнений утверждать, что при любом значении $a$ значение первого выражения больше соответствующего значения второго выражения? Докажите, что при любом значении $a$ значение первого выражения больше соответствующего значения второго выражения.

**1.7.**° Сравните значения выражений $4(b+1)$ и $b-2$ при значении $b$, равном: 1) −1; 2) 0; 3) 3. Можно ли утверждать, что при любом значении $b$ значение выражения $4(b+1)$ больше соответствующего значения выражения $b-2$?

**1.8.°** Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

1) $(a+3)(a+1)>a(a+4)$;
2) $3(b-4)+2b<5b-10$;
3) $(c-4)(c+4)>c^2-20$;
4) $x(x+6)-x^2<2(3x+1)$;
5) $(y+5)(y-2)\geqslant 3y-10$;
6) $8m^2-6m+1\leqslant(3m-1)^2$;
7) $a(a-2)\geqslant -1$;
8) $(b+7)^2>14b+40$.

**1.9.°** Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

1) $(p-3)(p+4)<p(p+1)$;
2) $(x+1)^2>x(x+2)$;
3) $(a-5)(a+2)>(a+5)(a-8)$;
4) $y(y+8)<(y+4)^2$;
5) $(2a-5)^2\leqslant 6a^2-20a+25$;
6) $a^2+4\geqslant 4a$.

**1.10.**• Верно ли утверждение:

1) если $a>b$, то $\frac{a}{b}>1$;
2) если $a>1$, то $\frac{2}{a}<2$;
3) если $a<1$, то $\frac{2}{a}>2$;
4) если $\frac{a}{b}>1$, то $a>b$;
5) если $a^2>1$, то $a>1$?

**1.11.**• Докажите неравенство:

1) $2a^2-8a+16>0$;
2) $4b^2+4b+3>0$;
3) $a^2+ab+b^2\geqslant 0$;
4) $(3a+2)(2a-4)-(2a-5)^2>3(4a-12)$;
5) $a(a-3)>5(a-4)$;
6) $(a-b)(a+5b)\leqslant(2a+b)(a+4b)+ab$.

**1.12.**• Докажите неравенство:

1) $28a-32\leqslant 7a^2-4$;
2) $9x^2-6xy+4y^2\geqslant 0$;
3) $3(b-1)<b(b+1)$;
4) $(4p-1)(p+1)-(p-3)(p+3)>3(p^2+p)$.

**1.13.**• Докажите, что:

1) $a^3-6a^2+a-6\geqslant 0$, если $a\geqslant 6$;
2) $ab+1>a+b$, если $a>1$ и $b>1$;
3) $\frac{a+3}{3}+\frac{3a-2}{4}<a$, если $a<-6$.

**1.14.°** Докажите, что:

1) $ab(b-a) \leqslant a^3 - b^3$, если $a \geqslant b$;

2) $\frac{a-1}{2} - \frac{a-2}{3} > \frac{1}{2}$, если $a > 2$.

**1.15.°** Сравните сумму квадратов двух произвольных действительных чисел и их удвоенное произведение.

**1.16.°** Даны три последовательных натуральных числа. Сравните:

1) квадрат среднего из этих чисел и произведение двух других;

2) удвоенный квадрат среднего из этих чисел и сумму квадратов двух других.

**1.17.°** Сравните сумму квадратов двух положительных чисел и квадрат их суммы.

**1.18.°** Как изменится — увеличится или уменьшится — правильная дробь $\frac{a}{b}$, где $a > 0$, $b > 0$, если ее числитель и знаменатель увеличить на одно и то же число?

**1.19.°** Как изменится — увеличится или уменьшится — неправильная дробь $\frac{a}{b}$, где $a > 0$, $b > 0$, если ее числитель и знаменатель увеличить на одно и то же число?

**1.20.°** Докажите, что сумма любых двух взаимно обратных положительных чисел не меньше, чем 2.

**1.21.°** Докажите, что сумма любых двух взаимно обратных отрицательных чисел не больше, чем −2.

**1.22.°** Верно ли данное неравенство при любых значениях $a$ и $b$:

1) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1} > 1$; 2) $\frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} > -1$?

**1.23.°** Докажите, что при всех значениях переменной верно неравенство:

1) $\frac{a^2}{a^4 + 1} \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\frac{(5a+1)^2}{5} \geqslant 4a$.

**1.24.°** Докажите, что если $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$.

**1.25.°°** Докажите, что если $a < b < c$, то $a < \frac{a+b+c}{3} < c$.

**1.26.°°** Верно ли неравенство $\frac{a^2+4}{2} \geqslant \sqrt{a^2+3}$ при всех значениях $a$?

**1.27.**•• Докажите, что при всех значениях переменной верно неравенство $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 2$.

**1.28.**•• Докажите неравенство:

1) $a^2+b^2+6a-4b+13 \geqslant 0$;
2) $x^2-2x+y^2+10y+28>0$;
3) $2m^2-6mn+9n^2-6m+9 \geqslant 0$;
4) $a^2+b^2+c^2+12 \geqslant 4(a+b+c)$;
5) $a^2b^2+a^2+b^2+1 \geqslant 4ab$.

**1.29.**•• Докажите неравенство:

1) $a^2+b^2-16a+14b+114>0$;
2) $x^2+y^2+10 \geqslant 6x-2y$;
3) $c^2+5d^2+4cd-4d+4 \geqslant 0$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**1.30.** Известно, что $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d<0$. Сравните с нулем значение выражения:

1) $bc$;
2) $cd$;
3) $\frac{a}{b}$;
4) $\frac{ab}{c}$;
5) $\frac{ac}{d}$;
6) $\frac{a}{bc}$;
7) $abcd$;
8) $\frac{b}{acd}$.

**1.31.** Что можно сказать о знаках чисел $a$ и $b$, если:

1) $ab>0$;
2) $ab<0$;
3) $\frac{a}{b}>0$;
4) $\frac{a}{b}<0$;
5) $a^2b>0$;
6) $a^2b<0$?

**1.32.** Поясните, почему при любых действительных значениях переменной (или переменных) верно неравенство:

1) $a^2 \geqslant 0$;
2) $a^2+1>0$;
3) $(a+1)^2 \geqslant 0$;
4) $a^2-4a+4 \geqslant 0$;
5) $a^2+b^2 \geqslant 0$;
6) $a^2+b^2+2>0$;
7) $(a-2)^2+(b+1)^2 \geqslant 0$;
8) $\sqrt{a^2+3}>0$.

**1.33.** Сравните с нулем значение выражения, где $a$ — произвольное число:

1) $4+a^2$;
2) $(4-a)^2$;
3) $-4-a^2$;
4) $-4-(a-4)^2$;
5) $(-4)^8+(a-8)^4$;
6) $(4-a)^2+(4a-1000)^2$.

**1.34.** Упростите выражение:

1) $2a(5a-7)-5a(3-2a)$;
2) $(2b-3)(4b+9)$;
3) $(2c-6)(8c+5)-(5c+2)(5c-2)$;
4) $16m^2-(3-4m)(3+4m)$;
5) $(2x-1)^2+(2x+1)^2$;
6) $(x-4)(x+4)-(x-8)^2$.

### УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**1.35.** Все натуральные числа от 1 до 1000 включительно разбиты на две группы: четные числа и нечетные числа. В какой из групп сумма всех цифр, используемых для записи чисел, больше и на сколько?

## 2. Основные свойства числовых неравенств

В этом пункте рассмотрим свойства числовых неравенств, часто используемые при решении задач. Их называют **основными свойствами числовых неравенств.**

**Теорема 2.1.** ***Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.***

*Доказательство.* Поскольку по условию $a>b$ и $b>c$, то разности $a-b$ и $b-c$ являются положительными числами. Тогда положительной будет их сумма $(a-b)+(b-c)$. Имеем: $(a-b)+(b-c)=a-c$. Следовательно, разность $a-c$ является положительным числом, поэтому $a>c$. ◄

Аналогично можно доказать такое свойство: ***если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.***

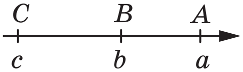



**Рис. 2.1**

Теорему 2.1 можно проиллюстрировать геометрически (рис. 2.1): если на координатной прямой точка $A(a)$ лежит правее точки $B(b)$, а точка $B(b)$ — правее точки $C(c)$, то точка $A(a)$ лежит правее точки $C(c)$.

**Теорема 2.2.** ***Если $a>b$ и $c$ — любое число, то $a+c>b+c$.***

*Доказательство.* Рассмотрим разность $(a+c)-(b+c)$. Имеем: $(a+c)-(b+c)=a-b$. Поскольку по условию $a>b$, то разность $a-b$ является положительным числом. Следовательно, $a+c>b+c$. ◄

Аналогично можно доказать такое свойство: ***если $a<b$ и $c$ — любое число, то $a+c<b+c$.***

Поскольку вычитание можно заменить сложением ($a-c=a+(-c)$), то теорему 2.2 можно сформулировать так:

***если к обеим частям верного неравенства прибавить или из обеих частей верного неравенства вычесть одно и то же число, то получим верное неравенство.***

**Следствие.** ***Если любое слагаемое перенести из одной части верного неравенства в другую, изменив знак слагаемого на противоположный, то получим верное неравенство.***

*Доказательство*. Пусть неравенство $a>b+c$ верно. Вычтем из обеих его частей число $c$. Получим: $a-c>b+c-c$, то есть $a-c>b$. ◀

**Теорема 2.3.** ***Если $a>b$ и $c$ — положительное число, то $ac>bc$. Если $a>b$ и $c$ — отрицательное число, то $ac<bc$.***

*Доказательство*. Рассмотрим разность $ac-bc$. Имеем:

$$ac-bc=c(a-b).$$

По условию $a>b$, следовательно, разность $a-b$ является положительным числом.

Если $c>0$, то произведение $c(a-b)$ является положительным числом, следовательно, разность $ac-bc$ является положительной, то есть $ac>bc$.

Если $c<0$, то произведение $c(a-b)$ является отрицательным числом, следовательно, разность $ac-bc$ является отрицательной, то есть $ac<bc$. ◀

Аналогично можно доказать такое свойство: ***если $a<b$ и $c$ — положительное число, то $ac<bc$. Если $a<b$ и $c$ — отрицательное число, то $ac>bc$.***

Поскольку деление можно заменить умножением $\left(\frac{a}{c}=a\cdot\frac{1}{c}\right)$, то теорему 2.3 можно сформулировать так:

***если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство;***

***если части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство.***

**Следствие.** ***Если*** $ab > 0$ ***и*** $a > b$, ***то*** $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

*Доказательство.* Разделим обе части неравенства $a > b$ на положительное число $ab$. Получим верное неравенство $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, то есть $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Отсюда $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ◀

Обратим внимание, что если из формулировки следствия убрать условие $ab > 0$, то есть требование, чтобы числа $a$ и $b$ имели одинаковые знаки, то из неравенства $a > b$ может не следовать неравенство $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Действительно, неравенство $5 > -3$ верно, однако неравенство $\frac{1}{5} < -\frac{1}{3}$ неверно.

В теоремах этого пункта шла речь о строгих неравенствах. Нестрогие неравенства также обладают аналогичными свойствами. Например, если $a \geqslant b$ и $c$ — любое число, то $a + c \geqslant b + c$.

?

1. Какое из чисел — $a$ или $c$ — больше, если известно, что $a > b$ и $b > c$?
2. Сформулируйте теорему о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа.
3. Сформулируйте следствие из теоремы о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа.
4. Сформулируйте теорему об умножении обеих частей неравенства на одно и то же число.
5. Сформулируйте следствие из теоремы об умножении обеих частей неравенства на одно и то же число.

## УПРАЖНЕНИЯ

**2.1.°** Известно, что $a > 6$. Верно ли неравенство:

1) $a > 4$; 2) $a \geqslant 5{,}9$; 3) $a > 7$?

**2.2.°** Известно, что $a < b$ и $b < c$. Какое из утверждений верно:

1) $a > c$; 2) $a = c$; 3) $c > a$?

**2.3.°** Запишите неравенство, которое получим, если:

1) к обеим частям неравенства $-3 < 4$ прибавим число 5; число $-2$;
2) из обеих частей неравенства $-10 < -6$ вычтем число 3; число $-4$;

3) обе части неравенства $7>-2$ умножим на число 5; на число $-1$;
4) обе части неравенства $12<18$ разделим на число 6; на число $-2$.

**2.4.°** Известно, что $a>b$. Запишите неравенство, которое получим, если:
1) к обеим частям данного неравенства прибавим число 8;
2) из обеих частей данного неравенства вычтем число $-6$;
3) обе части данного неравенства умножим на число 12;
4) обе части данного неравенства умножим на число $-\frac{1}{3}$;
5) обе части данного неравенства разделим на число $\frac{2}{7}$;
6) обе части данного неравенства разделим на число $-4$.

**2.5.•** Известно, что $b>a$, $c<a$ и $d>b$. Сравните числа:
1) $a$ и $d$;
2) $b$ и $c$.

**2.6.•** Расположите в порядке возрастания числа $a$, $b$, $c$ и 0, если $a>b$, $0<b$ и $0>c$.

**2.7.•** Известно, что $a>4$. Сравните с нулем значение выражения:
1) $a-3$;
2) $2-a$;
3) $(a-3)(a-2)$;
4) $\frac{(a-4)(a-2)}{3-a}$;
5) $(1-a)^2(4-a)$.

**2.8.•** Известно, что $-2<b<1$. Сравните с нулем значение выражения:
1) $b+2$;
2) $1-b$;
3) $b-2$;
4) $(b-1)(b-3)$;
5) $(b+2)(b-4)^2$;
6) $(b-3)(b+3)(b-2)^2$.

**2.9.•** Дано: $a>b$. Сравните:
1) $a+9$ и $b+9$;
2) $b-6$ и $a-6$;
3) $1{,}8a$ и $1{,}8b$;
4) $-a$ и $-b$;
5) $-40b$ и $-40a$;
6) $\frac{a}{20}$ и $\frac{b}{20}$;
7) $2a-3$ и $2b-3$;
8) $5-8a$ и $5-8b$.

**2.10.•** Известно, что $1\leqslant m<2$. Какие из неравенств верны:
1) $-1\leqslant -m<-2$;
2) $-2<-m\leqslant -1$;
3) $-1\geqslant -m>-2$;
4) $-2>-m\geqslant -1$?

**2.11.**• Дано: $-3a > -3b$. Сравните:

1) $a$ и $b$;
2) $\frac{2}{7}a$ и $\frac{2}{7}b$;
3) $b-4$ и $a-4$;
4) $-\frac{5}{9}b$ и $-\frac{5}{9}a$;
5) $3a+2$ и $3b+2$;
6) $-5a+10$ и $-5b+10$.

**2.12.**• Известно, что $a > b$. Расположите в порядке убывания числа $a+7$, $b-3$, $a+4$, $b-2$, $b$.

**2.13.**• Дано: $a < b$. Сравните:
1) $a-5$ и $b$; 2) $a$ и $b+6$; 3) $a+3$ и $b-2$.

**2.14.**• Сравните числа $a$ и $b$, если известно, что:
1) $a > c$ и $c > b+3$; 2) $a > c$ и $c-1 > b+d^2$,

где $c$ и $d$ — некоторые числа.

**2.15.**• Сравните числа $a$ и 0, если:
1) $7a < 8a$;
2) $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$;
3) $-6a > -8a$;
4) $-0{,}02a > -0{,}2a$.

**2.16.**• Дано: $a > -2$. Докажите, что:
1) $7a+10 > -4$; 2) $-6a-3 < 10$.

**2.17.**• Дано: $b \leqslant 10$. Докажите, что:
1) $5b-9 \leqslant 41$; 2) $1-2b > -21$.

**2.18.**• Верно ли утверждение:
1) если $a > b$, то $a > -b$;
2) если $a > b$, то $2a > b$;
3) если $a > b$, то $2a+1 > 2b$;
4) если $a > b+2$ и $b-3 > 4$, то $a > 9$;
5) если $a > b$, то $ab > b^2$;
6) поскольку $5 > 3$, то $5a^2 > 3a^2$;
7) поскольку $5 > 3$, то $5(a^2+1) > 3(a^2+1)$?

**2.19.**•• Запишите неравенство, которое получим, если:
1) обе части верного неравенства $a > 2$ умножим на $a$;
2) обе части верного неравенства $b < -1$ умножим на $b$;
3) обе части верного неравенства $m < -3$ умножим на $-m$;
4) обе части верного неравенства $c > -4$ умножим на $c$.

**2.20.**•• Запишите неравенство, которое получим, если:
1) обе части верного неравенства $a < -a^2$ разделим на $a$;
2) обе части верного неравенства $a > 2a^2$ разделим на $a$;
3) обе части верного неравенства $a^3 > a^2$ разделим на $-a$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**2.21.** Известно, что $a^2+b^2=18$ и $(a+b)^2=20$. Чему равно значение выражения $ab$?

**2.22.** У Дмитрия в 2 раза больше марок, чем у Надежды, а у Надежды — в 2 раза больше марок, чем у Михаила. Какому из данных чисел может быть равно количество марок, имеющихся у Дмитрия?

1) 18; 2) 22; 3) 24; 4) 30.

**2.23.** Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\dfrac{b}{a+b}$;

2) $\dfrac{a^2+9}{a^2-9}-\dfrac{a}{a+3}$;

3) $\dfrac{c+1}{3c}:\dfrac{c^2-1}{6c^2}$;

4) $\dfrac{m^2+2mn+n^2}{m^2-n^2}:(m+n)$.

**2.24.** Моторная лодка за одно и то же время может проплыть 48 км по течению реки или 36 км против течения. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения составляет 2 км/ч?

# 3. Сложение и умножение числовых неравенств. Оценивание значения выражения

Рассмотрим примеры.

1) Если с одного поля собрали не менее 40 т пшеницы, а с другого поля — не менее 45 т, то очевидно, что с двух полей вместе собрали не менее 85 т пшеницы.

2) Если длина прямоугольника не больше чем 70 см, а ширина — не больше чем 40 см, то очевидно, что его площадь не больше чем 2800 см$^2$.

Выводы из этих примеров интуитивно очевидны. Их справедливость подтверждают следующие теоремы.

**Теорема 3.1 (о почленном сложении неравенств).** ***Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.***

*Доказательство.* Рассмотрим разность $(a+c)-(b+d)$. Имеем:

$$(a+c)-(b+d)=a+c-b-d=(a-b)+(c-d).$$

Поскольку $a>b$ и $c>d$, то разности $a-b$ и $c-d$ являются положительными числами. Следовательно, рассматриваемая разность является положительной, то есть $a+c>b+d$. ◄

Аналогично можно доказать такое свойство: ***если*** $\boldsymbol{a<b}$ ***и*** $\boldsymbol{c<d}$***, то*** $\boldsymbol{a+c<b+d}$.

Неравенства $a>b$ и $c>d$ (или $a<b$ и $c<d$) называют **неравенствами одного знака**, а неравенства $a>b$ и $c<d$ (или $a<b$ и $c>d$) — **неравенствами противоположных знаков.**

Говорят, что неравенство $a+c>b+d$ получено из неравенств $a>b$ и $c>d$ путем почленного сложения.

Теорема 3.1 означает, что ***при почленном сложении верных неравенств одного знака результатом является верное неравенство того же знака.***

Отметим, что теорема 3.1 справедлива и в случае почленного сложения трех и более неравенств. Например, если $a_1>b_1$, $a_2>b_2$ и $a_3>b_3$, то $a_1+a_2+a_3>b_1+b_2+b_3$.

**Теорема 3.2 (о почленном умножении неравенств).** ***Если*** $\boldsymbol{a>b}$, $\boldsymbol{c>d}$ ***и*** $\boldsymbol{a, b, c, d}$ ***— положительные числа, то*** $\boldsymbol{ac>bd}$.

*Доказательство.* Рассмотрим разность $ac-bd$. Имеем:

$$ac-bd=ac-bc+bc-bd=c(a-b)+b(c-d).$$

По условию $a-b>0$, $c-d>0$, $c>0$, $b>0$. Следовательно, рассматриваемая разность является положительной. Из этого следует, что $ac>bd$. ◄

Аналогично можно доказать свойство: ***если*** $\boldsymbol{a<b}$, $\boldsymbol{c<d}$ ***и*** $\boldsymbol{a, b, c, d}$ ***— положительные числа, то*** $\boldsymbol{ac<bd}$.

Говорят, что неравенство $ac>bd$ получено из неравенств $a>b$ и $c>d$ путем почленного умножения.

Теорема 3.2 означает, что ***при почленном умножении верных неравенств одного знака, у которых левые и правые части — положительные числа, результатом является верное неравенство того же знака.***

Обратим внимание: если из формулировки теоремы 3.2 убрать требование, чтобы $a$, $b$, $c$, $d$ были положительными числами, то из неравенств $a>b$ и $c>d$ может не следовать неравенство $ac>bd$. Действительно, рассмотрим два верных неравенства $-2>-3$ и $4>1$. Умножив почленно эти неравенства, получим неверное неравенство $-8>-3$.

Заметим, что теорема 3.2 справедлива и в случае почленного умножения трех и более неравенств. Например, если $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$ — положительные числа, причем $a_1>b_1$, $a_2>b_2$, $a_3>b_3$, то $a_1a_2a_3>b_1b_2b_3$.

**Следствие.** ***Если*** $\boldsymbol{a>b}$ ***и*** $\boldsymbol{a, b}$ ***— положительные числа, то*** $\boldsymbol{a^n>b^n}$***, где*** $\boldsymbol{n}$ ***— натуральное число.***

*Доказательство*. Запишем $n$ верных неравенств $a > b$:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ \dots \\ a > b \end{array}\right\} n \text{ неравенств}$$

Поскольку $a$ и $b$ — положительные числа, то можем перемножить почленно $n$ записанных неравенств. Получим: $a^n > b^n$. ◄

Заметим, что все рассмотренные свойства неравенств справедливы и в случае нестрогих неравенств:

***если $a \geqslant b$ и $c \geqslant d$, то $a + c \geqslant b + d$;***

***если $a \geqslant b$, $c \geqslant d$ и $a, b, c, d$ — положительные числа, то $ac \geqslant bd$;***

***если $a \geqslant b$ и $a$, $b$ — положительные числа, то $a^n \geqslant b^n$, где $n$ — натуральное число.***

Вы знаете, что значения величин, полученные в результате измерений, не являются точными. Измерительные приборы позволяют лишь установить, между какими числами находится точное значение величины. Эти числа называют **границами значения величины**.

Пусть, например, в результате измерения ширины $x$ и длины $y$ прямоугольника было установлено, что $2{,}5$ см $< x < 2{,}7$ см и $4{,}1$ см $< y < 4{,}3$ см. Тогда с помощью теоремы 3.2 можно оценить площадь прямоугольника. Имеем:

$$\times\begin{array}{c} 2{,}5 \text{ см} < x < 2{,}7 \text{ см} \\ 4{,}1 \text{ см} < y < 4{,}3 \text{ см} \\ \hline 10{,}25 \text{ см}^2 < xy < 11{,}61 \text{ см}^2. \end{array}$$

Вообще, если известны значения границ величин, то, используя свойства числовых неравенств, можно найти границы значения выражения, содержащего эти величины, то есть **оценить** его значение.

**ПРИМЕР 1** Дано: $6 < a < 8$ и $10 < b < 12$. Оцените значение выражения:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $ab$; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $3a - \frac{1}{2}b$.

*Решение*. 1) Применив теорему о почленном сложении неравенств, получим:

$$+\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \\ \hline 16 < a + b < 20. \end{array}$$

2) Умножив каждую часть неравенства $10<b<12$ на $-1$, получим: $-10>-b>-12$, то есть $-12<-b<-10$. Учитывая, что $a-b=a+(-b)$, далее получим:

$$+\begin{array}{c} 6<a<8 \\ -12<-b<-10 \\ \hline -6<a-b<-2. \end{array}$$

3) Поскольку $a>6$ и $b>10$, то $a$ и $b$ принимают положительные значения. Применив теорему о почленном умножении неравенств, получим:

$$\times\begin{array}{c} 6<a<8 \\ 10<b<12 \\ \hline 60<ab<96. \end{array}$$

4) Поскольку $10<b<12$, то $\frac{1}{10}>\frac{1}{b}>\frac{1}{12}$, то есть $\frac{1}{12}<\frac{1}{b}<\frac{1}{10}$. Учитывая, что $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$, имеем:

$$\times\begin{array}{c} 6<a<8 \\ \frac{1}{12}<\frac{1}{b}<\frac{1}{10} \\ \hline \frac{1}{2}<\frac{a}{b}<\frac{4}{5}. \end{array}$$

5) Умножим каждую часть неравенства $6<a<8$ на 3, а каждую часть неравенства $10<b<12$ на $-\frac{1}{2}$.

Получим два верных неравенства:

$$18<3a<24 \text{ и } -5>-\frac{1}{2}b>-6.$$

Сложим полученные неравенства:

$$+\begin{array}{c} 18<3a<24 \\ -6<-\frac{1}{2}b<-5 \\ \hline 12<3a-\frac{1}{2}b<19. \end{array}$$

*Ответ*: 1) $16<a+b<20$; 2) $-6<a-b<-2$; 3) $60<ab<96$; 4) $\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<\frac{4}{5}$; 5) $12<3a-\frac{1}{2}b<19$. ◄

**ПРИМЕР 2** Докажите, что $\sqrt{24}+\sqrt{47}<12$.

*Решение.* Поскольку $\sqrt{24}<5$ и $\sqrt{47}<7$, то

$$\sqrt{24}+\sqrt{47}<5+7=12. \blacktriangleleft$$

?

1. Сформулируйте теорему о почленном сложении неравенств.
2. Поясните, какие неравенства называют неравенствами одного знака, а какие — неравенствами противоположных знаков.
3. Сформулируйте теорему о почленном умножении неравенств.
4. Сформулируйте следствие из теоремы о почленном умножении неравенств.

## УПРАЖНЕНИЯ

**3.1.°** Запишите неравенство, которое получим, если:

1) сложим почленно неравенства $10>-6$ и $8>5$;
2) умножим почленно неравенства $2<7$ и $3<4$;
3) умножим почленно неравенства $1{,}2>0{,}9$ и $5>\frac{1}{3}$.

**3.2.°** Запишите неравенство, которое получим, если:

1) сложим почленно неравенства $-9<-4$ и $-6<4$;
2) умножим почленно неравенства $\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$ и $24<27$.

**3.3.°** Дано: $-3<a<4$. Оцените значение выражения:

1) $2a$;
2) $\frac{a}{3}$;
3) $a+2$;
4) $a-1$;
5) $3a+1$;
6) $-a$;
7) $-4a$;
8) $-5a+3$.

**3.4.°** Дано: $2<b<6$. Оцените значение выражения:

1) $\frac{1}{2}b$;
2) $b-6$;
3) $2b+5$;
4) $4-b$.

**3.5.°** Известно, что $2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7$. Оцените значение выражения:

1) $3\sqrt{7}$;
2) $-2\sqrt{7}$;
3) $\sqrt{7}+1{,}3$;
4) $0{,}1\sqrt{7}+0{,}3$.

**3.6.°** Дано: $5<a<6$ и $4<b<7$. Оцените значение выражения:

1) $a+b$;
2) $ab$;
3) $a-b$.

**3.7.°** Известно, что $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ и $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$. Оцените значение выражения:

1) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{15}$.

**3.8.°** Дано: $2 < x < 4$. Оцените значение выражения $\frac{1}{x}$.

**3.9.°** Оцените среднее арифметическое значений $a$ и $b$, если известно, что $2{,}5 < a < 2{,}6$ и $3{,}1 < b < 3{,}2$.

**3.10.°** Оцените периметр равнобедренного треугольника с основанием $a$ см и боковой стороной $b$ см, если $10 < a < 14$ и $12 < b < 18$.

**3.11.°** Оцените периметр параллелограмма со сторонами $a$ см и $b$ см, если $15 \leqslant a \leqslant 19$ и $6 \leqslant b \leqslant 11$.

**3.12.•** Верно ли утверждение:

1) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 9$;
2) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 8$;
3) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 9{,}2$;
4) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a - b > -5$;
5) если $a > 2$ и $b > 7$, то $b - a > 5$;
6) если $a > 2$ и $b > 7$, то $ab > 13$;
7) если $a > 2$ и $b > 7$, то $3a + 2b > 20$;
8) если $a > 2$ и $b < -7$, то $a - b > 9$;
9) если $a < 2$ и $b < 7$, то $ab < 14$;
10) если $a > 2$, то $a^2 > 4$;
11) если $a < 2$, то $a^2 < 4$;
12) если $a > 2$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$;
13) если $a < 2$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{2}$;
14) если $-3 < a < 3$, то $-\frac{1}{3} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$?

**3.13.•** Дано: $a > 2{,}4$ и $b > 1{,}6$. Сравните:

1) $a + \frac{3}{4}b$ и $3{,}6$;
2) $(a + b)^2$ и $16$;
3) $(a - 0{,}4)(b + 1{,}4)$ и $6$.

**3.14.•** Известно, что $a > 3$ и $b > -2$. Докажите, что $5a + 4b > 7$.

**3.15.•** Известно, что $a > 5$ и $b < 2$. Докажите, что $6a - 7b > 16$.

**3.16.•** Дано: $5 < a < 8$ и $3 < b < 6$. Оцените значение выражения:

1) $4a + 3b$; 2) $3a - 6b$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{2b}{3a}$.

**3.17.**$^{\bullet}$ Дано: $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7} < y < \frac{1}{4}$. Оцените значение выражения:

1) $6x+14y$; 2) $28y-12x$; 3) $\frac{y}{x}$.

**3.18.**$^{\bullet}$ Сравните значения выражений:

1) $2^{24}$ и $9^{8}$; 2) $0{,}3^{20}$ и $0{,}1^{10}$; 3) $0{,}0015^{10}$ и $0{,}2^{40}$.

**3.19.**$^{\bullet}$ Докажите, что периметр четырехугольника больше суммы его диагоналей.

**3.20.**$^{\bullet}$ Докажите, что каждая диагональ выпуклого четырехугольника меньше его полупериметра.

**3.21.**$^{\bullet}$ Докажите, что сумма двух противолежащих сторон выпуклого четырехугольника меньше суммы его диагоналей.

**3.22.**$^{\bullet}$ Докажите утверждение:

1) если $a<b<0$, то $a^2>b^2$;

2) если $a>0$, $b>0$ и $a^2>b^2$, то $a>b$.

**3.23.**$^{\bullet}$ Докажите, что если $a<b<0$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

**3.24.**$^{\bullet}$ Известно, что $b>0$ и $a>b$. Является ли верным при всех указанных значениях $a$ и $b$ неравенство:

1) $a^2+a>b^2+b$; 3) $2-a^2<2-b^2$;

2) $a^2-a>b^2-b$; 4) $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$?

**3.25.**$^{\bullet\bullet}$ Докажите, что:

1) $\sqrt{27}+\sqrt{65}>13$; 3) $\sqrt{65}-\sqrt{35}>2$;

2) $\sqrt{14}+\sqrt{15}<8$; 4) $\sqrt{99}-\sqrt{82}<1$.

**3.26.**$^{\bullet\bullet}$ Докажите, что:

1) $\sqrt{55}+\sqrt{35}>\sqrt{120}$; 2) $\sqrt{119}-\sqrt{67}<3$.

**3.27.**$^{\bullet\bullet}$ Сравните:

1) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ и $\sqrt{11}+\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{15}-\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$;

2) $2+\sqrt{11}$ и $\sqrt{5}+\sqrt{10}$; 4) $\sqrt{21}+\sqrt{20}$ и 9.

**3.28.**$^{\bullet\bullet}$ Сравните:

1) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26}-\sqrt{2}$ и $\sqrt{14}$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**3.29.** Упростите выражение:

1) $\frac{x-3}{x+3}\cdot\left(x+\frac{x^2}{3-x}\right)$; 2) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{ab}{a^2-b^2}$.

**3.30.** Упростите выражение:

1) $6\sqrt{3}+\sqrt{27}-3\sqrt{75}$;  3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$.

2) $\left(\sqrt{50}-3\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$;

**3.31.** При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\frac{x^2}{x+4}$;  2) $\frac{x-4}{x^2-4}$;  3) $\frac{x^2-4}{x^2+4}$;  4) $\frac{4}{x-4}+\frac{1}{x}$?

**3.32.** В саду растут яблони и вишни, причем вишни составляют 20 % всех деревьев. Сколько процентов составляет количество яблонь от количества вишен?

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**3.33.** Равносильны ли уравнения:

1) $4x+6=2x-3$ и $4x+3=2x-6$;

2) $8x-4=0$ и $2x-1=0$;

3) $x^2+2x-3=0$ и $x^2+x=3-x$;

4) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ и $x^2-1=0$;

5) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ и $x-1=0$;

6) $x^2+1=0$ и $0x=5$?

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**3.34.** Докажите, что для нечетных чисел $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ и $f$ не может выполняться равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$.

## О некоторых способах доказательства неравенств

В п. 1 было доказано несколько неравенств. Мы использовали такой прием: рассматривали разность левой и правой частей неравенства и сравнивали ее с нулем.

Однако существует и ряд других способов доказательства неравенств. Ознакомимся с некоторыми из них.

## Рассуждения «от противного»

Название этого метода отражает его суть.

**ПРИМЕР 1** Для любых чисел $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ докажите неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right). \qquad (*)$$

*Решение*. Предположим, что доказываемое неравенство неверно. Тогда найдутся такие числа $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, что будет верным неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 > \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right).$$

Отсюда

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 > a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2;$$

$$2a_1b_1a_2b_2 > a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2;$$

$$a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 < 0;$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 < 0.$$

Последнее неравенство неверно. Полученное противоречие означает, что неравенство (*) верно. ◀

Неравенство (*) является частным случаем более общего неравенства

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right). \qquad (**)$$

Неравенство (**) называют *неравенством Коши—Буняковского*. С его доказательством вы можете ознакомиться на занятиях математического кружка.

## Метод использования очевидных неравенств

**ПРИМЕР 2** Для любых чисел $a$, $b$ и $c$ докажите неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$

**Огюстен Луи Коши**
(1789–1857)

Выдающийся французский математик, автор более 800 научных трудов.

*Решение*. Очевидно, что при любых значениях $a$, $b$ и $c$ выполняется такое неравенство:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда получаем: $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 \geqslant 0;$

$$2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ac;$$

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac. \blacktriangleleft$$

## Метод применения ранее доказанного неравенства

В п. 1 мы доказали, что для любых $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Его называют *неравенством Коши для двух чисел*.

Рассмотрим, как можно использовать неравенство Коши при доказательстве других неравенств.

**ПРИМЕР 3** Докажите, что для положительных чисел $a$ и $b$ справедливо неравенство

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4.$$

*Решение*. Применим неравенство Коши для положительных чисел $a$ и $\frac{1}{b}$. Получаем:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot \frac{1}{b}}.$$

Отсюда $a+\frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Аналогично можно доказать, что $b+\frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}$.

**Виктор Яковлевич Буняковский**
(1804–1889)

Выдающийся математик XIX в. Родился на территории Винницкой области. В течение многих лет был вице-президентом Петербургской академии наук.

Применив теорему о почленном умножении неравенств, получим:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Отсюда $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4.$ ◀

## Метод геометрической интерпретации

**ПРИМЕР 4** Докажите неравенство

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+\ldots+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<\frac{100^2\pi}{4}.$$

*Решение.* Рассмотрим четверть окружности радиуса 1 с центром $O$. Впишем в нее ступенчатую фигуру, составленную из 99 прямоугольников, так, как показано на рисунке 3.1. Имеем:

$$OA_1=A_1A_2=\ldots=A_{98}A_{99}=\frac{1}{100}.$$

Площадь первого прямоугольника

$$S_1=OA_1\cdot AA_1=OA_1\cdot\sqrt{1-OA_1^2}=\frac{1}{100}\sqrt{1-\frac{1}{100^2}}=\frac{\sqrt{99\cdot 101}}{100^2}.$$

Для второго прямоугольника имеем:

$$S_2=\frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{2}{100}\right)^2}=\frac{\sqrt{98\cdot 102}}{100^2}\text{ и т. д.}$$

$$S_{99}=\frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2}=\frac{\sqrt{1\cdot 199}}{100^2}.$$

Площадь ступенчатой фигуры меньше площади четверти круга, то есть

$$\frac{\sqrt{99\cdot 101}}{100^2}+\frac{\sqrt{98\cdot 102}}{100^2}+\ldots+\frac{\sqrt{1\cdot 199}}{100^2}<\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство. ◀

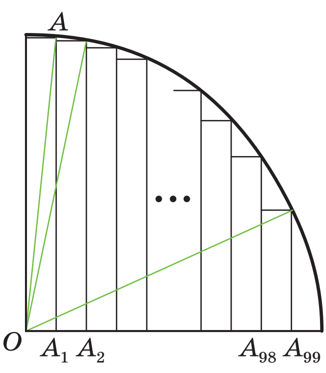



**Рис. 3.1**

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Докажите неравенство:

1) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$, если $a>0$ и $b>0$;

2) $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$;

3) $(a^3+b)(a+b^3) \geqslant 4a^2b^2$, если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;

4) $(ab+1)(a+b) \geqslant 4ab$, если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;

5) $(a+2)(b+5)(c+10) \geqslant 80\sqrt{abc}$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$;

6) $a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geqslant 4$, если $a > 0$ и $b > 0$;

7) $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geqslant 2^n$, если $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные числа, произведение которых равно 1.

## 4. Неравенства с одной переменной

Рассмотрим задачу. Одна из сторон параллелограмма равна 7 см. Какой должна быть длина соседней стороны, чтобы периметр параллелограмма был больше 44 см?

Пусть искомая сторона равна $x$ см. Тогда периметр параллелограмма равен $(14+2x)$ см. Неравенство $14+2x>44$ является математической моделью задачи о периметре параллелограмма.

Если в это неравенство вместо переменной $x$ подставить, например, число 16, то получим верное числовое неравенство $14+32>44$. В таком случае говорят, что число 16 является **решением неравенства** $14+2x>44$.

**Определение. Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.**

Так, каждое из чисел 15,1; 20; $10\sqrt{3}$ является решением неравенства $14+2x>44$, а число 10 не является его решением.

Замечание. Определение решения неравенства аналогично определению корня уравнения. Однако не принято говорить «корень неравенства».

**Определение. Решить неравенство означает найти все его решения или доказать, что решений не существует.**

Все решения неравенства образуют **множество решений неравенства**. Если неравенство решений не имеет, то говорят, что множеством его решений является **пустое множество**. Напомним, что пустое множество обозначают символом $\varnothing$.

Таким образом, можно сказать, что ***решить неравенство означает найти множество его решений***.

Например, в задаче «решите неравенство $x^2>0$» ответ будет таким: «все действительные числа, кроме числа 0».

Очевидно, что неравенство $|x|<0$ решений не имеет, то есть множеством его решений является пустое множество.

**Определение.** **Неравенства называют *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.**

Приведем несколько примеров.

Неравенства $x^2 \leqslant 0$ и $|x| \leqslant 0$ равносильны. Действительно, каждое из них имеет единственное решение $x=0$.

Неравенства $x^2>-1$ и $|x|>-2$ равносильны, так как множеством решений каждого из них является множество действительных чисел.

Поскольку каждое из неравенств $\sqrt{x}<-1$ и $0x<-3$ решений не имеет, то они также являются равносильными.

?

1. Что называют решением неравенства с одной переменной?
2. Что означает решить неравенство?
3. Что образуют все решения неравенства?
4. Когда множеством решений неравенства является пустое множество?
5. Какие неравенства называют равносильными?

## УПРАЖНЕНИЯ

**4.1.°** Какие из чисел $-4$; $-0{,}5$; $0$; $\frac{1}{3}$; $2$ являются решениями неравенства:

1) $x>\frac{1}{6}$;
2) $x \leqslant 5$;
3) $3x>x-1$;
4) $x^2-9 \leqslant 0$;
5) $\sqrt{x-1}>1$;
6) $\frac{1}{x}>1$?

**4.2.°** Какое из данных чисел является решением неравенства $(x-2)^2(x-5)>0$:

1) 3; 2) 2; 3) 6; 4) $-1$?

**4.3.°** Является ли решением неравенства $6x+1 \leqslant 2+7x$ число:

1) $-0{,}1$; 2) $-2$; 3) 0; 4) $-1$; 5) 2?

**4.4.°** Назовите любые два решения неравенства $x+5>2x+3$.

**4.5.°** Является ли число 1,99 решением неравенства $x<2$? Существуют ли решения данного неравенства, которые больше 1,99? В случае утвердительного ответа приведите пример такого решения.

**4.6.°** Является ли число 4,001 решением неравенства $x>4$? Существуют ли решения данного неравенства, которые меньше 4,001? В случае утвердительного ответа приведите пример такого решения.

**4.7.°** Множеством решений какого из данных неравенств является пустое множество:

1) $(x-3)^2>0$; 3) $(x-3)^2<0$;
2) $(x-3)^2\geqslant 0$; 4) $(x-3)^2\leqslant 0$?

**4.8.°** Какие из данных неравенств не имеют решений:

1) $0x>-2$; 2) $0x<2$; 3) $0x<-2$; 4) $0x>2$?

**4.9.°** Множеством решений какого из данных неравенств является множество действительных чисел:

1) $0x>1$; 2) $0x>0$; 3) $0x>-1$; 4) $x+1>0$?

**4.10.°** Решением какого из данных неравенств является любое действительное число:

1) $x^2>0$; 2) $x>-x$; 3) $-x^2\leqslant 0$; 4) $\sqrt{x}\geqslant 0$?

**4.11.•** Среди данных неравенств укажите неравенство, решением которого является любое действительное число, и неравенство, не имеющее решений:

1) $\frac{x^2+1}{x^2}\geqslant 0$; 2) $\frac{x^2+1}{x^2+1}<1$; 3) $\frac{x^2-1}{x^2-1}\geqslant 1$; 4) $\frac{x^2}{x^2+1}\geqslant 0$.

**4.12.•** Решите неравенство:

1) $\frac{2}{x^2}+2>0$;
2) $(x+2)^2>0$;
3) $(x+2)^2\leqslant 0$;
4) $\frac{x+2}{x+2}>0$;
5) $\frac{x+2}{x+2}>\frac{2}{3}$;
6) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2>0$;
7) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2\geqslant 0$;
8) $x+\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x^2}+2$;
9) $|x|\geqslant -x^2$;
10) $|x|>-x^2$;
11) $|x|>x$;
12) $|x|\geqslant -x$.

**4.13.**° Найдите множество решений неравенства:

1) $|x| > 0$;
2) $|x| \leqslant 0$;
3) $|x| < 0$;
4) $|x| \leqslant -1$;
5) $|x| > -3$;
6) $\left|\dfrac{1}{x}\right| > -3$.

**4.14.**° Равносильны ли неравенства:

1) $\dfrac{1}{x} < 1$ и $x > 1$;
2) $x^2 \geqslant x$ и $x \geqslant 1$;
3) $(x+5)^2 < 0$ и $|x-4| < 0$;
4) $\sqrt{x} \leqslant 0$ и $x^4 \leqslant 0$?

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**4.15.** Решите уравнение:

1) $9-7(x+3)=5-6x$;
2) $\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{x-4}{7}=1$;
3) $(x+7)^2-(x-2)^2=15$;
4) $5x-2=3(3x-1)-4x-4$;
5) $6x+(x-2)(x+2)=(x+3)^2-13$;
6) $(x+6)(x-1)-(x+3)(x-4)=5x$.

**4.16.** Велосипедист проехал от села к озеру и вернулся обратно, потратив на весь путь 1 ч. Из села к озеру он ехал со скоростью 15 км/ч, а возвращался со скоростью 10 км/ч. Найдите расстояние от села до озера.

# 5. Решение линейных неравенств с одной переменной. Числовые промежутки

Свойства числовых равенств помогали нам решать уравнения. Аналогично свойства числовых неравенств помогут решать неравенства.

Решая уравнение, мы заменяли его другим, более простым уравнением, равносильным данному. По аналогичной схеме решают и неравенства.

При замене уравнения на равносильное ему уравнение используют теоремы о переносе слагаемых из одной части уравнения в другую и об умножении обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число.

Аналогичные правила применяют и при решении неравенств с одной переменной.

***Если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.***

***Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.***

***Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.***

С помощью этих правил решим неравенство, полученное в задаче о периметре параллелограмма (см. п. 4).

Имеем: $14+2x>44$.

Перенесем слагаемое 14 в правую часть неравенства:

$$2x>44-14.$$

Отсюда $2x>30$.

Разделив обе части неравенства на 2, получим:

$$x>15.$$

Заметим, что полученное неравенство равносильно исходному неравенству. Множество его решений состоит из всех чисел, которые больше 15. Это множество называют **числовым промежутком** и обозначают так: $(15;+\infty)$ (читают: «промежуток от 15 до плюс бесконечности»).

В этой задаче ответ можно записать одним из способов: $(15;+\infty)$ или $x>15$.

Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x>15$, расположены справа от точки, изображающей число 15, и образуют луч, у которого «выколото» начало (рис. 5.1).


**Рис. 5.1**

Заметим, что для изображения на рисунке числового промежутка используют два способа: с помощью либо штриховки (рис. 5.1, *а*), либо дуги (рис. 5.1, *б*). Мы будем использовать второй способ.

**ПРИМЕР 1** Решите неравенство $3+\frac{x}{2}\leqslant 7+x$.

*Решение*. Перенесем слагаемое $x$ из правой части неравенства в левую, а слагаемое 3 — из левой части в правую и приведем подобные члены:

$$-x+\frac{x}{2}\leqslant 7-3;$$

$$-\frac{x}{2}\leqslant 4.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $-2$, получим:

$$x\geqslant -8.$$

Множеством решений этого неравенства является числовой промежуток, который обозначают так: $[-8;+\infty)$ (читают: «промежуток от $-8$ до плюс бесконечности, включая $-8$»).

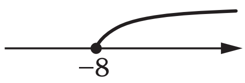



**Рис. 5.2**

Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x\geqslant -8$, образуют луч (рис. 5.2).

*Ответ* можно записать одним из способов: $[-8;+\infty)$ или $x\geqslant -8$. ◄

**ПРИМЕР 2** Решите неравенство $2(2-3x)>3(x+6)-5$.

*Решение*. Запишем цепочку неравенств, равносильных данному:

$$4-6x>3x+18-5;$$

$$4-6x>3x+13;$$

$$-3x-6x>-4+13;$$

$$-9x>9;$$

$$x<-1.$$

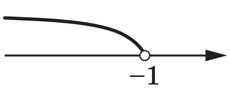



**Рис. 5.3**

Множеством решений последнего неравенства является числовой промежуток, который обозначают так: $(-\infty;-1)$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до $-1$»). Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x<-1$, расположены слева от точки $-1$ (рис. 5.3) и образуют луч, у которого «выколото» начало.

*Ответ* можно записать одним из способов: $(-\infty;-1)$ или $x<-1$. ◄

**ПРИМЕР 3** Решите неравенство $\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}\leqslant\frac{1}{6}$.

*Решение.* Запишем цепочку равносильных неравенств:

$$6\cdot\frac{x-1}{2}+6\cdot\frac{x}{3}\leqslant 6\cdot\frac{1}{6};$$
$$3x-3+2x\leqslant 1;$$
$$5x\leqslant 4;$$
$$x\leqslant\frac{4}{5}.$$

Множеством решений последнего неравенства является числовой промежуток, который обозначают так: $\left(-\infty;\frac{4}{5}\right]$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до $\frac{4}{5}$, включая $\frac{4}{5}$»). Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x\leqslant\frac{4}{5}$, образуют луч (рис. 5.4).

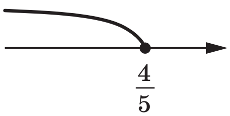



**Рис. 5.4**

*Ответ* можно записать одним из способов: $\left(-\infty;\frac{4}{5}\right]$ или $x\leqslant\frac{4}{5}$. ◄

**ПРИМЕР 4** Решите неравенство $3(2x-1)+7\geqslant 2(3x+1)$.

*Решение.* Имеем:

$$6x-3+7\geqslant 6x+2;$$
$$6x-6x\geqslant 2-4;$$
$$0x\geqslant -2.$$

Последнее неравенство при любом значении $x$ превращается в верное числовое неравенство $0\geqslant -2$. Следовательно, искомое множество решений совпадает с множеством действительных чисел.

*Ответ*: $x$ — любое число. ◄

Этот ответ можно записать иначе: $(-\infty;+\infty)$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до плюс бесконечности»). Такой числовой промежуток называют **числовой прямой**.

**ПРИМЕР 5** Решите неравенство $4(x-2)-1<2(2x-9)$.

*Решение.* Имеем:

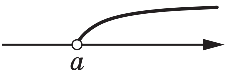
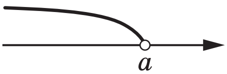
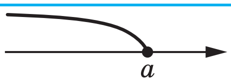
$$4x-8-1<4x-18;$$
$$4x-4x<9-18;$$
$$0x<-9.$$

Полученное неравенство при любом значении $x$ превращается в неверное числовое неравенство $0<-9$.

В этой задаче ответ можно записать одним из способов: решений нет либо $\varnothing$. ◄

Каждое из неравенств, рассмотренных в примерах 1–5, сводилось к равносильному неравенству одного из четырех видов: $ax>b$, $ax<b$, $ax\geqslant b$, $ax\leqslant b$, где $x$ — переменная, $a$ и $b$ — некоторые числа. Такие неравенства называют **линейными неравенствами с одной переменной.**

Приведем таблицу обозначений и изображений изученных числовых промежутков:

| Неравенство | Промежуток | Изображение |
|---|---|---|
| $x>a$ | $(a;\ +\infty)$ |  |
| $x<a$ | $(-\infty;\ a)$ |  |
| $x\geqslant a$ | $[a;\ +\infty)$ |  |
| $x\leqslant a$ | $(-\infty;\ a]$ |  |

**?**

1. Сформулируйте правила, с помощью которых можно получить неравенство, равносильное данному.
2. Какие неравенства называют линейными неравенствами с одной переменной?
3. Как записывают, читают, называют и изображают промежуток, являющийся множеством решений неравенства вида: $x>a$? $x<a$? $x\geqslant a$? $x\leqslant a$?
4. Решением неравенства является любое число. Как в таком случае записывают, читают и называют промежуток, являющийся множеством решений неравенства?

## УПРАЖНЕНИЯ

**5.1.°** Изобразите на координатной прямой промежуток:
1) $[-5;+\infty)$; 2) $(-5;+\infty)$; 3) $(-\infty;-5)$; 4) $(-\infty;-5]$.

**5.2.°** Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, который задается неравенством:

1) $x<8$; 2) $x\leqslant -4$; 3) $x\geqslant -1$; 4) $x>0$.

**5.3.°** Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, который задается неравенством:

1) $x\leqslant 0$; 2) $x\geqslant \frac{1}{3}$; 3) $x>-1{,}4$; 4) $x<16$.

**5.4.°** Укажите наименьшее целое число, принадлежащее промежутку:

1) $(6;+\infty)$; 2) $[6;+\infty)$; 3) $(-3{,}4;+\infty)$; 4) $[-0{,}9;+\infty)$.

**5.5.°** Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:

1) $(-\infty;-4)$; 2) $(-\infty;-6{,}2]$; 3) $(-\infty;\ 1]$; 4) $(-\infty;-1{,}8)$.

**5.6.°** Каким из данных промежутков принадлежит число $-7$:

1) $(-\infty;-7)$; 2) $[-7;+\infty)$; 3) $(-\infty;0]$; 4) $(-\infty;-6)$?

**5.7.°** Какому из данных промежутков не принадлежит число 9:

1) $(8{,}99;+\infty)$; 2) $(-\infty;10)$; 3) $(-\infty;8{,}99]$; 4) $[9;+\infty)$?

**5.8.°** Решите неравенство:

1) $6x>18$;
2) $-2x\geqslant 10$;
3) $\frac{1}{3}x<9$;
4) $0{,}1x\geqslant 0$;
5) $\frac{3}{4}x>24$;
6) $-10x<0$;
7) $2\frac{1}{4}x\leqslant -1\frac{4}{5}$;
8) $-7x>\frac{14}{15}$;
9) $7x-2>19$;
10) $5x+16\leqslant 6$;
11) $4-x<5$;
12) $5-8x\geqslant 6$;
13) $12+4x\geqslant 6x$;
14) $36-2x<4x$;
15) $\frac{x+2}{5}<2$.

**5.9.°** Решите неравенство:

1) $5x<30$;
2) $-4x\leqslant -16$;
3) $\frac{2}{3}x\leqslant 6$;
4) $-12x\geqslant 0$;
5) $-3x<\frac{6}{7}$;
6) $-2\frac{1}{3}x>1\frac{5}{9}$;
7) $4x+5>-7$;
8) $9-x\geqslant 2x$;
9) $13-6x\geqslant -23$;
10) $5-9x>16$;
11) $3x+2\leqslant -7x$;
12) $\frac{x-3}{4}>-1$.

**5.10.°** Решите неравенство:

1) $0x>10$; 3) $0x>-8$; 5) $0x\geqslant 1$; 7) $0x\leqslant 0$;
2) $0x<15$; 4) $0x<-3$; 6) $0x\leqslant 2$; 8) $0x>0$.

**5.11.**° Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $5x \geqslant 40$; 2) $5x > 40$; 3) $-2x < -3$; 4) $-7x < 15$.

**5.12.**° Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $8x \leqslant -16$; 2) $8x < -16$; 3) $3x < 10$; 4) $-6x > -25$.

**5.13.**° При каких значениях $a$ выражение $6a+1$ принимает отрицательные значения?

**5.14.**° При каких значениях $b$ выражение $7-2b$ принимает положительные значения?

**5.15.**° При каких значениях $m$ значение выражения $2-4m$ не меньше $-22$?

**5.16.**° При каких значениях $n$ значение выражения $12n-5$ не больше $-53$?

**5.17.**° При каких значениях $x$ имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{4x+20}$; 2) $\sqrt{5-14x}$; 3) $\dfrac{10}{\sqrt{4x+10}}$?

**5.18.**° Найдите область определения функции:

1) $f(x)=\sqrt{13-2x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{-x-1}}$.

**5.19.**° Решите неравенство:

1) $8x+2<9x-3$;
2) $6-6x>10-4x$;
3) $6y+8\leqslant 10y-8$;
4) $3-11y\geqslant -3y+6$;
5) $-8p-2<3-10p$;
6) $3m-1\leqslant 1{,}5m+5$.

**5.20.**° Решите неравенство:

1) $4+11x>7+12x$;
2) $35x-28\leqslant 32x+2$;
3) $3x-10<6x+2$;
4) $6x-3\geqslant 2x-25$.

**5.21.**° При каких значениях $c$ значения двучлена $9c-2$ не больше соответствующих значений двучлена $4c+4$?

**5.22.**° При каких значениях $k$ значения двучлена $11k-3$ не меньше соответствующих значений двучлена $15k-13$?

**5.23.**° Решите неравенство:

1) $\dfrac{4x}{3}+\dfrac{x}{2}<11$;
2) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{3x}{4}\geqslant\dfrac{1}{6}$;
3) $\dfrac{5x}{7}-x>-4$;
4) $\dfrac{x}{8}-\dfrac{1}{4}\leqslant x$.

**5.24.**° Решите неравенство:

1) $\dfrac{y}{6}-\dfrac{5y}{4}<1$; 2) $\dfrac{x}{10}-\dfrac{x}{5}>-2$.

**5.25.**• Решите неравенство:

1) $3-5(2x+4)\geqslant 7-2x$;

2) $6x-3(x-1)\leqslant 2+5x$;

3) $x-2(x-1)\geqslant 10+3(x+4)$;

4) $2(2x-3{,}5)-3(2-3x)<6(1-x)$;

5) $(x+1)(x-2)\leqslant(x-3)(x+3)$;

6) $(4x-3)^2+(3x+2)^2\geqslant(5x+1)^2$;

7) $\dfrac{2x-1}{4}\geqslant\dfrac{3x-5}{5}$;

8) $\dfrac{3x+7}{4}-\dfrac{5x-2}{2}<x$;

9) $(x-5)(x+1)\leqslant 3+(x-2)^2$;

10) $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x-3}{3}>2+\dfrac{x}{6}$;

11) $(6x-1)^2-4x(9x-3)\leqslant 1$;

12) $\dfrac{x-3}{9}-\dfrac{x+4}{4}>\dfrac{x-8}{6}$.

**5.26.**• Найдите множество решений неравенства:

1) $3(4x+9)+5>7(8-x)$;

2) $(2-y)(3+y)\leqslant(4+y)(6-y)$;

3) $(y+3)(y-5)-(y-1)^2>-16$;

4) $\dfrac{3x-7}{5}-1\geqslant\dfrac{2x-6}{3}$;

5) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x-1}{6}-\dfrac{x+2}{2}<0$;

6) $\dfrac{y-1}{2}-\dfrac{2y+1}{8}-y<2$.

**5.27.**• Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $7(x+2)-3(x-8)<10$;

2) $(x-4)(x+4)-5x>(x-1)^2-17$.

**5.28.**• Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $\dfrac{4x+13}{10}-\dfrac{5+2x}{4}>\dfrac{6-7x}{20}-2$;

2) $(x-1)(x+1)-(x-4)(x+2)\geqslant 0$.

**5.29.**• Сколько целых отрицательных решений имеет неравенство

$$x-\frac{x+7}{4}-\frac{11x+30}{12}<\frac{x-5}{3}?$$

**5.30.**• Сколько натуральных решений имеет неравенство

$$\frac{2-3x}{4} \geqslant \frac{1}{5} - \frac{5x+6}{8}?$$

**5.31.**• При каких значениях $x$ верно равенство:

1) $|x-5| = x-5$; 2) $|2x+14| = -2x-14$?

**5.32.**• При каких значениях $y$ верно равенство:

1) $\frac{|y+7|}{y+7} = 1$; 2) $\frac{|6-y|}{y-6} = 1$?

**5.33.**• При каких значениях $a$ уравнение:

1) $x^2+3x-a=0$ не имеет корней;

2) $2x^2-8x+5a=0$ имеет хотя бы один корень?

**5.34.**• При каких значениях $b$ уравнение:

1) $3x^2-6x+b=0$ имеет два различных корня;

2) $x^2-x-2b=0$ не имеет корней?

**5.35.**• Лодка проплыла некоторое расстояние по течению реки, а потом вернулась обратно, потратив на всё путешествие не более пяти часов. Скорость лодки в стоячей воде равна 5 км/ч, а скорость течения — 1 км/ч. Какое наибольшее расстояние могла проплыть лодка по течению реки?

**5.36.**• Берут четыре последовательных целых числа и рассматривают разность произведений крайних и средних чисел. Существуют ли такие четыре последовательных целых числа, для которых эта разность больше нуля?

**5.37.**• В коробке находятся синие и желтые шары. Количество синих шаров относится к количеству желтых как 3 : 4. Какое наибольшее количество синих шаров может быть в коробке, если всего шаров не больше 44?

**5.38.**• В саду растут яблони, вишни и сливы, количества которых относятся как 5 : 4 : 2 соответственно. Каким может быть наименьшее количество вишен, если всего деревьев в саду не менее 120?

**5.39.**• Стороны треугольника равны 8 см, 14 см и $a$ см, где $a$ — натуральное число. Какое наибольшее значение может принимать $a$?

**5.40.**• Сумма трех последовательных натуральных четных чисел не меньше 85. Найдите наименьшие три числа, удовлетворяющие этому условию.

**5.41.**• Сумма трех последовательных натуральных чисел, кратных 5, не превышает 100. Какие наибольшие три числа удовлетворяют этому условию?

**5.42.**• При каких значениях $x$ определена функция:

1) $f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{1}{x-2}$;
3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x+9}}-\dfrac{8}{|x|-2}$;
2) $f(x)=\sqrt{24-8x}+\dfrac{6}{x^2-16}$;
4) $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{4}{x^2-1}$?

**5.43.**• При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{9-x}+\dfrac{10}{x+3}$;
2) $\dfrac{6}{\sqrt{3x-21}}+\dfrac{9}{x^2-64}$?

**5.44.**•• Решите уравнение:

1) $|x-3|+x=15$;
3) $|3x-12|-2x=1$;
2) $|x+1|-4x=14$;
4) $|x+2|-x=1$.

**5.45.**•• Решите уравнение:

1) $|x+5|+2x=7$;
2) $|3-2x|-x=9$.

**5.46.**•• Постройте график функции:

1) $y=|x-2|$;
3) $y=|x-1|+x$.
2) $y=|x+3|-1$;

**5.47.**•• Постройте график функции:

1) $y=|x+4|$;
3) $y=|2x-6|-x$.
2) $y=|x-5|+2$;

**5.48.**•• При каких значениях $a$ уравнение:

1) $4x+a=2$ имеет положительный корень;
2) $(a+6)x=3$ имеет отрицательный корень;
3) $(a-1)x=a^2-1$ имеет единственный положительный корень?

**5.49.**•• При каких значениях $m$ уравнение:

1) $2+4x=m-6$ имеет неотрицательный корень;
2) $mx=m^2-7m$ имеет единственный отрицательный корень?

**5.50.*** Найдите все значения $a$, при которых имеет два различных корня уравнение:

1) $ax^2+2x-1=0$;
2) $(a+1)x^2-(2a-3)x+a=0$;
3) $(a-3)x^2-2(a-5)x+a-2=0$.

**5.51.*** Найдите все значения $a$, при которых не имеет корней уравнение $(a-2)x^2+(2a+1)x+a=0$.

**5.52.*** Существует ли такое значение $a$, при котором не имеет решений неравенство (в случае утвердительного ответа укажите это значение):

1) $ax>3x+4$;
2) $(a^2-a-2)x\leqslant a-2$?

**5.53.*** Существует ли такое значение $a$, при котором любое число является решением неравенства (в случае утвердительного ответа укажите это значение):

1) $ax > -1 - 7x$;
2) $(a^2 - 16)x \leqslant a + 4$?

**5.54.*** Для каждого значения $a$ решите неравенство:

1) $ax > 0$;
2) $ax < 1$;
3) $ax \geqslant a$;
4) $2(x - a) < ax - 4$;
5) $(a - 2)x > a^2 - 4$;
6) $(a + 3)x \leqslant a^2 - 9$.

**5.55.*** Для каждого значения $a$ решите неравенство:

1) $a^2x \leqslant 0$;
2) $a + x < 2 - ax$;
3) $(a + 4)x > 1$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**5.56.** Решите уравнение:

1) $6x - 5x^2 = 0$;
2) $25x^2 = 81$;
3) $4x^2 - 7x - 2 = 0$;
4) $3x^2 + 8x - 3 = 0$;
5) $x^2 + x - 12 = 0$;
6) $2x^2 + 6x + 7 = 0$.

**5.57.** Известно, что $m$ и $n$ — последовательные целые числа. Какое из следующих утверждений всегда является верным:

1) произведение $mn$ больше, чем $m$;
2) произведение $mn$ больше, чем $n$;
3) произведение $mn$ является четным числом;
4) произведение $mn$ является нечетным числом?

**5.58.** Сравните значения выражений:

1) $3\sqrt{98}$ и $4\sqrt{72}$;
2) $\frac{1}{2}\sqrt{68}$ и $\frac{4}{3}\sqrt{45}$;
3) $\frac{1}{6}\sqrt{108}$ и $6\sqrt{\frac{1}{12}}$.

**5.59.** Чтобы наполнить бассейн водой через одну трубу, требуется в 1,5 раза больше времени, чем для того, чтобы наполнить его через вторую трубу. Если же открыть одновременно обе трубы, то бассейн наполнится за 6 ч. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу отдельно?

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**5.60.** Трехзначное число $n$ таково, что числа $n - 6$, $n - 7$ и $n - 8$ кратны числам 7, 8 и 9 соответственно. Найдите число $n$.

# 6. Системы линейных неравенств с одной переменной

Рассмотрим выражение $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$. Найдем множество допустимых значений переменной $x$, то есть все значения переменной $x$, при которых данное выражение имеет смысл. Это множество называют **областью определения выражения.**

Так как подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения, то должны *одновременно* выполняться два неравенства: $2x-1\geqslant 0$ и $5-x\geqslant 0$. То есть искомые значения переменной $x$ — это все общие решения указанных неравенств.

Если требуется найти все общие решения двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо **решить систему неравенств.**

Как и систему уравнений, систему неравенств записывают с помощью фигурной скобки. Так, для нахождения области определения выражения $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$ надо решить систему неравенств

$$\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\ 5-x\geqslant 0.\end{cases} \qquad (*)$$

**Определение. Решением системы неравенств с одной переменной называют значение переменной, которое обращает каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.**

Например, числа 2, 3, 4, 5 являются решениями системы (*), а число 7 не является ее решением.

**Определение. Решить систему неравенств означает найти все ее решения или доказать, что решений нет.**

Все решения системы неравенств образуют **множество решений системы неравенств.** Если система решений не имеет, то говорят, что множеством ее решений является пустое множество.

Таким образом, можно сказать, что ***решить систему неравенств означает найти множество ее решений.***

Например, в задаче «решите систему неравенств $\begin{cases}0x\geqslant -1,\\ |x|\geqslant 0\end{cases}$» ответ будет таким: «множество действительных чисел».

Очевидно, что множество решений системы неравенств $\begin{cases}x\leqslant 5,\\ x\geqslant 5\end{cases}$ состоит из единственного числа 5.

Система неравенств $\begin{cases} x > 5, \\ x < 5 \end{cases}$ решений не имеет, то есть множеством ее решений является пустое множество.

Решим систему (*). Преобразовав каждое неравенство системы в равносильное ему, получим: $\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ -x \geqslant -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$

Множество решений последней системы состоит из всех чисел, которые не меньше $\frac{1}{2}$ и не больше 5, то есть из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают так: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (читают: «промежуток от $\frac{1}{2}$ до 5, включая $\frac{1}{2}$ и 5»).

Ответ к задаче о нахождении области определения выражения $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x}$ можно записать одним из способов: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ или $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$.

Точки, изображающие решения системы (*), расположены между точками $A\left(\frac{1}{2}\right)$ и $B(5)$, включая точки $A$ и $B$ (рис. 6.1). Они образуют отрезок.

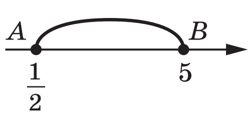



**Рис. 6.1**

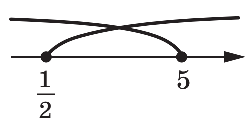



**Рис. 6.2**

Заметим, что все общие точки промежутков $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 5]$ образуют промежуток $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (рис. 6.2). Говорят, что промежуток $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ является **пересечением** промежутков $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 5]$. Записывают: $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cap (-\infty; 5] = \left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

Промежутки $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 5]$ являются множествами решений соответственно неравенств $x \geqslant \frac{1}{2}$ и $x \leqslant 5$. Тогда можно сказать, что *множество решений системы* $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5 \end{cases}$ *является пересечением множеств решений каждого из неравенств, составляющих систему.*

Следовательно, ***чтобы решить систему неравенств, надо найти пересечение множеств решений неравенств, составляющих систему.***

**ПРИМЕР 1** Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x - 1 > -7, \\ 3 - 4x > -9. \end{cases}$

*Решение.* Имеем: $\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$

С помощью координатной прямой найдем пересечение множеств решений неравенств данной системы, то есть пересечение промежутков $(-\infty; 3)$ и $(-2; +\infty)$ (рис. 6.3). Искомое пересечение состоит из чисел, удовлетворяющих неравенству $-2 < x < 3$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают $(-2;\ 3)$ (читают: «промежуток от $-2$ до 3»).

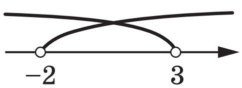



**Рис. 6.3**

*Ответ* можно записать одним из способов: $(-2;\ 3)$ или $-2 < x < 3$. ◄

**ПРИМЕР 2** Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leqslant 5. \end{cases}$

*Решение.* Имеем: $\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$

С помощью координатной прямой найдем пересечение промежутков $(-\infty; 1)$ и $[-2; +\infty)$, являющихся множествами решений неравенств данной системы (рис. 6.4). Искомое пересечение состоит из чисел, удовлетворяющих неравенству $-2 \leqslant x < 1$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают $[-2;\ 1)$ (читают: «промежуток от $-2$ до 1, включая $-2$»).

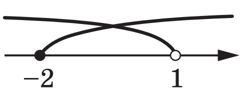



**Рис. 6.4**

*Ответ* можно записать одним из способов: $[-2;\ 1)$ или $-2 \leqslant x < 1$. ◀

**ПРИМЕР 3** Решите систему неравенств $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > -2. \end{cases}$

Множеством решений данной системы является пересечение промежутков $(-\infty; 1]$ и $(-2; +\infty)$ (рис. 6.5). Это пересечение является числовым промежутком, который обозначают $(-2;\ 1]$ (читают: «промежуток от $-2$ до 1, включая 1»).

*Ответ*: $(-2;\ 1]$. ◀

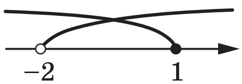



**Рис. 6.5**

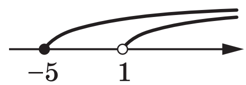



**Рис. 6.6**

**ПРИМЕР 4** Найдите область определения функции

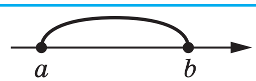
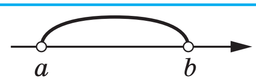
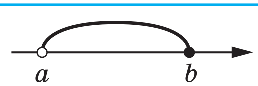
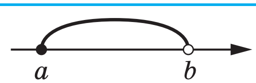
$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5}.$$

*Решение*. Искомая область определения — это множество решений системы неравенств $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x + 5 \geqslant 0. \end{cases}$ Имеем: $\begin{cases} x > 1, \\ x \geqslant -5. \end{cases}$

Изобразим на координатной прямой пересечение промежутков $(1; +\infty)$ и $[-5; +\infty)$ (рис. 6.6). Этим пересечением является промежуток $(1; +\infty)$.

*Ответ*: $(1; +\infty)$. ◀

Приведем таблицу обозначений и изображений числовых промежутков, изученных в этом пункте:

| Неравенство | Промежуток | Изображение |
|---|---|---|
| $a \leqslant x \leqslant b$ | $[a;\ b]$ |  |
| $a < x < b$ | $(a;\ b)$ |  |
| $a < x \leqslant b$ | $(a;\ b]$ |  |
| $a \leqslant x < b$ | $[a;\ b)$ |  |

1. Что называют областью определения выражения?
2. В каких случаях говорят, что надо решить систему неравенств?
3. С помощью какого символа записывают систему неравенств?
4. Что называют решением системы неравенств с одной переменной?
5. Что означает решить систему неравенств?
6. Как записывают, читают и изображают промежуток, являющийся множеством решений неравенства вида: $a \leqslant x \leqslant b$? $a < x < b$? $a < x \leqslant b$? $a \leqslant x < b$?

## УПРАЖНЕНИЯ

**6.1.°** Какие из чисел −6; −5; 0; 2; 4 являются решениями системы неравенств:
$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ -2x \leqslant 10? \end{cases}$$

**6.2.°** Решением какой из систем неравенств является число −3:
1) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 1 > -1, \\ x - 2 < 0? \end{cases}$

**6.3.°** Изобразите на координатной прямой промежуток:
1) $(-3; 4)$; 2) $[-3; 4]$; 3) $[-3; 4)$; 4) $(-3; 4]$.

**6.4.°** Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, который задается неравенством:
1) $0 < x < 5$;
2) $\frac{1}{6} < x \leqslant 2\frac{1}{7}$;
3) $0{,}2 \leqslant x < 102$;
4) $-2{,}4 \leqslant x \leqslant -1$.

**6.5.°** Запишите все целые числа, принадлежащие промежутку:
1) $[3; 7]$; 2) $(2{,}9; 6]$; 3) $[-5{,}2; 1)$; 4) $(-2; 2)$.

**6.6.°** Укажите наименьшее и наибольшее целые числа, принадлежащие промежутку:
1) $[-12; -6]$; 2) $(5; 11]$; 3) $(-10{,}8; 1{,}6]$; 4) $[-7{,}8; -2{,}9]$.

**6.7.°** Изобразите на координатной прямой и запишите пересечение промежутков:
1) $[-1; 7]$ и $[4; 9]$;
2) $[3; 6]$ и $(3; 8)$;
3) $(-\infty; 3{,}4)$ и $(2{,}5; +\infty)$;
4) $(-\infty; 2{,}6)$ и $(2{,}8; +\infty)$;
5) $[9; +\infty)$ и $[11{,}5; +\infty)$;
6) $(-\infty; -4{,}2]$ и $(-\infty; -1{,}3)$.

**6.8.**° Укажите на рисунке 6.7 изображение множества решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant 6. \end{cases}$

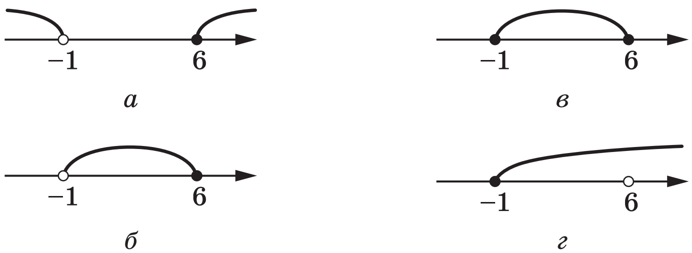



**Рис. 6.7**

**6.9.**° Укажите на рисунке 6.8 изображение множества решений двойного неравенства $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

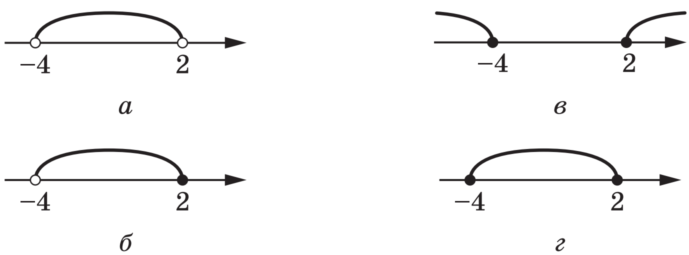



**Рис. 6.8**

**6.10.**° Какой из данных промежутков является множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x > 2: \end{cases}$

1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-1;\ 2)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$?

**6.11.**° Известно, что $a < b < c < d$. Какой из данных промежутков является пересечением промежутков $(a;\ c)$ и $(b;\ d)$:
1) $(a;\ d)$; 2) $(b;\ c)$; 3) $(c;\ d)$; 4) $(a;\ b)$?

**6.12.**° Известно, что $m < n < k < p$. Какой из данных промежутков является пересечением промежутков $(m;\ p)$ и $(n;\ k)$:
1) $(m;\ n)$; 2) $(k;\ p)$; 3) $(n;\ k)$; 4) $(m;\ p)$?

**6.13.°** Изобразите на координатной прямой и запишите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x < -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 2. \end{cases}$

**6.14.°** Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \geqslant -6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - 2 < 1 + 3x, \\ 5x - 7 \leqslant x + 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2 > 3, \\ -3x < -12; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x - 6 \leqslant x - 1, \\ 11x + 13 < x + 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 6 > 2, \\ \dfrac{x}{4} < 2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x + 14 \geqslant 18 - x, \\ 1{,}5x + 1 < 3x - 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x + 3 \geqslant 0, \\ 7 - 4x < 7; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x + 19 \leqslant 5x - 1, \\ 10x < 3x + 21. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 10x - 1 \geqslant 3, \\ 7 - 3x \geqslant 2x - 3; \end{cases}$

**6.15.°** Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -4x \leqslant -12, \\ x + 2 > 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2 - 3x < 4x - 12, \\ 7 + 3x \geqslant 2x + 10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8 - x \geqslant 5, \\ x - 7 \leqslant 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 8, \\ \dfrac{x+1}{3} < 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 3 < 5x, \\ 7x - 10 < 5x; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 2 \geqslant 2x + 1, \\ 2x + 3 \leqslant 33 - 3x. \end{cases}$

**6.16.°** Найдите множество решений неравенства:

1) $-3 < x - 4 < 7$; 3) $0{,}8 \leqslant 6 - 2x < 1{,}4$;

2) $-2{,}4 \leqslant 3x + 0{,}6 \leqslant 3$; 4) $4 < \dfrac{x}{5} - 2 \leqslant 5$.

**6.17.°** Решите неравенство:

1) $2 < x + 10 \leqslant 14$; 3) $-1{,}8 \leqslant 1 - 7x \leqslant 36$;

2) $10 < 4x - 2 < 18$; 4) $1 \leqslant \dfrac{x+1}{4} < 1{,}5$.

**6.18.**° Сколько целых решений имеет система неравенств $\begin{cases} -2x \geqslant -15, \\ 3x > -10? \end{cases}$

**6.19.**° Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} x + 8 \geqslant 4, \\ 5x + 1 \leqslant 9. \end{cases}$$

**6.20.**° Сколько целых решений имеет неравенство $-3 \leqslant 7x - 5 < 16$?

**6.21.**° Найдите наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} x + 8 \geqslant 17, \\ \dfrac{x}{2} > 4{,}5. \end{cases}$$

**6.22.**° Найдите наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + 1 < -4, \\ 3x - 6 \leqslant -12. \end{cases}$$

**6.23.**• Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 8(2 - x) - 2x > 3, \\ -3(6x - 1) - x < 2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{4} - \dfrac{2x + 3}{3} > 1, \\ 6(2x - 1) < 5(x - 4) - 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x - 3) \leqslant 3x + 4(x + 1), \\ (x - 3)(x + 3) \leqslant (x - 4)^2 - 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x + 11) \geqslant 3(6 - x), \\ (x - 3)(x + 6) \geqslant (x + 5)(x - 4); \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x + 1}{2} \leqslant \dfrac{x + 1}{3}, \\ (x + 5)(x - 3) + 41 \geqslant (x - 6)^2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x + 4 \leqslant 2x - 8, \\ (x + 2)(x - 1) \geqslant (x + 3)(x - 2); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x + 2}{7} < \dfrac{x + 1}{4}, \\ (x - 6)(x + 2) + 4x < (x - 7)(x + 7); \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{6x + 1}{6} - \dfrac{5x - 1}{5} > -1, \\ 2(x + 8) - 3(x + 2) < 5 - x. \end{cases}$

**6.24.•** Найдите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5} - \dfrac{4x-9}{6} > 1, \\ 5(x-1) + 7(x+2) > 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+2}{3} < \dfrac{x+12}{6}, \\ 0{,}3x - 19 \leqslant 1{,}7x - 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-6)^2 < (x-2)^2 - 8, \\ 3(2x-1) - 8 < 34 - 3(5x-9); \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{3} - \dfrac{4x+1}{4} \leqslant 1, \\ (x-1)(x-2) > (x+4)(x-7). \end{cases}$

**6.25.•** Найдите целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2x - 1 < 1{,}7 - x, \\ 3x - 2 \geqslant x - 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} < 1, \\ 2x - \dfrac{x}{2} \geqslant 10. \end{cases}$

**6.26.•** Сколько целых решений имеет система неравенств:

1) $\begin{cases} 4x + 3 \geqslant 6x - 7, \\ 3(x+8) \geqslant 4(8-x); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x-2}{6} < 2, \\ \dfrac{2x-5}{3} \geqslant -3? \end{cases}$

**6.27.•** Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{6x-9} + \sqrt{2x-5}$;

2) $\sqrt{3x+5} - \dfrac{1}{\sqrt{15-5x}}$;

3) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{1-x}$;

4) $\sqrt{12-3x} - \dfrac{5}{x-4}$.

**6.28.•** При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{8-x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{7x-35} + \dfrac{1}{x^2-5x}$?

**6.29.•** Решите неравенство:

1) $-3 < \dfrac{2x-5}{2} < 4$;

2) $-4 \leqslant 1 - \dfrac{x-2}{3} \leqslant -3$.

**6.30.•** Решите неравенство:

1) $-2 \leqslant \dfrac{6x+1}{4} < 4$;

2) $1{,}2 < \dfrac{7-3x}{5} \leqslant 1{,}4$.

**6.31.**• Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 2, \\ x < 3{,}6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 6 < 8, \\ 4 - 4x < 10, \\ 8x - 9 > 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0{,}4 - 8x \geqslant 3{,}6, \\ 1{,}5x - 2 < 4, \\ 4{,}1x + 10 < 1{,}6x + 5. \end{cases}$

**6.32.**• Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -x < 2, \\ 2x > 7, \\ x < -4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x + 2, \\ 2x + 1 > 8 - 5x, \\ 5x - 25 \leqslant 0. \end{cases}$

**6.33.**• Одна сторона треугольника равна 4 см, а сумма двух других — 8 см. Найдите неизвестные стороны треугольника, если длина каждой из них равна целому числу сантиметров.

**6.34.**•• Решите неравенство:

1) $(x-3)(x+4) \leqslant 0$;

2) $(x+1)(2x-7) > 0$;

3) $\dfrac{x-8}{x-1} > 0$;

4) $\dfrac{3x+6}{x-9} < 0$;

5) $\dfrac{2x-1}{x+2} \leqslant 0$;

6) $\dfrac{5x+4}{x-6} \geqslant 0$.

**6.35.**•• Решите неравенство:

1) $(14-7x)(x+3) > 0$;

2) $\dfrac{x-8}{3x-12} > 0$;

3) $\dfrac{5x-6}{x+9} \geqslant 0$;

4) $\dfrac{4x+1}{x-10} \leqslant 0$.

**6.36.**•• Решите неравенство:

1) $|x-2| \leqslant 3{,}6$;

2) $|2x+3| < 5$;

3) $|x+3| > 9$;

4) $|7-3x| \geqslant 1$;

5) $|x+3| + 2x \geqslant 6$;

6) $|x-4| - 6x < 15$.

**637.**•• Решите неравенство:

1) $|x-6| \geqslant 2{,}4$;

2) $|5x+8| \leqslant 2$;

3) $|x+5| - 3x > 4$;

4) $|x-1| + x \leqslant 3$.

**6.38.*** При каких значениях $a$ имеет хотя бы одно решение система неравенств:

1) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x < a; \end{cases}$  2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

**6.39.*** При каких значениях $a$ не имеет решений система неравенств:

1) $\begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases}$  2) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

**6.40.*** При каких значениях $a$ множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x \geqslant a \end{cases}$ является промежуток:

1) $(-1; +\infty)$;  2) $[1; +\infty)$?

**6.41.*** Для каждого значения $a$ решите систему неравенств

$$\begin{cases} x < 2, \\ x \leqslant a. \end{cases}$$

**6.42.*** Для каждого значения $a$ решите систему неравенств

$$\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$$

**6.43.*** При каких значениях $a$ множество решений системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x < a \end{cases}$ содержит ровно четыре целых числа?

**6.44.*** При каких значениях $b$ множество решений системы неравенств $\begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant b \end{cases}$ содержит ровно три целых числа?

**6.45.*** При каких значениях $a$ наименьшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x > a \end{cases}$ является число 9?

**6.46.*** При каких значениях $b$ наибольшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \leqslant b, \\ x < -2 \end{cases}$ является число $-6$?

**6.47.*** При каких значениях $a$ корни уравнения

$$x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$$

меньше числа 5?

**6.48.*** При каких значениях $a$ корни уравнения

$$x^2 - (4a - 2)x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$$

принадлежат промежутку $[-2; 8]$?

**6.49.*** При каких значениях $a$ один из корней уравнения

$$3x^2-(2a+5)x+2+a-a^2=0$$

меньше $-2$, а другой — больше 3?

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**6.50.** Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2}{x^2-16}=\dfrac{3x+4}{x^2-16}$;  2) $\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{8}{x}=3$.

**6.51.** Упростите выражение:

1) $0{,}5\sqrt{24}-4\sqrt{40}-\sqrt{150}+\sqrt{54}+\sqrt{1000}$;

2) $\sqrt{8b}+0{,}3\sqrt{50b}-3\sqrt{2b}$;

3) $1{,}5\sqrt{72}-\sqrt{216}-0{,}6\sqrt{450}+0{,}5\sqrt{96}$.

**6.52.** Выразите из данного равенства переменную $x$ через другие переменные:

1) $2x-\dfrac{m}{n}=2$;  2) $\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{n}$.

**6.53.** Известно, что $a$ — четное число, $b$ — нечетное, $a>b$. Значение какого из данных выражений может быть целым числом:

1) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$;  2) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}$;  3) $\dfrac{a}{b}$;  4) $\dfrac{b}{a}$?

**6.54.** Сколько килограммов соли содержится в 40 кг 9-процентного раствора?

**6.55.** Руда содержит 8 % олова. Сколько надо взять килограммов руды, чтобы получить 72 кг олова?

**6.56.** Каково процентное содержание соли в растворе, если в 350 г раствора содержится 21 г соли?

## ЗАДАНИЕ № 1 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

**1.** Сравните числа $a$ и $b$, если $a-b=-3{,}6$.

А) $a>b$;

Б) $a<b$;

В) $a=b$;

Г) сравнить невозможно.

**2.** Известно, что $m>n$. Какое из данных утверждений ошибочно?

А) $m-2>n-2$;

Б) $2m>2n$;

В) $m+2>n+2$;

Г) $-2m>-2n$.

**3.** Оцените периметр $P$ равностороннего треугольника со стороной $a$ см, если $0{,}8<a<1{,}2$.

А) $1{,}6$ см $<P<2{,}4$ см;

Б) $2{,}4$ см $<P<3{,}6$ см;

В) $3{,}2$ см $<P<4{,}8$ см;

Г) $1{,}2$ см $<P<1{,}8$ см.

**4.** Известно, что $2<x<3$ и $1<y<4$. Оцените значение выражения $xy$.

А) $4<xy<8$;

Б) $3<xy<7$;

В) $2<xy<12$;

Г) $6<xy<14$.

**5.** Известно, что $-18<y<12$. Оцените значение выражения $\frac{1}{6}y+2$.

А) $-3<\frac{1}{6}y+2<4$;

Б) $-1<\frac{1}{6}y+2<4$;

В) $-1<\frac{1}{6}y+2<2$;

Г) $-3<\frac{1}{6}y+2<2$.

**6.** Дано: $a>0$, $b<0$. Какое из данных неравенств может быть правильным?

А) $a^2<b^2$; Б) $\frac{a}{b}>1$; В) $a-b<0$; Г) $a^2b^3>0$.

**7.** Множеством решений какого из данных неравенств является множество действительных чисел?

А) $2x>-2$; В) $0x>-2$;
Б) $2x>0$; Г) $0x>0$.

**8.** Множеством решений какого из данных неравенств является промежуток $(3;+\infty)$?

А) $x\geqslant 3$; В) $x>3$;
Б) $x\leqslant 3$; Г) $x<3$.

**9.** Найдите решения неравенства $\frac{x}{4}\leqslant\frac{1}{5}$.

А) $x\geqslant\frac{4}{5}$; В) $x\leqslant\frac{4}{5}$;
Б) $x\geqslant\frac{1}{20}$; Г) $x\leqslant\frac{1}{20}$.

**10.** Решите неравенство $-3x+8\geqslant 5$.

А) $x\leqslant 1$; В) $x\leqslant -1$;
Б) $x\geqslant 1$; Г) $x\geqslant -1$.

**11.** Найдите наименее целое решение неравенства $\frac{3x-5}{2}>\frac{8-x}{3}$.

А) 2; В) 4;
Б) 3; Г) определить невозможно.

**12.** Чему равно произведение натуральных чисел, принадлежащих области определения выражения $\sqrt{14-3x}$?

А) 4; В) 18;
Б) 10; Г) 24.

**13.** Какая из данных систем неравенств не имеет решений?

А) $\begin{cases}x\geqslant -3,\\ x\leqslant -2;\end{cases}$ В) $\begin{cases}x\geqslant -3,\\ x\leqslant -3;\end{cases}$

Б) $\begin{cases}x>-3,\\ x>-2;\end{cases}$ Г) $\begin{cases}x\geqslant -2,\\ x\leqslant -3.\end{cases}$

**14.** Найдите множество решений системы неравенств

$$\begin{cases}x-1>2x-3,\\ 4x+5>x+17.\end{cases}$$

А) $\varnothing$; В) $(-\infty;4)$;
Б) $(2;+\infty)$; Г) $(2;\ 4)$.

**15.** Какой из изображенных числовых промежутков соответствует множеству решений системы неравенств $\begin{cases} 8-7x>3x-2, \\ -2\,(3x-2{,}6)\leqslant -2\cdot(-2{,}6)? \end{cases}$

А)


В)


Б)


Г)


**16.** Сколько целых решений имеет система неравенств

$$\begin{cases} x-\dfrac{x-2}{3}\geqslant\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x-1}{2}, \\ 1-0{,}5x>x-4? \end{cases}$$

А) 3; В) 5;
Б) 4; Г) 6.

**17.** Решите неравенство $-3<\dfrac{1-2x}{5}-2<1$.

А) $(-3;\ 7)$; В) $(-7;\ -3)$;
Б) $(-7;\ 3)$; Г) $(3;\ 7)$.

**18.** При каких значениях $a$ уравнение $2x^2+6x+a=0$ не имеет корней?

А) $a<4{,}5$; В) $a>-4{,}5$;
Б) $a>4{,}5$; Г) $a<-4{,}5$.

## ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 1

### Сравнение чисел

Считают, что число $a$ больше числа $b$, если разность $a-b$ является положительным числом.
Считают, что число $a$ меньше числа $b$, если разность $a-b$ является отрицательным числом.

### Основные свойства числовых неравенств

Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.
Если $a>b$ и $c$ — любое число, то $a+c>b+c$.
Если $a>b$ и $c$ — положительное число, то $ac>bc$.
Если $a>b$ и $c$ — отрицательное число, то $ac<bc$.
Если $a>b$ и $ab>0$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

### Сложение и умножение числовых неравенств

Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.
Если $a>b$, $c>d$ и $a$, $b$, $c$, $d$ — положительные числа, то $ac>bd$.

### Решение неравенства с одной переменной

Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

### Равносильные неравенства

Неравенства называют равносильными, если они имеют одно и то же множество решений.

### Правила решения неравенств с одной переменной

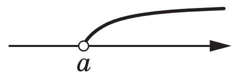
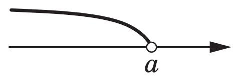
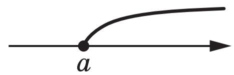
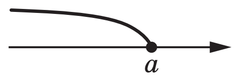
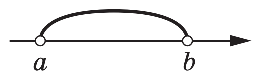
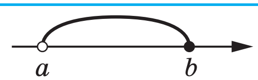
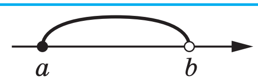
- Если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.
- Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.
- Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

### Решение системы неравенств с одной переменной

Решением системы неравенств с одной переменной называют значение переменной, которое обращает каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.

Решить систему неравенств означает найти все ее решения или доказать, что решений нет, то есть найти множество ее решений.

### Числовые промежутки

| Неравенство | Промежуток | Изображение |
|---|---|---|
| $x > a$ | $(a;\ +\infty)$ |   |
| $x < a$ | $(-\infty;\ a)$ |   |
| $x \geqslant a$ | $[a;\ +\infty)$ |   |
| $x \leqslant a$ | $(-\infty;\ a]$ |   |
| $a \leqslant x \leqslant b$ | $[a;\ b]$ |   |
| $a < x < b$ | $(a;\ b)$ |   |
| $a < x \leqslant b$ | $(a;\ b]$ |   |
| $a \leqslant x < b$ | $[a;\ b)$ |   |

# § 2 КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

- В этом параграфе вы повторите и расширите свои знания о функции и ее свойствах.
- Научитесь, используя график функции $y = f(x)$, строить графики функций $y = kf(x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$.
- Узнаете, какую функцию называют квадратичной, какая фигура является ее графиком, изучите свойства квадратичной функции.
- Научитесь применять свойства квадратичной функции.
- Расширите свои знания о системах уравнений с двумя переменными, методах их решения, приобретете новые навыки решения систем уравнений.

## 7. Повторение и расширение сведений о функции

В повседневной жизни нам часто приходится наблюдать процессы, в которых изменение одной величины (независимой переменной) влечет за собой изменение другой величины (зависимой переменной). Изучение этих процессов требует создания их математических моделей. Одной из таких важнейших моделей является **функция**.

С этим понятием вы ознакомились в 7 классе. Напомним и уточним основные сведения.

Пусть $X$ — множество значений независимой переменной, $Y$ — множество значений зависимой переменной. **Функция — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества $X$ можно найти единственное значение зависимой переменной из множества $Y$.**

Обычно независимую переменную обозначают буквой $x$, зависимую — буквой $y$, функцию (правило) — буквой $f$. Говорят, что переменная $y$ **функционально зависит** от переменной $x$. Этот факт обозначают так: $y=f(x)$.

Независимую переменную еще называют **аргументом функции**.

Множество всех значений, которые принимает аргумент, называют **областью определения функции** и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Так, областью определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ является промежуток $(0; +\infty)$, то есть $D(y) = (0; +\infty)$.

В функциональной зависимости каждому значению аргумента $x$ соответствует определенное значение зависимой переменной $y$. Значение зависимой переменной еще называют **значением функции** и обозначают $f(x)$. Множество всех значений, которые принимает зависимая переменная, называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$ или $E(y)$. Так, областью значений функции $y = \sqrt{x}$ является промежуток $[0; +\infty)$, то есть $E(y) = [0; +\infty)$.

Функцию считают заданной, если указаны ее область определения и правило, с помощью которого можно по каждому значению независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Функцию можно задать одним из следующих способов:

- описательно;
- с помощью формулы;
- с помощью таблицы;
- графически.

Чаще всего функцию задают с помощью формулы. Такой способ задания функции называют **аналитическим**. Если при этом не указана область определения, то считают, что областью определения функции является область определения выражения, входящего в формулу. Например, если функция задана формулой $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, то ее областью определения является область определения выражения $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, то есть промежуток $(1; +\infty)$.

В таблице приведены функции, которые вы изучали в 7 и 8 классах.

| Функция | Область определения | Область значений | График |
|---|---|---|---|
| $y = kx + b$ | $(-\infty; +\infty)$ | Если $k \neq 0$, то $(-\infty; +\infty)$; если $k = 0$, то область значений состоит из одного числа $b$ | Прямая |
| $y = \dfrac{k}{x}$, $k \neq 0$ | Множество, состоящее из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ | Множество, состоящее из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ | Гипербола |

| Функция | Область определения | Область значений | График |
|---|---|---|---|
| $y = x^2$ | $(-\infty; +\infty)$ | $[0; +\infty)$ | Парабола |
| $y = \sqrt{x}$ | $[0; +\infty)$ | $[0; +\infty)$ | Ветвь параболы |

**?**

1. Что такое функция?
2. Как обозначают тот факт, что переменная $y$ функционально зависит от переменной $x$?
3. Что называют аргументом функции?
4. Что называют областью определения функции?
5. Что называют значением функции?
6. Что называют областью значений функции?
7. Что надо указать, чтобы функция считалась заданной?
8. Какие способы задания функции вы знаете?
9. Что считают областью определения функции, если она задана формулой и при этом не указана область определения?

## УПРАЖНЕНИЯ

**7.1.°** Функция задана формулой $f(x) = -2x^2 + 5x$.

1) Найдите: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-5)$.
2) Найдите значения аргумента, при которых значение функции равно: 0; 2; −3.
3) Верно ли равенство: $f(-1) = 7$; $f(4) = -12$?

**7.2.°** Функция задана формулой $f(x) = 3x - 2$.

1) Найдите: $f(3)$; $f(0)$; $f(-0{,}2)$; $f(1{,}6)$.
2) Найдите значение $x$, при котором: $f(x) = 10$; $f(x) = -6$; $f(x) = 0$.

**7.3.°** Каждому натуральному числу, которое больше 10, но меньше 20, поставили в соответствие остаток при делении этого числа на 5.

1) Каким способом задана эта функция?
2) Какова область значений этой функции?
3) Задайте эту функцию таблично.

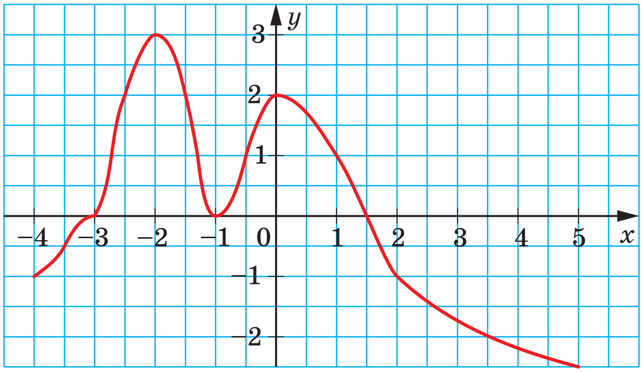



**Рис. 7.1**

**7.4.**° Функция задана формулой $y = 0{,}4x - 2$. Заполните таблицу соответствующих значений $x$ и $y$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | | −2,5 | |
| $y$ | | −2 | | 0,8 |

**7.5.**° Дана функция $y = -\dfrac{16}{x}$. Заполните таблицу соответствующих значений $x$ и $y$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | | −0,4 | |
| $y$ | | 0,8 | | −32 |

**7.6.**° На рисунке 7.1 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-4;\ 5]$. Пользуясь графиком, найдите:
1) $f(-3{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
2) значения $x$, при которых $f(x) = -2{,}5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) область значений функции.

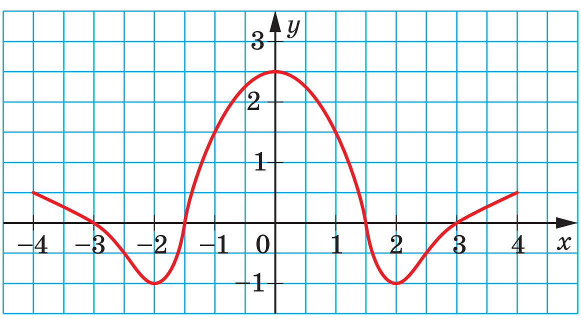



**Рис. 7.2**

**7.7.°** На рисунке 7.2 изображен график функции $y=f(x)$, определенной на промежутке $[-4;\ 4]$. Пользуясь графиком, найдите:

1) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2{,}5)$;
2) значения $x$, при которых $f(x)=-1$; $f(x)=0$; $f(x)=2$;
3) область значений функции.

**7.8.°** Найдите область определения функции:

1) $f(x)=7x-15$;
2) $f(x)=\dfrac{8}{x+5}$;
3) $f(x)=\dfrac{x-10}{6}$;
4) $f(x)=\sqrt{x-9}$;
5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$;
6) $f(x)=\dfrac{10}{x^2-4}$;
7) $f(x)=\dfrac{6x+11}{x^2-2x}$;
8) $f(x)=\sqrt{x+6}+\sqrt{4-x}$.

**7.9.°** Найдите область определения функции:

1) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-4}$;
2) $f(x)=\dfrac{9}{x^2+16}$;
3) $f(x)=\dfrac{5x+1}{x^2-6x+8}$;
4) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}$;
5) $f(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt{5-x}$;
6) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

**7.10.°** Постройте график функции:

1) $f(x)=-2x+3$;
2) $f(x)=-\dfrac{1}{4}x$;
3) $f(x)=3$;
4) $f(x)=-\dfrac{6}{x}$.

**7.11.°** Постройте график функции:

1) $f(x)=4-\dfrac{1}{3}x$;
2) $f(x)=\dfrac{8}{x}$.

**7.12.°** Найдите, не выполняя построения, точки пересечения с осями координат графика функции:

1) $f(x)=\dfrac{1}{6}x-7$;
2) $f(x)=\dfrac{20+4x}{3x-5}$;
3) $g(x)=9-x^2$;
4) $\varphi(x)=x^2+2x-3$.

**7.13.°** Найдите, не выполняя построения, точки пересечения с осями координат графика функции:

1) $h(x)=9-10x$;
2) $p(x)=4x^2+x-3$;
3) $s(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2+2}$.

**7.14.°** Дана функция $f(x)=\begin{cases}3x-1, \text{если } x\leqslant -1,\\ x^2-5, \text{если } -1<x<4,\\ 11, \quad \text{если } x\geqslant 4.\end{cases}$

Найдите: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6{,}4)$.

**7.15.°** Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}6, \quad \text{если } x\leqslant -3,\\ x^2, \text{если } -3<x<1,\\ x, \quad \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$

**7.16.°** Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x}, \text{если } x<-2,\\ -x, \text{если } -2\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, \text{если } x>0.\end{cases}$

**7.17.°** Найдите область определения функции:

1) $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{x+2}{x-5}$;
3) $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$;
2) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-7}$;
4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{4x-3}{x^2-7x+6}$.

**7.18.°** Найдите область определения функции:

1) $f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{2}{x+1}$;
2) $f(x)=\sqrt{8-x}+\dfrac{4}{x^2-8x}$.

**7.19.°** Найдите область значений функции:

1) $f(x)=\sqrt{x}-1$;
4) $f(x)=|x|+2$;
2) $f(x)=5-x^2$;
5) $f(x)=\sqrt{-x^2}$;
3) $f(x)=-7$;
6) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$.

**7.20.°** Найдите область значений функции:

1) $f(x)=x^2+3$; 2) $f(x)=6-\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$.

**7.21.°** Задайте формулой какую-нибудь функцию, областью определения которой является:

1) множество действительных чисел, кроме чисел 1 и 2;
2) множество всех чисел, которые не меньше 5;
3) множество всех чисел, которые не больше 10, кроме числа −1;
4) множество, состоящее из одного числа −4.

**7.22.••** Найдите область определения функции и постройте ее график:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$; 2) $f(x)=\dfrac{12x-72}{x^2-6x}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-9}$.

**7.23.**$^{\bullet\bullet}$ Найдите область определения функции и постройте ее график:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x}$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**7.24.** Разложите на множители квадратный трехчлен:

1) $x^2-x-12$; 3) $6x^2+11x-2$;

2) $-x^2+2x+35$; 4) $\dfrac{2}{3}x^2+3x-6$.

**7.25.** Вычислите значение выражения:

1) $(10^3)^2\cdot 10^{-8}$; 2) $\dfrac{25^{-3}\cdot 5^3}{5^{-5}}$; 3) $\dfrac{81^{-2}\cdot 3^5}{9^{-2}}$; 4) $\dfrac{0{,}125^3\cdot 32^2}{0{,}5^{-2}}$.

**7.26.** Цена двух шкафов была одинаковой. Цену первого шкафа сначала повысили на $20\ \%$, а потом снизили на $10\ \%$. Цену второго шкафа, наоборот, сначала снизили на $10\ \%$, а потом повысили на $20\ \%$. Какой из шкафов теперь стоит больше?

**7.27.** Расстояние между городами $A$ и $B$ составляет 120 км. Через 2 ч после выезда из города $A$ грузовой автомобиль задержался у железнодорожного переезда на 6 мин. Чтобы прибыть в город $B$ в запланированное время, он увеличил скорость на 12 км/ч. С какой скоростью двигался автомобиль после задержки?

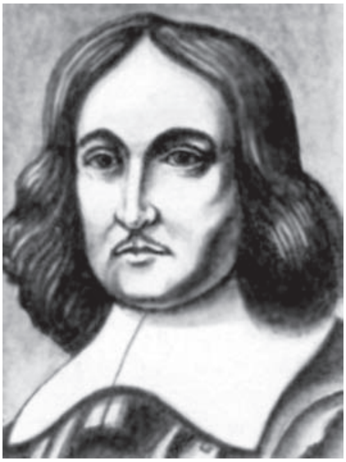
## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**7.28.** Натуральное число $n$ имеет ровно 100 различных натуральных делителей (включая 1 и $n$). Найдите их произведение.

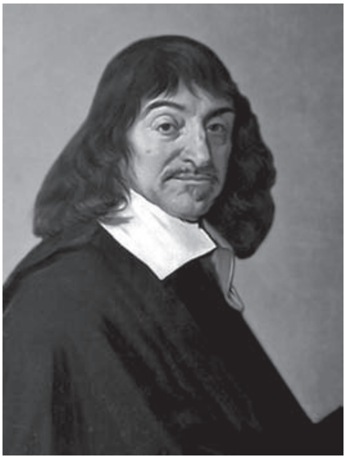
# Из истории развития понятия функции

Определение функции, которым вы пользуетесь на данном этапе изучения математики, появилось сравнительно недавно — в первой половине XIX в. Оно формировалось более 200 лет под влиянием бурных споров выдающихся математиков нескольких поколений.

Исследованием функциональных зависимостей между величинами начали заниматься еще ученые древности. Этот поиск нашел отражение в открытии формул для вычисления площадей и объемов некоторых фигур. Примерами табличного задания функций могут служить астрономические таблицы вавилонян, древних греков и арабов.



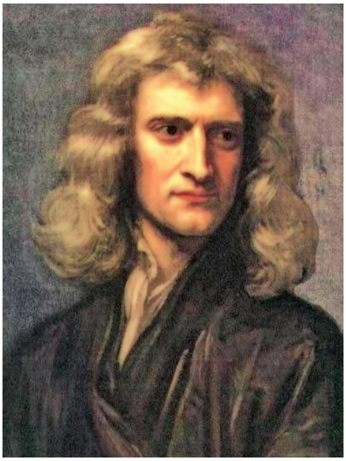
**Пьер Ферма́**
(1601–1665)



**Рене Декарт**
(1596–1650)

Однако лишь в первой половине XVII в. своим открытием метода координат выдающиеся французские математики Пьер Ферма́ и Рене Декарт заложили основы для возникновения понятия функции. В своих работах они исследовали изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы.

Важную роль в формировании понятия функции сыграли работы великого английского ученого Исаака Ньютона. Под функцией он понимал величину, которая изменяет свое значение с течением времени.



**Исаак Ньютон**
(1643–1727)

Термин «функция» (от латин. *functio* — совершение, выполнение) ввел немецкий математик Готфрид Вильгельм Лейбниц. Он и его ученик, швейцарский математик Иоганн Бернулли, под функцией понимали формулу, связывающую одну переменную с другой, то есть они отождествляли функцию с одним из способов ее задания.

Дальнейшему развитию понятия функции во многом способствовало выяснение истины в многолетнем споре выдающихся математиков Леонарда Эйлера и Жана Лерона д’Аламбера,

**Готфрид Вильгельм Лейбниц**
(1646–1716)

**Иоганн Бернулли**
(1667–1748)

одним из предметов которого было выяснение сути этого понятия. В результате был сформирован более общий взгляд на функцию как зависимость одной переменной величины от другой, в котором это понятие жестко не связывалось со способом задания функции.

**Леонард Эйлер**
(1707–1783)

**Жан Лерон д'Аламбер**
(1717–1783)

В 30-х гг. XIX в. идеи Эйлера получили дальнейшее развитие в работах выдающихся ученых: русского математика Николая Лобачевского и немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле. Именно тогда появилось такое определение: переменную величину $y$ называют функцией переменной величины $x$, если каждому значению величины $x$ соответствует единственное значение величины $y$.

**Николай Лобачевский**
(1792–1856)

**Петер Дирихле**
(1805–1859)

Такое определение функции можно и сегодня встретить в школьных учебниках. Однако более современный подход — это трактовка функции как *правила, с помощью которого по значению независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной*.

Когда на рубеже XIX и XX вв. возникла теория множеств и стало ясно, что элементами области определения и области значений совсем не обязательно должны быть числа, то под функцией стали понимать *правило, которое каждому элементу множества $X$ ставит в соответствие единственный элемент множества $Y$*.

## 8. Свойства функции

Часто о свойствах объекта можно судить по его изображению: фотографии, рентгеновскому снимку, рисунку и т. п.

«Изображением» функции может служить ее график. Покажем, как график функции позволяет определить некоторые ее свойства.

На рисунке 8.1 изображен график некоторой функции $y=f(x)$.

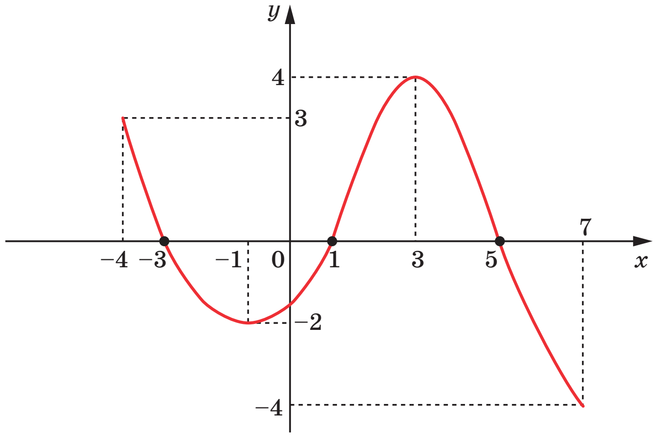



**Рис. 8.1**

Ее областью определения является промежуток $[-4;\ 7]$, а областью значений — промежуток $[-4;\ 4]$.

При $x=-3$, $x=1$, $x=5$ значения функции равны нулю.

**Определение. Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют нулем функции.**

Так, числа $-3$, $1$, $5$ являются нулями данной функции.

Заметим, что на промежутках $[-4;\ -3)$ и $(1;\ 5)$ график функции $f$ расположен над осью абсцисс, а на промежутках $(-3;\ 1)$ и $(5;\ 7]$ — под осью абсцисс. Это означает, что на промежутках $[-4;\ -3)$ и $(1;\ 5)$ функция принимает положительные значения, а на промежутках $(-3;\ 1)$ и $(5;\ 7]$ — отрицательные.

Каждый из указанных промежутков называют **промежутком знакопостоянства** функции $f$.

**Определение. Промежуток, на котором функция принимает значения одинакового знака, называют промежутком знакопостоянства функции.**

Отметим, что, например, промежуток $(0;\ 5)$ не является промежутком знакопостоянства данной функции.

Замечание. При поиске промежутков знакопостоянства функции принято указывать промежутки максимальной длины. Например, промежуток $(-2;\ -1)$ является промежутком знакопостоянства функции $f$ (рис. 8.1), но в ответ следует включить промежуток $(-3;\ 1)$, содержащий промежуток $(-2;\ -1)$.

Если перемещаться по оси абсцисс от $-4$ до $-1$, то можно заметить, что график функции «идет вниз», то есть значения функции уменьшаются. Говорят, что на промежутке $[-4; -1]$ **функция убывает.** С увеличением $x$ от $-1$ до 3 график функции «идет вверх», то есть значения функции увеличиваются. Говорят, что на промежутке $[-1; 3]$ **функция возрастает.**

**Определение. Функцию $f$ называют возрастающей на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента $x_1$ и $x_2$ из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.**

**Определение. Функцию $f$ называют убывающей на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента $x_1$ и $x_2$ из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.**

Часто используют и такие формулировки.

**Определение. Функцию называют возрастающей на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции.**

**Определение. Функцию называют убывающей на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.**

Если функция возрастает на всей области определения, то ее называют **возрастающей.** Если функция убывает на всей области определения, то ее называют **убывающей.**

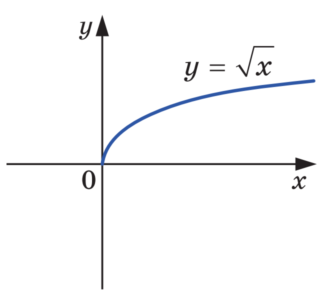



Рис. 8.2

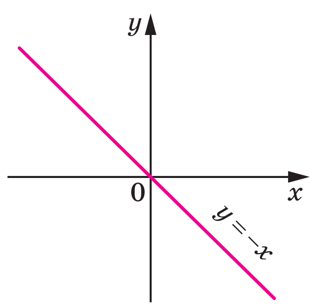



Рис. 8.3

Например, на рисунке 8.2 изображен график функции $y=\sqrt{x}$. Эта функция является возрастающей. На рисунке 8.3 изображен график убывающей функции $y=-x$. На рисунке 8.1 изображен график функции, которая не является ни возрастающей, ни убывающей.

**ПРИМЕР 1** Докажите, что функция $y=x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

*Решение.* Пусть $x_1$ и $x_2$ — произвольные значения аргумента из промежутка $(-\infty; 0]$, причем $x_2>x_1$. Покажем, что $x_2^2<x_1^2$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Имеем: $x_2>x_1$; отсюда $-x_2<-x_1$. Обе части последнего неравенства являются неотрицательными числами. Тогда по свойству числовых неравенств можно записать, что $(-x_2)^2<(-x_1)^2$, то есть $x_2^2<x_1^2$. ◄

Заметим, что в подобных случаях говорят: промежуток $(-\infty; 0]$ является **промежутком убывания** функции $y=x^2$. Аналогично можно доказать, что промежуток $[0; +\infty)$ является **промежутком возрастания** функции $y=x^2$.

В задачах на поиск промежутков возрастания и убывания функции принято указывать промежутки максимальной длины.

**ПРИМЕР 2** Докажите, что функция $f(x)=\frac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

*Решение.* Пусть $x_1$ и $x_2$ — произвольные значения аргумента из промежутка $(0; +\infty)$, причем $x_2>x_1$. Тогда по свойству числовых неравенств $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$. Следовательно, данная функция убывает на промежутке $(0; +\infty)$.

Аналогично можно доказать, что функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. ◄

Однако нельзя утверждать, что функция $f(x)=\frac{1}{x}$ убывает на всей области определения, то есть является убывающей. Действительно, если, например, $x_1=-2$, $x_2=3$, то из неравенства $x_2>x_1$ не следует, что $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$.

**ПРИМЕР 3** Докажите, что линейная функция $f(x) = kx+b$ является возрастающей при $k>0$ и убывающей при $k<0$.

*Решение.* Пусть $x_1$ и $x_2$ — произвольные значения аргумента, причем $x_2>x_1$.

Имеем:

$$f(x_2)-f(x_1)=(kx_2+b)-(kx_1+b)=kx_2-kx_1=k(x_2-x_1).$$

Поскольку $x_2>x_1$, то $x_2-x_1>0$.

Тогда если $k>0$, то $k(x_2-x_1)>0$, то есть $f(x_2)>f(x_1)$. Следовательно, при $k>0$ данная функция является возрастающей.

Если $k<0$, то $k(x_2-x_1)<0$, то есть $f(x_2)<f(x_1)$. Следовательно, при $k<0$ данная функция является убывающей. ◄

?

1. Какое значение аргумента называют нулем функции?
2. Поясните, что называют промежутком знакопостоянства функции.
3. Какую функцию называют возрастающей на некотором промежутке?
4. Какую функцию называют убывающей на некотором промежутке?
5. Какую функцию называют возрастающей?
6. Какую функцию называют убывающей?

## УПРАЖНЕНИЯ

**8.1.°** На рисунке 8.4 изображен график функции $y=f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Пользуясь графиком, найдите:

1) нули функции;
2) при каких значениях аргумента значения функции положительные;
3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

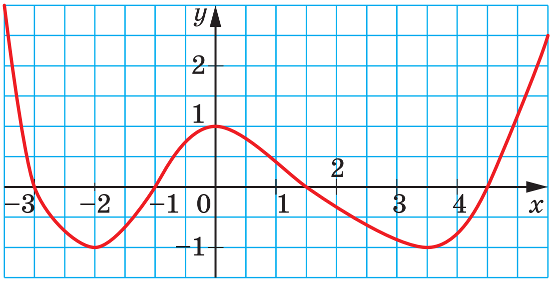



**Рис. 8.4**

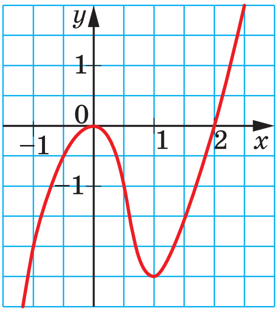



**Рис. 8.5**

**8.2.°** На рисунке 8.5 изображен график функции $y=f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Пользуясь графиком, найдите:

1) нули функции;
2) при каких значениях аргумента значения функции отрицательные;
3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

**8.3.°** На рисунке 8.6 изображен график функции, определенной на промежутке $[-1; 4]$. Пользуясь графиком, найдите:

1) нули функции;
2) при каких значениях $x$ значения функции отрицательные;
3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

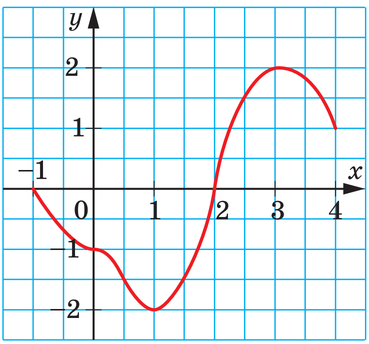



**Рис. 8.6**

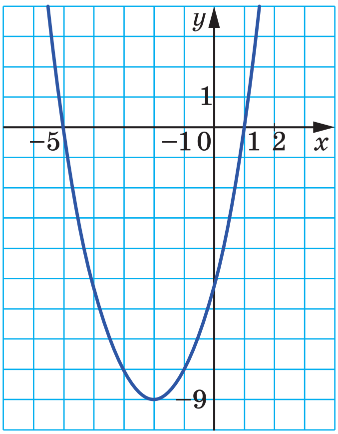



**Рис. 8.7**

**8.4.°** На рисунке 8.7 изображен график функции $y=f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Какие из данных утверждений верны:

1) функция убывает на промежутке $(-\infty; -9]$;
2) $f(x)<0$ при $-5 \leqslant x \leqslant 1$;
3) функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$;
4) $f(x)=0$ при $x=-5$ и при $x=1$;
5) функция на области определения принимает наименьшее значение при $x=-2$?

**8.5.°** На рисунке 8.8 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Пользуясь графиком, найдите:

1) нули функции;
2) значения $x$, при которых $y < 0$;
3) промежуток убывания функции;
4) область значений функции.

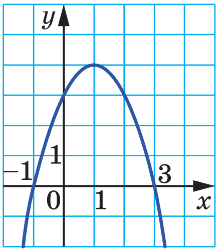



**Рис. 8.8**

**8.6.°** Возрастающей или убывающей является функция:

1) $y = 9x - 4$;
2) $y = -4x + 10$;
3) $y = 12 - 3x$;
4) $y = -x$;
5) $y = \frac{1}{6}x$;
6) $y = 1 - 0{,}3x$?

**8.7.°** Найдите нули функции:

1) $f(x) = 0{,}2x + 3$;
2) $g(x) = 35 - 2x - x^2$;
3) $\varphi(x) = \sqrt{x+3}$;
4) $h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 3}$;
5) $f(x) = x^3 - 4x$;
6) $f(x) = x^2 + 1$.

**8.8.°** Найдите нули функции:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x + 12$;
2) $f(x) = 6x^2 + 5x + 1$;
3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;
4) $f(x) = -5$;
5) $f(x) = \frac{3 - 0{,}2x}{x + 1}$;
6) $f(x) = x^2 - x$.

**8.9.°** Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = 5x - 15$;
2) $y = -7x - 28$;
3) $y = x^2 - 2x + 1$;
4) $y = \frac{9}{3 - x}$.

**8.10.°** Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = -4x + 8$;
2) $y = -x^2 - 1$;
3) $y = \sqrt{x} + 2$.

**8.11.•** Начертите график какой-либо функции, определенной на множестве действительных чисел, нулями которой являются числа: 1) −2 и 5; 2) −4, −1, 0 и 4.

**8.12.•** Начертите график какой-либо функции, определенной на промежутке [−5; 5], нулями которой являются числа −3, 0 и 3.

**8.13.•** Начертите график какой-либо функции, определенной на промежутке [−4; 3], такой, что:

1) функция возрастает на промежутке [−4; −1] и убывает на промежутке [−1; 3];
2) функция убывает на промежутках [−4; −2] и [0; 3] и возрастает на промежутке [−2; 0].

**8.14.**° Начертите график какой-либо функции, определенной на множестве действительных чисел, которая возрастает на промежутках $(-\infty;\ 1]$ и $[4;\ +\infty)$ и убывает на промежутке $[1;\ 4]$.

**8.15.**° Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}2x+8, & \text{если } x\leqslant -2,\\ x^2, & \text{если } -2<x<2,\\ -2x+8, & \text{если } x\geqslant 2.\end{cases}$

Используя построенный график, укажите нули функции, ее промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и промежутки убывания.

**8.16.**° Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & \text{если } x<-1,\\ \dfrac{x}{4}, & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{4}{x}, & \text{если } x>1.\end{cases}$

Используя построенный график, укажите нули функции, ее промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и промежутки убывания.

**8.17.**° При каких значениях $a$ функция $y=x^2+(2a-1)\,x+a^2+a$ имеет два нуля?

**8.18.**° При каких значениях $a$ функция $y=x^2+6x+a$ не имеет нулей?

**8.19.**° При каком наибольшем целом значении $n$ функция

$$y=(8-3n)\,x-7$$

является возрастающей?

**8.20.**° При каких значениях $m$ функция $y=mx-m-3+2x$ является убывающей?

**8.21.**° Функция $y=f(x)$ является убывающей. Возрастающей или убывающей является функция (ответ обоснуйте):

1) $y=3f(x)$;

2) $y=\dfrac{1}{3}f(x)$;

3) $y=-f(x)$?

**8.22.**° Функция $y=f(x)$ возрастает на некотором промежутке. Возрастающей или убывающей на этом промежутке является функция (ответ обоснуйте):

1) $y=\dfrac{1}{2}f(x)$;

2) $y=-2f(x)$?

**8.23.**•• Докажите, что функция:

1) $y=\dfrac{6}{3-x}$ возрастает на промежутке $(3;+\infty)$;

2) $y=x^2-4x+3$ убывает на промежутке $(-\infty;2]$.

**8.24.**•• Докажите, что функция:

1) $y=\dfrac{7}{x+5}$ убывает на промежутке $(-5;+\infty)$;

2) $y=6x-x^2$ возрастает на промежутке $(-\infty;3]$.

**8.25.**•• Докажите, что функция $y=\dfrac{k}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ при $k>0$ и возрастает на каждом из этих промежутков при $k<0$.

**8.26.*** При каких значениях $a$ функция $f(x)=(a-1)\ x^2+2ax+6-a$ имеет единственный нуль?

**8.27.*** Постройте график функции $f(x)=x^2$, определенной на промежутке $[a;\ 2]$, где $a<2$. Для каждого значения $a$ найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**8.28.** Сократите дробь:

1) $\dfrac{x^2+x-6}{7x+21}$;

2) $\dfrac{2y-16}{8+7y-y^2}$;

3) $\dfrac{m^2-16m+63}{m^2-81}$;

4) $\dfrac{3a^2+a-2}{4-9a^2}$.

**8.29.** Выполните умножение:

1) $\left(\sqrt{11}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{6}\right)$;

2) $\left(\sqrt{32}-5\right)\left(\sqrt{32}+5\right)$;

3) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$;

4) $\left(\sqrt{10}+8\right)^2$.

**8.30.** Два экскаватора разных моделей вырыли котлован за 8 ч. Первый экскаватор, работая самостоятельно, может вырыть такой котлован в 4 раза быстрее, чем второй. За сколько часов может вырыть такой котлован каждый экскаватор, работая самостоятельно?

**8.31.** В раствор массой 200 г, содержавший 12 % соли, добавили 20 г соли. Каким стало процентное содержание соли в новом растворе?

# 9. Как построить график функции $y = kf(x)$, если известен график функции $y = f(x)$

В 8 классе вы ознакомились с функцией $y=x^2$ и узнали, что ее графиком является фигура, которую называют параболой (рис. 9.1).

Покажем, как с помощью графика функции $y=x^2$ построить график функции $y=ax^2$, где $a \neq 0$.

Построим, например, график функции $y=2x^2$.

Составим таблицу значений функций $y=x^2$ и $y=2x^2$ при одних и тех же значениях аргумента:

| $x$ | $-3$ | $-2{,}5$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2$ | 9 | 6,25 | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |
| $y = 2x^2$ | 18 | 12,5 | 8 | 4,5 | 2 | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 | 8 | 12,5 | 18 |

Эта таблица подсказывает, что каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y=x^2$ соответствует единственная точка $(x_0;\ 2y_0)$ графика функции $y=2x^2$. А каждая точка $(x_1;\ y_1)$ графика функции $y=2x^2$ является соответствующей единственной точке $\left(x_1; \frac{y_1}{2}\right)$ графика функции $y=x^2$. Поэтому все точки графика функции $y=2x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y=x^2$ на точку с той же абсциссой и с ординатой, умноженной на 2 (рис. 9.2).

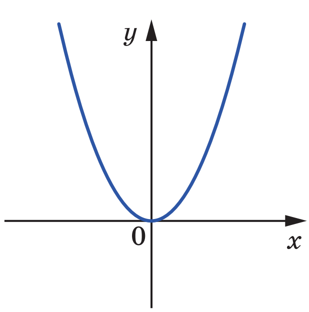



Рис. 9.1

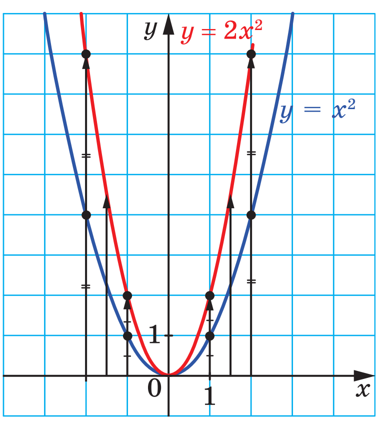



Рис. 9.2

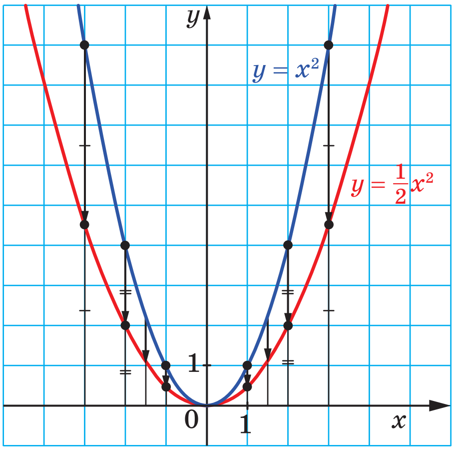



**Рис. 9.3**

Используя график функции $y=x^2$, построим график функции $y=\frac{1}{2}x^2$.

Понятно, что все точки графика функции $y=\frac{1}{2}x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y=x^2$ на точку с той же абсциссой и с ординатой, умноженной на $\frac{1}{2}$ (рис. 9.3).

Рассмотренные примеры подсказывают, как, используя график функции $y=f(x)$, можно построить график функции $y=kf(x)$, где $k>0$.

***График функции $y=kf(x)$, где $k>0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y=f(x)$ на точку с той же абсциссой и с ординатой, умноженной на $k$.***

На рисунках 9.4, 9.5 показано, как «работает» это правило для построения графиков функций $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}$ и $y=\frac{3}{x}$.

Говорят, что график функции $y=kf(x)$ получен из графика функции $y=f(x)$ в результате **растяжения в $k$ раз от оси абсцисс**, если $k>1$, или в результате **сжатия в $\frac{1}{k}$ раз к оси абсцисс**, если $0<k<1$.

Так, график функции $y=\frac{3}{x}$ получен в результате растяжения графика функции $y=\frac{1}{x}$ в 3 раза от оси абсцисс, а график функции

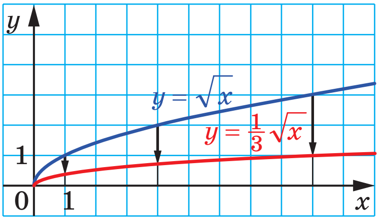



**Рис. 9.4**

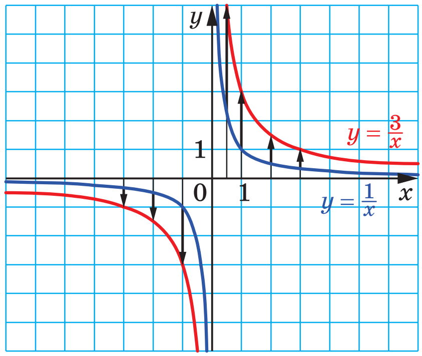



**Рис. 9.5**

$y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ получен в результате сжатия графика функции $y = \sqrt{x}$ в 3 раза к оси абсцисс.

Рассмотрим функции $y=x^2$ и $y=-x^2$. Каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y=x^2$ соответствует единственная точка $(x_0;\ -y_0)$ графика функции $y=-x^2$. А каждая точка $(x_1;\ y_1)$ графика функции $y=-x^2$ является соответствующей единственной точке $(x_1;\ -y_1)$ графика функции $y=x^2$. Поэтому все точки графика функции $y=-x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y=x^2$ на точку с той же абсциссой и с ординатой, умноженной на $-1$ (рис. 9.6).

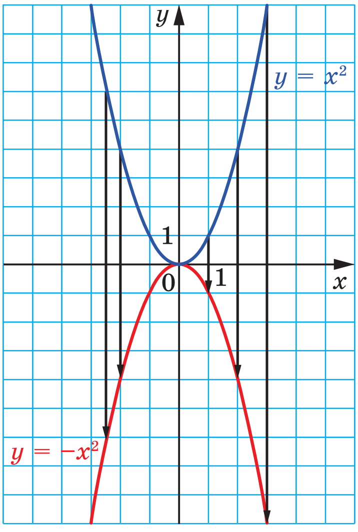



**Рис. 9.6**

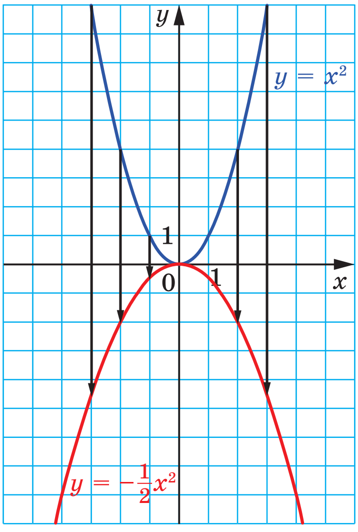



**Рис. 9.7**

Теперь понятно, что правило построения графика функции $y=kf(x)$, где $k<0$, такое же, как и для случая, когда $k>0$.

Например, на рисунке 9.7 показано, как можно с помощью графика функции $y=x^2$ построить график функции $y=-\frac{1}{2}x^2$.

Рисунок 9.8 иллюстрирует, как с помощью графика функции $y=\sqrt{x}$ можно построить графики функций $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x}$ и $y=-2\sqrt{x}$.

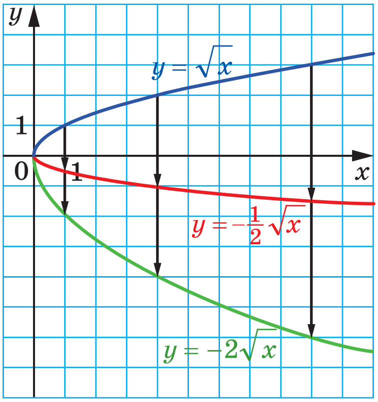



**Рис. 9.8**

Заметим, что при $k \neq 0$ функции $y=f(x)$ и $y=kf(x)$ имеют одни и те же нули. Следовательно, графики этих функций пересекают ось абсцисс в одних и тех же точках. Этот факт проиллюстрирован на рисунке 9.9.

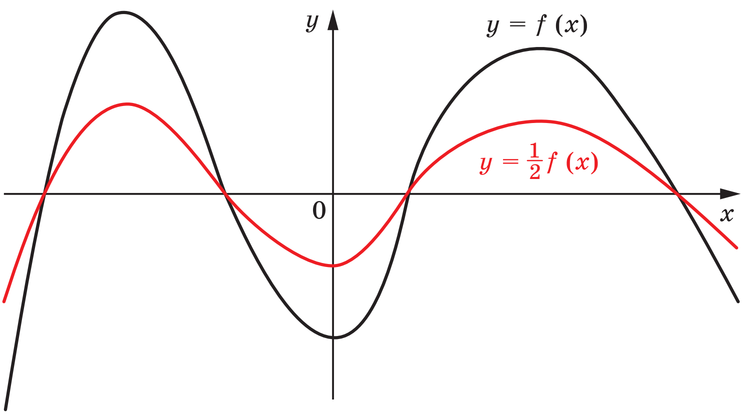



**Рис. 9.9**

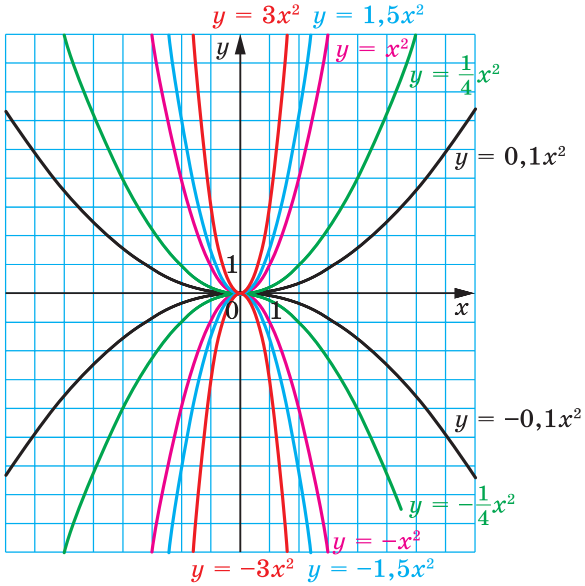



**Рис. 9.10**

На рисунке 9.10 изображены графики функций $y=ax^2$ при некоторых значениях $a$. Каждый из этих графиков, как и график функции $y=x^2$, называют **параболой**. Точка (0; 0) является вершиной каждой из этих парабол.

*Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз.*

Часто вместо высказывания «Дана функция $y=ax^2$» употребляют высказывание «Дана парабола $y=ax^2$».

В таблице приведены свойства функции $y=ax^2$, $a \neq 0$.

| Свойство | $a>0$ | $a<0$ |
|---|---|---|
| Область определения | $(-\infty; +\infty)$ | $(-\infty; +\infty)$ |
| Область значений | $[0; +\infty)$ | $(-\infty; 0]$ |
| Нули функции | $x = 0$ | $x = 0$ |
| Промежутки знакопостоянства | $y>0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ | $y<0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ |
| Возрастает на промежутке | $[0; +\infty)$ | $(-\infty; 0]$ |
| Убывает на промежутке | $(-\infty; 0]$ | $[0; +\infty)$ |

1. Как можно получить график функции $y=kf(x)$, где $k \neq 0$, используя график функции $y=f(x)$?
2. Какая фигура является графиком функции $y=ax^2$, где $a \neq 0$?
3. Какая точка является вершиной параболы $y=ax^2$?
4. Как направлены ветви параболы $y=ax^2$ при $a>0$? при $a<0$?
5. Какова область определения функции $y=ax^2$, где $a \neq 0$?
6. Какова область значений функции $y=ax^2$ при $a>0$? при $a<0$?
7. На каком промежутке возрастает, а на каком промежутке убывает функция $y=ax^2$ при $a>0$? при $a<0$?

## УПРАЖНЕНИЯ

**9.1.°** Принадлежит ли графику функции $y=-25x^2$ точка:

1) $A(2; -100)$;
2) $B(-2; 100)$;
3) $C\left(-\frac{1}{5}; -1\right)$;
4) $D(-1; 25)$?

**9.2.°** В каких координатных четвертях находится график функции $y=ax^2$ при $a>0$? при $a<0$?

**9.3.°** Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения параболы $y=3x^2$ и прямой:

1) $y=300$;
2) $y=42x$;
3) $y=-150x$;
4) $y=6-3x$.

**9.4.°** Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y=\frac{1}{3}x^2$ и $y=3$;
2) $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=x+4$.

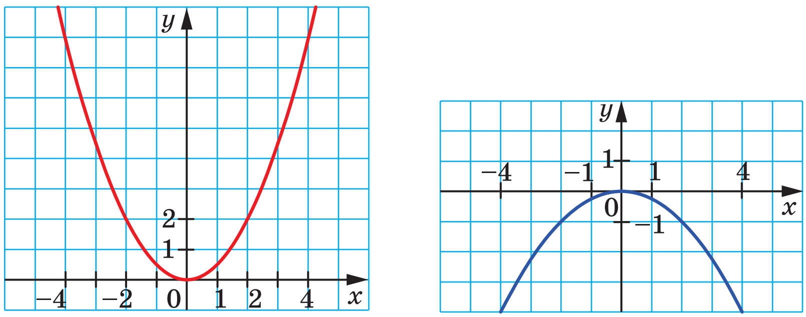
**9.5.°** При каких значениях $a$ точка $A(a; 16)$ принадлежит графику функции $y=4x^2$?

**9.6.°** При каких значениях $b$ точка $B(-2; b)$ принадлежит графику функции $y=-0,2x^2$?

**9.7.°** Известно, что точка $M(3; -6)$ принадлежит графику функции $y=ax^2$. Найдите значение $a$.

**9.8.°** Известно, что точка $K(-5; 10)$ принадлежит графику функции $y=ax^2$. Найдите значение $a$.

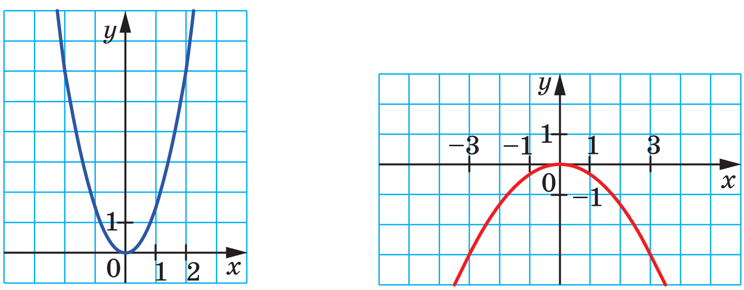
**9.9.**• На рисунке 9.11 изображен график функции $y = ax^2$. Найдите значение $a$.




*а* *б*

**Рис. 9.11**

**9.10.**• На рисунке 9.12 изображен график функции $y = ax^2$. Найдите значение $a$.




*а* *б*

**Рис. 9.12**

**9.11.**• На рисунке 9.13 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{2} f(x)$; 2) $y = -f(x)$; 3) $y = -2f(x)$.

**9.12.**• На рисунке 9.14 изображен график функции $y = g(x)$. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{3} g(x)$; 2) $y = -\frac{1}{2} g(x)$.

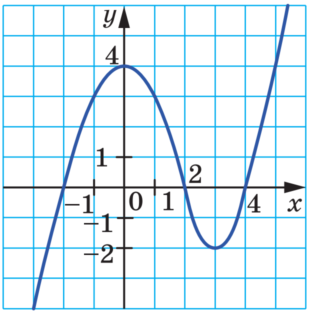



Рис. 9.13

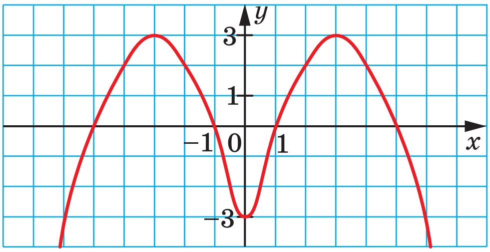



Рис. 9.14

**9.13.**• Постройте график функции $y=x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y=3x^2$; 2) $y=-\frac{1}{4}x^2$.

**9.14.**• Постройте график функции $y=\sqrt{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y=4\sqrt{x}$; 2) $y=-\sqrt{x}$.

**9.15.**• Докажите, что функция $y=ax^2$ при $a>0$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

**9.16.**• Докажите, что функция $y=ax^2$ при $a<0$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

**9.17.**• Постройте график функции:

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\leqslant -2, \\ -2x, & \text{если } -2<x<2, \\ -x^2, & \text{если } x\geqslant 2. \end{cases}$$

Используя построенный график, найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

**9.18.**• Постройте график функции:

$$y=\begin{cases} -2, & \text{если } x<-1, \\ -2x^2, & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 0, \\ 2x^2, & \text{если } x>0. \end{cases}$$

Используя построенный график, найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**9.19.** Докажите тождество:

$$\left(\frac{m-n}{m^2+mn}-\frac{m}{mn+n^2}\right):\left(\frac{n^2}{m^3-mn^2}+\frac{1}{m+n}\right)=\frac{n-m}{n}.$$

**9.20.** Упростите выражение:

1) $\sqrt{(a-b)^2}$, если $b\geqslant a$;

2) $\sqrt{c^2+6c+9}$, если $c\geqslant -3$;

3) $\dfrac{\sqrt{(m-5)^4}}{m^2-10m+25}$;

4) $\dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt{(x-1)^6}}$, если $x<1$.

**9.21.** Для перевозки 45 т груза планировали взять автомобиль некоторой грузоподъемности. Однако из-за его неисправности пришлось взять другой автомобиль, грузоподъемность которого на 2 т меньше, чем первого. Из-за этого потребовалось сделать на 6 рейсов больше, чем было запланировано. Найдите грузоподъемность автомобиля, который перевез груз.

**9.22.** Какое наименьшее значение может принимать данное выражение и при каком значении переменной:

1) $(x-6)^2+3$;

2) $(x+4)^2-5$;

3) $x^2+2x-6$;

4) $x^2-10x+18$?

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**9.23.** Чтобы покрасить одну грань кубика, требуется 10 с. За какое наименьшее время 6 человек могут покрасить 101 кубик? (Два человека не могут одновременно красить один кубик.)

# 10. Как построить графики функций $y=f(x)+b$ и $y=f(x+a)$, если известен график функции $y=f(x)$

Покажем, как, используя график функции $y=x^2$, можно построить график функции $y=x^2+2$.

Составим таблицу значений этих функций при одних и тех же значениях аргумента.

| $x$ | $-3$ | $-2{,}5$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ | $2$ | $2{,}5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2$ | 9 | 6,25 | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |
| $y = x^2 + 2$ | 11 | 8,25 | 6 | 4,25 | 3 | 2,25 | 2 | 2,25 | 3 | 4,25 | 6 | 8,25 | 11 |

Эта таблица подсказывает, что каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y=x^2$ соответствует единственная точка $(x_0;\ y_0+2)$ графика функции $y=x^2+2$. А каждая точка $(x_1;\ y_1)$ графика функции $y=x^2+2$ является соответствующей единственной точке $(x_1;\ y_1-2)$ графика функции $y=x^2$. Поэтому все точки графика функции $y=x^2+2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y=x^2$ на точку с той же абсциссой и с ординатой, увеличенной на 2 (рис. 10.1).

Говорят, что график функции $y=x^2+2$ получен в результате **параллельного переноса**[1] графика функции $y=x^2$ на две единицы вверх вдоль оси ординат.

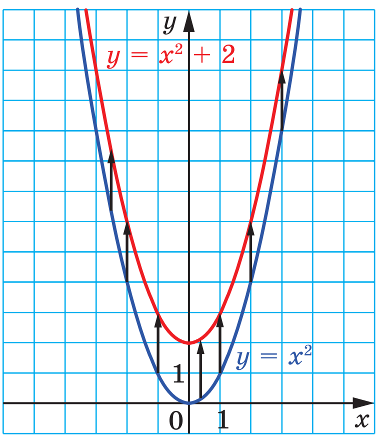



**Рис. 10.1**

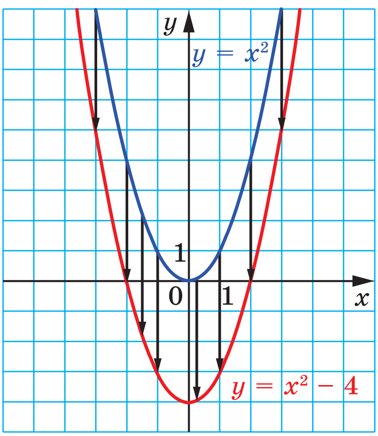



**Рис. 10.2**

Аналогично, график функции $y=x^2-4$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y=x^2$ на 4 единицы вниз вдоль оси ординат (рис. 10.2).

Рассмотренные примеры подсказывают, как можно, используя график функции $y=f(x)$, построить график функции $y=f(x)+b$.

***График функции $y=f(x)+b$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y=f(x)$ вдоль оси ординат на $b$ единиц вверх, если $b>0$, и на $-b$ единиц вниз, если $b<0$.***

[1] Позже на уроках геометрии вы более подробно ознакомитесь с параллельным переносом.

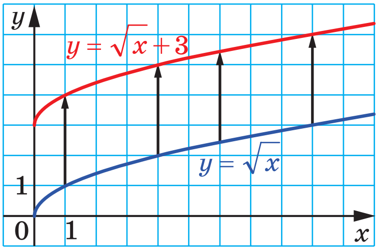



**Рис. 10.3**

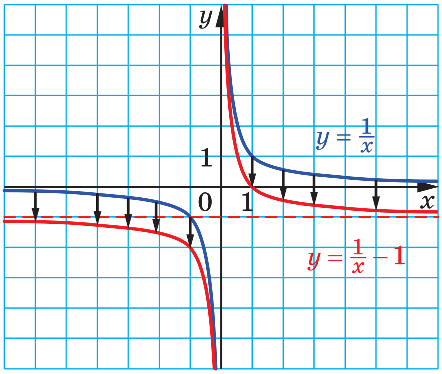



**Рис. 10.4**

На рисунках 10.3, 10.4 показано, как «работает» это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{x} + 3$ и $y = \dfrac{1}{x} - 1$.

Очевидно, что в результате параллельного переноса получаем фигуру, равную фигуре, являющейся графиком исходной функции. Например, каждый из графиков функций $y = x^2 + 2$ и $y = x^2 - 4$ равен параболе $y = x^2$. Поэтому графиками функций $y = x^2 + 2$ и $y = x^2 - 4$ также являются параболы.

Покажем, как можно с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = (x + 2)^2$.

Пусть точка $(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, то есть $x_0^2 = y_0$. Докажем, что точка $(x_0 - 2;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = (x + 2)^2$. Найдем значение этой функции в точке с абсциссой $x_0 - 2$. Имеем: $((x_0 - 2) + 2)^2 = x_0^2 = y_0$. Следовательно, каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует единственная точка $(x_0 - 2;\ y_0)$ графика функции $y = (x + 2)^2$. Аналогично можно показать, что каждая точка $(x_1;\ y_1)$ графика функции $y = (x + 2)^2$ является соответствующей единственной точке $(x_1 + 2;\ y_1)$ графика функции $y = x^2$.

Поэтому все точки графика функции $y = (x + 2)^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же ординатой и с абсциссой, уменьшенной на 2 (рис. 10.5).

Говорят, что график функции $y = (x + 2)^2$ получен в результате параллельного переноса графика функции $y = x^2$ вдоль оси абсцисс на 2 единицы влево.

Покажем, как с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = (x - 2)^2$. Легко установить (сделайте это самостоятельно), что каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y = x^2$

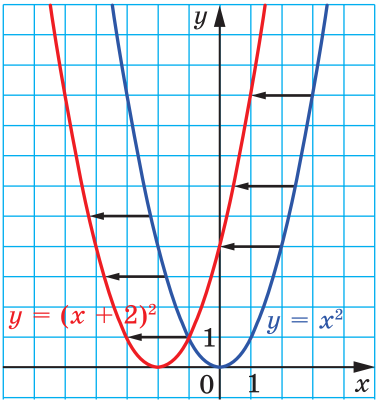



Рис. 10.5

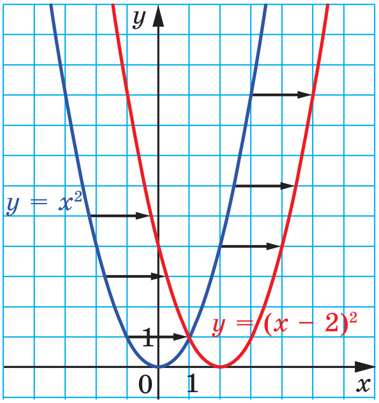



Рис. 10.6

соответствует единственная точка $(x_0+2;\ y_0)$ графика функции $y=(x-2)^2$ и каждая точка $(x_1;\ y_1)$ графика функции $y=(x-2)^2$ является соответствующей единственной точке $(x_1-2;\ y_1)$ графика функции $y=x^2$. Поэтому график функции $y=(x-2)^2$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y=x^2$ вдоль оси абсцисс на 2 единицы вправо (рис. 10.6).

Эти примеры подсказывают, как можно, используя график функции $y=f(x)$, построить график функции $y=f(x+a)$.

***График функции $y=f(x+a)$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y=f(x)$ вдоль оси абсцисс на $a$ единиц влево, если $a>0$, и на $-a$ единиц вправо, если $a<0$.***

На рисунках 10.7, 10.8 показано, как «работает» это правило для построения графиков функций $y=\sqrt{x+3}$ и $y=\dfrac{1}{x-1}$.

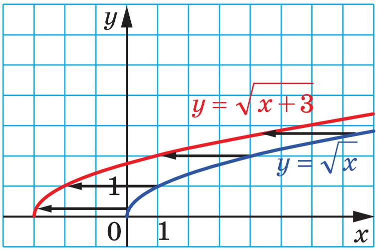



Рис. 10.7

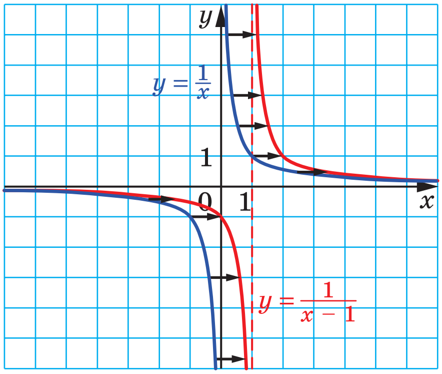



Рис. 10.8

Заметим, что графиками функций $y=(x+2)^2$ и $y=(x-2)^2$ являются параболы, равные параболе $y=x^2$.

**ПРИМЕР 1** Постройте график функции $y=(x-1)^2+3$.

*Решение*. 1) Построим график функции $y=x^2$.

2) Параллельно перенесем график функции $y=x^2$ вдоль оси абсцисс на 1 единицу вправо. Получим график функции $y=(x-1)^2$ (рис. 10.9).

3) Параллельно перенесем график функции $y=(x-1)^2$ вдоль оси ординат на 3 единицы вверх. Получим график функции $y=(x-1)^2+3$ (см. рис. 10.9).

Описанный алгоритм построения представим в виде такой схемы:

$$y=x^2 \xrightarrow{\text{вправо на 1 ед.}} y=(x-1)^2 \xrightarrow{\text{вверх на 3 ед.}} y=(x-1)^2+3$$

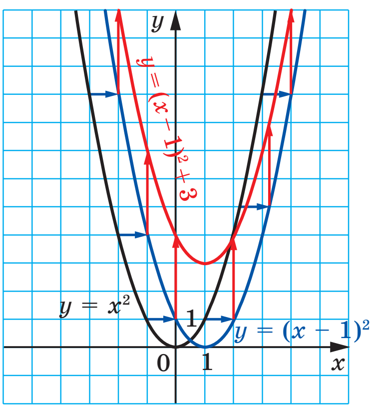



**Рис. 10.9**

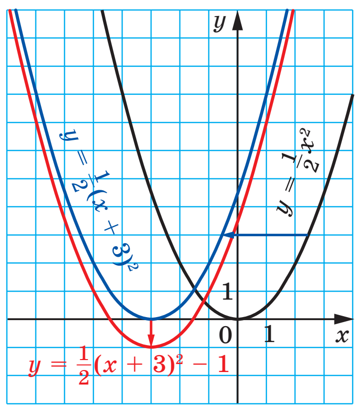



**Рис. 10.10**

**ПРИМЕР 2** Постройте график функции $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-1$.

*Решение*. 1) Построим график функции $y=\frac{1}{2}x^2$ (рис. 10.10).

2) Параллельно перенесем график функции $y=\frac{1}{2}x^2$ вдоль оси абсцисс на 3 единицы влево. Получим график функции $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$ (см. рис. 10.10).

3) Параллельно перенесем график функции $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ вдоль оси ординат на 1 единицу вниз. Получим искомый график (см. рис. 10.10).

Схема построения имеет такой вид:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[\text{на 3 ед.}]{\text{влево}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 \xrightarrow[\text{на 1 ед.}]{\text{вниз}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$$

Из описанных преобразований следует, что графиком функции $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$ является парабола, которая равна параболе $y = \frac{1}{2}x^2$ и вершиной которой является точка $(-3; -1)$. ◄

Из этого примера становится понятным алгоритм построения графика функции $y = kf(x+a)+b$, в частности функции $y = k(x+a)^2+b$.

***Графиком функции $y = k(x+a)^2+b$, $k \neq 0$, является парабола, которая равна параболе $y = kx^2$ и вершиной которой является точка $(-a; b)$.***

**ПРИМЕР 3** Постройте график функции $y = -2x^2 - 20x - 47$.

*Решение.* Имеем:

$$y = -2x^2 - 20x - 47 = -2x^2 - 20x - 50 + 3 = -2(x+5)^2 + 3.$$

Мы представили формулу, задающую данную функцию, в виде $y = kf(x+a)+b$, где $f(x) = x^2$, $k = -2$, $a = 5$, $b = 3$.

Схема построения имеет такой вид:

$$y = -2x^2 \xrightarrow[\text{на 5 ед.}]{\text{влево}} y = -2(x+5)^2 \xrightarrow[\text{на 3 ед.}]{\text{вверх}} y = -2(x+5)^2 + 3$$

Построенный график является параболой, которая равна параболе $y = -2x^2$ и вершиной которой является точка $(-5; 3)$ (рис. 10.11). ◄

?

1. Как можно получить график функции $y = f(x)+b$, используя график функции $y = f(x)$?
2. Какая фигура является графиком функции $y = x^2+b$?
3. Каковы координаты вершины параболы $y = x^2+b$?
4. Как можно получить график функции $y = f(x+a)$, используя график функции $y = f(x)$?
5. Какая фигура является графиком функции $y = (x+a)^2$?
6. Каковы координаты вершины параболы $y = (x+a)^2$?
7. Какая фигура является графиком функции $y = k(x+a)^2+b$, где $k \neq 0$?
8. Каковы координаты вершины параболы $y = k(x+a)^2+b$?

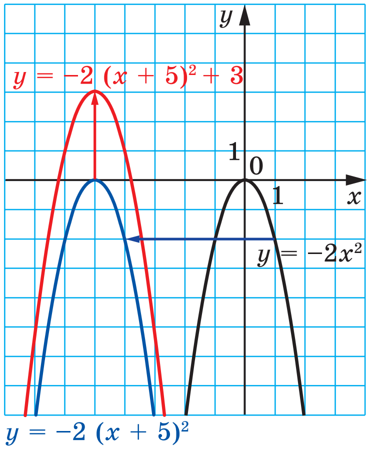



**Рис. 10.11**

## УПРАЖНЕНИЯ

**10.1.°** График какой функции получим, если график функции $y=x^2$ параллельно перенесем:

1) на 6 единиц вверх вдоль оси ординат;
2) на 9 единиц вправо вдоль оси абсцисс;
3) на 12 единиц вниз вдоль оси ординат;
4) на 7 единиц влево вдоль оси абсцисс;
5) на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 3 единицы вниз вдоль оси ординат;
6) на 1 единицу влево вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вверх вдоль оси ординат?

**10.2.°** График какой из данных функций получим, если параллельно перенесем график функции $y=x^2$ вдоль оси абсцисс на 4 единицы вправо:

1) $y=x^2+4$; 2) $y=x^2-4$; 3) $y=(x+4)^2$; 4) $y=(x-4)^2$?

**10.3.°** График какой из данных функций получим, если параллельно перенесем график функции $y=x^2$ вдоль оси ординат на 5 единиц вверх:

1) $y=x^2+5$; 2) $y=x^2-5$; 3) $y=(x+5)^2$; 4) $y=(x-5)^2$?

**10.4.°** Каковы координаты вершины параболы:

1) $y=x^2+8$;
2) $y=x^2-8$;
3) $y=(x+8)^2$;
4) $y=(x-8)^2$;
5) $y=(x-4)^2+3$;
6) $y=(x+4)^2+3$;
7) $y=(x-4)^2-3$;
8) $y=(x+4)^2-3$?

**10.5.°** В какой координатной четверти находится вершина параболы:

1) $y=(x+10)^2-16$;
2) $y=(x-11)^2+15$;
3) $y=(x+15)^2+4$;
4) $y=(x-11)^2-9$?

**10.6.°** Как надо параллельно перенести график функции $y=\frac{5}{x}$, чтобы получить график функции $y=\frac{5}{x-8}$:

1) на 8 единиц вверх вдоль оси ординат;
2) на 8 единиц вниз вдоль оси ординат;
3) на 8 единиц вправо вдоль оси абсцисс;
4) на 8 единиц влево вдоль оси абсцисс?

**10.7.°** Как надо параллельно перенести график функции $y=\sqrt{x}$, чтобы получить график функции $y=\sqrt{x+3}$:

1) на 3 единицы вверх вдоль оси ординат;
2) на 3 единицы вниз вдоль оси ординат;
3) на 3 единицы вправо вдоль оси абсцисс;
4) на 3 единицы влево вдоль оси абсцисс?

**10.8.•** На рисунке 10.12 изображен график функции $y=f(x)$. Постройте график функции:

1) $y=f(x)-2$;
2) $y=f(x)+4$;
3) $y=f(x-3)$;
4) $y=f(x+1)$;
5) $y=-f(x)$;
6) $y=3-f(x)$.

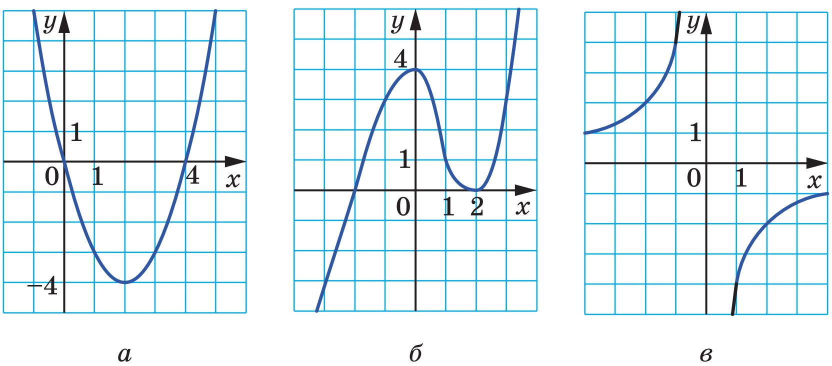



**Рис. 10.12**

**10.9.•** На рисунке 10.13 изображен график функции $y=f(x)$. Постройте график функции:

1) $y=f(x)+5$;
2) $y=f(x)-3$;
3) $y=f(x+1)$;
4) $y=f(x-2)$;
5) $y=-f(x)$;
6) $y=-f(x)-1$.

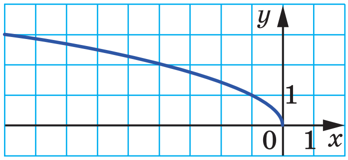



**Рис. 10.13**

**10.10.**° Постройте график функции $y = x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = x^2 - 3$;
2) $y = x^2 + 4$;
3) $y = (x - 5)^2$;
4) $y = (x + 2)^2$;
5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

**10.11.**° Постройте график функции $y = -x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = -x^2 + 1$;
2) $y = -x^2 - 2$;
3) $y = -(x - 2)^2$;
4) $y = -(x + 4)^2$;
5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

**10.12.**° Постройте график функции $y = -\frac{6}{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = -\frac{6}{x} + 5$;
2) $y = -\frac{6}{x - 2}$;
3) $y = -\frac{6}{x + 4} - 2$.

**10.13.**° Постройте график функции $y = \frac{2}{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$;
2) $y = \frac{2}{x + 1}$;
3) $y = \frac{2}{x - 3} + 6$.

**10.14.**° Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x} - 4$;
2) $y = \sqrt{x - 4}$;
3) $y = \sqrt{x - 1} + 3$.

**10.15.**° Постройте график функции $y = (x + 5)^2 - 9$. Пользуясь графиком, найдите:

1) нули функции;
2) при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения;
3) промежуток возрастания и промежуток убывания функции;
4) область значений функции.

**10.16.**° Постройте график функции $y = (x - 4)^2 + 4$. Пользуясь графиком, найдите:

1) нули функции;
2) при каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения;

3) промежуток возрастания и промежуток убывания функции;
4) область значений функции.

**10.17.**• Задайте формулой вида $y = ax^2 + n$ функцию, график которой изображен на рисунке 10.14.

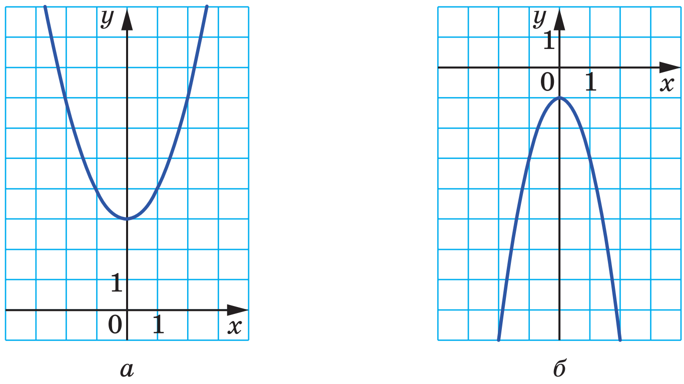



**Рис. 10.14**

**10.18.**• Задайте формулой вида $y = ax^2 + n$ функцию, график которой изображен на рисунке 10.15.

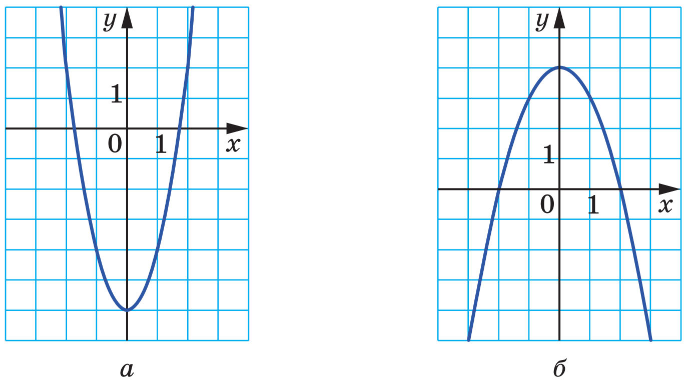
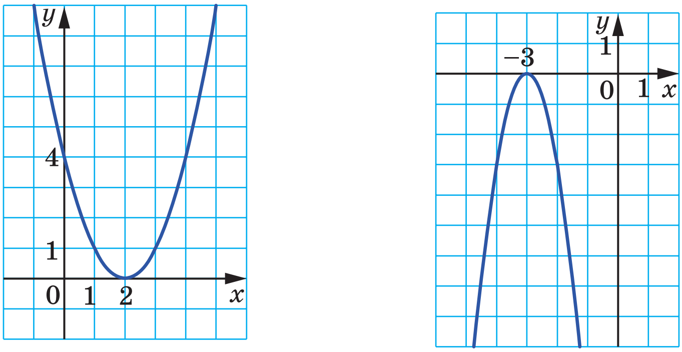



**Рис. 10.15**

**10.19.**• Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2$ функцию, график которой изображен на рисунке 10.16.

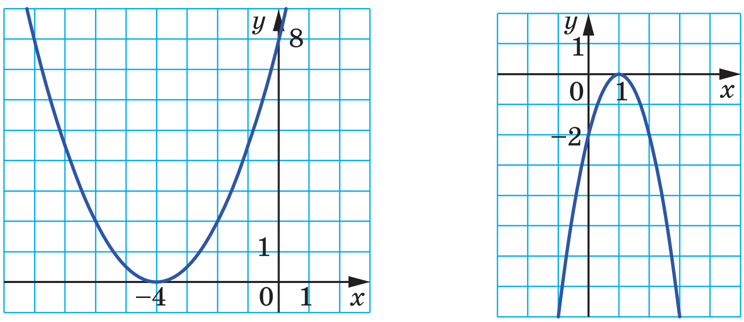
**10.20.**• Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2$ функцию, график которой изображен на рисунке 10.17.

**10.21.**• Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2 + n$ функцию, график которой изображен на рисунке 10.18.



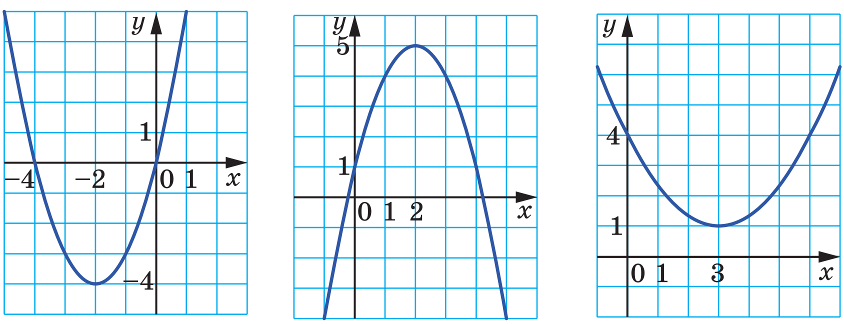

*а* *б*

**Рис. 10.16**




*а* *б*

**Рис. 10.17**




*а* *б* *в*

**Рис. 10.18**

**10.22.**$^{\bullet}$ Задайте формулой вида $y=a(x+m)^2+n$ функцию, график которой изображен на рисунке 10.19.

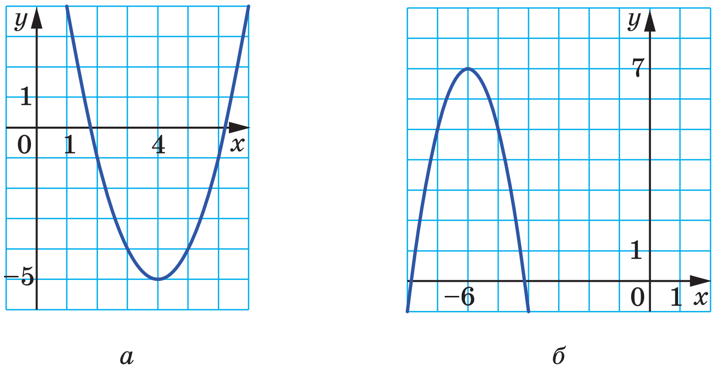



**Рис. 10.19**

**10.23.**$^{\bullet}$ Решите графически уравнение:

1) $(x-1)^2=\dfrac{2}{x}$; 2) $1-x^2=\sqrt{x}-1$.

**10.24.**$^{\bullet}$ Решите графически уравнение $\dfrac{3}{x}=\sqrt{x}+2$.

**10.25.**$^{\bullet}$ Прямые $m$ и $n$, изображенные на рисунке 10.20, параллельны, причем прямая $n$ является графиком функции $y=f(x)$. Какое из утверждений верно:

1) прямая $m$ является графиком функции $y=f(x)+b$;
2) прямая $m$ является графиком функции $y=f(x-a)$?

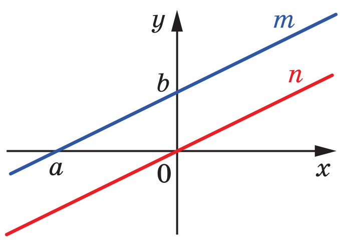



**Рис. 10.20**

**10.26.**$^{\bullet\bullet}$ Задайте данную функцию формулой вида $y=a(x-m)^2+n$ и постройте ее график, используя график функции $y=ax^2$:

1) $y=x^2-4x+6$;
2) $y=-x^2+6x-6$;
3) $y=2x^2-4x+5$;
4) $y=0{,}2x^2-2x-4$.

**10.27.**•• Задайте данную функцию формулой вида $y = a(x - m)^2 + n$ и постройте ее график, используя график функции $y = ax^2$:
1) $y = x^2 - 2x - 8$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

**10.28.**•• Задайте данную функцию формулой вида $y = \dfrac{k}{x + a} + b$ и постройте ее график, используя график функции $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{3x + 8}{x}$; 2) $y = \dfrac{2x + 14}{x + 3}$; 3) $y = \dfrac{-2x}{x - 1}$.

**10.29.**•• Задайте данную функцию формулой вида $y = \dfrac{k}{x + a} + b$ и постройте ее график, используя график функции $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{4x + 14}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{7 - x}{x - 2}$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**10.30.** Упростите выражение:

1) $\dfrac{5a - 3}{8a} + \dfrac{a + 9}{4a}$; 3) $\dfrac{8a + 5b}{5ab^2} - \dfrac{2a - 7b}{2a^2b}$;

2) $\dfrac{5a - 6b}{ab} + \dfrac{5b - 5c}{bc}$; 4) $\dfrac{m^2 + 4n^2}{8m^4n^4} - \dfrac{3m + 4n}{6m^5n^2}$.

**10.31.** Сократите дробь:

1) $\dfrac{9 + \sqrt{m}}{m - 81}$; 3) $\dfrac{\sqrt{5m} + \sqrt{7n}}{5m + 2\sqrt{35mn} + 7n}$;

2) $\dfrac{\sqrt{27} + \sqrt{45}}{\sqrt{18} + \sqrt{30}}$; 4) $\dfrac{25m + 10n\sqrt{3m} + 3n^2}{5\sqrt{m} + n\sqrt{3}}$.

**10.32.** Числитель обыкновенной дроби на 1 меньше ее знаменателя. Если числитель и знаменатель дроби уменьшить на 1, то значение дроби уменьшится на $\dfrac{1}{12}$. Найдите эту дробь.

**10.33.** Докажите, что при положительных значениях $a$ и $b$ выполняется неравенство $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$.

# 11. Квадратичная функция, ее график и свойства

**Определение.** **Функцию, которую можно задать формулой вида $y=ax^2+bx+c$, где $x$ — независимая переменная, $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют квадратичной.**

Квадратичная функция не является для вас новой. Так, в 8 классе вы изучали ее частный случай, а именно функцию $y=x^2$. Функциональная зависимость площади $S$ круга от его радиуса $r$ определяет квадратичную функцию $S(r)=\pi r^2$, которая является функцией вида $y=ax^2$. С этой функцией вы ознакомились в п. 9.

На уроках физики вы ознакомились с формулой $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, которая задает зависимость высоты $h$ тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью $v_0$, от времени движения $t$. Эта формула задает квадратичную функцию $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Покажем, как можно получить график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ из графика функции $y=ax^2$.

Вы уже строили графики функций вида $y=ax^2+bx+c$, выделяя квадрат двучлена (см. пример 3 п. 10). Используем этот прием в общем виде. Имеем:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Введем обозначения $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Тогда формулу $y=ax^2+bx+c$ можно представить в виде

$$y=a(x-x_0)^2+y_0.$$

Следовательно, схема построения искомого графика такова:

$$y = ax^2 \xrightarrow[\text{на } |x_0| \text{ ед.}]{\text{вправо или влево}} y = a(x-x_0)^2 \xrightarrow[\text{на } |y_0| \text{ ед.}]{\text{вверх или вниз}} y = a(x-x_0)^2 + y_0$$

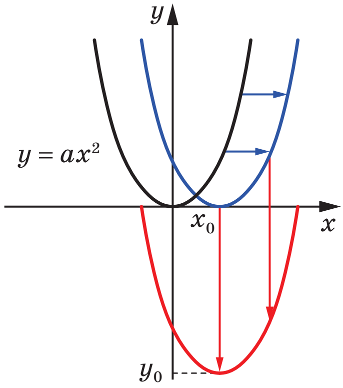



**Рис. 11.1**

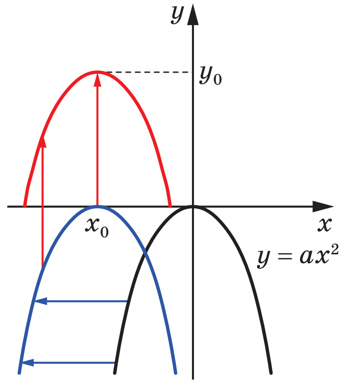



**Рис. 11.2**

На рисунке 11.1 показано построение для случая, когда $a>0$, $x_0>0$, $y_0<0$. На рисунке 11.2 показано построение для случая, когда $a<0$, $x_0<0$, $y_0>0$.

Теперь можно сделать такой вывод: графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, равная параболе $y=ax^2$, с вершиной в точке $(x_0;\ y_0)$, где $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, $y_0=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

Ветви параболы $y=ax^2+bx+c$ направлены так же, как и ветви параболы $y=ax^2$: если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз.

Общее представление о графике квадратичной функции дают координаты вершины параболы и направление ее ветвей. Это представление будет тем полнее, чем больше точек, принадлежащих графику, мы будем знать. Поэтому можно строить график квадратичной функции, не используя параллельных переносов, по следующей схеме:

1) *найти абсциссу вершины параболы по формуле* $x_0=-\dfrac{b}{2a}$;

2) *найти ординату вершины параболы по формуле*[1]

$$y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{D}{4a},$$

*где* $D$ *— дискриминант квадратного трехчлена* $ax^2+bx+c$, *и отметить на координатной плоскости вершину параболы;*

[1] Формулу $y_0=-\dfrac{D}{4a}$ запоминать необязательно. Достаточно вычислить значение функции $y=ax^2+bx+c$ в точке с абсциссой $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

3) *определить направление ветвей параболы;*

4) *найти координаты еще нескольких точек, принадлежащих искомому графику, в частности координаты точек пересечения параболы с осью абсцисс (если данная функция имеет нули), координаты точки пересечения параболы с осью ординат; отметить эти точки на координатной плоскости;*

5) *провести через все отмеченные точки плавную непрерывную линию.*

**ПРИМЕР** Постройте график функции $f(x)=x^2+4x-5$. Пользуясь графиком функции, найдите область ее значений, промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, наименьшее и наибольшее значения функции.

*Решение.* Данная функция является квадратичной. Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем абсциссу и ординату вершины параболы. Имеем: $x_0 = -\frac{4}{2} = -2$, ордината вершины $y_0=f(x_0)=f(-2)=-9$.

Следовательно, вершина параболы — точка $(-2; -9)$.

Найдем координаты точек пересечения параболы с осью абсцисс. Для этого решим уравнение:

$$x^2+4x-5=0.$$

Отсюда $x_1=-5$, $x_2=1$.

Следовательно, парабола пересекает ось абсцисс в точках $(-5; 0)$ и $(1; 0)$.

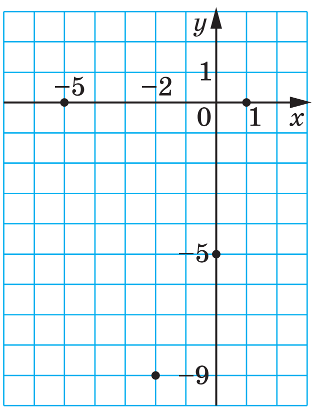



**Рис. 11.3**

Найдем точку пересечения параболы с осью ординат. Имеем: $f(0)=-5$. Парабола пересекает ось ординат в точке $(0; -5)$.

Отметим найденные четыре точки параболы на координатной плоскости (рис. 11.3).

Теперь видим, что целесообразно найти значения данной функции в точках $-1$, $-3$, $-4$ и отметить соответствующие точки на координатной плоскости.

Имеем:

$$f(-3)=f(-1)=-8;$$
$$f(-4)=f(0)=-5.$$

Соединим все отмеченные точки плавной непрерывной линией.

Искомый график изображен на рисунке 11.4.

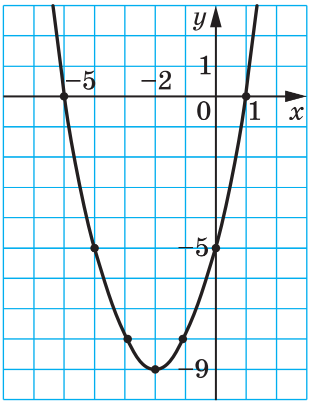



**Рис. 11.4**

Областью значений функции является множество $E(f) = [-9; +\infty)$.

Функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; -2]$.

Имеем: $f(x) > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; -5)$ и $(1; +\infty)$; $f(x) < 0$ на промежутке $(-5; 1)$.

Наименьшее значение функции равно $-9$, наибольшего значения не существует. ◀

?

1. Какую функцию называют квадратичной?
2. Какая фигура является графиком квадратичной функции?
3. По какой формуле можно найти абсциссу вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$?
4. Каково направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$ в зависимости от значения $a$?
5. Опишите схему построения графика квадратичной функции.

## УПРАЖНЕНИЯ

**11.1.°** Какие из данных функций являются квадратичными:

1) $y = 4x^2 + 3x + 6$;
2) $y = 4x + 3$;
3) $y = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 2}$;
4) $y = 6x^2 - 5x$?

**11.2.**° Вычислите значение функции $f(x)=5x^2-7x+2$, если аргумент $x$ равен 1; −2; 4.

**11.3.**° Дана функция $f(x)=x^2-2x-15$. Найдите значение аргумента $x$, при котором:
1) $f(x)=0$; 2) $f(x)=-7$; 3) $f(x)=33$.

**11.4.**° График функции $y=-6x^2+x+c$ пересекает ось ординат в точке $M(0;\ -8)$. Найдите значение $c$.

**11.5.**° Определите направление ветвей и координаты вершины параболы:
1) $y=x^2-12x+3$;
2) $y=-x^2+4x-6$;
3) $y=0{,}3x^2+2{,}4x-5$;
4) $y=-5x^2+10x+2$.

**11.6.**° Постройте график функции:
1) $y=x^2-4x-5$;
2) $y=-x^2+2x+3$;
3) $y=6x-x^2$;
4) $y=2x^2-8x+8$;
5) $y=x^2-2x+4$;
6) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$;
7) $y=x^2-6x+5$;
8) $y=2x^2-5x+2$.

**11.7.**° Постройте график функции:
1) $y=x^2+2x-8$;
2) $y=x^2-2x$;
3) $y=-x^2+4x-5$;
4) $y=2x^2-2x-4$.

**11.8.**• Постройте график функции $f(x)=x^2-6x+8$. Используя график, найдите:
1) $f(6)$; $f(1)$;
2) значения $x$, при которых $f(x)=8$; $f(x)=-1$; $f(x)=-2$;
3) наибольшее и наименьшее значения функции;
4) область значений функции;
5) промежуток возрастания и промежуток убывания функции;
6) при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения, а при каких — отрицательные.

**11.9.**• Постройте график функции $f(x)=-x^2-6x-5$. Используя график, найдите:
1) область значений функции;
2) промежуток возрастания функции;
3) множество решений неравенства $f(x)>0$.

**11.10.**• Постройте график функции $f(x)=x-0{,}5x^2$. Используя график, найдите:
1) область значений функции;
2) промежуток возрастания функции;
3) при каких значениях $x$ выполняется неравенство $f(x)\leqslant 0$.

**11.11.**$^{\bullet}$ Постройте график функции $f(x)=3x^2-6x$. Используя график, найдите:
1) область значений функции;
2) промежуток убывания функции;
3) при каких значениях $x$ выполняется неравенство $f(x)\geqslant 0$.

**11.12.**$^{\bullet}$ Решите графически уравнение $x^2-3x-1=-\dfrac{3}{x}$.

**11.13.**$^{\bullet}$ Решите графически уравнение $-\dfrac{1}{4}x^2+x+2=\sqrt{x}$.

**11.14.**$^{\bullet}$ Постройте в одной системе координат графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ и определите количество корней уравнения $f(x)=g(x)$:
1) $f(x)=-x^2+6x-7$, $g(x)=-\sqrt{x}$;
2) $f(x)=4x-2x^2$, $g(x)=-\dfrac{4}{x}$.

**11.15.**$^{\bullet}$ Построив в одной системе координат графики функций $y=x^2+4x+1$ и $y=\dfrac{6}{x}$, определите количество корней уравнения $x^2+4x+1=\dfrac{6}{x}$.

**11.16.**$^{\bullet}$ Найдите координаты точки параболы $y=-x^2+9x+9$, у которой:
1) абсцисса и ордината равны;
2) сумма абсциссы и ординаты равна 25.

**11.17.**$^{\bullet}$ Найдите координаты точки параболы $y=2x^2-3x+6$, у которой ордината на 12 больше абсциссы.

**11.18.**$^{\bullet}$ Найдите область значений и промежутки возрастания и убывания функции:
1) $f(x)=4x^2-8x+3$;
2) $f(x)=-\dfrac{1}{5}x^2+2x-6$;
3) $f(x)=4-12x-0{,}3x^2$;
4) $f(x)=7x^2+21x$.

**11.19.**$^{\bullet}$ Найдите область значений и промежутки возрастания и убывания функции:
1) $f(x)=2x^2-12x+8$;
2) $f(x)=9+8x-0{,}2x^2$.

**11.20.**$^{\bullet}$ Постройте график данной функции, укажите ее область значений и промежутки возрастания и убывания:

$$y=\begin{cases}3-x, & \text{если } x\leqslant -2,\\ x^2-2x-3, & \text{если } -2<x<2,\\ -3, & \text{если } x\geqslant 2.\end{cases}$$

**11.21.** Постройте график данной функции, укажите ее область значений и промежутки возрастания и убывания:

$$y=\begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 4x-x^2, & \text{если } 0<x<5, \\ x-10, & \text{если } x \geqslant 5. \end{cases}$$

**11.22.** Задайте формулой какую-нибудь квадратичную функцию, которая:

1) убывает на промежутке $(-\infty; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$;

2) возрастает на промежутке $(-\infty; -2]$ и убывает на промежутке $[-2; +\infty)$.

**11.23.** Найдите наименьшее значение функции $y=3x^2-18x+2$ на промежутке:

1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$.

**11.24.** Найдите наибольшее значение функции $y=-x^2-8x+10$ на промежутке:

1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.

**11.25.** При каких значениях $p$ и $q$ график функции $y=x^2+px+q$ проходит через точки $M(-1; 4)$ и $K(2; 10)$?

**11.26.** При каких значениях $a$ и $b$ нулями функции $y=ax^2+bx+7$ являются числа $-2$ и $3$?

**11.27.** При каких значениях $a$ и $b$ парабола $y=ax^2+bx-4$ проходит через точки $C(-3; 8)$ и $D(1; 4)$?

**11.28.** Пусть $D$ — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2+bx+c$. Изобразите схематически график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, если:

1) $a>0,\ D>0,\ c>0,\ -\dfrac{b}{2a}>0$;

2) $a>0,\ D=0,\ -\dfrac{b}{2a}<0$;

3) $a<0,\ D<0,\ -\dfrac{b}{2a}>0$;

4) $a<0,\ c=0,\ -\dfrac{b}{2a}<0$.

**11.29.** Пусть $D$ — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2+bx+c$. Изобразите схематически график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, если:

1) $a>0,\ D<0,\ -\dfrac{b}{2a}<0$;

2) $a<0,\ D>0,\ c<0,\ -\dfrac{b}{2a}>0$;

3) $a<0,\ D=0,\ -\dfrac{b}{2a}<0$.

**11.30.**• При каком значении $b$ промежуток $(-\infty; 2]$ является промежутком возрастания функции $y=-4x^2-bx+5$?

**11.31.**• При каком значении $b$ промежуток $(-\infty; -3]$ является промежутком убывания функции $y=3x^2+bx-8$?

**11.32.**• При каком значении $a$ функция $y=ax^2+(a-2)x+\frac{1}{4}$ является квадратичной и ее график имеет с осью абсцисс одну общую точку?

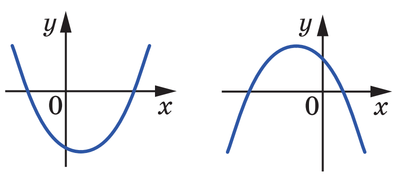
**11.33.**•• При каких значениях $a$ функция $y=0{,}5x^2-3x+a$ принимает неотрицательные значения при всех действительных значениях $x$?

**11.34.**•• При каких значениях $a$ функция $y=-4x^2-16x+a$ принимает отрицательные значения при всех действительных значениях $x$?

**11.35.**•• При каком значении $c$ наибольшее значение функции $y=-5x^2+10x+c$ равно $-3$?

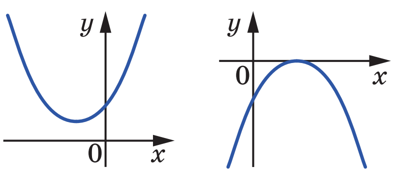
**11.36.**•• При каком значении $c$ наименьшее значение функции $y=0{,}6x^2-6x+c$ равно $-1$?

**11.37.**•• На рисунке 11.5 изображен график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$. Определите знаки коэффициентов $a$, $b$ и $c$.



*а* *б*

**Рис. 11.5**



*а* *б*

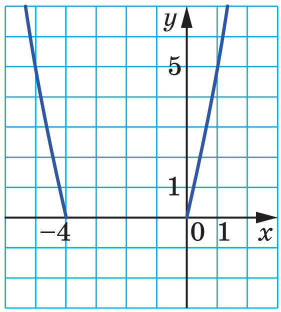
**Рис. 11.6**

**11.38.**•• На рисунке 11.6 изображен график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$. Определите знаки коэффициентов $a$, $b$ и $c$.

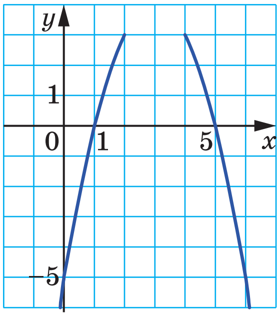
**11.39.**•• При каких значениях $p$ и $q$ вершиной параболы $y=x^2+px+q$ является точка $A(2;\ 5)$?

**11.40.**•• Парабола $y=ax^2+bx+c$ имеет вершину в точке $C(4;\ -10)$ и проходит через точку $D(1;\ -1)$. Найдите значения коэффициентов $a$, $b$ и $c$.

**11.41.**•• Найдите ординату вершины параболы, фрагмент которой изображен на рисунке 11.7.




*а*




*б*

**Рис. 11.7**

**11.42.**•• Найдите ординату вершины параболы, фрагмент которой изображен на рисунке 11.8.

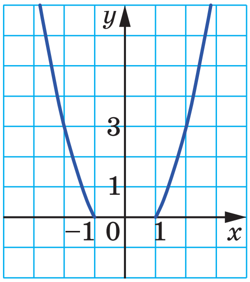



**Рис. 11.8**

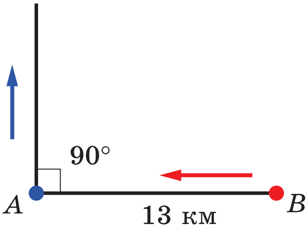



**Рис. 11.9**

**11.43.**•• Сумма двух чисел равна 10. Найдите:

1) какое наибольшее значение может принимать произведение этих чисел;
2) какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов этих чисел.

**11.44.**•• Из пункта $B$ в пункт $A$, расстояние между которыми равно 13 км, вышел турист со скоростью 6 км/ч. Одновременно с ним из пункта $A$ в перпендикулярном направлении (рис. 11.9) вышел со скоростью 4 км/ч другой турист. Через какое время после начала движения расстояние между туристами будет наименьшим?

**11.45.••** Участок земли прямоугольной формы надо огородить забором длиной 160 м. Какую наибольшую площадь может иметь этот участок?

**11.46.••** Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{8x + 2x^2 - x^3}{x}$;

2) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} - 3$;

3) $y = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$;

4) $y = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

**11.47.••** Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{(x+3)^3}{x+3}$;

2) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x}$;

3) $y = \dfrac{x^4 - 1}{1 - x^2}$.

**11.48.••** Постройте график функции:

1) $y = x|x|$;

2) $y = \dfrac{x}{|x|}(x^2 - x - 6)$;

3) $y = x^2 - 4|x| + 3$;

4) $y = x^2 + 3x \cdot \dfrac{|x-3|}{x-3} - 4$.

**11.49.••** Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3}{|x|} + 4x$;

2) $y = 6|x| - x^2$.

**11.50.••** Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Пользуясь построенным графиком, установите, при каких значениях $a$ уравнение $x^2 + 2x - 3 = a$:

1) имеет два корня;

2) имеет один корень;

3) не имеет корней.

**11.51.••** Постройте график функции $y = -x^2 - 4x + 5$. Пользуясь построенным графиком, установите, сколько корней имеет уравнение $-x^2 - 4x + 5 = a$ в зависимости от значения $a$.

**11.52.*** Пусть $x_1$ и $x_2$ — нули функции $y = -3x^2 - (3a-2)x + 2a + 3$. При каких значениях $a$ выполняется неравенство $x_1 < -2 < x_2$?

**11.53.*** Известно, что $x_1$ и $x_2$ — нули функции $y = 2x^2 - (3a-1)x + a - 4$, $x_1 < x_2$. При каких значениях $a$ число 1 принадлежит промежутку $[x_1; x_2]$?

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**11.54.** Решите уравнение:

1) $x^4-13x^2+36=0$;
2) $x^4-5x^2-6=0$;
3) $x^4+9x^2+8=0$;
4) $x^4-16x^2=0$.

**11.55.** Найдите сумму и произведение корней уравнения:

1) $x^2-5x-10=0$;
2) $2x^2+6x-7=0$;
3) $-\frac{1}{3}x^2+8x-1=0$.

**11.56.** Выполните действия:

1) $\frac{b+3}{b-3}+\frac{b-2}{b+2}$;
2) $\frac{p+4}{p-1}-\frac{p-20}{p+5}$;
3) $\frac{x}{2x+3}-\frac{x+1}{2x-3}$.

**11.57.** Упростите выражение:

1) $(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})(4a-6\sqrt{ab}+9b)-9\sqrt{9b^3}$;
2) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{28}+4\sqrt{63})\cdot\sqrt{7}-\sqrt{126}$;
3) $(2-\sqrt{3}+\sqrt{6})(2+\sqrt{3}-\sqrt{6})$.

**11.58.** Моторная лодка отправилась по реке от одной пристани к другой и вернулась обратно через 2,5 ч, потратив на стоянку 25 мин. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 20 км/ч, а расстояние между пристанями — 20 км.

**11.59.** Через одну из двух труб можно наполнить бак водой на 10 мин быстрее, чем через другую. Если одновременно открыть обе трубы, то за 8 мин будет заполнено $\frac{2}{3}$ бака. За какое время можно заполнить этот бак через каждую из труб?

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**11.60.** На доске записано число 1001. Двое играют в такую игру. За один ход игрок стирает записанное на доске число, а вместо него записывает разность этого числа и любого его делителя. Игроки делают ходы поочередно. Проигрывает тот игрок, после хода которого на доске будет записано число 0. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш?

# О некоторых преобразованиях графиков функций

### Как построить график функции $y=f(-x)$, если известен график функции $y=f(x)$

Заметим, что если точка $(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, то точка $(-x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y=f(-x)$. Действительно, $f(-(-x_0))=f(x_0)=y_0$.

Поэтому все точки графика функции $y=f(-x)$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y=f(x)$ на точку с такой же ординатой и противоположной абсциссой.[1]

На рисунке 11.10 показано, как с помощью графика функции $y=\sqrt{x}$ построен график функции $y=\sqrt{-x}$.

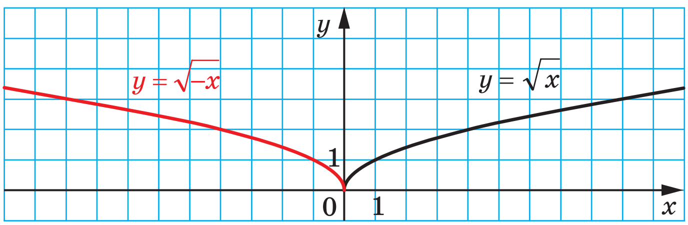
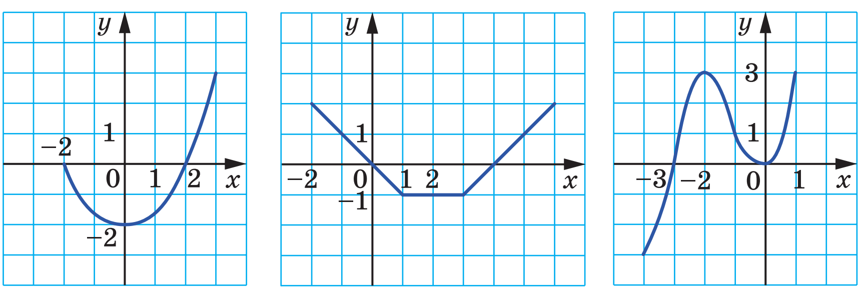



**Рис. 11.10**

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Используя график функции $y=f(x)$, изображенный на рисунке 11.11, постройте график функции $y=f(-x)$.




*а* *б* *в*

**Рис. 11.11**

[1] На уроках геометрии вы узнаете, что описанное преобразование графика функции $y = f(x)$ называют осевой симметрией.

**2.** Постройте график функции $y=\sqrt{x-2}$. Используя полученный график, постройте график функции $y=\sqrt{-x-2}$.

### Как построить график функции $y=f(|x|)$, если известен график функции $y=f(x)$

Воспользовавшись определением модуля, запишем:

$$y=f(|x|)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\geqslant 0, \\ f(-x), & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Отсюда делаем вывод, что график функции $y=f(|x|)$ при $x\geqslant 0$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$, а при $x<0$ — с графиком функции $y=f(-x)$.

Тогда построение графика функции $y=f(|x|)$ можно проводить по такой схеме:

1) построить ту часть графика функции $y=f(x)$, все точки которой имеют неотрицательные абсциссы;

2) построить ту часть графика функции $y=f(-x)$, все точки которой имеют отрицательные абсциссы.

Объединение этих двух частей и составит график функции $y=f(|x|)$.

На рисунке 11.12 показано, как с помощью графика функции $y=(x-2)^2$ построен график функции $y=(|x|-2)^2$.

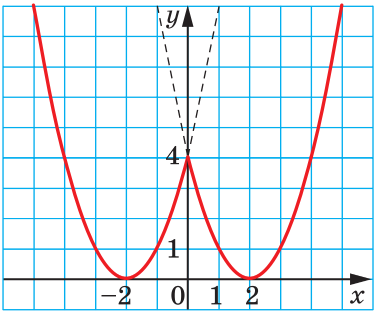



**Рис. 11.12**

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Используя график функции $y=f(x)$, изображенный на рисунке 11.11, постройте график функции $y=f(|x|)$.

**2.** Используя график функции $y=x+2$, постройте график функции $y=|x|+2$.

**3.** Постройте график функции:

1) $y = |x| - 3$;

2) $y = x^2 - 4|x|$;

3) $y = x^2 + 2|x| - 3$;

4) $y = 2|x| - x^2$;

5) $y = \dfrac{4}{|x|}$;

6) $y = \dfrac{4}{|x|} - 2$;

7) $y = \dfrac{4}{|x| - 2}$;

8) $y = \sqrt{|x|}$.

## Как построить график функции $y = |f(x)|$, если известен график функции $y = f(x)$

Для функции $y = |f(x)|$ можно записать:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что график функции $y = |f(x)|$ при всех $x$, для которых $f(x) \geqslant 0$, совпадает с графиком функции $y = f(x)$, а при всех $x$, для которых $f(x) < 0$, — с графиком функции $y = -f(x)$.

Тогда построение графика функции $y = |f(x)|$ можно проводить по такой схеме:

1) все точки графика функции $y = f(x)$ с неотрицательными ординатами оставить без изменений;

2) точки с отрицательными ординатами заменить на точки с теми же абсциссами, но с противоположными ординатами.

На рисунке 11.13 показано, как с помощью графика функции $y = x^2 - x - 2$ построен график функции $y = |x^2 - x - 2|$.

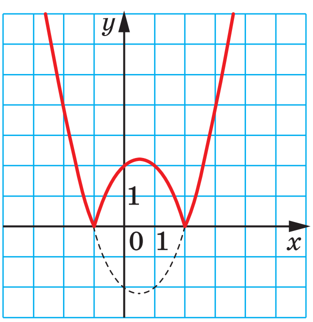


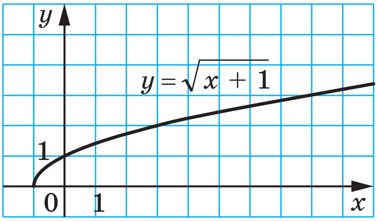

**Рис. 11.13**

**ПРИМЕР 1** Постройте график функции $y = \left|\sqrt{|x|+1} - 2\right|$.

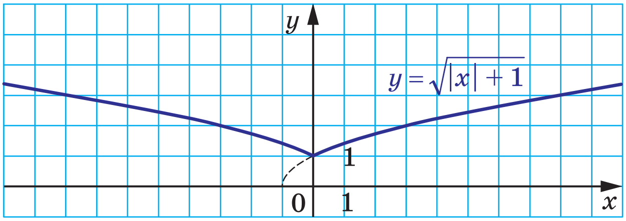
*Решение.* Построение искомого графика можно провести по такой схеме:

$$y = \sqrt{x+1} \to y = \sqrt{|x|+1} \to y = \sqrt{|x|+1} - 2 \to y = \left|\sqrt{|x|+1} - 2\right|$$

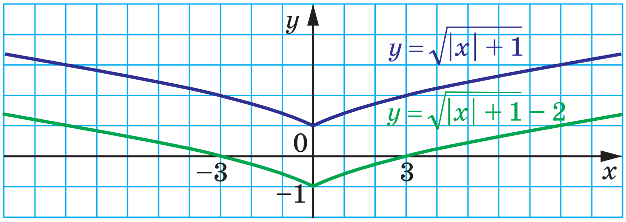
(рис. 11.14). ◀



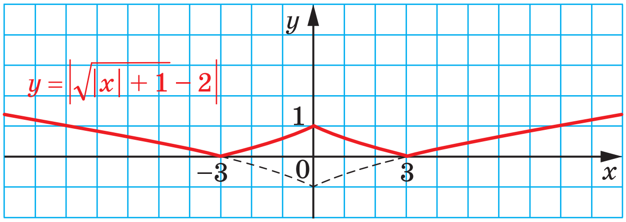

*а*




*б*




*в*




*г*

**Рис. 11.14**

**ПРИМЕР 2** Постройте график функции $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$.

*Решение.* Построение искомого графика можно провести по такой схеме:

$$y = \sqrt{|x|} \to y = \sqrt{|x+1|} \to y = \sqrt{|x+1|} - 1 \to y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$$

(рис. 11.15). ◄

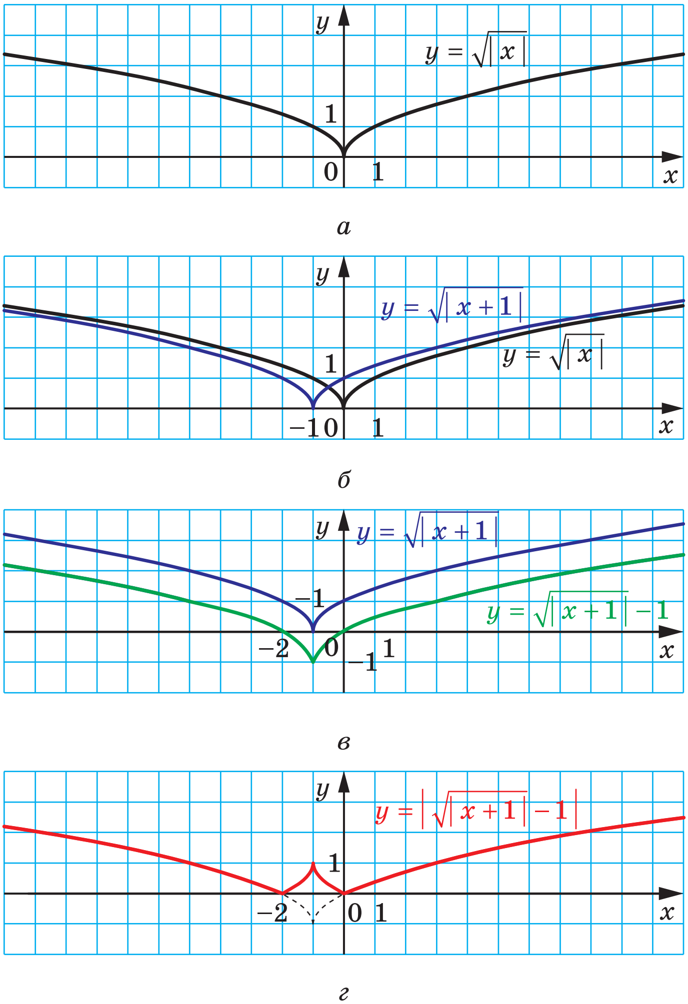



**Рис. 11.15**

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Используя график функции $y=f(x)$, изображенный на рисунке 11.11, постройте график функции:

1) $y=|f(x)|$;
2) $y=|f(|x|)|$.

**2.** Используя график функции $y=x+2$, постройте график функции $y=|x+2|$.

**3.** Постройте график функции:

1) $y=|x-3|$;
2) $y=|x^2-4x|$;
3) $y=|x^2+2x-3|$;
4) $y=|2x-x^2|$;
5) $y=\left|\frac{4}{x}-2\right|$;
6) $y=\left|\frac{4}{x-2}\right|$.

**4.** Постройте график функции:

1) $y=||x|-3|$;
2) $y=|x^2-4|x||$;
3) $y=|x^2+2|x|-3|$;
4) $y=|2|x|-x^2|$;
5) $y=\left|\frac{4}{|x|}-2\right|$;
6) $y=\left|\frac{4}{|x|-2}\right|$.

**5.** Постройте график функции:

1) $y=\sqrt{4-|x|}$;
2) $y=3-\sqrt{4-|x|}$;
3) $y=\left|3-\sqrt{4-|x|}\right|$;
4) $y=\sqrt{|4-x|}$;
5) $y=3-\sqrt{|4-x|}$;
6) $y=\left|3-\sqrt{|4-x|}\right|$.

## ЗАДАНИЕ № 2 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

**1.** Чему равно значение функции $f(x)=2x^2-1$ в точке $x_0=-3$?

А) $-19$; В) $11$;
Б) $-13$; Г) $17$.

**2.** Среди приведенных функций укажите квадратичную.

А) $y=2x-5$; В) $y=2x^2-5$;
Б) $y=2\sqrt{x}-5$; Г) $y=\dfrac{2}{x^2}-5$.

**3.** Областью определения какой из функций является промежуток $(-\infty; 6)$?

А) $y=\sqrt{6+x}$; В) $y=\dfrac{1}{\sqrt{6+x}}$;
Б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$; Г) $y=\sqrt{6-x}$.

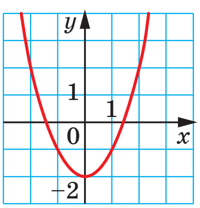
**4.** Как надо параллельно перенести график функции $y=\dfrac{7}{x}$, чтобы получить график функции $y=\dfrac{7}{x-5}$?

А) На 5 единиц вверх вдоль оси ординат;
Б) на 5 единиц влево вдоль оси абсцисс;
В) на 5 единиц вправо вдоль оси абсцисс;
Г) на 5 единиц вниз вдоль оси ординат.

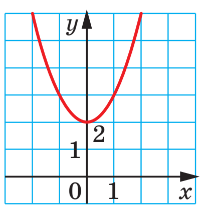
**5.** График функции $y=\sqrt{x}$ параллельно перенесли на 2 единицы влево и на 7 единиц вниз. График какой функции получили?

А) $y=\sqrt{x+2}-7$; В) $y=\sqrt{x-2}+7$;
Б) $y=\sqrt{x-2}-7$; Г) $y=\sqrt{x+2}+7$.

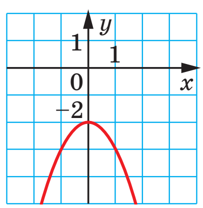
**6.** На каком из рисунков изображен график функции $y=-x^2+2$?



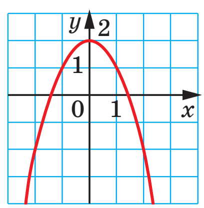
А)



Б)

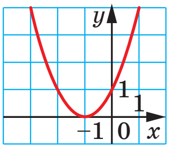


В)



Г)

**7.** График какой функции изображен на рисунке?

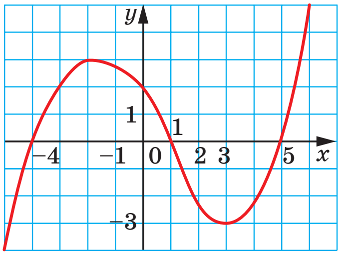



А) $y=x^2-1$;
Б) $y=x^2+1$;
В) $y=(x-1)^2$;
Г) $y=(x+1)^2$.

**8.** Укажите координаты вершины параболы $y=3(x-4)^2-5$.

А) $(4;\ 5)$; В) $(4;\ -5)$;
Б) $(-4;\ 5)$; Г) $(-4;\ -5)$.

**9.** На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Пользуясь рисунком, укажите промежуток убывания функции.




А) $[-4;\ 1]$; В) $[-2;\ 3]$;
Б) $[-3;\ 3]$; Г) $[-3;\ 1]$.

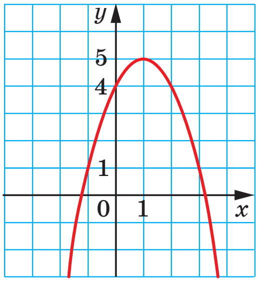
**10.** Найдите абсциссу вершины параболы $y=2x^2-12x+3$.

А) 6; В) 3;
Б) −6; Г) −3.

**11.** Вершина какой из парабол принадлежит оси абсцисс?

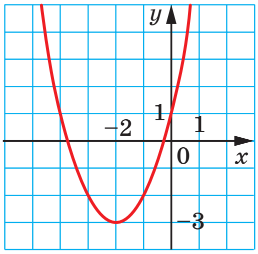
А) $y=x^2-6$; В) $y=(x-6)^2$;
Б) $y=x^2-6x$; Г) $y=(x-6)^2+2$.

**12.** На рисунке изображен график функции $y=-x^2+2x+4$. Пользуясь рисунком, найдите область значений функции.




А) $(-\infty;+\infty)$;
Б) $(-\infty;\ 1]$;
В) $[1;+\infty)$;
Г) $(-\infty;\ 5]$.

**13.** На рисунке изображен график функции $y=x^2+4x+1$. Пользуясь рисунком, укажите промежуток возрастания функции.




А) $(-\infty;-2]$;
Б) $[-2;+\infty)$;
В) $[-3;+\infty)$;
Г) определить невозможно.

**14.** Найдите нули функции $y=2x^2+x-6$.

А) $-1,5$; $-2$; В) $-1,5$; $2$;

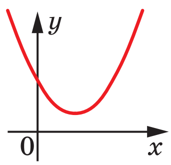
Б) $1,5$; $2$; Г) $1,5$; $-2$.

**15.** При каких значениях $b$ и $c$ вершина параболы $y=x^2+bx+c$ находится в точке $M(3;\ 8)$?

А) $b=6$, $c=-19$; В) $b=-3$, $c=8$;

Б) $b=-6$, $c=17$; Г) определить невозможно.

**16.** На рисунке изображен график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$. Укажите верное утверждение, если $D$ — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2+bx+c$.




А) $b>0$, $D>0$; В) $b<0$, $D<0$;

Б) $b>0$, $D<0$; Г) $b>0$, $D=0$.

**17.** При каком значении $a$ наименьшее значение функции $y=$ $=3x^2-6x+a$ равно 4?

А) $-5$; В) $7$;

Б) $4$; Г) $8$.

**18.** Известно, что $m-n=8$. Найдите множество значений выражения $mn$.

А) $[-16;+\infty)$; В) $(-\infty;+\infty)$;

Б) $[8;+\infty)$; Г) определить невозможно.

## 12. Решение квадратных неравенств

На рисунке 12.1 изображен график некоторой функции $y=f(x)$, областью определения которой является множество действительных чисел.

С помощью этого графика легко определить промежутки знакопостоянства функции $f$, а именно: $y>0$ на каждом из промежутков $(-5;\ -2)$ и $(1;+\infty)$; $y<0$ на каждом из промежутков $(-\infty;-5)$ и $(-2;\ 1)$.

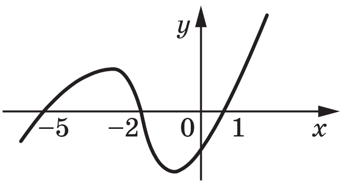



**Рис. 12.1**

Определив промежутки знакопостоянства функции $f$, мы тем самым решили неравенства $f(x)>0$ и $f(x)<0$.

Промежутки $(-5;\ -2)$ и $(1;+\infty)$ вместе составляют множество решений неравенства $f(x)>0$. В таких случаях говорят, что множество решений неравенства $f(x)>0$ является **объединением** указанных промежутков. Объединение промежутков записывают с помощью специального символа $\cup$.

Тогда множество решений неравенства $f(x)>0$ можно записать так:

$$(-5;-2)\cup(1;+\infty).$$

Множество решений неравенства $f(x)<0$ можно записать так:

$$(-\infty;-5)\cup(-2;1).$$

Такой метод решения неравенств $f(x)>0$ и $f(x)<0$ с помощью графика функции $y=f(x)$ называют **графическим**.

Покажем, как с помощью этого метода решают квадратные неравенства.

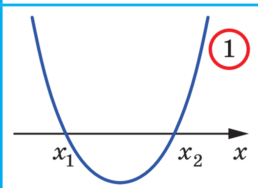
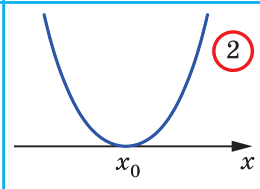
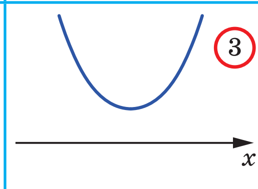
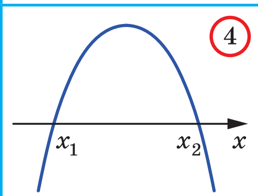
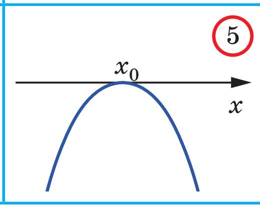
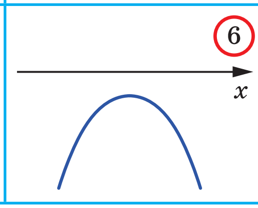
**Определение.** **Неравенства вида $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c\leqslant 0$, где $x$ — переменная, $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа, причем $a\neq 0$, называют квадратными.**

Выясним, как определить положение графика квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ относительно оси абсцисс.

Наличие и количество нулей квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ определяют с помощью дискриминанта $D$ квадратного трехчлена $ax^2+bx+c$: если $D>0$, то нулей у функции два; если $D=0$, то функция имеет один нуль; если $D<0$, то нулей нет.

Знак старшего коэффициента квадратного трехчлена $ax^2+bx+c$ определяет направление ветвей параболы $y=ax^2+bx+c$. При $a>0$ ветви направлены вверх, при $a<0$ — вниз.

Схематическое расположение параболы $y=ax^2+bx+c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков чисел $a$ и $D$ отображено в таблице ($x_1$ и $x_2$ — нули функции, $x_0$ — абсцисса вершины параболы).

| | $D>0$ | $D=0$ | $D<0$ |
|---|---|---|---|
| $a>0$ |  |  |  |
| $a<0$ |  |  |  |

Разъясним, как использовать эту таблицу для решения квадратных неравенств.

Пусть, например, надо решить неравенство $ax^2+bx+c>0$, где $a<0$ и $D>0$. Этим условиям соответствует ячейка 4 таблицы. Тогда ясно, что ответом будет промежуток $(x_1; x_2)$, на котором график соответствующей квадратичной функции расположен над осью абсцисс.

**ПРИМЕР 1** Решите неравенство $2x^2-x-1>0$.

*Решение.* Для квадратного трехчлена $2x^2-x-1$ имеем: $a=2>0$, $D=9>0$. Этим условиям соответствует ячейка 1 таблицы. Решим уравнение $2x^2-x-1=0$. Получим $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$. Тогда схематически график функции $y=2x^2-x-1$ можно изобразить так, как показано на рисунке 12.2.

Из рисунка 12.2 видно, что соответствующая квадратичная функция принимает положительные значения на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $(1; +\infty)$.

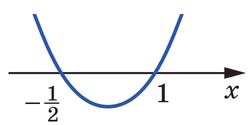



**Рис. 12.2**

*Ответ:* $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. ◄

**ПРИМЕР 2** Решите неравенство $-9x^2+6x-1<0$.

*Решение.* Имеем: $a=-9$, $D=0$. Этим условиям соответствует ячейка 5 таблицы. Устанавливаем, что $x_0=\frac{1}{3}$. Тогда схематически график функции $y=-9x^2+6x-1$ можно изобразить так, как показано на рисунке 12.3.

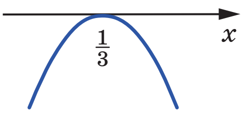



**Рис. 12.3**

Из рисунка 12.3 видно, что решениями неравенства являются все числа, кроме $\frac{1}{3}$.

Заметим, что это неравенство можно решить другим способом. Перепишем данное неравенство так: $9x^2-6x+1>0$. Тогда $(3x-1)^2>0$. Отсюда получаем тот же результат.

*Ответ:* $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. ◄

**ПРИМЕР 3** Решите неравенство $3x^2-x+1<0$.

*Решение.* Имеем: $a=3>0$, $D=-11<0$. Этим условиям соответствует ячейка 3 таблицы. В этом случае график функции $y=3x^2-x+1$ не имеет точек с отрицательными ординатами.

*Ответ:* решений нет. ◄

**ПРИМЕР 4** Решите неравенство $0{,}2x^2+2x+5\leqslant 0$.

*Решение.* Поскольку $a=0{,}2$, $D=0$, то данному случаю соответствует ячейка 2 таблицы, причем $x_0=-5$. Но в этом случае квадратичная функция принимает только неотрицательные значения. Следовательно, данное неравенство имеет единственное решение $x=-5$.

*Ответ:* $-5$. ◄

**?**

1. С помощью какого символа записывают объединение промежутков?
2. Какие неравенства называют квадратными?
3. Какие возможны случаи расположения параболы $y=ax^2+bx+c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков $a$ и $D$, где $D$ – дискриминант квадратного трехчлена $ax^2+bx+c$? Изобразите схематически эти случаи.

## УПРАЖНЕНИЯ

**12.1.°** Какие из чисел $-2$; $0$; $1$ являются решениями неравенства:
1) $x^2-x-2<0$; 2) $x^2+x\geqslant 0$; 3) $-3x^2-x+2>0$?

**12.2.°** На рисунке 12.4 изображен график функции $y=x^2+4x-5$. Найдите множество решений неравенства:
1) $x^2+4x-5<0$; 3) $x^2+4x-5>0$;
2) $x^2+4x-5\leqslant 0$; 4) $x^2+4x-5\geqslant 0$.

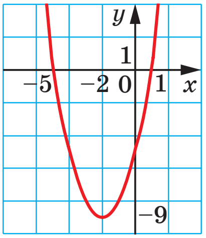


**Рис. 12.4**

**12.3.°** На рисунке 12.5 изображен график функции $y=-3x^2-6x$. Найдите множество решений неравенства:
1) $-3x^2-6x<0$; 3) $-3x^2-6x>0$;
2) $-3x^2-6x\leqslant 0$; 4) $-3x^2-6x\geqslant 0$.

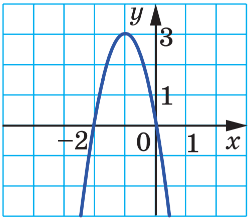


**Рис. 12.5**

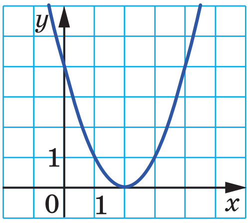


**Рис. 12.6**

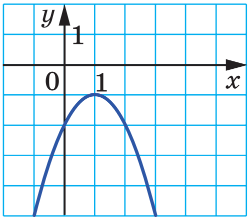


**Рис. 12.7**

**12.4.°** На рисунке 12.6 изображен график функции $y=x^2-4x+4$. Найдите множество решений неравенства:
1) $x^2-4x+4<0$; 3) $x^2-4x+4>0$;
2) $x^2-4x+4\leqslant 0$; 4) $x^2-4x+4\geqslant 0$.

**12.5.°** На рисунке 12.7 изображен график функции $y=-x^2+2x-2$. Найдите множество решений неравенства:
1) $-x^2+2x-2<0$; 3) $-x^2+2x-2>0$;
2) $-x^2+2x-2\leqslant 0$; 4) $-x^2+2x-2\geqslant 0$.

**12.6.°** Решите неравенство:
1) $x^2+6x-7<0$; 5) $3x^2-7x+4\leqslant 0$;
2) $x^2-2x-48\geqslant 0$; 6) $2x^2+3x+1>0$;
3) $-x^2-6x-5>0$; 7) $4x^2-12x\leqslant 0$;
4) $-x^2+4x-3<0$; 8) $4x^2-9>0$;

9) $x^2-12x+36>0$;
10) $4x^2-12x+9\geqslant 0$;
11) $x^2+4x+4<0$;
12) $49x^2-14x+1\leqslant 0$;
13) $2x^2-x+3>0$;
14) $3x^2-4x+5\leqslant 0$;
15) $-4x^2+5x-7>0$;
16) $-2x^2+3x-2\leqslant 0$.

**12.7.°** Решите неравенство:
1) $x^2+4x+3>0$;
2) $x^2-3x+2\leqslant 0$;
3) $-x^2+12x+45<0$;
4) $-3x^2-5x-2\geqslant 0$;
5) $x^2-5x>0$;
6) $-25x^2+16\leqslant 0$;
7) $5x^2-3x+1\geqslant 0$;
8) $-3x^2+6x-4>0$;
9) $\frac{1}{3}x^2-2x+3\leqslant 0$;
10) $-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{36}>0$;
11) $2x^2-2x+0{,}5<0$.

**12.8.°** Найдите множество решений неравенства:
1) $x^2\leqslant 49$; 2) $x^2>5$; 3) $7x^2\leqslant 4x$; 4) $0{,}9x^2<-27x$.

**12.9.°** Найдите множество решений неравенства:
1) $x^2>1$;
2) $x^2<3$;
3) $-3x^2\geqslant -12x$;
4) $-2x^2<-128$.

**12.10.•** Решите неравенство:
1) $x(x+5)-2<4x$;
2) $11-(x+1)^2\leqslant x$;
3) $(2x+1)^2-(x+1)(x-7)\leqslant 5$;
4) $5x(x+4)-(2x-3)(2x+3)>30$;
5) $(3x-7)(x+2)-(x-4)(x+5)>30$;
6) $\frac{2x^2-1}{4}-\frac{3-4x}{6}+\frac{8x-5}{8}\leqslant\frac{19}{24}$.

**12.11.•** Решите неравенство:
1) $2(x^2+2)\geqslant x(x+5)$;
2) $x-(x+4)(x+5)>-5$;
3) $(6x-1)(6x+1)-(12x-5)(x+2)<7-3x$;
4) $\frac{x-1}{4}-\frac{2x-3}{2}<\frac{x^2+3x}{8}$.

**12.12.•** При каких значениях $x$:
1) значения трехчлена $-3x^2+6x+1$ больше $-\frac{4}{3}$;
2) значения трехчлена $-5x^2+11x+2$ не больше $-\frac{2}{5}$?

**12.13.**$^{\bullet}$ При каких значениях $x$:

1) значения трехчлена $x^2-2x-11$ меньше $\frac{1}{4}$;

2) значения трехчлена $-3x^2+8x+6$ не меньше $-\frac{2}{3}$?

**12.14.**$^{\bullet}$ При каких значениях аргумента значения функции

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+9$$

больше соответствующих значений функции $y=2x-1$?

**12.15.**$^{\bullet}$ При каких значениях аргумента значения функции

$$y=\frac{3}{2}x^2-7x+1$$

меньше соответствующих значений функции $y=-\frac{1}{2}x^2-4$?

**12.16.**$^{\bullet}$ Найдите целые решения неравенства:

1) $x^2+5x\leqslant 0$;
2) $x^2-10<0$;
3) $6x^2+x-2\leqslant 0$;
4) $-\frac{1}{4}x^2+x+3>0$.

**12.17.**$^{\bullet}$ Сколько целых решений имеет неравенство:

1) $20-8x-x^2>0$;
2) $4x^2-15x-4<0$?

**12.18.**$^{\bullet}$ Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $42-x^2-x>0$;
2) $2x^2-3x-20<0$.

**12.19.**$^{\bullet}$ Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $1{,}5x^2-2x-2<0$;
2) $-2x^2-15x-25\geqslant 0$.

**12.20.**$^{\bullet}$ Составьте какое-нибудь квадратное неравенство, множество решений которого:

1) является объединением промежутков $(-\infty;-4)$ и $(8;+\infty)$;
2) является промежутком $[-2;\ 9]$;
3) состоит из одного числа 7.

**12.21.**$^{\bullet}$ Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{-x^2+3x+4}$;
2) $y=\sqrt{2x^2+5x-3}$;
3) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}$;
4) $y=\frac{x+2}{\sqrt{6x-2x^2}}$.

**12.22.**$^{\bullet}$ Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{2x^2-9x-18}$;
2) $\frac{1}{\sqrt{15+2x-x^2}}$.

**12.23.**$^{\bullet}$ Равносильны ли неравенства:

1) $x^2-2x-15>0$ и $x^2-2x-15\geqslant 0$;

2) $\frac{1}{x^2-x-20}<0$ и $\frac{1}{x^2-x-20}\leqslant 0$;

3) $x^2-6x+10>0$ и $-x^2+x-1\leqslant 0$;

4) $x^2+2x+3<0$ и $-2x^2-4>0$?

**12.24.**$^{\bullet}$ При каких значениях $a$ не имеет корней уравнение:

1) $x^2-ax+4=0$;

2) $x^2+(a-2)x+25=0$;

3) $4{,}5x^2-(4a+3)x+3a=0$?

**12.25.**$^{\bullet}$ При каких значениях $b$ имеет два различных корня уравнение:

1) $x^2-8bx+15b+1=0$;

2) $2x^2+2(b-6)x+b-2=0$?

**12.26.**$^{\bullet\bullet}$ Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2-x-6\leqslant 0, \\ x>0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2-11x-6\geqslant 0, \\ x+4\geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-9x-10\leqslant 0, \\ 6x-x^2<0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-x-12\geqslant 0, \\ x^2+3x-10<0. \end{cases}$

**12.27.**$^{\bullet\bullet}$ Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -6x^2+13x-5\leqslant 0, \\ 6-2x>0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-7x-18<0, \\ 5x-x^2\leqslant 0. \end{cases}$

**12.28.**$^{\bullet\bullet}$ Найдите целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} -2x^2-5x+18\geqslant 0, \\ x^2+4x-5\leqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-\left(\sqrt{5}-3\right)x-3\sqrt{5}\leqslant 0, \\ x^2+x>0. \end{cases}$

**12.29.**$^{\bullet\bullet}$ Найдите область определения функции:

1) $y=\frac{5}{\sqrt{x^2-4x-12}}+\sqrt{x+1}$;

2) $y=\frac{x-3}{\sqrt{18+3x-x^2}}+\frac{8}{x-5}$;

3) $y=\sqrt{x^2-5x-14}-\frac{9}{x^2-81}$;

4) $y=\frac{1}{\sqrt{6-7x-3x^2}}+\frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

**12.30.**$^{\bullet\bullet}$ Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{20+4x-3x^2}+\frac{3}{\sqrt{8-4x}}$;

2) $y=\frac{x+5}{\sqrt{35+2x-x^2}}+\frac{x-1}{|x|-6}$.

**12.31.**$^{\bullet\bullet}$ Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2-8|x|-33<0$;

2) $8x^2+7|x|-1\geqslant 0$.

**12.32.**$^{\bullet\bullet}$ Найдите множество решений неравенства:

1) $5x^2-7|x|+2\geqslant 0$;

2) $x^2+10|x|-24\leqslant 0$.

**12.33.**•• Решите неравенство:

1) $|x| \cdot (x^2+3x-10)<0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2+2x-8)\leqslant 0$;
3) $(x-2)^2\,(x^2-8x-9)<0$;
4) $(x+5)^2\,(x^2-2x-15)>0$;
5) $\dfrac{x^2+7x-8}{(x-4)^2}\geqslant 0$;
6) $\dfrac{x^2+10x-11}{(x+3)^2}\leqslant 0$.

**12.34.**•• Решите неравенство:

1) $|x| \cdot (x^2-5x+6)>0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2+6x-40)>0$;
3) $(x+3)^2\,(x^2-x-6)>0$;
4) $\dfrac{3x^2-8x-3}{(x-1)^2}\leqslant 0$.

**12.35.*** Решите неравенство:

1) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}>0$;
2) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}\geqslant 0$;
3) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}<0$;
4) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}\leqslant 0$.

**12.36.*** Решите неравенство:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}>0$;
2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\geqslant 0$;
3) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}<0$;
4) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\leqslant 0$.

**12.37.*** При каких значениях $a$ данное неравенство выполняется при всех действительных значениях $x$:

1) $x^2-4x+a>0$;
2) $x^2+(a-1)\,x+1-a-a^2\geqslant 0$;
3) $-\dfrac{1}{4}x^2+5ax-9a^2-8a<0$;
4) $(a-1)\,x^2-(a+1)\,x+a+1>0$?

**12.38.*** При каких значениях $a$ не имеет решений неравенство:

1) $-x^2+6x-a>0$;
2) $x^2-(a+1)\,x+3a-5<0$;
3) $ax^2+(a-1)\,x+(a-1)<0$?

**12.39.*** Для каждого значения $a$ решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2-5x+4>0, \\ x>a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x^2-3x-1\leqslant 0, \\ x<a. \end{cases}$

**12.40.*** Для каждого значения $a$ решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2-x-72<0, \\ x>a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2-9x+8>0, \\ x<a. \end{cases}$

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**12.41.** Упростите выражение:

1) $\frac{x^2+3xy}{x+6}:\frac{x^2-9y^2}{2x+12}$; 2) $\frac{4a^2-12ab+9b^2}{2a^2-8b^2}\cdot\frac{2a^2-8ab+8b^2}{6a-9b}$.

**12.42.** Найдите значение выражения, используя свойства арифметического квадратного корня:

1) $\sqrt{20\cdot66\cdot330}$; 3) $2\sqrt{18}\cdot3\sqrt{30}\cdot5\sqrt{15}$;

2) $\sqrt{3^5\cdot12^3}$; 4) $6\sqrt{10}\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{50}$.

**12.43.** Первая бригада может собрать урожай за 12 дней. Второй бригаде для выполнения этой же работы требуется 75 % этого времени. После того как первая бригада проработала 5 дней, к ней присоединилась вторая бригада, и они вместе закончили работу. Сколько дней бригады работали вместе?

**12.44.** Во время первой поездки автомобиля потратили 10 % бензина, который был в баке, а во время второй — 25 % оставшегося. После этого в баке осталось на 13 л меньше бензина, чем было сначала. Сколько литров бензина было в баке до первой поездки?

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**12.45.** Является ли пара чисел (2; −3) решением уравнения:

1) $4x-3y=17$; 2) $x^2+5=y^2$; 3) $xy=6$?

**12.46.** График уравнения $5x-y=2$ проходит через точку $A(4;\ b)$. Чему равно значение $b$?

**12.47.** Постройте график уравнения:

1) $4x+y=3$; 6) $x^2+y^2=4$;

2) $2x-3y=6$; 7) $x^2+2x+y^2-6y+10=0$;

3) $xy=-8$; 8) $(x-3)(y-x)=0$;

4) $(x-2)^2+y^2=0$; 9) $\frac{y-x}{y^2-1}=0$.

5) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$;

**12.48.** Какая из пар чисел (−2; 1), (2; −1), (6; 4) является решением системы уравнений $\begin{cases}3x-8y=-14,\\4x+y=28?\end{cases}$

**12.49.** Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5. \end{cases}$

**12.50.** Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26. \end{cases}$

# 13. Системы уравнений с двумя переменными

В 7 классе вы ознакомились с графическим методом решения систем уравнений. Напомним, что его суть заключается в поиске координат общих точек графиков уравнений, входящих в систему. На уроках геометрии вы узнали, что графиком уравнения $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, где $R>0$, является окружность радиуса $R$ с центром $(a; b)$. Вы также научились строить график квадратичной функции. Всё это расширяет возможности применения графического метода для решения систем уравнений.

**ПРИМЕР 1** Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

*Решение.* Первое уравнение системы равносильно такому: $y=x^2-4x+3$. Его графиком является парабола, изображенная на рисунке 13.1.

Графиком второго уравнения является прямая, которая пересекает построенную параболу в двух точках: (1; 0) и (4; 3) (см. рис. 13.1).

Как известно, графический метод не гарантирует того, что полученный результат является точным. Поэтому найденные решения следует проверить. Проверка подтверждает, что пары чисел (1; 0) и (4; 3) действительно являются решениями данной системы.

*Ответ*: (1; 0), (4; 3). ◀

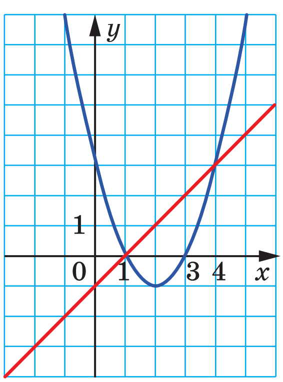



**Рис. 13.1**

Заметим, что эта система является «удобной» для графического метода: координаты точек пересечения графиков оказались целыми числами. Понятно, что такая ситуация встречается далеко не всегда. Поэтому графический метод эффективен тогда, когда нужно определить количество решений или достаточно найти их приближенные значения.

Рассмотренную систему можно решить, не обращаясь к графикам уравнений. Готовясь к изучению этой темы, вы повторили **метод подстановки** для решения систем линейных уравнений. Этот метод эффективен и для решения более сложных систем, в которых только одно уравнение является линейным, и для некоторых систем, в которых вообще нет линейных уравнений.

Решим систему $\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$ методом подстановки.

Выразим переменную $y$ через переменную $x$ во втором уравнении системы:

$$y = x - 1.$$

Подставим в первое уравнение вместо $y$ выражение $x - 1$:

$$x^2 - 4x - (x - 1) + 3 = 0.$$

Получили уравнение с одной переменной. Упростив его, получим квадратное уравнение $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Значения $y$, которые соответствуют полученным значениям $x$, найдем из уравнения $y = x - 1$. Имеем:

$$y_1 = 1 - 1 = 0,\ y_2 = 4 - 1 = 3.$$

Следовательно, мы еще раз установили, что пары чисел (1; 0) и (4; 3) являются решениями рассматриваемой системы уравнений.

**ПРИМЕР 2** Определите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

*Решение.* Графиком первого уравнения системы является окружность радиуса 3 с центром (0; 0).

Второе уравнение равносильно такому: $y = \dfrac{3,5}{x}$. Графиком этого уравнения является гипербола.

Изобразим окружность и гиперболу на одной координатной плоскости (рис. 13.2). Видим, что графики пересекаются в четырех точках. Следовательно, данная система имеет четыре решения. ◀

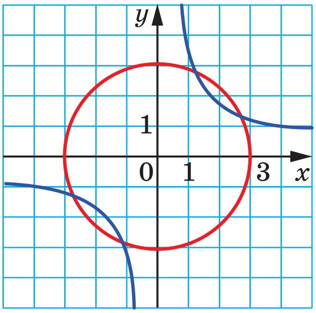



**Рис. 13.2**

Рисунок 13.2 также позволяет найти приближенные значения решений данной системы.

Не обращаясь к графическому методу, можно найти точные значения решений этой системы.

Готовясь к изучению этой темы, вы повторили **метод сложения** для решения систем линейных уравнений. Покажем, как этот метод «работает» и при решении более сложных систем.

Умножим второе уравнение рассматриваемой системы на 2. Получим:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 2xy = 7. \end{cases}$$

Сложим почленно левые и правые части уравнений. Получаем: $x^2+y^2+2xy=16$. Отсюда $(x+y)^2=16$; $x+y=4$ или $x+y=-4$.

Ясно, что для решения данной системы достаточно решить две более простые системы.

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2xy = 7. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x(4 - x) = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Решая второе уравнение этой системы, получаем:

$x_1 = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$. Тогда $y_1 = \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$.

2) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 2xy = 7. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x(-4 - x) = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x^2 + 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Решая второе уравнение этой системы, получаем:

$x_3 = \dfrac{-4-\sqrt{2}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-4+\sqrt{2}}{2}$. Тогда $y_3 = \dfrac{-4+\sqrt{2}}{2}$, $y_4 = \dfrac{-4-\sqrt{2}}{2}$.

*Ответ*: $\left(\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}; \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-4-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{-4+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-4+\sqrt{2}}{2}; \dfrac{-4-\sqrt{2}}{2}\right)$. ◀

Очевидно, что найти такие решения графическим способом невозможно.

В 8 классе вы ознакомились с **методом замены переменных** при решении уравнений. Этот метод применяют и для решения целого ряда систем уравнений.

**ПРИМЕР 3** Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

*Решение*. Пусть $\dfrac{x+y}{x-y}=t$. Тогда $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1}{t}$.

Теперь первое уравнение системы можно записать так:

$$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}.$$

Отсюда $2t^2-5t+2=0$; $t_1=2$, $t_2=\dfrac{1}{2}$.

Для решения исходной системы достаточно решить две более простые системы.

1) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=2, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x+y=2x-2y, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3y, \\ 10y^2=10. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем: $y_1=1$, $y_2=-1$. Тогда $x_1=3$, $x_2=-3$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{2}, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} 2x+2y=x-y, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3y, \\ 10y^2=10. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем: $y_3=1$, $y_4=-1$. Тогда $x_3=-3$, $x_4=3$.

*Ответ*: (3; 1), (–3; –1), (–3; 1), (3; –1). ◄

**ПРИМЕР 4** Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+2y+xy=8, \\ x^2+y^2+3x+3y=14. \end{cases}$

*Решение*. Заметим, что данная система не изменится, если заменить $x$ на $y$, а $y$ на $x$. В таких случаях может оказаться эффективной замена $x+y=u$, $xy=v$.

Перепишем данную систему так:

$$\begin{cases} 2(x+y)+xy=8, \\ (x+y)^2-2xy+3(x+y)=14. \end{cases}$$

Выполним указанную замену. Получим систему:

$$\begin{cases} 2u+v=8, \\ u^2-2v+3u=14. \end{cases}$$

Ее можно решить методом подстановки (сделайте это самостоятельно). Получаем:

$$\begin{cases} u = 3, \\ v = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u = -10, \\ v = 28. \end{cases}$$

Остается решить две системы:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 28. \end{cases}$$

Каждую из них можно решить методом подстановки. Однако здесь удобнее воспользоваться теоремой, обратной теореме Виета. Так, для системы $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases}$ можно считать, что $x$ и $y$ — корни квадратного уравнения $t^2 - 3t + 2 = 0$. Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Следовательно, пары чисел (1; 2) и (2; 1) являются решениями этой системы.

Используя теорему, обратную теореме Виета, легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что система $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 28 \end{cases}$ решений не имеет.

*Ответ*: (1; 2), (2; 1). ◄

?

1. Какие методы решения систем уравнений вы знаете?
2. Поясните суть графического метода решения систем уравнений.
3. В каких случаях графический метод является наиболее эффективным?

## УПРАЖНЕНИЯ

**13.1.°** Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + x^2 = 3, \\ y = x - 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

**13.2.°** Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = x + 2, \\ xy = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

**13.3.°** Решите методом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 - 2y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 2, \\ x^2 - 2xy = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 4y = 2, \\ xy + 2y = 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

**13.4.°** Решите методом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 28; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 2x^2 = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - x = 14, \\ x - y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6. \end{cases}$

**13.5.•** Установите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = -6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = 6 - x^2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = -1, \\ xy = 4. \end{cases}$

**13.6.•** Установите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = (x - 5)^2, \\ xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1. \end{cases}$

**13.7.•** Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 24, \\ xy = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ (x - 3)(y + 5) = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4y - 3x = 4, \\ 5x^2 + 16y = 60; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - x - 2y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

**13.8.•** Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x - 1)(y - 2) = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 3x^2 - 8y = -5. \end{cases}$

**13.9.**$^{\bullet}$ Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:

1) прямой $3x-y=1$ и параболы $y=3x^2+8x-3$;
2) прямой $2x-y=2$ и гиперболы $y=\dfrac{4}{x}$;
3) прямой $x+y=1$ и окружности $(x-1)^2+(y+4)^2=16$;
4) парабол $y=x^2-4x+7$ и $y=3+4x-2x^2$.

**13.10.**$^{\bullet}$ Докажите, что прямая $y-x=3$ является касательной к окружности $(x+5)^2+y^2=2$, и найдите координаты точки касания.

**13.11.**$^{\bullet}$ Докажите, что:

1) прямая $y=-2x-4$ и парабола $y=6x^2-7x-2$ не пересекаются;
2) парабола $y=4x^2-3x+6$ и прямая $y=x+5$ имеют одну общую точку, найдите координаты этой точки;
3) параболы $y=4x^2-3x-24$ и $y=2x^2-5x$ имеют две общие точки, найдите их координаты.

**13.12.**$^{\bullet}$ Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}, \\ 2x-y=2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=1, \\ x+5y=3. \end{cases}$

**13.13.**$^{\bullet}$ Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ x-y=1; \end{cases}$
2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{5}, \\ 3x+y=8. \end{cases}$

**13.14.**$^{\bullet}$ Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y-xy=1, \\ xy(x+y)=20; \end{cases}$
2) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}=\dfrac{21}{10}, \\ x+y=3; \end{cases}$
3) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{6y}{x}=5, \\ x^2+4xy-3y^2=18; \end{cases}$
4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}; \end{cases}$
5) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+xy=-10, \\ \dfrac{5y}{x}-2xy=13; \end{cases}$
6) $\begin{cases} x^2y^2+xy=6, \\ 2x-y=3; \end{cases}$
7) $\begin{cases} 3(x+y)^2+2(x-2y)^2=5, \\ 2(x-2y)-x-y=1. \end{cases}$

**13.15.**° Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2{,}5, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x - 2y}{x + y} - \dfrac{x + y}{x - 2y} = \dfrac{15}{4}, \\ 4x + 5y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} = 4, \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x} = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 72; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4(x - y)^2 + 7(x - y) = 15, \\ 2x + 5y = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} (x - y)^2 + 2x = 35 + 2y, \\ (x + y)^2 + 2y = 3 - 2x. \end{cases}$

**13.16.**•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 28, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ xy = 12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 19, \\ xy = -6. \end{cases}$

**13.17.**•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 56, \\ x - y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x^2 - y^2 = -4, \\ xy = 3. \end{cases}$

**13.18.**•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3y - 2xy = 2, \\ x + 2xy = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + y = 30, \\ xy + x = 28; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10. \end{cases}$

**13.19.**•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x + y + xy = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3xy + 2x = -4, \\ 3xy + y = -8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy - x = 24, \\ xy - y = 25; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 66, \\ 2x^2 - y^2 = 34. \end{cases}$

**13.20.**•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = 36, \\ x + 6y = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - 2xy = 32, \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 100; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -1. \end{cases}$

**13.21.**•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+10xy+25y^2=49, \\ x-5y=-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+4xy+4y^2=4x+2y, \\ x+2y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+25y^2=104, \\ xy=-4. \end{cases}$

**13.22.**•• При каких значениях $a$ система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x-y=a \end{cases}$

1) имеет одно решение;
2) имеет два решения;
3) не имеет решений?

**13.23.**•• При каких значениях $k$ система уравнений $\begin{cases} y-x^2=4, \\ y=kx+3 \end{cases}$

1) имеет одно решение;
2) имеет два решения;
3) не имеет решений?

**13.24.*** Сколько решений в зависимости от значения $a$ имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} y=|x|, \\ x^2+y=a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ |x|=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y-x=1, \\ xy=a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+a? \end{cases}$

**13.25.*** Сколько решений в зависимости от значения $a$ имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ |y|=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=a-|x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ xy=4? \end{cases}$

**13.26.*** Даны два уравнения $ax^2+x+1=0$ и $x^2+ax+1=0$. Найдите все значения $a$, при которых эти уравнения имеют по крайней мере один общий корень.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**13.27.** Докажите, что значение выражения $25^{10}-5^{17}$ кратно числу 31.

**13.28.** Упростите выражение $\frac{5a+5}{a^2-a}:\left(\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}\right)$.

**13.29.** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2(x-3)\geqslant -3(x+2), \\ \frac{7x}{3}\leqslant 1-\frac{x}{2}. \end{cases}$$

**13.30.** Известно, что $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $x^2+6x-2=0$. Найдите значение выражения $x_1^2+x_2^2$.

**13.31.** Сократите дробь:

1) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{7\sqrt{3}-21}{14\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$.

## ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

**13.32.** (*Из старинного китайского трактата «Девять отделов искусства счета»*) 5 волов и 2 барана стоят 11 таэлей, а 2 вола и 8 баранов — 8 таэлей. Сколько стоят отдельно вол и баран?

**13.33.** (*Задача Леонардо Пизанского* (*Фибоначчи*)) Один говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько денег у каждого?

**13.34.** Из села $A$ в село $B$, расстояние между которыми равно 140 км, выехал мотоциклист. За 20 мин до этого навстречу ему из села $B$ в село $A$ выехала велосипедистка, которая встретилась с мотоциклистом через 2 ч после своего выезда. Найдите скорость каждого из них, если мотоциклист за 2 ч проезжает на 104 км больше, чем велосипедистка за 4 ч.

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**13.35.** Существуют ли 100 таких натуральных чисел, что любая сумма нескольких из них не является квадратом натурального числа?

## Первая Всеукраинская олимпиада юных математиков

Надеемся, что задача 13.26 вам понравилась, и вы ощутили радость успеха, решив ее. Эта задача заслуживает внимания еще и потому, что в 1961 году она была предложена участникам первой Всеукраинской олимпиады юных математиков.

Вообще, математические олимпиады в Украине имеют давнюю традицию. Первая городская олимпиада юных математиков состоялась в 1935 г. в Киеве. С тех пор прошло более 80 лет, и за это время математические олимпиады стали для многих талантливых школьников первым шагом на пути к научному творчеству. Сегодня такие имена, как А. В. Погорелов, С. Г. Крейн, М. А. Красносельский, В. Г. Дринфельд, известны всему научному миру. Все они в разные годы были победителями математических олимпиад в Украине.

С удовлетворением отмечаем, что и сейчас математические олимпиады в Украине очень популярны. Десятки тысяч школьников нашей страны на различных этапах участвуют в этих математических соревнованиях. К организации и проведению олимпиад привлекают лучших ученых, методистов, учителей. Именно благодаря их энтузиазму и профессионализму команда Украины достойно представляет нашу страну на международных математических олимпиадах.

Советуем и вам участвовать в математических олимпиадах. Ниже мы приводим некоторые задачи первой Всеукраинской олимпиады юных математиков. Испытайте свои силы.

**1.** Уравнения $x^2+ax+b=0$ и $x^2+px+q=0$ имеют общий корень. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются остальные корни.

**2.** Решить уравнение $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$.

**3.** Расстояние от $A$ до $B$ — 999 км. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых расстояния до $A$ и до $B$ написаны так:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 999 | | 1 | 998 | | 2 | 997 | ... | 999 | 0 |

Сколько среди этих столбов таких, на которых есть только две разные цифры?

**Алексей Васильевич Погорелов** (1919–2002)

**Селим Григорьевич Крейн** (1917–1999)

**Марк Александрович Красносельский** (1920–1997)

**Владимир Гершонович Дринфельд** (1954 г. р.)

# 14. Система двух уравнений с двумя переменными как математическая модель прикладной задачи

Наверное, нет сегодня такой области знаний, где бы не применялись достижения математики. Физики и химики, астрономы и биологи, географы и экономисты, даже языковеды и историки используют математический аппарат.

В чем же секрет универсальности «математического инструмента»?

**Дмитрий Александрович Граве**
(1863–1939)

«Ключ к решению многих научных задач — их удачный перевод на язык математики». Такой ответ на этот вопрос дал один из основателей и первый директор Института математики Академии наук Украины академик Д. А. Граве.

Действительно, формулировки задач из разных областей знаний содержат нематематические понятия. Если математик участвует в решении такой задачи, то он в первую очередь стремится перевести ее на свой «родной» математический язык, то есть язык выражений, формул, уравнений, неравенств, функций, графиков и т. д. Результат такого перевода называют **математической моделью**, а саму задачу — **прикладной задачей**.

Термин «модель» (от лат. *modulus* — «образец») мы употребляем очень часто: модель самолета, модель атомного ядра, модель Солнечной системы, модель какого-то процесса или явления и т. п. Изучая свойства модели объекта, мы тем самым изучаем свойства самого объекта.

Область математики, которая занимается построением и изучением математических моделей, называют **математическим моделированием**.

Рассмотрим задачи, в которых системы уравнений второй степени использованы как математические модели реальных ситуаций.

**ПРИМЕР 1** Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 18 км, вышли одновременно навстречу друг другу две туристки и встретились через 2 ч. С какой скоростью шла каждая туристка, если для прохождения всего расстояния между пунктами первой из них нужно на 54 мин больше, чем второй?

*Решение.* Пусть скорость первой туристки равна $x$ км/ч, а второй — $y$ км/ч, $x<y$. До встречи первая туристка прошла $2x$ км, а вторая — $2y$ км. Всего они прошли 18 км. Тогда $2x+2y=18$.

Всё расстояние между пунктами первая туристка проходит за $\frac{18}{x}$ ч, а вторая — за $\frac{18}{y}$ ч. Поскольку первой туристке для прохождения этого расстояния нужно на $54 \text{ мин} = \frac{54}{60} \text{ ч} = \frac{9}{10} \text{ ч}$ больше, чем второй, то $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+2y=18, \\ \dfrac{18}{x} - \dfrac{18}{y} = \dfrac{9}{10}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x+y=9, \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{10}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=9-y, \\ \dfrac{2}{9-y} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

Решив второе уравнение последней системы, получаем: $y_1=5$, $y_2=-36$. Корень $-36$ не подходит по смыслу задачи. Следовательно, $y=5$, $x=4$.

*Ответ*: 4 км/ч, 5 км/ч. ◄

**ПРИМЕР 2** Два работника могут вместе выполнить некоторое задание за 10 дней. После 6 дней совместной работы одного из них перевели на другое задание, а второй продолжал работать. Через 2 дня самостоятельной работы второго оказалось, что сделано $\frac{2}{3}$ всего задания. За сколько дней каждый работник может выполнить это задание?

*Решение.* Пусть первый работник может выполнить всё задание за $x$ дней, а второй — за $y$ дней. За 1 день первый работник выполняет $\frac{1}{x}$ часть задания, а за 10 дней — $\frac{10}{x}$ часть задания. Второй работник за 1 день выполняет $\frac{1}{y}$ часть задания, а за 10 дней — $\frac{10}{y}$ часть задания. Так как за 10 дней совместной работы они выполняют всё задание, то $\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1.$

Первый работник работал 6 дней и выполнил $\frac{6}{x}$ часть задания, а второй работал 8 дней и выполнил $\frac{8}{y}$ часть задания. Так как в результате было выполнено $\frac{2}{3}$ задания, то $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}.$

Получили систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1,\\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3},\end{cases}$$

решением которой является пара чисел $x=15$, $y=30$. Следовательно, первый работник может выполнить задание за 15 дней, а второй — за 30 дней.

*Ответ*: 15 дней, 30 дней. ◀

**ПРИМЕР 3** При делении двузначного числа на произведение его цифр получаем неполное частное 5 и остаток 2. Разность этого числа и числа, полученного перестановкой его цифр, равна 36. Найдите это число.

*Решение*. Пусть искомое число содержит $x$ десятков и $y$ единиц. Тогда оно равно $10x+y$. Поскольку при делении этого числа на число $xy$ получаем неполное частное 5 и остаток 2, то $10x+y=5xy+2$.

Число, полученное перестановкой цифр данного, равно $10y+x$. По условию $(10x+y)-(10y+x)=36$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}10x+y=5xy+2,\\ (10x+y)-(10y+x)=36,\end{cases}$$

решениями которой являются две пары чисел: $x=6$, $y=2$ или $x=0{,}2$, $y=-3{,}8$. Однако вторая пара не подходит по смыслу задачи.

Следовательно, искомое число равно 62.

*Ответ*: 62. ◀

**1.** Что называют математической моделью задачи?

**2.** Какую задачу называют прикладной?

**3.** Что называют математическим моделированием?

## УПРАЖНЕНИЯ

**14.1.**° Разность двух натуральных чисел равна 3, а их произведение на 87 больше их суммы. Найдите эти числа.

**14.2.**° Разность квадратов двух натуральных чисел равна 20, а сумма большего из них и удвоенного второго числа равна 14. Найдите эти числа.

**14.3.**° Вокруг прямоугольного участка земли площадью 2400 м$^2$ поставили ограду длиной 220 м. Найдите длину и ширину участка.

**14.4.**° Периметр прямоугольника равен 32 см, а сумма площадей квадратов, построенных на двух его соседних сторонах, — 130 см$^2$. Найдите стороны прямоугольника.

**14.5.**• Какое двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр и в 2 раза больше их произведения?

**14.6.**• Если некоторое двузначное число разделить на сумму его цифр, то получим неполное частное 7 и остаток 6, а если разделить это число на произведение цифр, то получим неполное частное 5 и остаток 2. Найдите данное число.

**14.7.**• Двузначное число в 7 раз больше суммы своих цифр и на 52 больше произведения цифр. Найдите это число.

**14.8.**• Разность двух натуральных чисел равна 12, а сумма чисел, обратных им, равна $\frac{1}{8}$. Найдите эти числа.

**14.9.**• Сумма двух натуральных чисел равна 15, а разность чисел, обратных им, равна $\frac{1}{18}$. Найдите эти числа.

**14.10.**• Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см, а его площадь — 30 см$^2$. Найдите катеты этого треугольника.

**14.11.**• Периметр прямоугольного треугольника равен 40 см, а один из катетов — 8 см. Найдите второй катет треугольника и его гипотенузу.

**14.12.$^\bullet$** Площадь прямоугольника равна 180 см$^2$. Если одну его сторону уменьшить на 3 см, а другую — на 2 см, то его площадь станет равна 120 см$^2$. Найдите первоначальные размеры прямоугольника.

**14.13.$^\bullet$** Если длину прямоугольника уменьшить на 3 см, а ширину увеличить на 2 см, то его площадь увеличится на 6 см$^2$. Если длину прямоугольника уменьшить на 5 см, а ширину увеличить на 3 см, то площадь прямоугольника не изменится. Найдите стороны данного прямоугольника.

**14.14.$^\bullet$** Из металлического листа прямоугольной формы изготовили открытую коробку. Для этого в углах листа вырезали квадраты со стороной 4 см. Найдите длину и ширину листа, если его периметр равен 60 см, а объем коробки — 160 см$^3$.

**14.15.$^\bullet$** Два мотоциклиста выехали одновременно из городов $A$ и $B$ навстречу друг другу. Через час они встретились и, не останавливаясь, продолжили двигаться с той же скоростью. Один из них прибыл в город $A$ на 35 мин раньше, чем второй — в город $B$. Найдите скорость каждого мотоциклиста, если расстояние между городами составляет 140 км.

**14.16.$^\bullet$** От станции $M$ в направлении станции $N$, расстояние между которыми равно 300 км, отправился товарный поезд. Через 40 мин после этого от станции $N$ в направлении станции $M$ отправился скорый поезд, который встретился с товарным через 2 ч после своего выхода. Товарный поезд преодолевает расстояние между станциями $M$ и $N$ на 3 ч 20 мин дольше, чем скорый. Найдите скорость каждого поезда.

**14.17.$^\bullet$** Из одного города в другой, расстояние между которыми равно 240 км, выехали одновременно автобус и автомобиль. Автобус прибыл в пункт назначения на 1 ч позже автомобиля. Найдите скорость автомобиля и скорость автобуса, если за 2 ч автобус проезжает на 40 км больше, чем автомобиль за один час, а их скорости не превышают 90 км/ч.

**14.18.$^\bullet$** По круговой дорожке длиной 800 м в одном направлении движутся два конькобежца. Один конькобежец пробегает круг на 24 с быстрее другого и догоняет его через каждые 8 мин. Найдите скорость каждого конькобежца.

**14.19.$^\bullet$** Две бригады, работая вместе, могут выполнить производственное задание за 8 дней. Если первая бригада, работая самостоятельно, выполнит $\frac{1}{3}$ задания, а затем ее сменит вторая бригада, то задание будет выполнено за 20 дней. За сколько дней каждая бригада может выполнить данное производственное задание, работая самостоятельно?

**14.20.**$^{\bullet}$ Две бригады, работая вместе, могут разгрузить товарный поезд за 6 ч. Первая бригада выполнила $\frac{3}{5}$ всей работы, затем ее сменила вторая бригада, которая и закончила разгрузку. Вся работа была выполнена за 12 ч. Сколько времени нужно каждой бригаде, чтобы самостоятельно разгрузить поезд?

**14.21.**$^{\bullet}$ Если открыть одновременно две трубы, то бассейн будет наполнен водой за 12 ч. Если сначала наполняли бассейн только через первую трубу в течение 5 ч, а затем только через вторую в течение 9 ч, то водой будет наполнена половина бассейна. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу?

**14.22.**$^{\bullet}$ Два тракториста, работая вместе, могут вспахать поле за 6 ч. Если первый тракторист проработает самостоятельно 4 ч, а затем его сменит второй, то этот тракторист закончит вспашку за 9 ч. За какое время, работая самостоятельно, может вспахать поле каждый тракторист?

**14.23.**$^{\bullet}$ При последовательном соединении двух проводников сопротивление в электрическом контуре составит 150 Ом, а при параллельном — 36 Ом. Найдите сопротивление каждого проводника.

**14.24.**$^{\bullet}$ При последовательном соединении трех проводников первого вида и одного проводника второго вида сопротивление в электрическом контуре составит 18 Ом. Если параллельно соединить по одному проводнику первого и второго видов, то при напряжении 24 В сила тока в электрическом контуре составит 10 А. Найдите сопротивление проводника каждого вида.

**14.25.**$^{\bullet\bullet}$ Лодка проплыла по реке от пристани $A$ до пристани $B$ и вернулась назад за 6 ч. Найдите скорость течения реки, если 2 км по течению реки лодка проплывает за то же время, что и 1 км против течения, а расстояние между пристанями $A$ и $B$ составляет 16 км.

**14.26.**$^{\bullet\bullet}$ Катер проходит 48 км против течения реки и 30 км по течению реки за 3 ч, а 15 км по течению — на 1 ч быстрее, чем 36 км против течения. Найдите собственную скорость катера и скорость течения.

**14.27.**•• Из городов $A$ и $B$, расстояние между которыми 40 км, одновременно навстречу друг другу выехали на велосипедах Галина и Екатерина. Галина прибыла в город $B$ через 40 мин, а Екатерина — в город $A$ через 1,5 ч после встречи. Найдите скорость движения каждой девушки.

**14.28.**•• Из одного села одновременно в одном направлении вышли Петр и Василий. Скорость движения Петра составляла 3 км/ч, а Василия — 4 км/ч. Через полтора часа из этого села выехала на велосипеде Ирина, которая догнала Василия через 15 мин после того, как догнала Петра. Найдите скорость движения Ирины.

**14.29.**•• Расстояние между пристанями $A$ и $B$ равно 28 км. Отчалив от пристани $A$ в направлении пристани $B$, через 2 ч после начала движения катер встретил плот, отправленный от пристани $B$ по течению реки за 2 ч до начала движения катера. Найдите скорость течения реки и собственную скорость катера, если катер проходит расстояние от $A$ до $B$ и возвращается обратно за 4 ч 48 мин.

**14.30.**•• Масса слитка одного металла равна 336 г, а слитка другого — 320 г. Объем слитка первого металла на 10 см$^3$ меньше объема второго, а плотность первого — на 2 г/см$^3$ больше плотности второго. Найдите плотность каждого металла.

**14.31.**•• Модуль равнодействующей двух сил, приложенных к одной точке под прямым углом, равен 25 Н. Если модуль одной силы уменьшить на 8 Н, а другой увеличить на 4 Н, то модуль их равнодействующей не изменится. Найдите модули данных сил.

**14.32.**•• По двум сторонам прямого угла по направлению к его вершине движутся два тела. Первое тело движется со скоростью 12 м/мин, а второе — со скоростью 16 м/мин. В некоторый момент времени расстояние между телами составляло 100 м. Через 2 мин после этого расстояние между телами стало равным 60 м. На каком расстоянии от вершины прямого угла находилось каждое тело в первый зафиксированный момент времени?

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**14.33.** Упростите выражение:

1) $\dfrac{2}{a^2-3a}-\dfrac{1}{a^2+3a}-\dfrac{a+1}{a^2-9}$; 2) $\dfrac{3}{b-2}-\dfrac{3b-2}{b^2+2b+4}-\dfrac{b^2+16b+12}{b^3-8}$.

**14.34.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{4a}{5\sqrt{a}}$; 2) $\dfrac{3}{\sqrt{b}-1}$; 3) $\dfrac{5}{\sqrt{6}-1}$; 4) $\dfrac{2}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}$.

**14.35.** Решите неравенство:

1) $1{,}1(5x-4) \leqslant 0{,}2(10x+13)$; 2) $\dfrac{0{,}6-5y}{4} < \dfrac{0{,}5-5y}{6}$.

**14.36.** Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$(2x+1)(x+4)-3x\,(x+2)>0.$$

**14.37.** При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\sqrt{12-5x}+\sqrt{2x+1}$?

**14.38.** Найдите промежуток убывания функции:

1) $y=2x^2+10x-9$; 2) $y=5x-3x^2$.

**14.39.** 14 декабря 1840 года в Париже комиссия в составе академиков-математиков собралась для изучения математических способностей мальчика Анри Монде, который феноменально выполнял вычисления. Решите одну из предложенных Монде задач, которую мальчик решил устно: «Какие два натуральных числа надо взять, чтобы разность их квадратов была равной 133?»

## ЗАДАНИЕ № 3 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

**1.** При каких значениях $x$ выполняется неравенство $x^2 > 4$?

А) $x > 2$; В) $x < -2$ или $x > 2$;
Б) $x > 2$ или $x > -2$; Г) $-2 < x < 2$.

**2.** Каково множество решений неравенства $x^2 + 8x - 9 \geqslant 0$?

А) $(-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$; В) $(-\infty; -1) \cup (9; +\infty)$;
Б) $(-\infty; -9] \cup [1; +\infty)$; Г) $(-\infty; -1] \cup [9; +\infty)$.

**3.** Сколько целых решений имеет неравенство $3x^2 + 5x - 8 < 0$?

А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.

**4.** Какое из данных неравенств выполняется при всех действительных значениях переменной?

А) $x^2 - 14x + 49 > 0$; В) $x^2 - 3x + 4 > 0$;
Б) $-3x^2 + x + 2 \leqslant 0$; Г) $-x^2 + 7x - 10 < 0$.

**5.** Какова область определения функции $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{8x - 4x^2}}$?

А) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; В) $[0; 2]$;
Б) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; Г) $(0; 2)$.

**6.** Укажите неравенство, не имеющее решений.

А) $x^2 - 6x + 10 < 0$; В) $-3x^2 + 8x + 3 < 0$;
Б) $-5x^2 + 3x + 2 > 0$; Г) $-x^2 - 10x > 0$.

**7.** Пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений $\begin{cases} y - x = 2, \\ xy - y = 10. \end{cases}$ Чему равно значение выражения $x_1y_1 + x_2y_2$?

А) 23; Б) 7; В) 35; Г) $-26$.

**8.** Какие фигуры являются графиками уравнений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -3? \end{cases}$$

А) Прямая и парабола; В) окружность и гипербола;
Б) окружность и парабола; Г) парабола и гипербола.

**9.** Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ x + y = 1? \end{cases}$

А) Ни одного решения; В) два решения;
Б) одно решение; Г) четыре решения.

**10.** Какое наибольшее значение принимает выражение $x+y$, если пара чисел $(x;\ y)$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x-y=5, \\ x^2+2xy-y^2=-7? \end{cases}$$

А) 1; Б) 6; В) 0; Г) −5.

**11.** Пара чисел $(a;\ b)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=4, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=9. \end{cases}$ Найдите значение выражения $a-b$.

А) 5; Б) 1; В) $\dfrac{1}{6}$; Г) $\dfrac{5}{6}$.

**12.** Пары чисел $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ являются решениями системы уравнений $\begin{cases} 2x-xy=5, \\ y+xy=6. \end{cases}$ Найдите значение выражения $|\ x_1y_1-x_2y_2\ |$.

А) 1; Б) 11; В) 70; Г) 10.

**13.** Периметр прямоугольника равен 34 см, а его диагональ — 13 см.

Пусть стороны прямоугольника равны $x$ см и $y$ см. Какая из приведенных систем уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии?

А) $\begin{cases} x+y=34, \\ x^2+y^2=13; \end{cases}$ В) $\begin{cases} x+y=34, \\ x^2+y^2=169; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 2(x+y)=34, \\ x^2+y^2=13; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 2(x+y)=34, \\ x^2+y^2=169. \end{cases}$

**14.** Расстояние между двумя городами, равное 120 км, легковой автомобиль проезжает на 30 мин быстрее, чем грузовик. Известно, что за 2 ч грузовик проезжает на 40 км больше, чем легковой автомобиль за 1 ч.

Пусть скорость грузовика равна $x$ км/ч, а легкового автомобиля — $y$ км/ч. Какая из приведенных систем уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии?

А) $\begin{cases} \dfrac{120}{x}-\dfrac{120}{y}=30, \\ 2x-y=40; \end{cases}$ В) $\begin{cases} \dfrac{120}{x}-\dfrac{120}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ 2x-y=40; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \dfrac{120}{y}-\dfrac{120}{x}=30, \\ 2x-y=40; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} \dfrac{120}{y}-\dfrac{120}{x}=\dfrac{1}{2}, \\ 2x-y=40. \end{cases}$

**15.** Две наборщицы могут выполнить компьютерный набор текста учебника по алгебре за 8 дней. Если первая наборщица наберет $\frac{2}{3}$ текста, а потом вторая завершит набор, то весь текст учебника будет набран за 16 дней.

Пусть первая наборщица может набрать текст учебника за $x$ дней, а вторая — за $y$ дней. Какая из приведенных систем уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии?

А) $\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=16; \end{cases}$  В) $\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=16; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3x}+\frac{1}{3y}=\frac{1}{16}; \end{cases}$  Г) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=16. \end{cases}$

**16.** При каких значениях $b$ уравнение $3x^2-bx+3=0$ не имеет корней?

А) $-6<b<6$;  В) $b>6$;

Б) $b<6$;  Г) $b<-6$ или $b>6$.

**17.** При каком значении $a$ система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=a \end{cases}$ имеет единственное решение?

А) $a=5$;  В) $a=-5$ или $a=5$;

Б) $a=5\sqrt{2}$;  Г) $a=-5\sqrt{2}$ или $a=5\sqrt{2}$.

**18.** При каких значениях $a$ неравенство $ax^2-2x+a<0$ не имеет решений?

А) $a<-1$ или $a>1$;  В) $-1<a<1$;

Б) $a\geqslant 1$;  Г) таких значений не существует.

# ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 2

**Функция**

Пусть $X$ — множество значений независимой переменной, $Y$ — множество значений зависимой переменной. Функция — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества $X$ можно найти единственное значение зависимой переменной из множества $Y$.

**Нуль функции**

Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют нулем функции.

**Промежуток знакопостоянства функции**

Промежуток, на котором функция принимает значения одинакового знака, называют промежутком знакопостоянства функции.

**Возрастание и убывание функции**

Функцию называют возрастающей на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции.
Функцию называют убывающей на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

**Построение графика функции $y=kf(x)$**

График функции $y=kf(x)$ можно получить из графика функции $y=f(x)$ в результате растяжения в $k$ раз от оси абсцисс, если $k>1$, или в результате сжатия в $\frac{1}{k}$ раз к оси абсцисс, если $0<k<1$.

### Построение графика функции $y=f(x)+b$

График функции $y=f(x)+b$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y=f(x)$ вдоль оси ординат на $b$ единиц вверх, если $b>0$, и на $-b$ единиц вниз, если $b<0$.

### Построение графика функции $y=f(x+a)$

График функции $y=f(x+a)$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y=f(x)$ вдоль оси абсцисс на $a$ единиц влево, если $a>0$, и на $-a$ единиц вправо, если $a<0$.

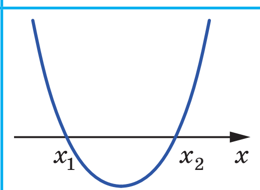
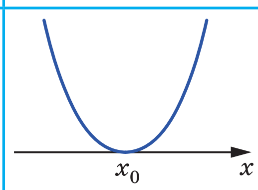
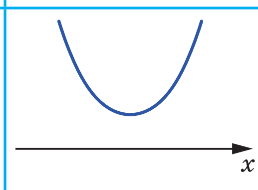
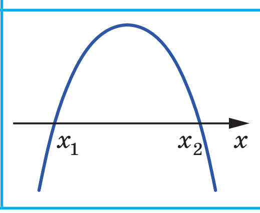
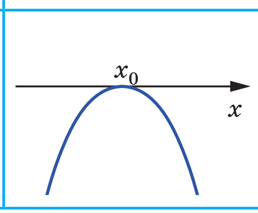
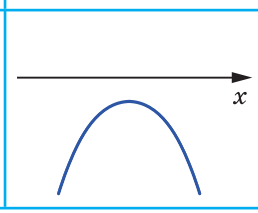
### Квадратичная функция

Функцию, которую можно задать формулой вида $y=ax^2+bx+c$, где $x$ — независимая переменная, $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют квадратичной.

### Квадратные неравенства

Неравенства вида $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c\leqslant 0$, где $x$ — переменная, $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют квадратными.

### Схематическое расположение параболы $y=ax^2+bx+c$ относительно оси абсцисс

| | $D>0$ | $D=0$ | $D<0$ |
|---|---|---|---|
| $a>0$ |  |  |  |
| $a<0$ |  |  |  |

# § 3 ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Вы ознакомитесь с такими новыми понятиями, как последовательность, $n$-й член последовательности, арифметическая и геометрическая прогрессии, конечные и бесконечные последовательности; узнаете, какие существуют способы задания числовых последовательностей.
- Научитесь находить члены прогрессий, вычислять суммы $n$ первых членов прогрессий.

## 15. Числовые последовательности

Часто в повседневной жизни встречаются объекты, с которыми удобно обращаться, если их предварительно пронумеровать. Например, номера имеют месяцы и кварталы года, дни недели, подъезды и квартиры дома, вагоны поезда, и даже каждый ученик вашего класса имеет свой порядковый номер в классном журнале.

Объекты, которые пронумерованы подряд натуральными числами 1, 2, 3, ..., $n$, ..., образуют **последовательности**.

Так, можно говорить о последовательности страниц книги, букв слова, этажей дома и т. д.

Объекты, образующие последовательность, называют **членами последовательности**. Каждый член последовательности имеет свой номер. Например, январь — это **первый член** последовательности месяцев года, число 3 — **второй член** последовательности простых чисел. Вообще, если член последовательности имеет номер $n$, то его называют **$n$-м членом последовательности**.

Если членами последовательности являются числа, то такую последовательность называют **числовой**.

Приведем примеры числовых последовательностей.

1, 2, 3, 4, 5, ... — последовательность натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... — последовательность четных чисел;

0,3; 0,33; 0,333; ... — последовательность десятичных приближений дроби $\frac{1}{3}$;

19, 38, 57, 76, 95 — последовательность двузначных чисел, кратных 19;

$-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$ — последовательность отрицательных целых чисел.

В дальнейшем мы будем рассматривать только числовые последовательности.

Последовательности бывают **конечными** и **бесконечными**. Например, последовательность четных натуральных чисел — это бесконечная последовательность, а последовательность двузначных чисел, кратных 19, — это конечная последовательность.

Для обозначения членов последовательности используют буквы с индексами:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Индекс указывает порядковый номер члена последовательности. Для обозначения самой последовательности используют запись $(a_n)$. Например, если $(p_n)$ — последовательность простых чисел, то $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $p_5=11$ и т. д.

*Последовательность считают заданной, если каждый ее член можно найти по его номеру.*

Ознакомимся с основными способами задания последовательности.

Рассмотрим последовательность, у которой первый член равен 1, а каждый следующий член на 3 больше предыдущего. Такой способ задания последовательности называют **описательным**. Его можно проиллюстрировать с помощью записи с тремя точками, выписав несколько первых членов последовательности в порядке возрастания номеров:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots .$$

Эту запись целесообразно применять тогда, когда понятно, какие числа должны быть записаны вместо трех точек.

Например, в рассматриваемой последовательности понятно, что после числа 19 должно быть записано число 22.

Если последовательность является конечной, то ее можно задать с помощью таблицы. Например, следующая таблица задает последовательность кубов однозначных натуральных чисел:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |

Последовательности можно задавать с помощью формул. Например, равенство $x_n=2^n$, где переменная $n$ принимает все натуральные значения, задает последовательность $(x_n)$ натуральных степеней числа 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots .$$

В таких случаях говорят, что последовательность задана с помощью **формулы $n$-го члена последовательности**.

Рассмотрим несколько примеров.

Формула $a_n=2n-1$ задает последовательность натуральных нечетных чисел:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \dots\ .$$

Формула $y_n=(-1)^n$ задает последовательность $(y_n)$, в которой все члены с нечетными номерами равны $-1$, а с четными номерами равны 1:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots\ .$$

Формула $c_n=7$ задает последовательность $(c_n)$, все члены которой равны числу 7:

$$7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \dots\ .$$

Приведенные способы задания последовательностей помогают проследить связь между понятиями «функция» и «последовательность».

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, областью определения которой является множество натуральных чисел или множество $n$ первых натуральных чисел. Тогда функция $f$ задает бесконечную последовательность $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... или конечную последовательность $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$.

Например, если функция $f$, областью определения которой является множество натуральных чисел, задана формулой $f(x)=x^2$, то эта функция задает последовательность квадратов натуральных чисел:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \dots\ .$$

Нередко последовательность задают правилом, которое позволяет найти следующий член, зная предыдущий.

Рассмотрим последовательность $(a_n)$, первый член которой равен 1, а каждый следующий член последовательности в 3 раза больше предыдущего. Имеем:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \dots\ .$$

Эту же последовательность также можно определить такими условиями:

$$a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n.$$

Эти равенства указывают первый член последовательности и правило, с помощью которого по каждому члену последовательности можно найти следующий за ним член:

$$a_1=1,$$
$$a_2=3a_1=3,$$
$$a_3=3a_2=9,$$
$$a_4=3a_3=27,$$
и т. д.

Формулу, выражающую член последовательности через один или несколько предыдущих членов, называют **рекуррентной формулой** (от лат. *recurro* — «возвращаться»). В приведенном примере это формула $a_{n+1}=3a_n$. Условия, определяющие первый или несколько первых членов, называют **начальными условиями**. В рассматриваемом примере начальное условие — это равенство $a_1=1$.

Способ задания последовательности с помощью начальных условий и рекуррентной формулы называют **рекуррентным способом** задания последовательности.

При рекуррентном способе задания последовательности первый или несколько первых членов последовательности заданы, а все остальные вычисляют друг за другом. С этой точки зрения способ задания последовательности формулой $n$-го члена кажется более удобным: с его помощью можно сразу найти нужный член последовательности, зная лишь его номер.

**ПРИМЕР** Последовательность $(c_n)$ задана формулой $n$-го члена $c_n=37-3n$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 19; 2) −7? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

*Решение.* 1) Если число 19 является членом данной последовательности, то существует такое натуральное значение $n$, при котором выполняется равенство $37-3n=19$. Отсюда $3n=18$; $n=6$. Следовательно, число 19 является шестым членом последовательности $(c_n)$.

2) Имеем: $37-3n=-7$; $3n=44$; $n=14\frac{2}{3}$. Поскольку число $14\frac{2}{3}$ не является натуральным, то число −7 не является членом данной последовательности.

*Ответ*: 1) Да, $n=6$; 2) нет. ◀

?

1. Что образуют объекты, которые пронумерованы подряд натуральными числами?
2. Как называют объекты, образующие последовательность?
3. Как называют член последовательности, имеющий номер $n$?
4. Какую последовательность называют числовой?
5. В каком случае последовательность считают заданной?
6. Какие способы задания последовательности вы знаете?
7. Поясните, что такое формула $n$-го члена последовательности.
8. Какова связь между понятиями «функция» и «последовательность»?
9. Поясните, что такое рекуррентная формула.

## УПРАЖНЕНИЯ

**15.1.°** Запишите в порядке возрастания пять первых членов последовательности:

1) двузначных чисел, кратных числу 4;
2) неправильных обыкновенных дробей с числителем 11;
3) натуральных чисел, дающих при делении на 8 остаток 5.

Укажите, конечными или бесконечными являются эти последовательности.

**15.2.°** Последовательность $(a_n)$ является последовательностью трехзначных чисел, кратных числу 5, взятых в порядке возрастания. Заполните таблицу:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | | | | |

**15.3.°** Найдите четыре первых члена последовательности $(a_n)$, заданной формулой $n$-го члена:

1) $a_n = n + 4$; 2) $a_n = 4n - 3$; 3) $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$; 4) $a_n = \dfrac{2^n}{n}$.

**15.4.°** Найдите второй, седьмой и сотый члены последовательности $(b_n)$, заданной формулой $n$-го члена:

1) $b_n = \dfrac{10}{n}$; 2) $b_n = 5 - 2n$; 3) $b_n = n^2 + 2n$; 4) $b_n = (-1)^{n+1}$.

**15.5.°** Последовательность $(c_n)$ задана формулой $n$-го члена $c_n = (-1)^n \cdot 5$. Найдите:

1) $c_1$; 2) $c_8$; 3) $c_{2k}$; 4) $c_{2k+1}$; 5) $c_{k+2}$.

**15.6.°** Последовательность $(x_n)$ задана формулой $n$-го члена $x_n = 3n + 1$. Найдите:

1) $x_1$; 2) $x_7$; 3) $x_{20}$; 4) $x_{300}$; 5) $x_{k+1}$.

**15.7.°** Найдите пять первых членов последовательности $(a_n)$, если:

1) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$; 2) $a_1 = -2$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$.

**15.8.°** Найдите пять первых членов последовательности $(b_n)$, если:

1) $b_1 = 18$, $b_{n+1} = -\dfrac{b_n}{3}$; 2) $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n^2 + 2b_{n+1}$.

**15.9.•** Последовательность $(a_n)$ задана формулой $n$-го члена $a_n = 7n + 2$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 23; 2) 149; 3) 47? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

**15.10.**° Последовательность $(b_n)$ задана формулой $n$-го члена $b_n = n^2 - 4$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 5; 2) 16; 3) 77? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

**15.11.**° Сколько отрицательных членов содержит последовательность $(x_n)$, заданная формулой $n$-го члена $x_n = 6n - 50$?

**15.12.**° Найдите номер первого отрицательного члена последовательности $(y_n)$, заданной формулой $n$-го члена $y_n = 38 - 3n$.

**15.13.**•• Последовательность $(a_n)$ задана формулой $n$-го члена $a_n = n^2 - 3n - 8$. Найдите номера членов этой последовательности, которые меньше 10.

**15.14.**•• Последовательность $(b_n)$ задана формулой $n$-го члена $b_n = -n^2 + 15n - 20$. Сколько членов этой последовательности больше, чем 16?

**15.15.**•• Подберите одну из возможных формул $n$-го члена последовательности, первыми членами которой являются числа:

1) 1, 4, 9, 25, ...;
2) 5, 8, 11, 14, 17, ...;
3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;
4) 0, 2, 0, 2, 0, ... .

**15.16.**•• Подберите одну из возможных формул $n$-го члена последовательности, первыми членами которой являются числа:

1) 2, 9, 28, 65, 126, ...;
2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots$ .

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**15.17.** Сократите дробь:

1) $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{2 - 6x}$;
2) $\dfrac{5xy - 5x - 2y + 2}{10x^2 - 9x + 2}$.

**15.18.** Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{\sqrt{2 - x}}{x + 2}$;
2) $y = \dfrac{\sqrt{6 - 5x - x^2}}{x - 1}$.

**15.19.** Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной в начале координат, проходящая через точку $A\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$. Задайте эту функцию формулой.

**15.20.** Рабочий планировал за некоторое время изготовить 160 деталей. Однако он закончил работу на 3 ч раньше, чем планировал, так как изготавливал на 12 деталей в час больше запланированного. Сколько деталей в час изготавливал рабочий?

**15.21.** Морская вода содержит 5 % соли. Сколько пресной воды надо добавить к 40 кг морской воды, чтобы концентрация соли составила 2 %?

**15.22.** За первый день мальчик прочел 25 % всей книги, за второй — 72 % оставшегося количества страниц, а за третий — остальные 84 страницы. Сколько страниц в книге?

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**15.23.** Рассматриваются квадратичные функции $y=x^2+px+q$, для которых $p+q=5$. Докажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.

## О кроликах, подсолнухах, сосновых шишках и «золотом сечении»

Рассмотрим последовательность $(u_n)$, заданную рекуррентно такими соотношениями:

$$u_1=u_2=1, \quad u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

Запишем несколько ее первых членов:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots\ .$$

Члены этой последовательности называют **числами Фибоначчи**. Такое название объясняется тем, что итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи), решая популярную в XII в. задачу о численности потомства пары кроликов, первым обратил внимание на замечательные свойства этой последовательности. В этой задаче численность потомства кроликов увеличивается так: каждая взрослая пара кроликов ежемесячно приносит пару крольчат, а те через месяц также начинают приносить потомство. На рисунке 15.1 количество пар кроликов соответствует последовательности чисел Фибоначчи.

**Леонардо Пизанский**
**(Фибоначчи)**
(12–13 ст.)

Итальянский математик. Путешествуя по странам Востока, ознакомился с достижениями арабских математиков и способствовал распространению этих знаний в Европе. Его основные труды: «Liber Abaci» (1202) — трактат об арифметике и алгебре, «Practica Geometriae» (1220) заложили основы применения алгебраических методов в геометрии.

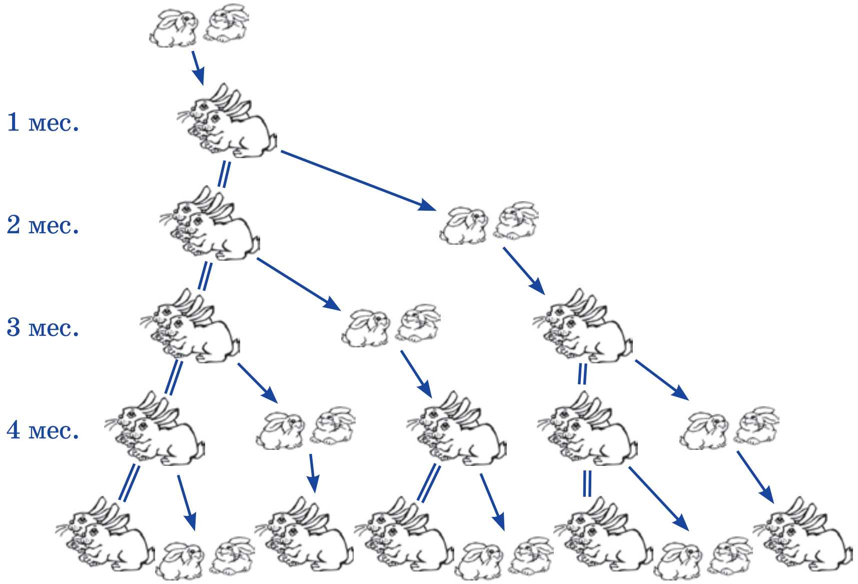



**Рис. 15.1**

Числа Фибоначчи можно встретить в различных ситуациях. Представьте себе, что вы идете по дорожке, вымощенной квадратными плитками в один ряд, наступая каждый раз на следующую плитку или через одну. Тогда количество способов пройти дорожку из $n$ плиток равно $n$-му члену последовательности Фибоначчи (проверьте это самостоятельно, например для случая $n=8$).

Если посмотреть на семена в головке подсолнуха или ромашки, то можно увидеть, что зернышки расположены в виде двух семейств спиралей, закручивающихся в противоположных направлениях. Количества спиралей в этих семействах являются соседними членами последовательности Фибоначчи. Как правило, для подсолнуха эти числа равны 34 и 55, однако встречаются и гиганты с 89 и 144 спиралями. Подобное свойство[1] можно обнаружить в структуре сосновых шишек. То же явление наблюдается и на плодах ананаса, где спиралей обычно бывает 8 и 13.

Если в последовательности Фибоначчи для каждого натурального $n$ вычислить отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, то получим последовательность

1; 2; 1,5; 1,(6); 1,6; 1,625; 1,(615384); 1,61(904761); ... .

[1] В ботанике такое сочетание двух семейств спиралей называют филлотаксисом.

Эта последовательность обладает таким свойством: с возрастанием номеров ее члены все меньше и меньше отличаются от числа $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618.$

Еще в давние времена с этим числом люди связывали свои представления о красоте и гармонии. Греческие скульпторы хорошо знали о соответствии правильных пропорций человеческого тела этому магическому числу. И не зря античные зодчие использовали его в своих бессмертных творениях. Так, отношение длины Парфенона[1] к его высоте приближенно равно 1,618. Гений эпохи Возрождения Леонардо да Винчи считал, что среди многих отношений, которые использует Творец, существует одно, единственное и неповторимое. Именно его он назвал «золотым сечением».

Французский ученый Жак Бине (1786–1856) указал формулу $n$-го члена последовательности Фибоначчи:

$$u_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Трудно поверить, что эта формула задает натуральные числа. Тем не менее это так.

## 16. Арифметическая прогрессия

Рассмотрим такие последовательности:

$$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ \ldots;$$
$$1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ \ldots;$$
$$3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5,\ -7,\ \ldots\ .$$

Они обладают следующей характерной особенностью: *каждый следующий член последовательности получен в результате*

[1] Парфенон — храм в Афинах, построенный в V в. до н. э.

*прибавления к предыдущему одного и того же числа*. Для первой последовательности это число равно 5, для второй это число равно 0,5, для третьей это число равно −2.

С подобными последовательностями людям приходилось иметь дело еще в древние времена, когда они считали предметы парами, пятерками, десятками, дюжинами и т. д. Такие последовательности называют **арифметическими прогрессиями** (от лат. *progressio* — «движение вперед»).

**Определение. Арифметической прогрессией называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.**

Число, равное разности последующего и предыдущего членов последовательности, называют **разностью арифметической прогрессии** и обозначают буквой $d$ (первой буквой латинского слова *differentia* — разность).

Итак, если $(a_n)$ — арифметическая прогрессия с разностью $d$, то

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots,$$

то есть для любого натурального $n$ выполняется равенство $a_{n+1} - a_n = d$. Отсюда

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Следовательно, арифметическую прогрессию можно задать рекуррентно:

$$\boxed{\boldsymbol{a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d}}$$

Таким образом, *чтобы задать арифметическую прогрессию, надо указать ее первый член и разность*.

Приведем несколько примеров.

Если $a_1 = 2$ и $d = 5$, то получим арифметическую прогрессию, приведенную в начале пункта:

$$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ \ldots\ .$$

Если $a_1 = 1$ и $d = 2$, то получим арифметическую прогрессию — последовательность нечетных чисел:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots\ .$$

Мы привели примеры арифметических прогрессий, у которых разность является положительным числом. Однако разность может быть отрицательным числом и даже нулем. Так, последовательность 5, 5, 5, 5, ..., все члены которой равны между собой, является арифметической прогрессией, у которой $a_1 = 5$, $d = 0$.

Покажем, как можно задать арифметическую прогрессию с помощью формулы $n$-го члена.

Из определения арифметической прогрессии $(a_n)$ следует:

$$a_2 = a_1 + d;$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + d \cdot 2;$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + d \cdot 2) + d = a_1 + d \cdot 3;$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + d \cdot 3) + d = a_1 + d \cdot 4.$$

Эти примеры помогают заметить такую закономерность: чтобы найти некоторый член арифметической прогрессии, можно к первому члену прибавить произведение разности $d$ и числа, на 1 меньшего, чем номер искомого члена. Отсюда, например, $a_6 = a_1 + d \cdot 5$, $a_7 = a_1 + d \cdot 6$, и вообще

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 + d\,(n - 1)}}$$

Записанное равенство называют **формулой *n*-го члена арифметической прогрессии.**

Установим важное свойство членов арифметической прогрессии $(a_n)$.

Имеем:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2, \text{ отсюда } 2a_2 = a_1 + a_3;\ a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}.$$

$$a_3 - a_2 = a_4 - a_3, \text{ отсюда } 2a_3 = a_2 + a_4;\ a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}.$$

Вообще, для любого натурального $n$, большего 1, можно записать: $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, откуда

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}}$$

***Любой член арифметической прогрессии, кроме первого (и последнего, если прогрессия конечна), равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов.***

**ПРИМЕР** Докажите, что последовательность $(a_n)$, заданная формулой $n$-го члена $a_n = 9n - 2$, является арифметической прогрессией.

*Решение.* Рассмотрим разность двух произвольных последовательных членов последовательности:

$$a_{n+1} - a_n = 9(n+1) - 2 - (9n - 2) = 9n + 9 - 2 - 9n + 2 = 9.$$

Следовательно, при любом натуральном $n$ выполняется равенство $a_{n+1} = a_n + 9$, то есть каждый член данной последовательности, начиная со второго, равен предыдущему члену, к которому прибавлено одно и то же число 9. Таким образом, данная последовательность является арифметической прогрессией. ◀

1. Какую последовательность называют арифметической прогрессией?
2. Какое число называют разностью арифметической прогрессии? Как обозначают это число?
3. Что надо указать, чтобы задать арифметическую прогрессию?
4. Как можно задать арифметическую прогрессию рекуррентно?
5. Какой вид имеет формула $n$-го члена арифметической прогрессии?
6. Как связаны между собой любой член арифметической прогрессии и соседние с ним члены?

## УПРАЖНЕНИЯ

**16.1.°** Среди данных последовательностей укажите арифметические прогрессии:
1) 3, −6, 12, −24; 3) 5, 10, 5, 10; 5) −5, −3, −1, 1;
2) 4, 8, 12, 16; 4) 42, 39, 36, 33; 6) 1,2; 1,3; 1,5; 1,6.

**16.2.°** Является ли арифметической прогрессией последовательность (в случае утвердительного ответа укажите разность прогрессии):
1) 24, 22, 20, 18; 2) 16, 17, 19, 23; 3) −3, 2, 7, 12?

**16.3.°** Найдите четыре первых члена арифметической прогрессии, первый член которой равен 1,2, а разность равна −0,3.

**16.4.°** Первый член арифметической прогрессии равен −7,4, а разность равна 1,8. Найдите пять первых членов прогрессии.

**16.5.°** Первый член арифметической прогрессии $(a_n)$ равен 4, а разность равна 0,4. Найдите:
1) $a_3$; 2) $a_{11}$; 3) $a_{32}$.

**16.6.°** Первый член арифметической прогрессии $(a_n)$ равен 17, а разность равна −2. Найдите:
1) $a_4$; 2) $a_{15}$; 3) $a_{60}$.

**16.7.°** Найдите разность и двести первый член арифметической прогрессии 2,6; 2,9; 3,2; ... .

**16.8.°** Чему равна разность арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_6=-2$, $a_7=6$?

**16.9.°** Найдите разность арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_8=3$, $a_9=-12$.

**16.10.°** Найдите разность арифметической прогрессии $(x_n)$, если $x_1=2$, $x_8=-47$.

**16.11.°** Найдите первый член арифметической прогрессии $(y_n)$, если $y_{17}=22$, а разность прогрессии $d=0{,}5$.

**16.12.**$^{\bullet}$ Найдите формулу $n$-го члена арифметической прогрессии:

1) $-5, -7, -9, -11, \ldots;$ 3) $a^2, 2a^2, 3a^2, 4a^2, \ldots;$

2) $2,\ 2\frac{1}{6},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{2},\ \ldots;$ 4) $a+3, a+1, a-1, a-3, \ldots .$

**16.13.**$^{\bullet}$ Является ли членом арифметической прогрессии $(c_n)$:

1) число 20,4, если $c_1=11{,}4$, а разность прогрессии $d=0{,}6$;

2) число 38, если $c_1=8$, а разность прогрессии $d=1{,}4$?

В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

**16.14.**$^{\bullet}$ Найдите номер члена арифметической прогрессии 8,1; 8,5; 8,9; 9,3; ..., равного 13,7.

**16.15.**$^{\bullet}$ Найдите второй член арифметической прогрессии, если первый и третий члены равны соответственно $-6$ и 12.

**16.16.**$^{\bullet}$ Восьмой и десятый члены арифметической прогрессии равны соответственно 3,5 и 2,7. Чему равен девятый член прогрессии?

**16.17.**$^{\bullet}$ Найдите первый член арифметической прогрессии $(b_n)$, если $b_5=11$, $b_{11}=-7$.

**16.18.**$^{\bullet}$ Чему равна разность арифметической прогрессии $(x_n)$, если $x_8=58$, $x_{15}=16$?

**16.19.**$^{\bullet}$ Как изменится разность конечной арифметической прогрессии, если переставить ее члены в обратном порядке?

**16.20.**$^{\bullet}$ Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия 5,2; 4,9; 4,6; ...?

**16.21.**$^{\bullet}$ Какой номер имеет первый положительный член арифметической прогрессии $-10{,}2$; $-9{,}5$; $-8{,}8$; ...?

**16.22.**$^{\bullet}$ Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 7,2; 6,6; 6; ... .

**16.23.**$^{\bullet}$ Между числами $-6$ и 3 вставьте пять таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

**16.24.**$^{\bullet}$ Какие четыре числа надо вставить между числами 4 и $-5$, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию?

**16.25.**$^{\bullet}$ Найдите первый член и разность арифметической прогрессии $(a_n)$, если:

1) $a_3+a_7=30$ и $a_6+a_{16}=60$;

2) $a_4+a_{10}=36$ и $a_5 \cdot a_{11}=340$.

**16.26.**° Найдите первый член и разность арифметической прогрессии $(a_n)$, если:

1) $a_5+a_{12}=41$ и $a_{10}+a_{14}=62$;

2) $a_7+a_{13}=-104$ и $a_2 \cdot a_6 = -240$.

**16.27.**° В каких случаях для членов арифметической прогрессии выполняется равенство $a_1a_4 = a_2^2$?

**16.28.**° Докажите, что значения выражений $(a+b)^2$, $a^2+b^2$, $(a-b)^2$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

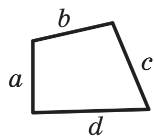



**Рис. 16.1**

**16.29.**° Верно ли утверждение: если длины сторон выпуклого четырехугольника (рис. 16.1), взятые в последовательности $a$, $b$, $d$ и $c$, образуют арифметическую прогрессию, то в этот четырехугольник можно вписать окружность?

**16.30.**° Величины углов треугольника образуют арифметическую прогрессию. Какова градусная мера среднего по величине угла треугольника?

**16.31.**° Является ли последовательность $(a_n)$ арифметической прогрессией, если она задана формулой $n$-го члена:

1) $a_n=-6n+3$; 2) $a_n=2n^2-n$; 3) $a_n=-2{,}8n$; 4) $a_n = \frac{n}{n+1}$?

В случае утвердительного ответа укажите первый член и разность прогрессии.

**16.32.**° Является ли последовательность $(a_n)$ арифметической прогрессией, если она задана формулой $n$-го члена:

1) $a_n=6+7n$; 2) $a_n = \frac{2n-1}{5}$; 3) $a_n = \frac{1}{n}+2$?

В случае утвердительного ответа укажите первый член и разность прогрессии.

**16.33.**° Из арифметической прогрессии исключили члены с нечетными номерами. Образуют ли оставшиеся члены арифметическую прогрессию?

**16.34.**° Даны две бесконечные арифметические прогрессии. Если из каждого члена одной прогрессии вычесть соответствующий член другой, то будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

**16.35.**° Если из арифметической прогрессии, разность которой не равна нулю, исключить ее члены, номера которых кратны 3, то будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

**16.36.**° Каждый член арифметической прогрессии умножили на 4. Будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

**16.37.**° Докажите, что числа, равные соответственно суммам углов треугольника, четырехугольника, пятиугольника и т. д., образуют арифметическую прогрессию.

**16.38.**° При каком значении $x$ значения выражений $x^2-4$, $5x+3$ и $3x+2$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

**16.39.**° При каком значении $y$ значения выражений $y^2+1$, $y^2+y$ и $8y-10$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

**16.40.**•• При каком значении $y$ значения выражений $y^2-2y$, $3y+5$, $4y+13$ и $2y^2-y+25$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

**16.41.**•• При каком значении $x$ значения выражений $3x+4$, $2x+3$, $x^2$ и $2x^2+x$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

**16.42.*** Докажите, что если числа $a$, $b$ и $c$ — три последовательных члена арифметической прогрессии, то:

1) $a^2+8bc=(2b+c)^2$;

2) $\frac{2}{9}(a+b+c)^3 = a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$.

**16.43.*** Докажите, что если положительные числа $a$, $b$ и $c$ — три последовательных члена арифметической прогрессии, то $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$.

**16.44.*** Докажите, что если значения выражений $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ и $\frac{1}{a+b}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то значения выражений $a^2$, $b^2$ и $c^2$ также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**16.45.** Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2-3y^2=46, \\ x+y=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-2y^2=-4, \\ x^2+2y^2=12. \end{cases}$

**16.46.** Какое из данных неравенств равносильно неравенству $-5x < 10$:

1) $5x < -10$; 2) $10x > -20$; 3) $10x < -20$; 4) $5x > 10$?

**16.47.** Чему равно наименьшее целое решение неравенства

$$3(x-1)^2 - 3x(x-5) > -40?$$

**16.48.** Упростите выражение:

1) $\left(2\sqrt{6} - 2\sqrt{54} + 6\sqrt{96}\right) \cdot 2\sqrt{3}$; 2) $\left(5\sqrt{20} - 6\sqrt{10} + 2\sqrt{40}\right) \cdot 3\sqrt{5}$.

**16.49.** Докажите, что если все цифры трехзначного числа одинаковы, то это число кратно 37.

**16.50.** Рабочий должен был за определенный срок изготовить 216 деталей. Первые три дня он выполнял установленную ежедневную норму, а потом стал изготавливать ежедневно на 8 деталей сверх нормы. За один день до конца срока было изготовлено 232 детали. Сколько деталей в день должен был изготавливать рабочий в соответствии с нормой?

**16.51.** (*Задача Безу*[1]) Некто купил коня и через некоторое время продал его за 24 пистоля. При продаже он потерял столько процентов, сколько стоил ему конь. Спрашивается: за какую сумму он купил коня?

**16.52.** Внедрение новых технологий позволило уменьшить время на изготовление одной детали с 12 мин до 10 мин. На сколько процентов будет выполняться при этом план, если норму времени не изменят?

## 17. Сумма $n$ первых членов арифметической прогрессии

Рассмотрим конечную арифметическую прогрессию $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_{n-2}$, $a_{n-1}$, $a_n$.

Сумму членов этой прогрессии обозначим $S_n$.

Имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (*)$$

Выведем формулу для нахождения этой суммы.

[1] Безу́ Этьен (1730–1783) — французский математик, основные работы которого лежат в области высшей алгебры. Преподавал математику в училище гардемаринов, Королевском артиллерийском корпусе. Автор шеститомного труда «Курс математики».

Вначале рассмотрим задачу, решение которой подскажет, как вывести искомую формулу.

Рассмотрим арифметическую прогрессию

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 98,\ 99,\ 100$$

и найдем сумму ее членов.

Запишем искомую сумму двумя способами и сложим полученные равенства:

$$\begin{array}{rccccccccccccc} & S_{100} = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ + & S_{100} = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S_{100} = & \multicolumn{13}{c}{\underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101}_{100\ \text{слагаемых}}} \end{array}$$

Имеем: $2S_{100} = 101 \cdot 100$; $S_{100} = 5050$.

Рассказывают, что выдающийся немецкий математик Карл Фридрих Гаусс придумал такое решение в возрасте 5 лет.

Воспользуемся описанным приемом для нахождения суммы (*).

Запишем сумму $S_n$ двумя способами. Вначале запишем сумму, первое слагаемое которой равно $a_1$, а каждое следующее слагаемое получено из предыдущего прибавлением разности $d$. Затем запишем сумму, первое слагаемое которой равно $a_n$, а каждое следующее слагаемое получено из предыдущего вычитанием разности $d$. Имеем:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d),$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d).$$

Сложив эти равенства, получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Выражение, записанное в правой части последнего равенства, является суммой $n$ слагаемых, каждое из которых равно $a_1 + a_n$.

Тогда $2S_n = (a_1 + a_n)\,n$, то есть

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

**Карл Фридрих Гаусс**
(1777–1855)

Полученное равенство называют **формулой суммы $n$ первых членов арифметической прогрессии.**

Подставив в эту формулу вместо $a_n$ выражение $a_1 + d(n-1)$, получим:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Отсюда

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n}$$

Последней формулой удобно пользоваться тогда, когда заданы первый член и разность прогрессии.

**ПРИМЕР 1** Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 6.

*Решение.* Данные числа образуют арифметическую прогрессию, первый член которой $a_1 = 102$, а разность $d = 6$. Тогда $a_n = 102 + 6(n-1) = 6n + 96$. Найдем количество членов этой прогрессии. Поскольку $a_n < 1000$, то искомое количество — это наибольшее натуральное решение неравенства $6n + 96 < 1000$. Имеем:

$$6n < 904;$$

$$n < 150\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $n = 150$. Теперь найдем искомую сумму:

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6 \cdot (150 - 1)}{2} \cdot 150 = 82\,350.$$

*Ответ*: 82 350. ◄

**ПРИМЕР 2** Сумма семидесяти пяти первых членов арифметической прогрессии равна 450. Найдите тридцать восьмой член прогрессии.

*Решение.* Пусть первый член прогрессии и ее разность равны $a_1$ и $d$ соответственно. Тогда можно записать:

$$S_{75} = \frac{2a_1 + 74d}{2} \cdot 75 = 75(a_1 + 37d) = 450.$$

Поскольку $a_{38} = a_1 + 37d$, то искомый член равен

$$a_{38} = 450 : 75 = 6.$$

*Ответ*: 6. ◄

?

1. Как найти сумму $n$ первых членов арифметической прогрессии, если известны ее первый и последний члены?
2. Как найти сумму $n$ первых членов арифметической прогрессии, если известны ее первый член и разность?

## УПРАЖНЕНИЯ

**17.1.**° Чему равна сумма семи первых членов арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_1=9$ и $a_7=15$?

**17.2.**° Чему равна сумма шести первых членов арифметической прогрессии $(b_n)$, если $b_1=19$ и $b_6=14$?

**17.3.**° Найдите сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, у которой $a_1=-6$ и $d=4$.

**17.4.**° Вычислите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии $-8, -6, -4, \ldots$ .

**17.5.**° Места в секторе цирка расположены так, что в первом ряду 6 мест, а в каждом следующем на 3 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в секторе, если в нем 16 рядов?

**17.6.**° Дмитрий взял в библиотеке книгу. За первый день он прочитал 40 страниц, а за каждый следующий день читал на 10 страниц больше, чем за предыдущий. Сколько страниц в книге, если Дмитрий прочитал ее за 7 дней?

**17.7.**° Арифметическая прогрессия $(a_n)$ задана формулой $n$-го члена $a_n=-4n+1$. Найдите сумму тридцати двух первых членов прогрессии.

**17.8.**° Арифметическая прогрессия $(c_n)$ задана формулой $n$-го члена $c_n=5n-2$. Найдите сумму двадцати шести первых членов прогрессии.

**17.9.**• Найдите сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии $(a_n)$, если:

1) $a_1=6$, $a_9=22$;     2) $a_6=49$, $a_{20}=7$.

**17.10.**• Чему равна сумма сорока первых членов арифметической прогрессии $(x_n)$, если $x_8=-14$, $x_{30}=-3$?

**17.11.**• Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только количество целых часов от 1 до 12?

**17.12.**• Найдите сумму двадцати пяти первых членов арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_{10}=44$, а разность прогрессии $d=4$.

**17.13.**• Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_6+a_8-a_{14}=-17$ и $a_5+a_{22}=101$.

**17.14.**• Найдите сумму тридцати трех первых членов арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_3+a_5+a_{13}=33$ и $a_{15}-a_8-a_{10}=-1$.

**17.15.**• При любом $n$ сумму $n$ первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 3n^2 + 5n$. Найдите три первых члена этой прогрессии.

**17.16.**• При любом $n$ сумму $n$ первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 9n - 2n^2$. Найдите седьмой член этой прогрессии.

**17.17.**• (*Старинная египетская задача*) Сто мер хлеба надо разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше, чем трое последних. Сколько надо дать каждому?

**17.18.**• Чему равна сумма $n$ первых:
1) натуральных чисел; 2) нечетных чисел?

**17.19.**• Чему равна сумма $n$ первых четных чисел?

**17.20.**•• Какое натуральное число равно сумме всех предшествующих ему натуральных чисел?

**17.21.**•• Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии −6,2; −5,9; −5,6; ... .

**17.22.**•• Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 8,4; 7,8; 7,2; ... .

**17.23.**•• Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 5 и не бо́льших 240.

**17.24.**•• Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и меньших 130.

**17.25.**•• Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 12 и меньших 200.

**17.26.**•• Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 8.

**17.27.**•• Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 7.

**17.28.**•• Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен 8,5, а сумма шестнадцати первых членов составляет 172.

**17.29.**•• Найдите первый член арифметической прогрессии, разность которой равна −4, а сумма девяти первых членов составляет −54.

**17.30.**•• Первый член арифметической прогрессии равен −9, а разность равна 6. Сколько надо взять первых членов прогрессии, чтобы их сумма была равна 960?

**17.31.**•• Какое наименьшее количество последовательных нечетных натуральных чисел, начиная с числа 7, надо сложить, чтобы полученная сумма была больше 315?

**17.32.**•• Может ли сумма каких-либо пяти последовательных членов арифметической прогрессии 3, 7, 11, ... быть равной 135? В случае утвердительного ответа найдите эти члены.

**17.33.**•• Может ли сумма каких-либо четырех последовательных членов арифметической прогрессии 2, 8, 14, ... быть равной 176? В случае утвердительного ответа найдите эти члены.

**17.34.**•• При свободном падении тело за первую секунду проходит 4,9 м, а за каждую следующую — на 9,8 м больше, чем за предыдущую, если не учитывать сопротивление воздуха. Найдите время падения тела с высоты 490 м (сопротивлением воздуха пренебречь).

**17.35.**•• Сумма нечетных номеров страниц книги является нечетным числом, которое больше 400 и меньше 500. Сколько страниц в книге?

**17.36.**•• Найдите сумму членов арифметической прогрессии с восьмого по двадцать шестой включительно, если первый член прогрессии равен 24, а разность прогрессии равна −8.

**17.37.**•• Найдите сумму членов арифметической прогрессии $(x_n)$ с десятого по двадцать пятый включительно, если $x_1 = -3$ и $x_{11} = 12$.

**17.38.**•• Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна 39, а сумма первых четырнадцати членов равна −77. Найдите первый член и разность прогрессии.

**17.39.**•• Первый член арифметической прогрессии равен 100, а сумма шести первых членов в 5 раз больше суммы следующих шести членов. Чему равна разность прогрессии?

**17.40.**•• Разность арифметической прогрессии равна 28, а сумма пяти первых членов в 4 раза меньше суммы следующих шести членов. Чему равен первый член прогрессии?

**17.41.**•• Двенадцатый член арифметической прогрессии равен 30. Найдите сумму двадцати трех первых членов прогрессии.

**17.42.**•• Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_5 + a_{10} + a_{12} + a_{15} = 50$.

**17.43.**•• Решите уравнение:

1) $7 + 13 + 19 + \ldots + (6n + 1) = 480$, где $n$ — натуральное число;

2) $5 + 8 + 11 + \ldots + x = 124$, где $x$ — натуральное число.

**17.44.**•• Решите уравнение:

1) $11+19+27+\ldots+(8n+3)=470$, где $n$ — натуральное число;
2) $1+5+9+\ldots+x=630$, где $x$ — натуральное число.

**17.45.**•• Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, у которой среднее арифметическое $n$ первых членов при любом $n$ равно их количеству.

**17.46.**•• (*Задача Гипсикла Александрийского*[1]) Докажите, что в арифметической прогрессии с четным количеством членов, состоящей из целых чисел, сумма второй половины больше суммы первой половины на число, кратное квадрату половины количества членов.

**17.47.**•• Докажите, что если сумма $n$ первых членов последовательности вычисляется по формуле $S_n=n^2-3n$, то эта последовательность является арифметической прогрессией. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

**17.48.**•• Найдите сумму всех двузначных чисел, которые не делятся нацело ни на 3, ни на 5.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**17.49.** Постройте график функции:

1) $y=x^2-4x+4$;  2) $y=2x^2+8x+8$.

Пользуясь построенным графиком, найдите область значений, промежутки возрастания и убывания функции.

**17.50.** Вычислите:

1) $\dfrac{3^{49}}{9^{25}}$;  2) $\dfrac{4^8}{8^4}$;  3) $\dfrac{5^4\cdot 11^7}{55^6}$;  4) $\dfrac{12^5}{18^3}$.

**17.51.** При каком значении $k$ графики функций $y=kx-3$ и $y=x^2$ пересекаются в точке, абсцисса которой равна $-2$?

**17.52.** Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{bc}}$;  2) $\dfrac{d-49}{d+12\sqrt{d}+36}\cdot\dfrac{4\sqrt{d}+24}{3\sqrt{d}+21}$.

**17.53.** Велосипедист за каждую минуту проезжает на 600 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на дорогу в 120 км он тратит на 3 ч больше, чем мотоциклист. Найдите скорость велосипедиста.

---

[1] Гипсикл Александрийский (II в. до н. э.) — древнегреческий ученый, автор XIV книги «Начал» Евклида.

**17.54.** Одна вышивальщица может вышить набор салфеток за 6 ч, а другая — за 4 ч. Если же они будут работать вместе, то производительность труда каждой из них повысится на 20 %. За какое время они вышьют этот набор, работая вместе?

**17.55.** Смешали 30-процентный раствор соляной кислоты с 10-процентным раствором и получили 800 г 15-процентного раствора. Сколько граммов каждого раствора взяли для этого?

### УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**17.56.** Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=x^2+y^2+2.$$

## 18. Геометрическая прогрессия

Рассмотрим последовательности:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \ldots,$$

$$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots,$$

$$5;\ -0{,}5;\ 0{,}05;\ -0{,}005;\ 0{,}0005;\ \ldots\ .$$

Они обладают следующей характерной особенностью: *каждый следующий член последовательности получен в результате умножения предыдущего члена на одно и то же число*. Для первой последовательности это число равно 3, для второй это число равно $\frac{1}{2}$, для третьей это число равно $-0{,}1$.

С подобными последовательностями можно встретиться, например, при изучении роста колонии бактерий; при ежемесячной оценке суммы денег на счете, положенных в банк под проценты. Такие последовательности называют **геометрическими прогрессиями**.

**Определение. Геометрической прогрессией называют последовательность с отличным от нуля первым членом, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же отличное от нуля число.**

Число, равное отношению последующего и предыдущего членов последовательности, называют **знаменателем геометрической прогрессии** и обозначают буквой $q$ (первой буквой французского слова *quotient* — «частное»).

Итак, если $(b_n)$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q$, то

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \ldots,$$

то есть для любого натурального $n$ выполняется равенство $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Отсюда получаем рекуррентную формулу $b_{n+1} = b_n q$.

Следовательно, геометрическую прогрессию можно задать рекуррентно:

$$\boxed{\boldsymbol{b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n q}}$$

Таким образом, *чтобы задать геометрическую прогрессию, надо указать ее первый член и знаменатель.*

Приведем несколько примеров.

Если $b_1 = 1$ и $q = 3$, то получим геометрическую прогрессию, приведенную в начале пункта:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \ldots\ .$$

Если $b_1 = 2$ и $q = 2$, то получим геометрическую прогрессию — последовательность натуральных степеней числа 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ \ldots\ .$$

Заметим, что геометрическая прогрессия со знаменателем, равным 1, представляет собой последовательность, все члены которой равны. Так, последовательность 5, 5, 5, 5, ... является геометрической прогрессией, у которой $b_1 = 5$, $q = 1$. Вместе с тем эту последовательность можно рассматривать как арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 5$, $d = 0$.

Вообще, любая последовательность, все члены которой равны между собой и отличны от нуля, является одновременно и арифметической, и геометрической прогрессией. Последовательность 0, 0, 0, 0, ..., все члены которой равны нулю, является только арифметической прогрессией.

Покажем, как можно задать геометрическую прогрессию с помощью формулы $n$-го члена.

Из определения геометрической прогрессии следует:

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 q) \cdot q = b_1 q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 q^2) \cdot q = b_1 q^3;$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3) \cdot q = b_1 q^4.$$

Эти примеры помогают подметить такую закономерность: чтобы найти некоторый член геометрической прогрессии, можно первый член умножить на степень с основанием $q$ и показателем, на 1 меньшим, чем номер искомого члена. Отсюда, например, $b_6 = b_1q^5$, $b_7 = b_1q^6$, и вообще

$$\boxed{b_n = b_1q^{n-1}}$$

Записанное равенство называют **формулой $n$-го члена геометрической прогрессии.**

Установим важное свойство членов геометрической прогрессии $(b_n)$.

Имеем:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}, \text{ отсюда } b_2^2 = b_1 \cdot b_3;$$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3}, \text{ отсюда } b_3^2 = b_2 \cdot b_4.$$

Вообще, для любого натурального $n$, большего 1, можно записать: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Отсюда

$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

***Квадрат любого члена геометрической прогрессии, кроме первого (и последнего, если прогрессия конечна), равен произведению двух соседних с ним членов.***

Если все члены геометрической прогрессии $(b_n)$ положительны, то равенство $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ можно переписать так:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Следовательно, каждый член такой последовательности, кроме первого (и последнего, если последовательность конечна), является средним геометрическим двух соседних с ним членов.

Рассмотрим две последовательности.

Арифметическая прогрессия $(a_n)$, у которой $a_1 = 1$, $d = 2$:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \ldots .$$

Геометрическая прогрессия $(b_n)$, у которой $b_1 = 1$, $q = 2$:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots .$$

У этих прогрессий первые члены равны. Обе эти последовательности конструируются с помощью одного и того же числа 2 ($d = q = 2$). Вместе с тем, сравнивая соответствующие члены этих последовательностей, мы видим, что геометрическая прогрессия «растет» гораздо быстрее, чем арифметическая. Например, в арифметической прогрессии $a_{20}=1+2\cdot 19=39$, в геометрической $b_{20}=1\cdot 2^{19}=524\,288$.

Вы знаете, что бактерии размножаются делением: одна бактерия делится на две. Теперь становится понятно, почему так быстро возрастает численность колонии бактерий, если их поместить в благоприятную среду.

Возможно, с этим примером связано то, что нередко в повседневной жизни, когда хотят подчеркнуть быстрый рост какой-либо величины, говорят «растет в геометрической прогрессии».

**ПРИМЕР 1** В геометрической прогрессии $(b_n)$ со знаменателем $q=\frac{1}{3}$ найдите $b_1$, если $b_6=\frac{5}{81}$.

*Решение.* Поскольку $b_6=b_1q^5$, то

$$b_1=b_6:q^5=\frac{5}{81}:\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{5}{3^4}\cdot 3^5=5\cdot 3=15.$$

*Ответ*: 15. ◀

**ПРИМЕР 2** Найдите четвертый член и знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_3=36$, $b_5=49$.

*Решение.* По свойству геометрической прогрессии $b_4^2=b_3b_5$, отсюда $b_4=\sqrt{b_3b_5}=\sqrt{36\cdot 49}=6\cdot 7=42$ или $b_4=-\sqrt{b_3b_5}=-42$.

Если $b_4=42$, то знаменатель прогрессии $q=b_4:b_3=\frac{42}{36}=\frac{7}{6}$; если $b_4=-42$, то $q=-\frac{7}{6}$.

*Ответ*: $b_4=42$, $q=\frac{7}{6}$ или $b_4=-42$, $q=-\frac{7}{6}$. ◀

**ПРИМЕР 3** Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_3+b_6=504$ и $b_4-b_5+b_6=378$.

*Решение.* Пусть $q$ — знаменатель данной прогрессии. Имеем систему двух уравнений с двумя переменными $b_1$ и $q$:

$$\begin{cases} b_1q^2+b_1q^5=504, \\ b_1q^3-b_1q^4+b_1q^5=378. \end{cases}$$

Поделим почленно левые и правые части уравнений системы:

$$\frac{b_1q^2(1+q^3)}{b_1q^3(1-q+q^2)}=\frac{504}{378}.$$

Далее получаем:

$$\frac{b_1q^2(1+q)(1-q+q^2)}{b_1q^3(1-q+q^2)}=\frac{4}{3};$$

$$\frac{1+q}{q}=\frac{4}{3};$$

$$4q=3+3q;$$

$$q=3.$$

Подставив значение $q$ в первое уравнение системы, получаем: $9b_1+243b_1=504$; отсюда $252b_1=504$; $b_1=2$.

*Ответ*: $b_1=2$, $q=3$. ◄

**ПРИМЕР 4** При каком значении $x$ значения выражений $3x$, $7-x$ и $5x+7$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите эти числа.

*Решение*. Если значения выражений $3x$, $7-x$ и $5x+7$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, то должно выполняться равенство $(7-x)^2=3x(5x+7)$.

Далее получаем:

$$49-14x+x^2=15x^2+21x;$$

$$14x^2+35x-49=0;$$

$$2x^2+5x-7=0;$$

$$x=1 \text{ или } x=-\frac{7}{2}.$$

Если $x=1$, то получаем такую геометрическую прогрессию: 3, 6, 12.

Если $x=-\frac{7}{2}$, то получаем такую геометрическую прогрессию: $-\frac{21}{2}$, $\frac{21}{2}$, $-\frac{21}{2}$.

*Ответ*: при $x=1$ имеем: 3, 6, 12; при $x=-\frac{7}{2}$ имеем: $-\frac{21}{2}$, $\frac{21}{2}$, $-\frac{21}{2}$. ◄

Рассмотрим прикладную задачу, которую часто приходится решать банковским работникам, а также тем, кто хранит деньги в банке под проценты.

**ПРИМЕР 5** Пусть вкладчик положил в банк 100 000 грн под 10 % годовых. Какая сумма будет на его счете через 7 лет при условии, что вкладчик в течение этого срока не снимает деньги со счета?

*Решение*. Пусть $a_0$ — первоначальный капитал вкладчика, то есть $a_0 = 100\ 000$ грн.

Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_7$ количество денег на счете соответственно в конце первого, второго, ..., седьмого годов. Очевидно, что последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_7$ является геометрической прогрессией, знаменатель которой равен 110 %, то есть 1,1.

Тогда

$$a_7 = a_0 \cdot 1{,}1^7 = 100\,000 \cdot 1{,}1^7 = 194\,871{,}71 \text{ (грн).}$$

*Ответ*: 194 871,71 грн. ◀

Аналогично решают эту задачу в общем виде, когда первоначальный капитал, равный $a_0$, положили в банк под $p$ % годовых. Тогда в конце $n$-го года будем иметь:

$$\boxed{a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Полученную формулу называют **формулой сложных процентов**.

?

1. Какую последовательность называют геометрической прогрессией?
2. Какое число называют знаменателем геометрической прогрессии?
3. Какой вид имеет формула $n$-го члена геометрической прогрессии?
4. Как связаны между собой три последовательных члена геометрической прогрессии?
5. Какой вид имеет формула сложных процентов? Поясните ее.

## УПРАЖНЕНИЯ

**18.1.°** Среди данных последовательностей укажите геометрические прогрессии, первый член и знаменатель каждой из них:

1) 2, 6, 18, 36;
2) 4, 8, 16, 32;
3) 10, 20, 30, 40;
4) 81, 27, 9, 3;
5) 2, −2, 2, −2;
6) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2$;
7) −9, −9, −9, −9;
8) 1, 2, 3, 5;
9) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4$.

**18.2.°** Шестой член геометрической прогрессии $(b_n)$ равен 8, а знаменатель равен −4. Найдите седьмой член прогрессии.

**18.3.°** Найдите седьмой член геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_8 = 16$, а знаменатель прогрессии $q = \frac{3}{4}$.

**18.4.°** Чему равен знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)$, если:

1) $b_1 = 6$, $b_2 = -3$; 2) $b_7 = -9$, $b_8 = 15$; 3) $b_{10} = 3\sqrt{3}$, $b_{11} = 9$?

**18.5.°** Найдите знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)$, если:

1) $b_{12}=24$, $b_{13}=4$; 2) $b_4=-\frac{2}{9}$, $b_5=\frac{4}{15}$.

**18.6.°** Чему равен первый член геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_2=12$, а знаменатель прогрессии $q=\frac{1}{3}$?

**18.7.°** Седьмой член геометрической прогрессии равен $\frac{1}{2}$, а ее знаменатель равен 4. Найдите шестой член прогрессии.

**18.8.°** Найдите четыре первых члена геометрической прогрессии $(x_n)$, если $x_1=0{,}2$, а знаменатель прогрессии $q=-5$.

**18.9.°** Первый член геометрической прогрессии равен $-\frac{1}{27}$, а знаменатель равен 3. Найдите пять первых членов прогрессии.

**18.10.°** В геометрической прогрессии $(y_n)$ первый член $y_1=64$, а знаменатель $q=-\frac{1}{2}$. Найдите: 1) $y_3$; 2) $y_6$; 3) $y_{10}$.

**18.11.°** В геометрической прогрессии $(c_n)$ первый член $c_1=9$, а знаменатель $q=-1$. Найдите: 1) $c_{21}$; 2) $c_{50}$.

**18.12.°** Первый член геометрической прогрессии $b_1=\frac{1}{125}$, а ее знаменатель $q=5$. Найдите: 1) $b_4$; 2) $b_7$.

**18.13.°** Найдите знаменатель и пятый член геометрической прогрессии $\frac{1}{216}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{6}$, ... .

**18.14.°** Найдите знаменатель и шестой член геометрической прогрессии 18, 12, 8, ... .

**18.15.°** Докажите, что если последовательность $(x_n)$ — геометрическая прогрессия, то $x_3x_{13}=x_5x_{11}$.

**18.16.°** Докажите, что если последовательность $(y_n)$ — геометрическая прогрессия, то $y_4y_{21}=y_8y_{17}$.

**18.17.°** Вкладчик положил в банк 5000 грн под 8 % годовых. Сколько денег будет на его счете через три года?

**18.18.°** Четыре года назад завод изготавливал 10 000 единиц некоторого изделия в год. Благодаря модернизации производства и повышению производительности труда достигли ежегодного прироста объемов производства на 20 %. Сколько единиц указанного изделия будет изготовлено в этом году?

**18.19.°** После двух последовательных снижений цены на 10 % канцелярский стол стал стоить 2916 грн. Найдите первоначальную цену стола.

**18.20.°** После двух последовательных повышений цены на 25 % люстра стала стоить 937 грн 50 к. Найдите первоначальную цену люстры.

**18.21.°** Население города за два года увеличилось с 40 000 жителей до 44 100. Найдите средний ежегодный процент прироста населения в этом городе.

**18.22.°** Вследствие двух последовательных снижений цены на одно и то же количество процентов цена стула снизилась с 800 грн до 578 грн. На сколько процентов каждый раз снижали цену?

**18.23.•** Выразите члены $b_8$, $b_{13}$ и $b_{60}$ геометрической прогрессии $(b_n)$ через $b_7$ и знаменатель $q$.

**18.24.•** Выразите члены $c_{18}$, $c_{36}$ и $c_{50}$ геометрической прогрессии $(c_n)$ через $c_{12}$ и знаменатель $q$.

**18.25.•** Найдите знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)$, если:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_8 = 64$; 2) $b_6 = 75$, $b_8 = 27$.

**18.26.•** Найдите первый член геометрической прогрессии $(c_n)$, если:

1) $c_4 = \frac{1}{98}$, а знаменатель $q = \frac{2}{7}$; 2) $c_6 = 100$, $c_9 = 100\ 000$.

**18.27.•** Число 486 является членом геометрической прогрессии 2, 6, 18, ... . Найдите номер этого члена.

**18.28.•** Число 96 является членом геометрической прогрессии $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, ... . Найдите номер этого члена.

**18.29.•** Какие два числа надо вставить между числами 6 и 750, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию?

**18.30.•** Какие четыре числа надо вставить между числами 0,5 и 16, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию?

**18.31.•** Последовательность $(b_n)$ задана формулой $n$-го члена $b_n = 5 \cdot 4^{n-2}$. Является ли эта последовательность геометрической прогрессией? В случае утвердительного ответа укажите ее первый член и знаменатель.

**18.32.**$^{\bullet}$ Докажите, что последовательность $(x_n)$, заданная формулой $n$-го члена $x_n = 7^{n+1}$, является геометрической прогрессией, и укажите ее первый член и знаменатель.

**18.33.**$^{\bullet}$ Последовательность $(b_n)$ является геометрической прогрессией. Найдите:

1) $b_5$, если $b_4 = 9$, $b_6 = 25$;
2) $b_{20}$, если $b_{19} = -3$, $b_{21} = -12$;
3) $b_{17}$, если $b_{16} = 2$, $b_{18} = 10$.

**18.34.**$^{\bullet}$ При каком значении переменной $x$ числа $x$, $3x$ и 18 будут последовательными членами геометрической прогрессии?

**18.35.**$^{\bullet}$ При каком значении переменной $y$ числа $-1$, $2y$ и $-8$ будут последовательными членами геометрической прогрессии?

**18.36.**$^{\bullet}$ Второй член геометрической прогрессии равен 6. Найдите произведение трех первых членов этой прогрессии.

**18.37.**$^{\bullet}$ Третий член геометрической прогрессии равен 3. Найдите произведение пяти первых членов этой прогрессии.

**18.38.**$^{\bullet}$ Докажите, что в конечной геометрической прогрессии произведение членов, равноудаленных от ее концов, равно произведению крайних членов.

**18.39.**$^{\bullet}$ В правильный треугольник со стороной $a$ последовательно вписаны треугольники так, что вершины каждого следующего треугольника являются серединами сторон предыдущего (рис. 18.1). Докажите, что периметры этих треугольников образуют геометрическую прогрессию, и запишите формулу $n$-го члена этой прогрессии.

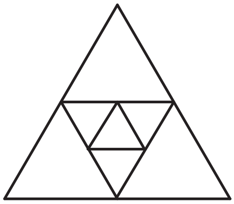


**Рис. 18.1**

**18.40.**$^{\bullet}$ Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) $2^{-n}$, $2^{-2n}$, $2^{-3n}$, $2^{-4n}$;
2) $2^n$, $2^{n^2}$, $2^{n^3}$, $2^{n^4}$;
3) $2^n$, $2^{n+1}$, $2^{n+2}$, $2^{n+3}$?

В случае утвердительного ответа укажите знаменатель прогрессии.

**18.41.**$^{\bullet}$ Последовательность $(b_n)$ является геометрической прогрессией со знаменателем $q$. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) $b_1, b_3, \ldots, b_{2n-1}$;
2) $2b_1, 2b_2, \ldots, 2b_n$;
3) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, \ldots, b_{n-1} + b_n$;
4) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}$?

В случае утвердительного ответа укажите знаменатель прогрессии.

**18.42.**• Последовательность $(b_n)$ является геометрической прогрессией со знаменателем $q$. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) $b_2, b_4, \ldots, b_{2n}$; 2) $b_1b_3, b_2b_4, b_3b_5, \ldots, b_{n-2}b_n$?

В случае утвердительного ответа укажите знаменатель прогрессии.

**18.43.**•• Между числами 80 и 5 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

**18.44.**•• Между числами 6 и 486 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

**18.45.**•• Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)$, если:

1) $b_5=3b_3$ и $b_6-b_2=48$;

2) $b_4+b_7=\frac{56}{9}$ и $b_5-b_6+b_7=\frac{14}{9}$;

3) $b_5-b_4=168$ и $b_3+b_4=-28$.

**18.46.**•• Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)$, если:

1) $b_4-b_2=30$ и $b_4-b_3=24$;

2) $b_2-b_5=78$ и $b_3+b_4+b_5=-117$.

**18.47.**•• При каком значении $x$ значения выражений $2x+1$, $x+5$ и $x+11$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

**18.48.**•• При каком значении $x$ значения выражений $x+6$, $x+2$ и $3x-4$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

**18.49.**•• Докажите, что если члены последовательности $(b_n)$ отличны от нуля и при любом натуральном $n>1$ выполняется равенство $b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, то последовательность $(b_n)$ является геометрической прогрессией.

**18.50.**•• Найдите геометрическую прогрессию, содержащую 6 членов, если сумма трех первых ее членов равна 168, а сумма трех последних равна 21.

**18.51.**•• Даны три положительных числа, образующие арифметическую прогрессию. Их сумма равна 21. Если к этим числам прибавить соответственно 2, 3 и 9, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

**18.52.**•• Даны три числа, образующие арифметическую прогрессию. Их сумма равна 30. Если из первого числа вычесть 5, из второго вычесть 4, а третье оставить без изменений, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

**18.53.**•• Даны три числа, образующие геометрическую прогрессию. Их сумма равна 65. Если из первого из этих чисел вычесть 1, второе оставить без изменений, а из третьего вычесть 19, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

**18.54.**•• Даны три числа, образующие геометрическую прогрессию. Их сумма равна 26. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 6 и 3, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**18.55.** Найдите значение выражения:

1) $\frac{7^9}{7^{10}}$; 2) $\frac{125^3}{25^4}$; 3) $\frac{32^5}{64^4}$; 4) $\frac{39^8}{3^{10}\cdot 13^7}$.

**18.56.** Преобразуйте в дробь выражение:

1) $\frac{2}{x+y}+\frac{3}{x-y}$; 2) $\frac{a+1}{a-4}+\frac{a-1}{a-6}$; 3) $\frac{c-7}{c+1}-\frac{c-3}{c-5}$.

**18.57.** Докажите тождество:

$$\left(\frac{2b}{b^3+1}:\frac{1-b}{b^2-b+1}+\frac{2}{b-1}\right)\cdot\frac{b^2-2b+1}{4}:\frac{b-1}{b+1}=\frac{1}{2}.$$

**18.58.** Докажите, что значение выражения является рациональным числом:

1) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}-3}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}+3}$; 2) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}+\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$.

**18.59.** Трое работников выкопали картошку за 3 дня, работая ежедневно по 8 ч. За сколько дней ее выкопали бы 6 работников, работая ежедневно по 6 ч, если производительность труда всех работников одинакова?

**18.60.** К сплаву меди и цинка, содержавшему меди на 12 кг больше, чем цинка, добавили 6 кг меди. В результате процентное содержание цинка в сплаве уменьшилось на 5 %. Сколько килограммов цинка и сколько килограммов меди содержал сплав сначала?

**18.61.** К сплаву магния и алюминия, содержавшему 12 кг алюминия, добавили 5 кг магния, после чего процентное содержание магния в сплаве увеличилось на 20 %. Сколько килограммов магния было в сплаве первоначально?

**18.62.** Вкладчик положил в банк 4000 грн. За первый год ему начислили некоторый процент годовых, а в следующем году банковская ставка была увеличена на 4 %. В конце второго года на счете оказалось 4664 грн. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

**18.63.** Вкладчик положил в банк 10 000 грн. За первый год ему начислили некоторый процент годовых, а в следующем году банковский процент был уменьшен на 2 %. В конце второго года на счете оказалось 11 880 грн. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

## Как избежать неоднозначности в задачах на процентные расчеты

Задачи, в которых идет речь об изменении процентных ставок, могут вызвать определенные затруднения. Типичный пример — задачи 18.62, 18.63, в которых говорится об увеличении (уменьшении) «банковского процента». Процентная ставка — такая же величина, как и другие переменные величины: скорость, расстояние, цена и т. д. Единственное отличие состоит в том, что сама эта величина выражена также в процентах. Поэтому ситуация, когда приходится говорить об изменении этой величины, допускает неоднозначную трактовку. Сравним:

| Повышение цены $x$ | Повышение процентной ставки $x$ | Математическая модель, описывающая новое значение |
|---|---|---|
| Цена повысилась на 10 грн | Процентная ставка повысилась на 10 % | $x+10$ |
| Цена повысилась на 10 % | Процентная ставка повысилась на 10 % | $1{,}1x$ |

Видим, что в случае процентной ставки словесное описание для различных математических моделей оказалось одинаковым.

Чтобы избежать этой неоднозначности, в экономике и других областях, где широко применяются процентные расчеты, используют понятие «процентные пункты».

Приведем характерный пример.

В девятых классах учится 100 человек, из которых 20 % в начале учебного года были отличниками.

Если мы скажем, что к концу года количество отличников выросло на 5 %, то эта фраза означает, что количество отличников (выраженное количеством человек) увеличилось на 5 % от этой величины. Количество отличников в этом примере составляло 20 человек; когда это количество возросло на 5 %, то уже составило 21 человека.

Если же мы хотим сказать, что показатель «20 %» увеличился и теперь равен «25 %», то надо употребить слова «процентных пунктов»: «к концу года количество отличников увеличилось на 5 процентных пунктов». При такой формулировке количество отличников на конец года составит 25 человек.

Теперь мы можем переформулировать задачи так, чтобы избежать ошибочной трактовки.

**18.62.** Вкладчик положил в банк 4000 грн. За первый год ему начислили некоторый процент годовых, а в следующем году банковская ставка была увеличена на 4 процентных пункта. В конце второго года на счете оказалось 4664 грн. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

# 19. Сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии

Рассмотрим конечную геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n$.

Сумму членов этой прогрессии обозначим $S_n$.

Имеем:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n. \qquad (*)$$

Выведем формулу для нахождения этой суммы.

Вначале рассмотрим задачу, решение которой подскажет, как вывести искомую формулу.

Рассмотрим геометрическую прогрессию $1, 2, 2^2, \dots, 2^{62}, 2^{63}$ и найдем сумму ее членов $S_{64}$:

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Умножим обе части записанного равенства на знаменатель прогрессии — число 2:

$$2S_{64} = 2 + 2^2 + \dots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64}.$$

Найдем разность $2S_{64}-S_{64}$:

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & 2S_{64} = & & & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{63} & + & 2^{64} \\ - & S_{64} = & 1 & + & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{63} & & \\ \hline & 2S_{64}-S_{64} = & -1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & 2^{64} \end{array}$$

Отсюда $S_{64}=2^{64}-1$.

У вас может возникнуть естественный вопрос: почему в качестве примера мы выбрали именно прогрессию $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{62}, 2^{63}$?

С этой последовательностью связана старинная легенда. Индийский мудрец, придумавший шахматную игру, попросил у раджи за свое изобретение скромное на первый взгляд вознаграждение: за первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зернышко, за вторую — 2, за третью — 4 и т. д.: за каждую следующую клетку вдвое больше зерен, чем за предыдущую.

Понятно, что общее количество зерен, которое попросил изобретатель, равно $S_{64}=2^{64}-1$.

Богатый раджа был потрясен, когда узнал, что он не в состоянии удовлетворить «скромное» желание мудреца. Дело в том, что значение выражения $2^{64}-1$ равно 18 446 744 073 709 551 615.

Чтобы осознать, насколько велико это число, представим, что зерно хранят в амбаре площадью 12 га. Тогда его высота была бы больше расстояния от Земли до Солнца.

Воспользуемся описанным приемом для нахождения суммы (*).

Перепишем равенство (*) так:

$$S_n=b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3+\ldots+b_1q^{n-2}+b_1q^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на $q$:

$$S_nq=b_1q+b_1q^2+b_1q^3+b_1q^4+\ldots+b_1q^{n-1}+b_1q^n.$$

Найдем разность $S_nq-S_n$:

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & S_nq = & & & b_1q & + & b_1q^2 & + & b_1q^3 & + & \ldots & + & b_1q^{n-1} & + & b_1q^n \\ - & S_n = & b_1 & + & b_1q & + & b_1q^2 & + & b_1q^3 & + & \ldots & + & b_1q^{n-1} & & \\ \hline & S_nq-S_n = & -b_1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & b_1q^n \end{array}$$

Следовательно, $S_nq-S_n=b_1q^n-b_1$. Отсюда $S_n(q-1)=b_1(q^n-1)$.

При $q \neq 1$ получаем:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}}$$

Это равенство называют **формулой суммы $n$ первых членов геометрической прогрессии** со знаменателем, отличным от 1.

Если $q=1$, то все члены прогрессии равны первому члену. Тогда $S_n=nb_1$.

**ПРИМЕР** При любом натуральном $n$ сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = 10(2^n - 1)$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

*Решение.* Пусть $b_1$ — первый член данной прогрессии, $q$ — ее знаменатель. Тогда $b_1 = S_1 = 10(2-1) = 10$; $b_1 + b_2 = S_2 = 10(2^2 - 1) = 30$. Отсюда $b_2 = 30 - b_1 = 20$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$.

*Ответ*: $b_1 = 10$, $q = 2$. ◄

**?**

1. Как найти сумму $n$ первых членов геометрической прогрессии со знаменателем, отличным от единицы?
2. Чему равна сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии, знаменатель которой равен единице?

## УПРАЖНЕНИЯ

**19.1.**° Найдите сумму $n$ первых членов геометрической прогрессии $(b_n)$ со знаменателем $q$, если:

1) $b_1 = 10$, $q = 3$, $n = 4$;
2) $b_1 = -4$, $q = -1$, $n = 10$;
3) $b_1 = 0{,}6$, $q = 2$, $n = 5$;
4) $b_1 = 4{,}5$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 8$;
5) $b_1 = -9$, $q = \sqrt{3}$, $n = 6$;
6) $b_1 = 8$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 4$.

**19.2.**° Найдите сумму $n$ первых членов геометрической прогрессии $(b_n)$ со знаменателем $q$, если:

1) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$;
2) $b_1 = 15$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 3$;
3) $b_1 = 18$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 5$;
4) $b_1 = 4$, $q = -\sqrt{2}$, $n = 4$.

**19.3.**° Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии:

1) 12, 72, 432, ...;
2) $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ... .

**19.4.**° Найдите сумму четырех первых членов геометрической прогрессии:

1) $-0{,}6$; 3; $-15$; ...;
2) 56; 42; 31,5; ... .

**19.5.** Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии $(c_n)$, если:
1) $c_4=216$, а знаменатель прогрессии $q=-3$;
2) $c_1=5\sqrt{5}$, $c_5=125\sqrt{5}$, а знаменатель прогрессии $q>0$.

**19.6.** Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии $(x_n)$, если $x_3=24$, $x_8=768$.

**19.7.** Геометрическая прогрессия $(b_n)$ задана формулой $n$-го члена $b_n=10\cdot 3^{n-1}$. Найдите сумму пяти первых членов прогрессии.

**19.8.** Геометрическая прогрессия $(y_n)$ задана формулой $n$-го члена $y_n=\frac{(-2)^{n+1}}{20}$. Найдите сумму десяти первых членов прогрессии.

**19.9.** Знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{2}{3}$, а сумма четырех первых членов равна 65. Найдите первый член прогрессии.

**19.10.** Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 516, а первый член равен 12. Найдите знаменатель прогрессии.

**19.11.** Сумма членов конечной геометрической прогрессии равна 605. Найдите количество членов прогрессии, если ее первый член $b_1=5$, а знаменатель прогрессии $q=3$.

**19.12.** Бактерия, попав в благоприятную среду, в конце двадцатой минуты делится на две бактерии, каждая из которых в конце следующих 20 мин делится снова на две и т. д. Сколько бактерий получится из одной бактерии в течение суток?

**19.13.** При любом $n$ сумма первых $n$ членов геометрической прогрессии $S_n=4(3^n-1)$. Найдите третий член этой прогрессии.

**19.14.** При любом $n$ сумма первых $n$ членов геометрической прогрессии $S_n=6\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right)$. Найдите четвертый член этой прогрессии.

**19.15.** Найдите сумму квадратов шести первых членов геометрической прогрессии, первый член которой равен $2\sqrt{3}$, а знаменатель равен $\sqrt{3}$.

**19.16.** Найдите сумму кубов четырех первых членов геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_1=3$ и $b_2=-6$.

**19.17.** Докажите тождество
$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1).$$

**19.18.**•• Докажите тождество

$$a^{2n+1}+1=(a+1)(a^{2n}-a^{2n-1}+\ldots+a^2-a+1).$$

**19.19.*** Найдите количество членов конечной геометрической прогрессии, знаменатель которой $q=3$, последний член $c_n=162$, а сумма всех членов $S_n=242$.

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

**19.20.** Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases}(x+2)(x-6)\leqslant(x+2)(x+1)+4,\\ 2(6x-1)\geqslant 7(2x-4);\end{cases}$

2) $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}\geqslant\dfrac{x-3}{4}-x,\\ 1-x>0{,}5x-5.\end{cases}$

**19.21.** Найдите промежуток возрастания функции:

1) $f(x)=0{,}5x^2-3x+4$; 2) $f(x)=-3x^2-2x+4$.

**19.22.** Постройте график функции:

1) $y=-\dfrac{6}{x}+3$;

2) $y=-\dfrac{6}{x+3}$;

3) $y=-\dfrac{6}{x+3}+3$.

**19.23.** В первый день двое рабочих изготовили 90 деталей. Во второй день первый рабочий изготовил деталей на 10 % больше, а второй — на 15 % больше, чем в первый день. Всего во второй день они изготовили 101 деталь. Сколько деталей изготовил каждый из них в первый день?

**19.24.** Упростите выражение:

1) $\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{16a^2}$, если $a<0$ и $b>0$;

2) $\sqrt{(x-y)^2}-\sqrt{9y^2}$, если $x>0$ и $y<0$.

**19.25.** Костюм стоил 600 грн. После того как цену снизили в два раза, он стал стоить 432 грн, причем процент снижения во второй раз был в 2 раза больше, чем в первый. На сколько процентов каждый раз снижалась цена?

**19.26.** Некоторый товар стоил 200 грн. Сначала его цену повысили на несколько процентов, а потом снизили на столько же процентов, после чего его стоимость составила 192 грн. На сколько процентов каждый раз происходило изменение цены товара?

## УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

**19.27.** На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторой квадратичной функции. Докажите, что все 100 точек принадлежат графику одной квадратичной функции.

## Суммирование

Вместе с каждой последовательностью $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ можно рассматривать и такую последовательность $(S_n)$:

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ S_3=a_1+a_2+a_3,\ \ldots,$$

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\ \ldots\ .$$

Нахождение формулы $n$-го члена последовательности $(S_n)$ называют **суммированием первых *n* членов последовательности** $(a_n)$.

Поскольку вы знаете формулы для вычисления суммы $n$ первых членов арифметической и геометрической прогрессий, то тем самым умеете суммировать первые $n$ членов этих последовательностей.

С помощью греческой буквы $\Sigma$ (сигма) сумму $a_1+a_2+\ldots+a_n$ записывают так: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Например, $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$;

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Одним из эффективных способов суммирования является использование ранее доказанных формул.

**ПРИМЕР 1** Найдите сумму $\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{25}{8}+\ldots+\frac{2^n\cdot n+1}{2^n}$.

*Решение.* Имеем: $\frac{2^k\cdot k+1}{2^k}=k+\frac{1}{2^k}$.

Тогда данную сумму можно переписать так:

$$\left(1+\frac{1}{2^1}\right)+\left(2+\frac{1}{2^2}\right)+\left(3+\frac{1}{2^3}\right)+\ldots+\left(n+\frac{1}{2^n}\right).$$

Отсюда

$$\left(1+\frac{1}{2^1}\right)+\left(2+\frac{1}{2^2}\right)+\left(3+\frac{1}{2^3}\right)+\ldots+\left(n+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=(1+2+3+\ldots+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^k\cdot k+1}{2^k}=\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}$. ◀

**ПРИМЕР 2** Найдите сумму $7+77+777+\ldots+\underbrace{77\ldots7}_{n}$.

*Решение*. Поскольку $\underbrace{77\ldots7}_{n}=7\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}$, то для решения задачи достаточно найти сумму $S_n=1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}$ и полученный результат умножить на 7.

Имеем:

$$S_n=\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}=$$

$$=\frac{1}{9}(10+10^2+\ldots+10^n)-\frac{1}{9}\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{10(10^n-1)}{10-1}-\frac{n}{9}=\frac{10(10^n-1)}{81}-\frac{n}{9}.$$

Искомая сумма равна $\frac{70(10^n-1)}{81}-\frac{7n}{9}$. ◀

Если для данной последовательности $(a_n)$ удается найти такую последовательность $(b_n)$, что $a_n=b_{n+1}-b_n$, тогда сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ найти легко. Действительно, $a_1+a_2+\ldots+a_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+(b_4-b_3)+\ldots+$ $+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$.

**ПРИМЕР 3** Найдите сумму $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!$.

*Решение*. Имеем:

$$n\cdot n!=(n+1)!-n!.$$

Теперь можно записать:

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=(2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+\ldots+((n+1)!-n!)=(n+1)!-1.$$ ◀

**ПРИМЕР 4** Докажите, что если последовательность $(a_n)$ — арифметическая прогрессия с ненулевыми членами, то

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

*Решение.* Имеем: $\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\dfrac{1}{d}$, где $d$ — разность прогрессии. Тогда

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\cdot\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)\cdot\frac{1}{d}+\ldots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{d}=$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{a_{n+1}-a_1}{da_1\cdot a_{n+1}}=\frac{a_1+dn-a_1}{da_1\cdot a_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$ ◀

**ПРИМЕР 5** Найдите сумму $\dfrac{5}{1\cdot 2}+\dfrac{13}{2\cdot 3}+\dfrac{25}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}$.

*Решение.* Имеем:

$$\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}=\frac{2n(n+1)+1}{n(n+1)}=2+\frac{1}{n(n+1)}=2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Тогда можно записать:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+2k+1}{k(k+1)}=\left(2+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=2n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n(2n+3)}{n+1}.$$ ◀

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Найдите сумму $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{5^k\cdot k-1}{5^k}$.

**2.** Найдите сумму $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k+1}\cdot k^2+3^k\cdot k+1}{3^k}$.

**3.** Найдите сумму:

1) $9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{n}$;

2) $5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{n}$.

**4.** Докажите, что если последовательность $(a_n)$ — арифметическая прогрессия с положительными членами, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}.$$

**5.** Найдите сумму:

1) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-7)(4n-3)}$;

2) $\dfrac{3}{1\cdot 2}+\dfrac{7}{2\cdot 3}+\dfrac{13}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}$;

3) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)!}$;

4) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{36}+\dfrac{7}{144}+\ldots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

**6.** Найдите сумму:

1) $\dfrac{1}{2\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 12}+\dfrac{1}{12\cdot 17}+\ldots+\dfrac{1}{(5n-3)(5n+2)}$;

2) $\dfrac{3}{1\cdot 2}+\dfrac{13}{2\cdot 3}+\dfrac{37}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}$.

**7.** Найдите сумму $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-1}$.

**8.** Найдите сумму $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

**9.*** Найдите сумму $S_n=1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+n\cdot a^{n-1}$, где $a\neq 1$.

## ЗАДАНИЕ № 4 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

**1.** Среди данных последовательностей укажите арифметическую прогрессию.

А) 6, 9, 12, 13; В) 2, 8, 14, 21;
Б) 2, 9, 16, 23; Г) 2, 9, 16, 21.

**2.** Какая из данных последовательностей является геометрической прогрессией?

А) 3, 6, 9, 12; В) 3, 6, 12, 24;
Б) 3, 5, 7, 14; Г) 5, 8, 12, 16.

**3.** Чему равен шестой член арифметической прогрессии, первый член которой равен 12, а разность равна 0,4?

А) 14,4; Б) 14; В) 13,6; Г) 13.

**4.** Найдите разность арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_1=-7$, $a_2=5$.

А) −2; Б) 2; В) −12; Г) 12.

**5.** Вычислите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии, первый член которой $a_1=-16$, а разность $d=3$.

А) −10; Б) −15; В) −20; Г) −25.

**6.** Найдите четвертый член геометрической прогрессии, первый член которой $b_1=-\frac{1}{8}$, а знаменатель $q=-2$.

А) −2; Б) −1; В) 1; Г) 2.

**7.** Чему равен знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_1=36$, $b_2=9$?

А) $\frac{1}{4}$; Б) 4; В) 27; Г) −27.

**8.** Вычислите сумму четырех первых членов геометрической прогрессии, первый член которой $b_1=2$, а знаменатель $q=3$.

А) 56; Б) 80; В) 96; Г) 192.

**9.** Найдите сумму пятнадцати первых членов арифметической прогрессии $(a_n)$, заданной формулой $n$-го члена $a_n=-4n+13$.

А) −300; Б) −285; В) −275; Г) −250.

**10.** Какой номер члена арифметической прогрессии $(a_n)$, равного 6,2, если $a_1=0{,}2$, а разность $d=0{,}4$?

А) 14; Б) 15; В) 16; Г) 17.

**11.** Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия $(a_n)$, если $a_1=41$ и $a_2=38$?

А) 13; Б) 14; В) 15; Г) 16.

**12.** Найдите разность арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_1+a_5=28$ и $a_2+a_3=24$.

А) 4; Б) 3; В) 2,5; Г) 2.

**13.** Вкладчик положил в банк 4000 грн под 10 % годовых. Сколько денег будет на его счете через 2 года?

А) 4840 грн; Б) 4800 грн; В) 4080 грн; Г) 4440 грн.

**14.** Шкаф стоил 15 000 грн. После двух последовательных снижений его цены на одно и то же количество процентов он стал стоить 9600 грн. На сколько процентов каждый раз снижали цену?

А) 25 %; Б) 10 %; В) 15 %; Г) 20 %.

**15.** Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 9 и меньших 120.

А) 810; Б) 702; В) 819; Г) 882.

**16.** Чему равна сумма девяти первых членов арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_1+a_4+a_{10}=18$?

А) 48; В) 72;
Б) 54; Г) найти невозможно.

**17.** При каком значении $x$ значения выражений $7x-8$, $2x+1$ и $x+6$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

А) 1; В) −1;
Б) 2; Г) такого значения не существует.

**18.** При каком положительном значении $x$ значения выражений $x+1$, $3x-1$ и $2x+10$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

А) 1,5; В) 3;
Б) 4; Г) такого значения не существует.

## ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 3

**Последовательность**

Объекты, которые пронумерованы подряд натуральными числами 1, 2, 3, ..., $n$, ..., образуют последовательности.

**Арифметическая прогрессия**

Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом, называют арифметической прогрессией.

**Формула $n$-го члена арифметической прогрессии**

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

**Свойство членов арифметической прогрессии**

Любой член арифметической прогрессии, кроме первого (и последнего, если прогрессия конечна), равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

**Формулы суммы $n$ первых членов арифметической прогрессии**

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

**Геометрическая прогрессия**

Геометрической прогрессией называют последовательность с отличным от нуля первым членом, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

**Формула *n*-го члена геометрической прогрессии**

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

**Свойство членов геометрической прогрессии**

Квадрат любого члена геометрической прогрессии, кроме первого (и последнего, если прогрессия конечна), равен произведению двух соседних с ним членов: $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$.

**Формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии**

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

# 20. Упражнения для повторения курса алгебры 9 класса

**20.1.** Запишите в виде неравенства утверждение:

1) $a$ — положительное число;
2) $b$ — отрицательное число;
3) модуль числа $c$ — неотрицательное число;
4) модуль суммы двух рациональных чисел $a$ и $b$ не больше суммы модулей этих чисел.

**20.2.** Докажите неравенство:

1) $3a(a+6)<(3a+6)(a+4)$;
2) $(2b-1)(3b+2)<(3b-1)(2b+1)$;
3) $25m^2+n^2\geqslant 10mn$;
4) $2a^2-4a+5>0$;
5) $x^2+x+1>0$;
6) $4y^2-12\geqslant 12y-21$;
7) $a^2+b^2+2\geqslant 2(a+b)$;
8) $a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2(a+b+c)$;
9) $2a^2+5b^2+2ab+1>0$;
10) $x^2+y^2+15>6x+4y$.

**20.3.** Докажите, что является верным неравенство:

1) $a^5-5\geqslant 5a^4-a$, если $a\geqslant 5$;
2) $b^3+b+2\geqslant 0$, если $b\geqslant -1$;
3) $c^3+c\leqslant 3c^2+3$, если $c\leqslant 3$.

**20.4.** Известно, что $a>3$. Сравните с нулем значение выражения:

1) $2a-6$;
2) $15-5a$;
3) $2a-4$;
4) $(a-3)(2-a)$;
5) $\frac{a-2}{a-1}$;
6) $\frac{-4}{3-a}$.

**20.5.** Известно, что $b<2$. Сравните с нулем значение выражения:

1) $4b-8$;
2) $(b-2)^2(b-3)$;
3) $\frac{b-3}{(2-b)(b-4)}$.

**20.6.** Докажите, что если $a>b>1$, то

$$a^2b+b^2+a>ab^2+a^2+b.$$

**20.7.** Докажите, что если $a<b<2$, то
$$a^2b+2b^2+4a<ab^2+2a^2+4b.$$

**20.8.** Сравните с нулем число $a$, если:
1) $6a<5a$; 2) $-2a<2a$; 3) $9a>4a$; 4) $-37a>-3a$.

**20.9.** Докажите, что если $a>7$ и $b>3$, то:
1) $4a+b>31$; 2) $10a+3b>75$.

**20.10.** Докажите, что если $a>5$ и $b<-2$, то:
1) $3a-b>17$; 2) $5b-2a<-10$.

**20.11.** Сравните, если возможно:
1) $4a+b$ и 12, если $a>2$ и $b>5$;
2) $b-2a$ и 0, если $a>4$ и $b<6$;
3) $b-3a$ и 1, если $a<6$ и $b<0$;
4) $a-5b$ и 1, если $a<12$ и $b>2$.

**20.12.** Положительные числа $a$, $b$, $c$ и $d$ таковы, что $a>b$, $d<b$ и $c>a$. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{d}$.

**20.13.** Известно, что $5<a<8$. Оцените значение выражения:
1) $0{,}4a$; 2) $a-3$; 3) $2a+1$; 4) $-3a+2$.

**20.14.** Известно, что $3{,}1<\sqrt{10}<3{,}2$. Оцените значение выражения:
1) $2\sqrt{10}$; 2) $-4\sqrt{10}$; 3) $3\sqrt{10}-5$.

**20.15.** Известно, что $3<m<4$ и $-3<n<-2$. Оцените значение выражения:
1) $2m+3n$; 2) $0{,}2m-n$; 3) $-5m+4n$; 4) $m-\frac{m}{n}$.

**20.16.** Решите неравенство:
1) $16-4n\geqslant 8$; 3) $6x+3>5x-2$; 5) $3x+4<5x-4$;
2) $10x>13x+6$; 4) $\frac{4-3x}{7}<1$; 6) $4x-7>7x-6$.

**20.17.** Найдите сумму натуральных чисел, принадлежащих области определения функции $y=\sqrt{10-3x}$.

**20.18.** Дана функция $f(x)=3x+12$. При каких значениях аргумента функция принимает:
1) положительные значения;
2) отрицательные значения;
3) значения, принадлежащие промежутку $[-4;\ 7]$?

**20.19.** Придумайте неравенство вида $ax+b>0$, где $x$ — переменная, $a$ и $b$ — некоторые числа, множеством решений которого является:

1) промежуток $(-3; +\infty)$;
2) промежуток $(-\infty; 1{,}6)$;
3) множество действительных чисел;
4) пустое множество.

**20.20.** Найдите множество решений неравенства:

1) $(2x-3)^2 \leqslant (4x-1)(x-2)+7$;
2) $(x-2)(2+x) \geqslant 2-(x+4)(1-x)$;
3) $\dfrac{1-x}{2}+3<3x-\dfrac{2x+1}{4}$;
4) $\dfrac{3x-37}{2}-9>\dfrac{7-2x}{4}+2x$;
5) $\dfrac{5x-3}{5} \geqslant \dfrac{3x+4}{3}-\dfrac{29}{15}$.

**20.21.** Чему равно наименьшее целое решение неравенства
$$\frac{3x+5}{4}-1 \leqslant \frac{x-2}{3}+x?$$

**20.22.** Чему равно наибольшее целое решение неравенства
$$\frac{3x+5}{2}<\frac{8-x}{3}?$$

**20.23.** Равносильны ли неравенства:

1) $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x-1}{3}<1$ и $3(x+1)+2(x-1)<1$;
2) $(x+3)(x^2+4)>0$ и $x+3>0$;
3) $x-1>3$ и $x-1+\dfrac{1}{x-5}>3+\dfrac{1}{x-5}$;
4) $x+2<1$ и $x+2+\dfrac{1}{x}<1+\dfrac{1}{x}$?

**20.24.** Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x-3<2x-3, \\ 4x+5>10-x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9+2x \leqslant 3x+7, \\ x-2>2x-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-5)^2-15 \geqslant (x-3)(x-4)-50, \\ 4(x+7)-16 \geqslant 2-x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}+\dfrac{x+1{,}7}{3} \geqslant \dfrac{3x+1}{5}, \\ \dfrac{x+2}{4}-\dfrac{x+8}{5}<\dfrac{3x-1}{10}. \end{cases}$

**20.25.** Найдите сумму целых решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} 3x-5<23-4x, \\ 7x-9\leqslant 9x+1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(3x-4)<3(4x-5)+23, \\ 4(x+1)\leqslant 3x+5. \end{cases}$

**20.26.** Придумайте систему двух линейных неравенств с одной переменной, множеством решений которой является:

1) промежуток $(-2;+\infty)$;

2) промежуток $\left[-4;\frac{1}{3}\right]$;

3) промежуток $(-\infty;-10]$;

4) пустое множество;

5) множество, состоящее из одного числа 8;

6) множество действительных чисел.

**20.27.** Известно, что $1\leqslant a\leqslant 4$. Сколько целых значений может принимать выражение $0{,}5a-3$?

**20.28.** Решите двойное неравенство:

1) $-3\leqslant 2x-1<5$;

2) $-1<3x-9\leqslant 6$;

3) $2<7-4x<11$;

4) $-2\leqslant\frac{1-x}{3}\leqslant 1$.

**20.29.** При каких значениях $a$ имеет хотя бы одно решение система неравенств:

1) $\begin{cases} x<4, \\ x>a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\leqslant 2, \\ x>a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x\leqslant -3, \\ x\geqslant a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\leqslant a? \end{cases}$

**20.30.** При каких значениях $a$ не имеет решений система неравенств:

1) $\begin{cases} x<6, \\ x>a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\leqslant 5, \\ x>a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x\leqslant -8, \\ x\geqslant a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x>0, \\ x\leqslant a? \end{cases}$

**20.31.** При каких значениях $a$ множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x>a \end{cases}$ является:

1) промежуток $[7;+\infty)$;

2) промежуток $[3;+\infty)$;

3) промежуток $(-2;+\infty)$;

4) пустое множество?

**20.32.** При каких значениях $a$ уравнение $x^2-(2a+2)x-2a-3=0$ имеет два различных отрицательных корня?

**20.33.** При каких значениях $a$ уравнение $x^2-(2a-1)x+a^2-a-6=$ $=0$ имеет два различных корня, принадлежащих промежутку $[-3;\ 2]$?

**20.34.** На рисунке 20.1 изображен график функции $y=f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Пользуясь рисунком, укажите:

1) нули функции;
2) промежутки возрастания и убывания функции;
3) множество решений неравенства $f(x)>0$.

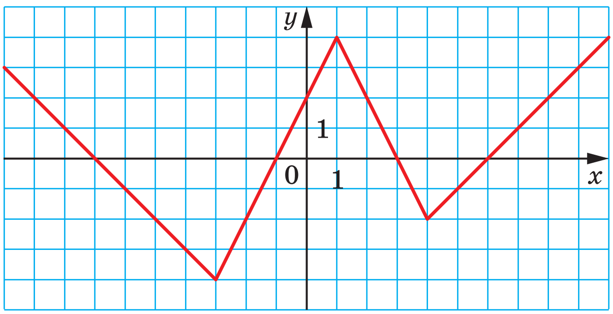



**Рис. 20.1**

**20.35.** На рисунке 20.2 изображен график функции $y=g(x)$, определенной на промежутке $[-5;\ 6]$. Пользуясь рисунком, укажите:

1) область значений функции;
2) нули функции;
3) промежутки возрастания и убывания функции;
4) множество решений неравенства $g(x)\leqslant 0$.

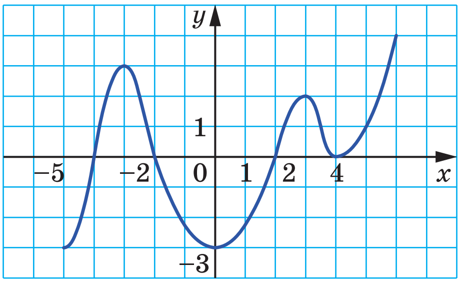



**Рис. 20.2**

**20.36.** Укажите, какие из данных линейных функций являются возрастающими, а какие — убывающими:

1) $y=-4x$; 2) $y=4x-7$; 3) $y=\frac{x}{4}$; 4) $y=4-x$.

**20.37.** Какая из данных функций является убывающей:

1) $y=x^2$; 2) $y=\frac{2}{x}$; 3) $y=-2x$; 4) $y=2x$?

**20.38.** Решите графически уравнение:

1) $(x+1)^2=-\frac{2}{x}$;
2) $x^2-2=-\sqrt{x}$;
3) $\sqrt{x+1}=5-x$;
4) $\frac{6}{x-2}=x+3$;
5) $(x+2)^2=\sqrt{x}+4$;
6) $\frac{5}{x}+3=(x-3)^2$.

**20.39.** Чему равна абсцисса вершины параболы:

1) $y=4x^2-12x+1$;
2) $y=-0{,}2x^2-2x+3$?

**20.40.** Укажите, вершина какой из данных парабол принадлежит оси ординат, а какой — оси абсцисс:

1) $y=x^2-4x+3$;
2) $y=x^2-8$;
3) $y=x^2-6x+9$;
4) $y=x^2+2x$.

**20.41.** Найдите значения $b$ и $c$, при которых функция $y=x^2+bx+c$:

1) имеет единственный нуль в точке $x=-3$;
2) принимает наименьшее значение, равное 4, в точке $x=0$;
3) имеет нули в точках $x=-2$ и $x=5$.

**20.42.** Постройте график данной функции, найдите ее область значений, промежутки возрастания и убывания:

1) $y=-2x^2+1$;
2) $y=0{,}5x^2-2$;
3) $y=x^2+6x+5$;
4) $y=4x-x^2$;
5) $y=-x^2+4x-3$;
6) $y=x^2-4x+5$;
7) $y=2x^2-3x-2$;
8) $y=-3x^2+8x+3$.

**20.43.** При каком значении $c$ график функции $y=x^2-6x+c$:

1) проходит через начало координат;
2) имеет с осью абсцисс только одну общую точку;
3) пересекает ось ординат в точке $A(0;\ -4)$;
4) пересекает ось абсцисс в точке $B(2;\ 0)$?

**20.44.** При каком значении $b$ график функции $y=x^2+bx+2$:

1) имеет с осью абсцисс только одну общую точку;
2) не имеет с осью абсцисс общих точек;
3) пересекает ось абсцисс в точках, расстояние между которыми равно 4?

**20.45.** График функции $y=x^2+px+q$ проходит через точки $A(1;\ 1)$ и $B(2;\ 2)$. Проходит ли этот график через точку: 1) $C(-1;\ -1)$; 2) $D(3;\ 5)$?

**20.46.** Парабола $y=ax^2+bx+c$ проходит через точку $(0;\ 10)$, а вершиной параболы является точка $(6;\ -2)$. Найдите коэффициенты $a$, $b$ и $c$.

**20.47.** Значение квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ в точке $x=-1$ равно 0, а при $x=\frac{1}{4}$ функция принимает наименьшее значение, равное $-\frac{25}{8}$. Найдите коэффициенты $a$, $b$ и $c$.

**20.48.** При каком значении $m$:
1) наименьшее значение функции $y=x^2-6x+m$ равно $-8$;
2) наибольшее значение функции $y=-x^2+4x-m$ равно 12?

**20.49.** Постройте график функции:
1) $y=\frac{x^3+4x^2-5x}{x}$;
2) $y=\frac{x^3+8}{x+2}-3$;
3) $y=\frac{x^4-1}{x^2-1}$;
4) $y=\frac{x^4-13x^2+36}{x^2-9}$.

**20.50.** При каком значении $a$ сумма квадратов корней уравнения $x^2+ax+a-2=0$ принимает наименьшее значение?

**20.51.** Известно, что $a+3b=10$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $a^2+b^2$ и при каких значениях $a$ и $b$?

**20.52.** Решите неравенство:
1) $x^2-4x+3>0$;
2) $x^2-6x-40\leqslant 0$;
3) $x^2+x+1\geqslant 0$;
4) $x^2-x+1<0$;
5) $-3x^2+2x+1>0$;
6) $x-x^2<0$;
7) $x^2+25x\geqslant 0$;
8) $0{,}1x^2-2\leqslant 0$.

**20.53.** Найдите целые решения неравенства:
1) $\frac{1}{3}x^2+3x+6<0$;
2) $-4x^2+3x+1\geqslant 0$.

**20.54.** При каких значениях $c$ трехчлен $2x^2-2x+5c$ принимает положительные значения при любом значении $x$?

**20.55.** Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > -1{,}2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leqslant 0, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -2; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 \geqslant 0, \\ x \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

**20.56.** Решите неравенство:

1) $\dfrac{x^2 - 16}{|x + 1|} \leqslant 0;$

2) $\dfrac{x^2 - 5x - 14}{|x - 8|} \geqslant 0.$

**20.57.** Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 3x - 10}} + \dfrac{1}{3x - 9};$

2) $y = \dfrac{6}{\sqrt{12 + x - x^2}} - \dfrac{2}{x^2 - 4};$

3) $y = \sqrt{49 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$

**20.58.** При каких значениях $a$ имеет два различных корня уравнение:

1) $2x^2 + ax + a - 2 = 0;$

2) $(2a - 1)x^2 + (a - 3)x + 1 = 0;$

3) $ax^2 - (3a + 1)x + a = 0?$

**20.59.** При каких значениях $a$ множеством решений неравенства является множество действительных чисел:

1) $5x^2 - x + a > 0;$

2) $ax^2 - 10x - 5 < 0;$

3) $ax^2 - 2(a - 1)x + 4a \leqslant 0;$

4) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0?$

**20.60.** Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = -x^2 + 4x - 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 5. \end{cases}$

**20.61.** Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - 4y = -6, \\ x^2 + 4y^2 = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y = -2, \\ 3x^2 - 2xy = 28; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 13, \\ xy = 15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 2y = 18, \\ xy = -12; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = -3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x - y = 1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = -2, \\ x + y = 1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8}, \\ x + y = 12; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{5}, \\ y - x = 4. \end{cases}$

**20.62.** Найдите решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ xy(x+y) = 30; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ x^2 - 3xy = 4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 14, \\ xy = -6; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{10}, \\ xy = 50; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{16}{15}, \\ x^2 - y^2 = 16; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12}, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 5, \\ y^2 - 4xy = -4. \end{cases}$

**20.63.** Найдите координаты точек пересечения:

1) прямой $3x-y-5=0$ и параболы $y=\frac{2}{3}x^2-2x+4$;

2) прямой $2x-3y-3=0$ и гиперболы $xy=3$;

3) окружности $x^2+y^2=13$ и гиперболы $xy=6$.

**20.64.** При каком значении $a$ имеет единственное решение система уравнений:

1) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=6, \\ x+y=a? \end{cases}$

**20.65.** Диагональ прямоугольника равна 17 см, а его площадь — 120 см$^2$. Найдите стороны прямоугольника.

**20.66.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 41 см, а его площадь — 180 см$^2$. Найдите катеты треугольника.

**20.67.** Из двух городов, расстояние между которыми равно 240 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Через 2 ч после начала движения расстояние между автомобилями составляло 40 км, причем встреча автомобилей уже произошла. Найдите скорость каждого автомобиля, если весь путь между городами один из них проехал на час быстрее, чем другой.

**20.68.** Из двух сел, расстояние между которыми равно 20 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода, которые встретились через 2 ч. Найдите скорость, с которой шел каждый из них, если один пешеход преодолевает расстояние между селами на 1 ч 40 мин быстрее другого.

**20.69.** Из пунктов $A$ и $B$ одновременно навстречу друг другу отправились соответственно велосипедистка и пешеход, которые встретились через 1 ч после начала движения. Найдите скорость каждого из них, если велосипедистка прибыла в пункт $B$ на 2 ч 40 мин раньше, чем пешеход в пункт $A$, а расстояние между этими пунктами составляет 16 км.

**20.70.** Из города $A$ в город $B$ одновременно выехали автобус и автомобиль. Через 1 ч 30 мин после начала движения автомобиль опережал автобус на 30 км. Когда автомобиль прибыл в город $B$, автобус находился на расстоянии 80 км от этого города. Найдите скорость автобуса и скорость автомобиля, если расстояние между городами $A$ и $B$ составляет 300 км.

**20.71.** К бассейну подведены две трубы. Если открыть обе трубы, то бассейн будет наполнен водой за 1,5 ч, а если половину бассейна наполнить через одну трубу, а остальное после этого — через другую трубу, то бассейн будет наполнен за 4 ч. За какое время можно наполнить бассейн через каждую трубу?

**20.72.** Две работницы могут выполнить некоторое задание за 9 ч. Если бы первая работница проработала 1 ч 12 мин, а затем вторая — 2 ч, то было бы выполнено 20 % задания. За какое время может выполнить самостоятельно это задание каждая работница?

**20.73.** Лодка проходит 15 км по течению реки за то же время, что и 12 км против течения. Чему равна скорость течения, если 1 км по течению и 1 км против течения лодка проходит за 27 мин?

**20.74.** Велосипедист проехал от села до железнодорожной станции по шоссе длиной 10 км, а вернулся по грунтовой дороге длиной 5 км, потратив на весь путь 1 ч 5 мин. Найдите скорость движения велосипедиста по шоссе и его скорость движения по грунтовой дороге, если на обратный путь он потратил на 15 мин меньше, чем на дорогу до станции.

**20.75.** Из городов $A$ и $B$, расстояние между которыми равно 180 км, выехали одновременно навстречу друг другу автобус и грузовик. После их встречи автобус, выехавший из города $A$, прибыл в город $B$ через 1 ч, а грузовик прибыл в город $A$ через 2 ч 15 мин. Найдите скорость автобуса и скорость грузовика.

**20.76.** Последовательность $(a_n)$ задана формулой $n$-го члена $a_n = n^2 - 4n + 4$. Найдите шесть первых членов этой последовательности. Является ли членом этой последовательности число: 1) 256; 2) 361; 3) 1000; 4) 10 000? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

**20.77.** Найдите количество членов конечной арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_1 = 4$, разность прогрессии $d = -5$, а последний член прогрессии равен $-36$.

**20.78.** Последний член арифметической прогрессии, содержащей 7 членов, равен $3\frac{1}{6}$. Найдите первый член этой прогрессии, если ее разность равна $\frac{3}{8}$.

**20.79.** Какой номер имеет первый отрицательный член арифметической прогрессии 2; 1,9; 1,8; 1,7; ...?

**20.80.** Какие номера имеют члены арифметической прогрессии 8, 11, 14, ..., которые больше 100, но меньше 200?

**20.81.** Сумма скольких первых членов арифметической прогрессии 105, 98, 91, ... равна нулю?

**20.82.** Найдите величины углов выпуклого четырехугольника, если они образуют арифметическую прогрессию с разностью $54°$.

**20.83.** Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите катеты треугольника, если его гипотенуза равна 4 см.

**20.84.** Известно, что бесконечная последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ является арифметической прогрессией с разностью $d \neq 0$. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

1) $-a_2, -a_4, -a_6, -a_8, \ldots$;
2) $a_1+5, a_2+5, a_3+5, \ldots$;
3) $1-a_1, 1-a_2, 1-a_3, \ldots$;
4) $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$;
5) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots$;
6) $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, \ldots$;
7) $a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6, \ldots$?

В случае утвердительного ответа укажите, чему равна разность прогрессии.

**20.85.** Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 12, а сумма их квадратов равна 80. Найдите эти числа.

**20.86.** Докажите, что если числа $a$, $b$ и $c$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то значения выражений $a^2+ab+b^2$, $a^2+ac+c^2$, $b^2+bc+c^2$ также являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

**20.87.** Докажите, что:

1) если длины $a$, $b$ и $c$ сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то $ac=6Rr$, где $R$ и $r$ — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника;
2) если длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию, то ее разность равна радиусу вписанной окружности этого треугольника;
3) если длины сторон треугольника с углом $120°$ образуют арифметическую прогрессию, то они относятся как $3 : 5 : 7$.

**20.88.** Найдите сумму $n$ первых членов последовательности:

1) $\frac{a-1}{a}, \frac{a-3}{a}, \frac{a-5}{a}, \ldots$;
2) $\frac{a-b}{a+b}, \frac{3a-b}{a+b}, \frac{5a-b}{a+b}, \ldots$ .

**20.89.** Третий член арифметической прогрессии равен 11, а седьмой равен 27. Сколько членов этой прогрессии надо взять, чтобы их сумма была равна 253?

**20.90.** Пусть $S_n$ — сумма $n$ первых членов арифметической прогрессии $(a_n)$. Найдите первый член и разность прогрессии, если:

1) $a_3+a_5+a_8=18$ и $a_2+a_4=-2$;

2) $a_5-a_3=-4$ и $a_2a_4=-3$;

3) $a_2+a_4+a_6=36$ и $a_2a_3=54$;

4) $S_5-S_2-a_5=0{,}1$ и $a_7+S_4=0{,}1$;

5) $S_4=9$ и $S_6=22{,}5$.

**20.91.** Сумма трех первых членов конечной арифметической прогрессии равна 3, сумма четырех первых членов равна 16, а сумма всех членов равна 220. Найдите количество членов этой прогрессии.

**20.92.** Чему равна сумма семнадцати первых членов арифметической прогрессии, если ее девятый член равен 15?

**20.93.** Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию, а его меньший катет равен $a$. Найдите площадь треугольника.

**20.94.** Найдите сумму двадцати первых нечетных чисел, при делении которых на 3 остаток равен 1.

**20.95.** Чему равна сумма всех двузначных чисел, которые не делятся нацело ни на 3, ни на 5?

**20.96.** Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию? В случае утвердительного ответа найдите знаменатель этой прогрессии.

**20.97.** После двух последовательных снижений цены на одно и то же количество процентов цена кастрюли снизилась с 300 грн до 192 грн. На сколько процентов снижали каждый раз цену?

**20.98.** Дана геометрическая прогрессия $(b_n)$ со знаменателем $q$. Найдите:

1) $b_1$, если $b_5=-\dfrac{16}{27}$, $q=-\dfrac{2}{3}$;

2) $q$, если $b_1=\dfrac{2}{3}$, $b_4=\dfrac{9}{32}$;

3) сумму семи первых членов прогрессии, если $b_7=192$, $q=2$;

4) сумму пяти первых членов прогрессии, если $b_5=9\sqrt{6}$, $q=\sqrt{3}$.

**20.99.** Сумма трех первых членов геометрической прогрессии, содержащей 6 членов, в 8 раз меньше суммы трех последних. Чему равен знаменатель прогрессии?

**20.100.** Найдите 4 числа, образующих геометрическую прогрессию, если сумма ее крайних членов равна $\frac{35}{3}$, а сумма средних равна 10.

**20.101.** Известно, что бесконечная последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ является геометрической прогрессией со знаменателем $q \neq 1$. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) $b_2, b_4, b_6, \ldots;$
2) $b_1+1, b_2+1, b_3+1, \ldots;$
3) $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \ldots;$
4) $-b_1, -b_3, -b_5, \ldots;$
5) $b_1+b_2, b_2+b_3, b_3+b_4, \ldots;$
6) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots$?

В случае утвердительного ответа укажите, чему равен знаменатель этой прогрессии.

## 21. Основные правила комбинаторики

Сколькими способами ученики вашего класса могут стать друг за другом в очереди в буфет? Сколькими способами можно выбрать в вашем классе старосту и его заместителя? Сколькими способами могут распределиться золотые, серебряные и бронзовые медали на чемпионате мира по футболу?

Отвечая на эти вопросы, надо подсчитать, сколько различных комбинаций, образованных по определенному правилу, можно составить из элементов данного конечного множества. Область математики, которая занимается решением подобных задач, называют **комбинаторикой.**

В основе решения большинства комбинаторных задач лежат два правила: правило суммы и правило произведения.

Рассмотрим такой пример. Туриста заинтересовали 5 маршрутов по Надднепрянщине и 7 маршрутов по Карпатам. Выясним, сколькими способами он может организовать свой отпуск, имея время только на один маршрут.

Поскольку всего имеется $5+7=12$ различных маршрутов, то один из них можно выбрать 12 способами.

Обобщением этого примера является следующее правило.

**Правило суммы. Если множество $A$ состоит из $m$ элементов, а множество $B$ — из $k$ элементов, причем эти множества не имеют общих элементов, то выбор «$a$ или $b$», где $a \in A$, $b \in B$, можно осуществить $m+k$ способами.**

Правило суммы можно обобщить для трех и более множеств. Например, если множества $A$, $B$ и $C$ состоят соответственно из $m$, $k$ и $n$ элементов, причем ни у каких двух из этих множеств нет общих элементов, то выбор «$a$ или $b$ или $c$», где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, можно осуществить $m+k+n$ способами.

Обратимся снова к примеру с выбором маршрутов. Если у туриста есть время на два маршрута и он хочет побывать сначала на Надднепрянщине, а затем в Карпатах, то он может организовать свой отдых 35 способами. Действительно, если выбрать один маршрут по Надднепрянщине, то парой к нему может быть любой из

7 карпатских маршрутов. Поскольку маршрутов по Надднепрянщине 5, то количество пар (маршрут по Надднепрянщине; маршрут по Карпатам) равно $7+7+7+7+7=7\cdot5=35$.

Эти соображения иллюстрирует следующая таблица:

| | | Маршруты по Карпатам | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Маршруты по Надднепрянщине | 1 | (1; 1) | (1; 2) | (1; 3) | (1; 4) | (1; 5) | (1; 6) | (1; 7) |
| | 2 | (2; 1) | (2; 2) | (2; 3) | (2; 4) | (2; 5) | (2; 6) | (2; 7) |
| | 3 | (3; 1) | (3; 2) | (3; 3) | (3; 4) | (3; 5) | (3; 6) | (3; 7) |
| | 4 | (4; 1) | (4; 2) | (4; 3) | (4; 4) | (4; 5) | (4; 6) | (4; 7) |
| | 5 | (5; 1) | (5; 2) | (5; 3) | (5; 4) | (5; 5) | (5; 6) | (5; 7) |

Обобщением этого примера является такое правило.

**Правило произведения.** **Если элемент $a$ можно выбрать $m$ способами и после каждого такого выбора элемент $b$ можно выбрать $k$ способами[1], то выбор «$a$ и $b$» в указанном порядке можно осуществить $mk$ способами.**

Правило произведения также естественно обобщить. Например, если элемент $a$ можно выбрать $m$ способами, после каждого такого выбора элемент $b$ можно выбрать $k$ способами, и после того, как выбраны элементы $a$ и $b$, элемент $c$ можно выбрать $n$ способами, то выбор «$a$ и $b$ и $c$» можно осуществить $mkn$ способами.

**ПРИМЕР 1** Из класса, в котором учатся 28 человек, надо выбрать трех дежурных по одному на каждый из трех этажей школы. Сколькими способами можно это сделать?

*Решение*. Существует 28 способов выбрать дежурного по первому этажу. После того как этот выбор будет сделан, останется 27 учеников, каждый из которых может стать дежурным по второму этажу. После выбора дежурных для первого и второго этажей дежурного по третьему этажу можно выбрать 26 способами.

Таким образом, по правилу произведения количество способов выбора трех дежурных равно $28\cdot27\cdot26=19\,656$.

*Ответ*: 19 656 способами. ◀

[1] Будем называть это свойство «принципом независимости количества выборов».

**ПРИМЕР 2** На рисунке 21.1 показана схема дорог, проложенных из города $A$ в город $B$. Сколькими способами можно проехать из города $A$ в город $B$?

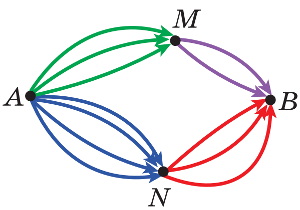



**Рис. 21.1**

*Решение.* Воспользовавшись правилом произведения, приходим к выводу, что из города $A$ в город $B$ через город $M$ можно добраться $3 \cdot 2 = 6$ способами, а через город $N$ — $4 \cdot 3 = 12$ способами. Тогда по правилу суммы общее количество способов выбора равно: $6 + 12 = 18$ способов.

*Ответ*: 18 способами. ◄

1. Сформулируйте правило суммы.
2. Сформулируйте правило произведения.

## УПРАЖНЕНИЯ

**21.1.°** Подножие горы и ее вершину соединяют три тропинки. Сколько существует маршрутов от подножия до вершины и затем вниз до подножия?

**21.2.°** Команде предлагают футболки трех цветов: красного, зеленого и голубого, а также трусы двух цветов — белого и желтого. Сколько вариантов выбрать форму есть у команды?

**21.3.°** У Тани пять платьев и три пары туфель. Сколько вариантов выбора наряда есть у Тани?

**21.4.°** В классе 10 мальчиков и 7 девочек. Сколько существует способов составить пару для танцев из одного мальчика и одной девочки?

**21.5.°** Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр: 1) 1 и 2; 2) 0 и 1 (цифры могут повторяться)?

**21.6.°** Из города $A$ в город $B$ ведут 4 дороги, а из города $B$ в город $C$ ведут 3 дороги (рис. 21.2). Сколькими способами можно проехать из города $A$ в город $C$?

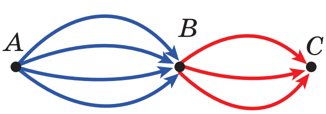



**Рис. 21.2**

**21.7.°** Кафе предлагает меню из 3 первых блюд, 6 вторых блюд и 5 третьих блюд. Сколько существует способов выбрать обед из трех блюд (по одному блюду каждого вида)?

**21.8.°** Будем рассматривать слоги из двух букв, первая из которых является согласной, а вторая — гласной. Сколько таких различных слогов можно составить из букв слова:
1) Полтава; 2) Николаев?

**21.9.•** Сколько четырехзначных чисел, все цифры которых различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если эти числа должны начинаться:
1) с цифры 4; 2) с записи «23»?

**21.10.•** Сколько трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4?

**21.11.•** Сколько существует двузначных чисел, все цифры которых четны?

**21.12.•** Сколько существует двузначных чисел, все цифры которых нечетны?

**21.13.•** Монету подбрасывают 3 раза. Сколько различных последовательностей гербов и цифр можно получить?

**21.14.•** Игральный кубик бросают 3 раза. Сколько различных последовательностей очков можно получить?

**21.15.•** Каждую клетку квадрата $2 \times 2$ можно покрасить в голубой или красный цвет. Сколько существует способов раскрасить этот квадрат?

**21.16.•** Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белую и черную клетки, не лежащие на одной и той же вертикали и горизонтали?

**21.17.••** Сколько существует четных пятизначных чисел?

**21.18.••** Сколько существует пятизначных чисел, кратных 10?

**21.19.••** У одного коллекционера есть для обмена 11 марок и 8 монет, у другого — 9 марок и 7 монет. Сколькими способами коллекционеры могут обменять марку на марку или монету на монету?

**21.20.••** Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность?

## 22. Частота и вероятность случайного события

Нам нередко приходится проводить наблюдения, опыты, участвовать в экспериментах или испытаниях. Часто подобные исследования заканчиваются некоторым результатом (исходом), который заранее предсказать нельзя.

Рассмотрим несколько характерных примеров.

- Если открыть книгу наугад, то невозможно знать заранее, какой номер страницы вы увидите.
- Нельзя до начала футбольного матча определить, с каким счетом закончится игра.
- Вы не можете быть уверенным в том, что, когда нажмете на кнопку выключателя, загорится настольная лампа.
- Нет гарантии, что из куриного яйца, помещенного в инкубатор, вылупится цыпленок.

Как правило, наблюдения или эксперимент определяются каким-то комплексом условий. Например, футбольный матч должен проходить по правилам; куриные яйца должны находиться в инкубаторе не менее 21 дня при определенной методике изменения температуры и влажности воздуха.

Результат наблюдения, опыта, эксперимента будем называть **событием.**

**Случайным событием** называют такой результат наблюдения или эксперимента, который при соблюдении данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти.

Например, если подбрасывать монету, то случайным событием является выпадение числа. Обнаружение письма при проверке почтового ящика также является случайным событием.

Представим, что выпущен 1 000 000 лотерейных билетов и разыгрывается один автомобиль. Можно ли, приобретя один лотерейный билет, выиграть этот приз? Конечно, можно, хотя это событие *маловероятно*. А если будут разыгрываться 10 автомобилей? Ясно, что **вероятность** выигрыша увеличится. Если же представить, что разыгрываются 999 999 автомобилей, то вероятность выигрыша станет намного большей.

Следовательно, **вероятности случайных событий** можно сравнивать. Однако для этого следует договориться, каким образом количественно оценивать возможность появления того или иного события.

Основанием для такой количественной оценки могут быть результаты многочисленных наблюдений или экспериментов. Так, люди давно заметили, что многие события происходят с той или иной, на удивление постоянной, **частотой**.

Демографам[1] хорошо известно число 0,512. Статистические данные, полученные в разные времена и в разных странах, свидетельствуют о том, что на 1000 новорожденных приходится в среднем 512 мальчиков. Число 0,512 называют **частотой случайного события** «рождение мальчика». Оно определяется формулой

$$\text{Частота} = \frac{\text{Количество новорожденных мальчиков}}{\text{Количество всех новорожденных}}.$$

Подчеркнем, что это число получено в результате анализа многих наблюдений. В таких случаях говорят, что вероятность события «рождение мальчика» приблизительно равна 0,512.


Вы знаете, что курение вредно для здоровья. По данным организаций охраны здоровья, курильщики составляют приблизительно 92 % от всех больных раком легких. Число 0,92 — это частота случайного события «тот, кто заболел раком легких, — курил», которая определяется таким соотношением:

$$\text{Частота} = \frac{\text{Количество курильщиков среди заболевших раком легких}}{\text{Количество всех людей, заболевших раком легких}}.$$

В таких случаях говорят, что вероятность встретить курильщика среди тех, кто заболел раком легких, приблизительно равна 0,92 (или 92 %).

Чтобы детальнее ознакомиться с понятием вероятности случайного события, обратимся к классическому примеру с подбрасыванием монеты.

Предположим, что в результате двух подбрасываний монеты дважды выпал герб. Тогда в данной серии, состоящей из двух испытаний, частота выпадения герба равна:

$$\text{Частота} = \frac{\text{Количество выпадений герба}}{\text{Количество бросков}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Означает ли это, что вероятность выпадения герба равна 1? Конечно, нет.

[1] Демография — наука о народонаселении.

*Для того чтобы по частоте случайного события можно было оценивать его вероятность, количество испытаний должно быть достаточно большим.*

Начиная с XVIII в. многие исследователи проводили серии испытаний с подбрасыванием монеты.

В таблице приведены результаты некоторых таких испытаний.

| Исследователь | Количество подбрасываний монеты | Количество выпадений герба | Частота выпадения герба |
|---|---|---|---|
| Жорж-Луи де Бюффон (1707–1788) | 4040 | 2048 | 0,5069 |
| Огастес де Морган (1806–1871) | 4092 | 2048 | 0,5005 |
| Уильям Джевонс (1835–1882) | 20 480 | 10 379 | 0,5068 |
| Всеволод Романовский (1879–1954) | 80 640 | 39 699 | 0,4923 |
| Карл Пирсон (1857–1936) | 24 000 | 12 012 | 0,5005 |
| Уильям Феллер (1906–1970) | 10 000 | 4979 | 0,4979 |

По приведенным данным прослеживается закономерность: при многократном подбрасывании монеты частота выпадения герба незначительно отклоняется от числа 0,5.

Следовательно, можно считать, что вероятность случайного события «выпадение герба» приблизительно равна 0,5.

В каждом из рассмотренных примеров использовалось понятие **частота случайного события**. Эту величину мы вычисляли по формуле:

$$\text{Частота} = \frac{\text{Количество появлений интересующего события}}{\text{Количество испытаний (наблюдений)}}.$$

Вновь обратимся к таблице, приведенной выше. Можно ли на основании ее данных гарантированно утверждать, что вероятность случайного события «выпадение герба» равна числу 0,5? Ответ на этот вопрос отрицателен. Действительно, на основании этих данных можно сказать, что частота выпадения герба незначительно отклоняется от числа 0,502 или от числа 0,4997, то есть число 0,5 не имеет никакого преимущества перед числом 0,502 или числом 0,4997.

Таким образом, частота случайного события позволяет лишь приближенно оценить вероятность случайного события. *Чем больше испытаний провести, тем точнее будет оценка вероятности случайного события по его частоте.*

Такую оценку вероятности случайного события называют **статистической**. Ее используют в разных областях деятельности человека: физике, химии, биологии, страховом бизнесе, социологии, экономике, здравоохранении, спорте и т. д.

Вероятность случайного события обозначают буквой $P$ (первой буквой французского слова *probabilité* — вероятность).

Если в первом примере событие «рождение мальчика» обозначить буквой $A$, то полученный результат записывают так:

$$P(A) \approx 0{,}512.$$

Учитывая приближенный характер статистической оценки, полученные данные можно округлить. Например, когда частота случайного события равна $0{,}512$, то можно написать, что $P(A) \approx 0{,}51$ или $P(A) \approx 0{,}5$.

Если событие «выпадение герба» обозначить буквой $B$, то

$$P(B) \approx 0{,}5.$$

В заключение этого пункта отметим такое. Нередко в повседневной жизни мы принимаем верные и оптимальные решения, используя вероятностные свойства окружающих явлений или объектов.

Приведем несколько примеров.

- Если вы хотите узнать, как решать задачу из домашнего задания, то, скорее всего, позвоните однокласснику, который хорошо знает математику. Этот выбор основан на том, что для сильного ученика вероятность решить задачу больше, чем для слабого.
- Товары популярных фирм стоят дороже аналогичных товаров малоизвестных фирм. Однако нередко мы покупаем более дорогой товар. Такое решение во многом определяется тем, что вероятность купить некачественное изделие у известной фирмы меньше, чем у малоизвестной фирмы.
- Пусть контрольная работа состоит из десяти заданий в тестовой форме с выбором ответа. Предположим, что вы справились с девятью задачами, а десятую решить не можете. Остается лишь одно — ответ угадывать. Скорее всего, вы не станете выбирать букву, обозначающую вариант ответа, которая в предыдущих девяти заданиях встречалась чаще других. Эти соображения основаны на том, что составители тестовых заданий вряд ли расположили варианты ответов так, чтобы какая-то буква, обозначающая правильный ответ, встречалась гораздо чаще других.

Подчеркнем, что отдельно взятый выбор, основанный на вероятностной оценке, может оказаться неудачным. Несмотря на это, при принятии других решений не стоит отбрасывать стратегию руководствоваться вероятностными характеристиками, поскольку такой подход увеличивает шансы на успех.

1. Приведите примеры случайных событий.
2. Опишите, что такое частота случайного события.
3. При каких условиях частота случайного события может оценивать вероятность случайного события?
4. Как обозначают вероятность события $A$?

## УПРАЖНЕНИЯ

**22.1.°** Приведите примеры испытаний, результатом которых, на ваш взгляд, является: 1) маловероятное событие; 2) очень вероятное событие.

**22.2.°** Можно ли считать маловероятным событие:
1) при подбрасывании монеты 200 раз подряд выпал герб;
2) на следующей неделе вас вызовут к доске хотя бы один раз;
3) в футбольному матче «Шахтер» — «Динамо» (Киев) зафиксирован результат 1 : 1;
4) нажимая наугад клавиши клавиатуры компьютера, получили слово «математика»?

**22.3.°** Эксперимент состоит в бросании кнопки. Кнопка может упасть как острием вниз, так и на шляпку (рис. 22.1). Подбросьте кнопку: 1) 10 раз; 2) 20 раз; 3) 50 раз; 4) 100 раз; 5) 200 раз. Результаты, полученные в пяти сериях экспериментов, занесите в таблицу.

**Рис. 22.1**

| Номер серии | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Количество экспериментов (бросков) в серии | 10 | 20 | 50 | 100 | 200 |
| Количество выпадений кнопки острием вниз | | | | | |
| Количество выпадений кнопки острием вверх | | | | | |

В каждой из пяти серий экспериментов подсчитайте частоту выпадения кнопки острием вверх и оцените вероятность этого события. Какое событие более вероятно: «кнопка упадет острием вниз» или «кнопка упадет острием вверх»?

**22.4.°** Эксперимент состоит в бросании двух монет. Проведите этот эксперимент: 1) 10 раз; 2) 20 раз; 3) 50 раз; 4) 150 раз. Результаты, полученные в каждой из четырех серий экспериментов, занесите в таблицу.

| Номер серии | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Количество экспериментов (бросков) в серии | 10 | 20 | 50 | 150 |
| Количество экспериментов, в которых выпало два герба | | | | |
| Количество экспериментов, в которых выпал ровно один герб | | | | |
| Количество экспериментов, в которых не выпало ни одного герба | | | | |

В каждой из четырех серий экспериментов подсчитайте частоту случайного события:

1) выпадение двух гербов;
2) выпадение только одного герба;
3) выпадение двух чисел.

Можно ли на основании этих наблюдений предположить, что событие «выпал ровно один герб» более вероятно, чем событие «не выпало ни одного герба»? На чем основано такое предположение? Можно ли на основании этих наблюдений гарантировать, что первое из названных событий более вероятно, чем второе?

**22.5.°** Проведите серию, состоящую из 100 экспериментов, в которых подбрасывают пуговицу с петлей (рис. 22.2). Найдите частоту события «пуговица упадет петлей вниз». Оцените вероятность события «пуговица упадет петлей вверх» в проведенной серии экспериментов.

**Рис. 22.2**

**22.6.°** В таблице приведены данные о рождении детей в городе $N$ за 2016 год.

| Месяц | Январь | Февраль | Март | Апрель | Май | Июнь | Июль | Август | Сентябрь | Октябрь | Ноябрь | Декабрь |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество рождений мальчиков | 1198 | 1053 | 1220 | 1151 | 1151 | 1279 | 1338 | 1347 | 1329 | 1287 | 1196 | 1243 |
| Количество рождений девочек | 1193 | 1065 | 1137 | 1063 | 1163 | 1228 | 1258 | 1335 | 1218 | 1239 | 1066 | 1120 |

Подсчитайте частоту рождений мальчиков в каждом месяце и за весь 2016 год. Оцените вероятность рождения девочки в 2016 г.

**22.7.°** Оператор справочной службы в течение рабочего дня (9:00–17:00) разговаривает в среднем по телефону 6 ч. Оцените вероятность того, что, если позвонить в справочную в это время, телефон окажется свободным.

**22.8.°** По статистике в городе Одессе в течение лета количество солнечных дней в среднем равно 70. Оцените вероятность того, что, приехав летом в Одессу на один день, гость застанет пасмурную погоду.

**22.9.°** Из большой партии лампочек выбрали 1000, среди которых оказалось 5 бракованных. Оцените вероятность купить бракованную лампочку.

**22.10.°** Во время эпидемии гриппа среди обследованных 40 000 человек выявили 7900 больных. Оцените вероятность события «наугад выбранный человек болен гриппом».

**22.11.°** Вероятность купить бракованную батарейку равна 0,02. Верно ли, что в любой партии из 100 батареек есть две бракованные?

**22.12.°** Вероятность попасть в мишень составляет 85 %. Может ли быть так, что в серии из 100 выстрелов было 98 попаданий в мишень?

**22.13.•** Приведенную таблицу называют «Учебный план 9 класса общеобразовательной школы»:

| Предмет | Количество часов в неделю | Предмет | Количество часов в неделю |
|---|---|---|---|
| Украинский язык | 2 | Геометрия | 2 |
| Украинская литература | 2 | Биология | 2 |
| Иностранный язык | 3 | География | 2 |
| Зарубежная литература | 2 | Физика | 3 |
| История Украины | 2 | Химия | 2 |
| Всемирная история | 1 | Трудовое обучение | 1 |
| Правоведение | 1 | Информатика | 2 |
| Искусство | 1 | Основы здоровья | 1 |
| Алгебра | 2 | Физическая культура | 3 |

Оцените вероятность того, что выбранный наугад урок в недельном расписании 9 класса окажется: 1) алгеброй; 2) геометрией; 3) математическим предметом; 4) физкультурой; 5) иностранным языком.

**22.14.•** Выберите наугад одну страницу из повести Марко Вовчок «Институтка». Подсчитайте, сколько на этой странице окажется букв «н», «о», «я», «ю», а также сколько всего на ней букв. Оцените вероятность появления этих букв в выбранном тексте. Эта оценка позволит понять, почему на клавиатурах пишущей машинки и компьютера (рис. 22.3) буквы «н» и «о» расположены ближе к центру, а буквы «я» и «ю» — ближе к краю.

**Рис. 22.3**

**22.15.**• В таблице приведены данные о количестве дней 2016 года, в которые на 12.00 были зафиксированы данная температура и данный уровень влажности воздуха в городе $N$.

| Диапазон температуры воздуха, °C | Диапазон влажности воздуха, % | | | | | | Всего дней |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | от 0 % до 40 % | от 41 % до 60 % | от 61 % до 70 % | от 71 % до 80 % | от 81 % до 90 % | от 91 % до 100 % | |
| менее −11 °C | 0 | 1 | 1 | 3 | 2 | 0 | 7 |
| от −10° до −1 °C | 0 | 0 | 11 | 15 | 13 | 5 | 44 |
| от 0° до 10 °C | 10 | 19 | 12 | 13 | 19 | 47 | 120 |
| от 11° до 20 °C | 23 | 27 | 15 | 6 | 10 | 2 | 83 |
| от 21° до 30 °C | 57 | 32 | 6 | 2 | 1 | 0 | 98 |
| Более 31 °C | 9 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 13 |
| Всего дней | 99 | 83 | 45 | 39 | 45 | 54 | 365 |

Подсчитайте частоту наблюдения в 2016 г.:

1) температуры воздуха в диапазоне от 11 °C до 20 °C среди тех дней, когда зафиксированная влажность была не более 40 %;
2) влажности воздуха в диапазоне от 71 % до 80 % среди тех дней, когда зафиксированная температура была ниже 0 °C;
3) температуры воздуха в диапазоне от 21 °C до 30 °C и одновременно влажности воздуха в диапазоне от 41 % до 70 %.

# 23. Классическое определение вероятности

Для нахождения вероятности некоторых событий не обязательно проводить испытания или наблюдения. Достаточно руководствоваться жизненным опытом и здравым смыслом.

**ПРИМЕР 1** Пусть в коробке лежат 10 красных шаров. Какова вероятность того, что взятый наугад шар будет красного цвета? желтого цвета?

При заданных условиях любой взятый наугад шар будет красного цвета.

Событие, которое при данном комплексе условий обязательно состоится при любом испытании, называют **достоверным**. *Вероятность такого события считают равной* 1, то есть:

если $A$ — достоверное событие, то

$$P\ (A)=1.$$

Итак, вероятность того, что взятый наугад шар будет красного цвета, равна 1.

Поскольку в коробке нет шаров желтого цвета, то взять шар желтого цвета нельзя.

Событие, которое при данном комплексе условий не может состояться ни при каком испытании, называют **невозможным**. *Вероятность такого события считают равной* 0, то есть:

если $A$ — невозможное событие, то

$$P\ (A)=0.$$

Итак, вероятность того, что взятый наугад шар будет желтого цвета, равна 0. ◄

**ПРИМЕР 2** Однородную монету подбрасывают один раз. Какова вероятность выпадения герба?

В этом эксперименте можно получить только один из двух результатов (исходов): выпадение числа или выпадение герба. Причем ни один из них не имеет преимуществ. Такие результаты называют **равновозможными**, а соответствующие случайные события — **равновероятными**. Тогда естественно считать, что вероятность каждого из событий «выпадение герба» и «выпадение числа» равна $\frac{1}{2}$.

Сказанное не означает, что в любой серии экспериментов с подбрасыванием монеты ровно половиной результатов будет выпадение герба и ровно половиной — выпадение числа. Мы можем лишь прогнозировать, что при большом количестве испытаний частота выпадения герба приблизительно будет равна $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим еще несколько примеров экспериментов с таким комплексом условий, который делает все результаты эксперимента равновозможными.

**ПРИМЕР 3** Игральный кубик (рис. 23.1) бросают один раз. Какова вероятность выпадения цифры 4?

В этом эксперименте можно получить один из шести результатов: выпадет 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Все эти результаты равновозможные. Поэтому естественно считать, что вероятность события «выпадение 4 очков» равна $\frac{1}{6}$. ◄

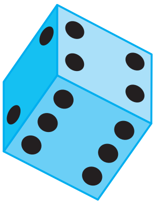


**Рис. 23.1**

**ПРИМЕР 4** Пусть выпущено 100 000 лотерейных билетов, 20 из которых являются выигрышными. Какова вероятность выигрыша при покупке одного билета?

Испытание состоит в том, что покупают один билет. В этом эксперименте можно получить один из 100 000 равновозможных результатов: купить билет с номером 1, купить билет с номером 2 и т. д. Из них 20 результатов приводят к выигрышу. Естественно считать, что вероятность выигрыша при покупке одного билета равна $\frac{20}{100\,000} = \frac{1}{5000}$. ◄

**ПРИМЕР 5** В коробке лежат 15 бильярдных шаров, пронумерованных числами от 1 до 15. Какова вероятность того, что вынутый наугад шар будет иметь номер, кратный 3?

В этом испытании можно получить один из 15 равновозможных результатов: вынуть шар с номером 1, вынуть шар с номером 2 и т. д. Из них к наступлению события «вынутый шар имеет номер, кратный 3» приводят 5 результатов: вынутый шар имеет номер 3, или 6, или 9, или 12, или 15. Поэтому естественно считать, что искомая вероятность равна $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. ◄

Несмотря на то что в примерах 1–5 рассматривались разные эксперименты, их описывает одна математическая модель. Поясним сказанное.

• В каждом примере исходом испытания является один из $n$ равновозможных результатов.

Пример 1: $n=10$.
Пример 2: $n=2$.
Пример 3: $n=6$.
Пример 4: $n=100\,000$.
Пример 5: $n=15$.

• В каждом примере рассматривается некоторое событие $A$, к наступлению которого приводят $m$ результатов. Будем называть их **благоприятными**.

Пример 1: $A$ — вынули красный шар, $m=10$, или $A$ — вынули желтый шар, $m=0$.

Пример 2: $A$ — выпал герб, $m=1$.

Пример 3: $A$ — выпало заранее заданное количество очков на грани кубика, $m=1$.

Пример 4: $A$ — выигрыш приза, $m=20$.

Пример 5: $A$ — вынули шар, номер которого кратен 3, $m=5$.

• В каждом примере вероятность события $A$ можно вычислить по формуле:

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}$$

**Определение.** **Если испытание может закончиться одним из $n$ равновозможных результатов, из которых $m$ приводят к наступлению события $A$, то вероятностью события $A$ называют отношение $\frac{m}{n}$.**

Такое определение вероятности называют **классическим.**

Подчеркнем: *если комплекс условий эксперимента таков, что его результаты не являются равновозможными, то классическое определение вероятности к такому эксперименту применять нельзя.*

**ПРИМЕР 6** Бросают одновременно два игральных кубика: синий и желтый. Какова вероятность того, что выпадут две шестерки?

С помощью таблицы, изображенной на рисунке 23.2, мы можем установить, что в данном эксперименте можно получить 36 равновозможных результатов, из которых благоприятным является только один. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{36}$. ◄

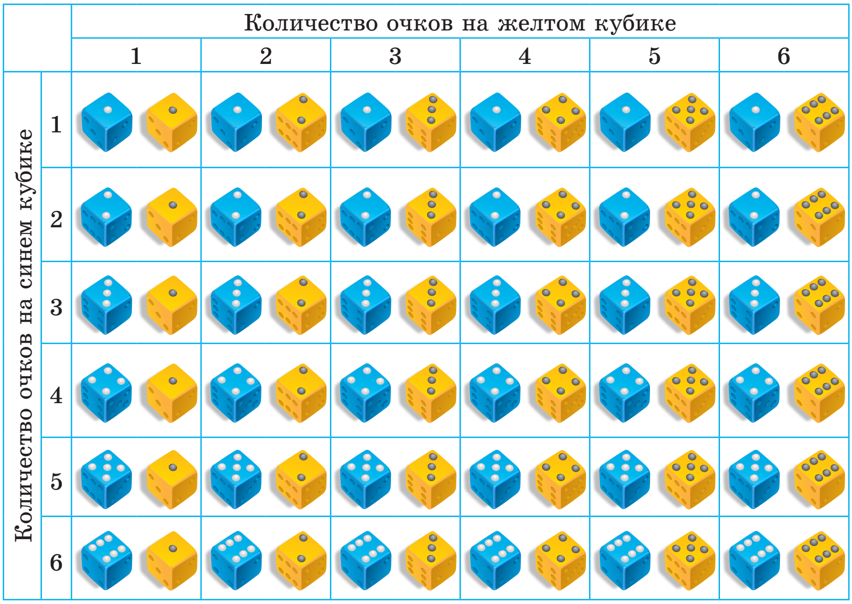



**Рис. 23.2**

**ПРИМЕР 7** **(задача д'Аламбера).** Подбрасывают одновременно две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?

Эта задача похожа на задачу из примера 6. Разница лишь в том, что кубики отличались по цвету, а монеты неразличимы. Чтобы создать в данном эксперименте комплекс условий, при котором все его результаты станут равновозможными, будем различать монеты, предварительно их пронумеровав. Тогда можно получить четыре равновозможных результата (рис. 23.3).


**Рис. 23.3**

В первых трех из этих результатов хотя бы один раз выпал герб. Эти результаты являются благоприятными. Поэтому вероятность того, что при одновременном бросании двух монет хотя бы один раз выпадет герб, равна $\frac{3}{4}$. ◄

**ПРИМЕР 8.** Бросают одновременно два одинаковых игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут числа, сумма которых равна 11?

Данный эксперимент имеет 11 результатов. Сумма выпавших чисел может быть равной 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Однако здесь было бы ошибочным считать, что вероятность события «сумма выпавших чисел равна 11» составляет $\frac{1}{11}$. Дело в том, что перечисленные 11 результатов испытания являются равновозможными. Например, результат «сумма чисел равна 2» может быть получен только одним способом, а результат «сумма чисел равна 6» — пятью способами (убедитесь в этом самостоятельно).

Чтобы получить возможность воспользоваться классическим определением вероятности, опишем условия эксперимента таким образом, чтобы все его результаты были равновозможными.

Для этого будем условно различать кубики, например по цвету. Тогда можно получить 36 равновозможных результатов (рис. 23.2). Из них только два являются благоприятными. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. ◄

**ПРИМЕР 9.** Рассматриваются все семьи с двумя детьми, в которых по крайней мере один ребенок — мальчик. Какова вероятность того, что в выбранной наугад такой семье два мальчика? (Считаем, что рождение мальчика и рождение девочки равновероятны.)

Казалось бы, в этой задаче ответом является число $\frac{1}{2}$. Ведь один мальчик в семье уже есть, а значит, вторым ребенком с равной вероятностью будет либо мальчик, либо девочка.

На самом деле приведенные рассуждения — это решение другой задачи: рассматриваются все семьи с двумя детьми, в которых старший ребенок — мальчик. Какова вероятность того, что в выбранной наугад такой семье два мальчика?

Комплекс условий нашего эксперимента дает такие три равновозможных результата:

старший ребенок — мальчик, младший ребенок — мальчик;
старший ребенок — мальчик, младший ребенок — девочка;
старший ребенок — девочка, младший ребенок — мальчик.

Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$. ◄

В завершение этого пункта отметим следующее.

На первый взгляд кажется, что многими явлениями, происходящими вокруг нас, управляет «его величество случай». Однако при более основательном анализе выясняется, что через хаос случайностей прокладывает себе дорогу закономерность, которую можно количественно оценить. Науку, которая занимается такими оценками, называют **теорией вероятностей**.

?

1. Какое событие называют достоверным?
2. Какое событие называют невозможным?
3. Какова вероятность: 1) достоверного события; 2) невозможного события?
4. Приведите примеры равновероятных событий.
5. Сформулируйте классическое определение вероятности.
6. К каким ситуациям нельзя применять классическое определение вероятности?

## УПРАЖНЕНИЯ

**23.1.°** Приведите примеры достоверных событий.

**23.2.°** Приведите примеры невозможных событий.

**23.3.°** В корзинке лежат 10 красных и 15 зеленых яблок. Какова вероятность взять наугад из корзинки грушу? яблоко?

**23.4.°** Наугад выбирают три четные цифры. Какова вероятность того, что число, записанное этими цифрами, будет нечетным?

**23.5.°** Наугад выбирают три нечетные цифры. Какова вероятность того, что число, записанное этими цифрами, будет нечетным?

**23.6.°** Какова вероятность того, что, переставив буквы в слове «алгебра», мы получим слово «геометрия»?

**23.7.°** Приведите примеры событий с равновозможными результатами.

**23.8.°** Приведите примеры событий с неравновозможными результатами.

**23.9.°** Равновероятны ли события $A$ и $B$:

1) событие $A$: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с номером 1;
   событие $B$: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с номером 7;

2) событие $A$: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с четным номером;
событие $B$: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с нечетным номером?

**23.10.°** Какова вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет количество очков, равное:
1) одному;
2) трем;
3) нечетному числу;
4) числу, кратному 5;
5) числу, которое не делится нацело на 3;
6) числу, кратному 9?

**23.11.°** Представь себе, что в классе, в котором ты учишься, разыгрывается одна бесплатная туристическая путевка в Лондон. Какова вероятность того, что в Лондон поедешь ты?

**23.12.°** Чтобы сдать экзамен по математике, надо выучить 35 билетов. Ученик выучил безупречно 30 билетов. Какова вероятность того, что, отвечая на один наугад вытянутый билет, он получит оценку 12 баллов?

**23.13.°** Чтобы сдать экзамен по математике, надо выучить 30 билетов. Ученик не выучил только один билет. Какова вероятность того, что он не сдаст зачет, отвечая на один билет?

**23.14.°** Какова вероятность того, что ученицу вашего класса, которую вызовут к доске на уроке алгебры, будут звать Екатериной?

**23.15.°** В лотерее 20 выигрышных билетов и 280 билетов без выигрыша. Какова вероятность выиграть, купив один билет?

**23.16.°** В коробке лежат 7 синих и 5 желтых шаров. Какова вероятность того, что выбранный наугад шар окажется: 1) желтым; 2) синим?

**23.17.°** В коробке было 23 карточки, пронумерованные от 1 до 23. Из коробки наугад взяли одну карточку. Какова вероятность того, что на ней записано число:
1) 11;
2) 24;
3) кратное 6;
4) кратное 5;
5) однозначное;

6) составное;
7) в записи которого есть цифра 7;
8) в записи которого есть цифра 2;
9) в записи которого отсутствует цифра 4;
10) сумма цифр которого делится нацело на 3;
11) которое при делении на 11 дает в остатке 2;
12) в записи которого отсутствует цифра 1?

**23.18.°** Из натуральных чисел от 1 до 30 наугад выбирают одно число. Какова вероятность того, что это число будет:
1) простым;
2) делителем числа 18;
3) квадратом натурального числа?

**23.19.°** Набирая номер телефона своего товарища, Николай забыл: 1) последнюю цифру; 2) первую и последнюю цифры. Какова вероятность того, что он с первой попытки наберет правильный номер?

**23.20.•** Абонент забыл две последние цифры номера телефона и набирает их наугад. Какова вероятность правильно набрать номер, если абонент только помнит, что две последние цифры: 1) нечетные; 2) разные и четные?

**23.21.•** Какова вероятность того, что твой самый счастливый день в следующем году попадет на: 1) 7 число; 2) 31 число; 3) 29 число?

**23.22.•** Грани кубика раскрашены в красный или белый цвет (каждая грань в один цвет). Вероятность выпадения красной грани равна $\frac{5}{6}$, а вероятность выпадения белой грани — $\frac{1}{6}$. Сколько красных и сколько белых граней у кубика?

**23.23.•** В коробке лежат 4 синих шара и несколько красных. Сколько красных шаров в коробке, если вероятность того, что выбранный наугад шар окажется синим, равна $\frac{2}{7}$?

**23.24.•** Среди двузначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность того, что:
1) его цифра в разряде десятков больше, чем цифра в разряде единиц;
2) его цифры в разрядах десятков и единиц одинаковы;
3) это число делится нацело на 9?

**23.25.•** Карточки с номерами 1, 2, 3 произвольным образом разложили в ряд. Какова вероятность того, что карточки с нечетными номерами окажутся рядом?

**23.26.**• На скамейку произвольным образом садятся два мальчика и одна девочка. Какова вероятность того, что мальчики окажутся рядом?

**23.27.**• В коробке лежат 5 зеленых и 7 синих карандашей. Какое наименьшее количество карандашей надо вынуть наугад, чтобы вероятность того, что среди вынутых карандашей хотя бы один будет зеленого цвета, была равна 1?

**23.28.**• В коробке лежат 3 красных, 7 желтых и 11 синих карандашей. Какое наименьшее количество карандашей надо вынуть наугад, чтобы вероятность того, что среди вынутых карандашей хотя бы один будет красного цвета, была равна 1?

**23.29.**•• Бросают одновременно два игральных кубика. С помощью рисунка 23.2 установите, какова вероятность того, что выпадут:
1) две единицы;
2) два одинаковых числа;
3) числа, сумма которых равна 7;
4) числа, сумма которых больше 10;
5) числа, произведение которых равно 6.

**23.30.**•• Игральный кубик бросают 2 раза. Какова вероятность того, что:
1) в первый раз выпадет меньше 4 очков, а во второй — больше 4;
2) в первый раз выпадет меньше очков, чем во второй;
3) в сумме за два броска выпадет 5 очков?

**23.31.**•• Какова вероятность того, что при двух бросках игрального кубика:
1) в первый раз выпадет число, которое меньше 5, а во второй — больше 4;
2) шестерка выпадет только во второй раз;
3) в первый раз выпадет больше очков, чем во второй?

**23.32.**•• Дмитрий и Петр одновременно бросают по одному игральному кубику. Если сумма выпавших очков равна 6, то выиграет Дмитрий, а если в сумме выпадет 7 очков, то выиграет Петр. У кого из игроков больше шансов выиграть в этой игре?

**23.33.**•• Дважды бросают монету. Какова вероятность того, что выпадут: 1) два герба; 2) герб и число?

**23.34.**•• Из пяти пронумерованных карточек выбирают наугад одну, запоминают ее номер и возвращают к остальным карточкам. Затем опять выбирают наугад из этих пяти карточек одну. Какова вероятность того, что оба раза выбрали карточку с одним и тем же номером?

**23.35.••** Какова вероятность того, что при трех подбрасываниях монеты: 1) трижды выпадет герб; 2) дважды выпадет герб; 3) один раз выпадет герб; 4) хотя бы один раз выпадет герб?

**23.36.••** За круглый стол случайным образом сели $n$ человек ($n > 2$). Из них только двое знакомы друг с другом. Какова вероятность того, что двое знакомых сядут рядом?

**23.37.••** В очередь случайным образом становятся четыре человека: $A$, $B$, $C$, $D$. Считая все варианты их расположения равновозможными, определите вероятность того, что $A$ будет стоять раньше, чем $B$.

## Сначала была игра

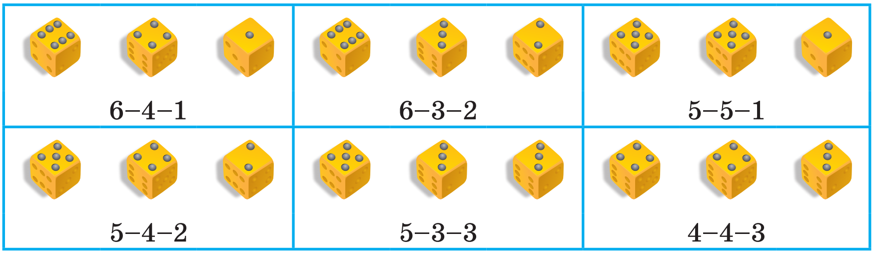
Вы знаете много игр, в которых результат зависит от мастерства участников. Однако есть и такие игры, в которых от умения игроков ничего не зависит. Всё решает случай. К последним принадлежит и игра в кости. Считают, что именно с нее началась наука о случайном.

Придворный французского короля Людовика XIV, азартный игрок, философ и литератор кавалер де Мере обратился к выдающемуся ученому Блезу Паскалю с просьбой разъяснить такой парадокс. С одной стороны, богатый игровой опыт де Мере свидетельствовал, что при бросании трех игральных костей сумма в 11 очков выпадает чаще, чем сумма в 12 очков.

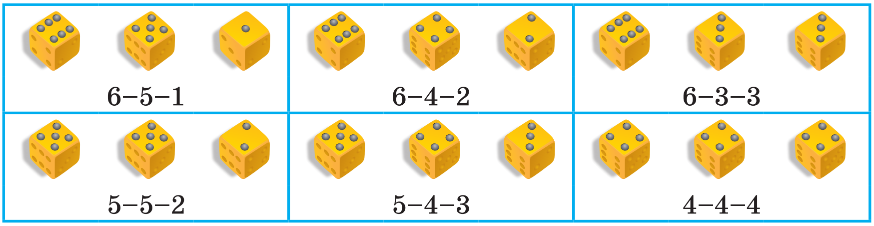
**Блез Паскаль**
(1623–1662)

Французский религиозный философ, писатель, математик и физик. В раннем возрасте проявил математические способности, вошел в историю науки как классический пример подростковой гениальности. Круг его математических интересов был необычайно широк. В частности, он изобрел общий алгоритм для нахождения признаков делимости любых целых чисел, сформулировал ряд основных положений теории вероятностей, методы вычисления площадей фигур, площадей поверхностей и объемов тел. Сконструировал первую вычислительную машину-сумматор.

С другой стороны, этот факт вступал в противоречие с такими соображениями. Сумму в 11 очков можно получить из шести разных комбинаций кубиков:




Но и 12 очков также можно получить из шести комбинаций:




Следовательно, к появлению в сумме 11 и 12 очков приводит одинаковое количество благоприятных результатов. Таким образом, эти события имеют одинаковые шансы, что противоречит практике.

Паскаль понял: ошибка состояла в том, что события, рассматриваемые де Мере, не являются равновероятными. Например, сумму в 11 очков с помощью комбинации 6–4–1 можно получить при 6 разных результатах бросания кубиков: (6; 4; 1); (6; 1; 4); (4; 6; 1); (4; 1; 6); (1; 6; 4); (1; 4; 6).

Если подсчитать для каждой комбинации количество способов ее появления, то будем иметь: для суммы 11 количество благоприятных результатов равно 27, а для суммы 12 — 25. Причем все такие результаты являются равновозможными.

Эту и другие задачи, связанные с азартными играми, Блез Паскаль обсуждал в переписке с Пьером Ферма. Считают, что в этой переписке были заложены основы теории вероятностей.

Интересно, что ошибку, подобную той, которую допустил де Мере, сделал выдающийся французский математик Жан Лерон д'Аламбер, решая такую задачу: «Монету подбрасывают дважды. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?» Он рассуждал приблизительно так.

Возможны три результата: герб выпал на первой монете, герб выпал на второй монете, герб вообще не выпал. Тогда из трех возможных результатов благоприятными являются только два, то есть искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$. Однако из примера 7 п. 23 вы знаете, что верным является ответ $\frac{3}{4}$.

Ошибка состояла в том, что указанные три результата не являются равновозможными (подумайте почему). Скорее всего, эта ошибка свидетельствует о том, что в XVIII в. теория вероятностей была еще «молодой» наукой, требовавшей уточнения самого понятия «вероятность события».

Становление и развитие теории вероятностей связаны с трудами таких выдающихся ученых, как Якоб Бернулли (1654–1705), Пьер-Симон Лаплас (1749–1827), Рихард фон Мизес (1883–1953). В XX в. особое значение приобрели работы выдающегося советского математика Андрея Николаевича Колмогорова.

Украинская математическая наука подарила миру плеяду выдающихся специалистов в области теории вероятностей. Имена И. И. Гихмана, Б. В. Гнеденко, А. В. Скорохода, М. И. Ядренко известны математикам во всем мире.

Михаил Иосифович Ядренко значительную часть своих творческих сил отдавал также педагогической деятельности. Он много работал с одаренной молодежью, был основателем Всеукраинских олимпиад юных математиков. Михаил Иосифович вел значительную просветительскую деятельность. В частности, по его инициативе в 1968 г. был основан первый в Украине научно-популярный сборник «В мире математики».

**А. Н. Колмогоров**
(1903–1987)

**М. И. Ядренко**
(1932–2004)

# 24. Начальные сведения о статистике

Каким тиражом следует издать учебник по алгебре для 9 класса?

Стоит ли определенному политику выдвигать свою кандидатуру на очередных выборах мэра?

Сколько килограммов рыбы и морепродуктов потребляет в среднем за год один житель Украины?

Выгодно ли для концерта данного артиста арендовать стадион?

На эти и многие другие вопросы помогает отвечать статистика.

**Определение. Статистика** (от лат. *status* — состояние) — **это наука о сборе, обработке и анализе количественных данных, которые характеризуют массовые явления.**

Статистическое исследование состоит из нескольких этапов:

Сбор данных

↓

Обработка данных и их представление в удобной форме

↓

Анализ данных

↓

Выводы и рекомендации

Остановимся отдельно на каждом этапе.

**Сбор данных**

Вы знаете, что вредные привычки, неправильное питание, малоподвижный образ жизни приводят к сердечно-сосудистым заболеваниям. К такому выводу врачи пришли, исследовав, конечно, не всех людей планеты.

Понятно, что исследование носило *выборочный*, но *массовый* характер.

В статистике совокупность объектов, на основании которых проводят исследование, называют **выборкой**.

В данном примере выборка состояла из нескольких миллионов человек.

Следует отметить, что статистический вывод, основанный лишь на численности выборки, не всегда достоверен. Например, если мы, исследуя популярность артиста, ограничимся опросом людей, пришедших на его концерт, то полученные выводы не будут объективными, ведь эти люди пришли на концерт именно потому, что этот артист им нравится. Статистики говорят, что выборка должна быть **репрезентативной** (от фр. *représentatif* — показательный).

Так, врачи, изучая факторы риска возникновения сердечнососудистых заболеваний, исследовали людей разного возраста, профессий, национальностей и т. д.

Следовательно, *сбор данных должен основываться на массовости и репрезентативности выборки*. Иногда выборка может совпадать с множеством всех объектов, исследование которых проводится. Примером такого исследования является проведение государственной итоговой аттестации по математике в 9 классе.

**Способы представления данных**

Собранную информацию (совокупность данных) удобно представлять в виде таблиц, графиков, диаграмм.

Рассмотрим несколько примеров.

**ПРИМЕР 1** В таблице представлены результаты выступлений украинских школьников на Международных математических олимпиадах в течение 1993–2016 гг. (Команда участников на Международных математических олимпиадах состоит не более чем из 6 человек.)

| Год | Место проведения | Количество медалей | | | | Без медалей |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Золотые | Серебряные | Бронзовые | Всего медалей | |
| 1993 | Турция | 0 | 2 | 3 | 5 | 1 |
| 1994 | Гонконг | 1 | 1 | 2 | 4 | 2 |
| 1995 | Канада | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| 1996 | Индия | 1 | 0 | 5 | 6 | 0 |
| 1997 | Аргентина | 3 | 3 | 0 | 6 | 0 |
| 1998 | Тайвань | 1 | 3 | 2 | 6 | 0 |
| 1999 | Румыния | 2 | 2 | 1 | 5 | 1 |
| 2000 | Республика Корея | 2 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| 2001 | США | 1 | 5 | 0 | 6 | 0 |
| 2002 | Великобритания | 1 | 3 | 0 | 4 | 2 |
| 2003 | Япония | 1 | 2 | 3 | 6 | 0 |
| 2004 | Греция | 1 | 5 | 0 | 6 | 0 |
| 2005 | Мексика | 2 | 2 | 2 | 6 | 0 |
| 2006 | Словения | 1 | 2 | 2 | 5 | 1 |
| 2007 | Вьетнам | 3 | 1 | 2 | 6 | 0 |
| 2008 | Испания | 2 | 2 | 2 | 6 | 0 |
| 2009 | Германия | 3 | 1 | 2 | 6 | 0 |

| Год | Место проведения | Количество медалей | | | | Без медалей |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Золотые | Серебряные | Бронзовые | Всего медалей | |
| 2010 | Казахстан | 1 | 2 | 3 | 6 | 0 |
| 2011 | Нидерланды | 1 | 2 | 3 | 6 | 0 |
| 2012 | Аргентина | 0 | 3 | 2 | 5 | 1 |
| 2013 | Колумбия | 1 | 3 | 1 | 5 | 1 |
| 2014 | Южно-Африканская Республика | 2 | 3 | 1 | 6 | 0 |
| 2015 | Таиланд | 2 | 3 | 1 | 6 | 0 |
| 2016 | Гонконг | 0 | 2 | 4 | 6 | 0 |

Во многих случаях данные удобно представлять в виде **столбчатой диаграммы**, которую еще называют **гистограммой** (от греч. *histos* — столб и *gramma* — написание). Такая информация легко воспринимается и хорошо запоминается.

**ПРИМЕР 2** На рисунке 24.1 представлена информация о природно-заповедном фонде Украины.

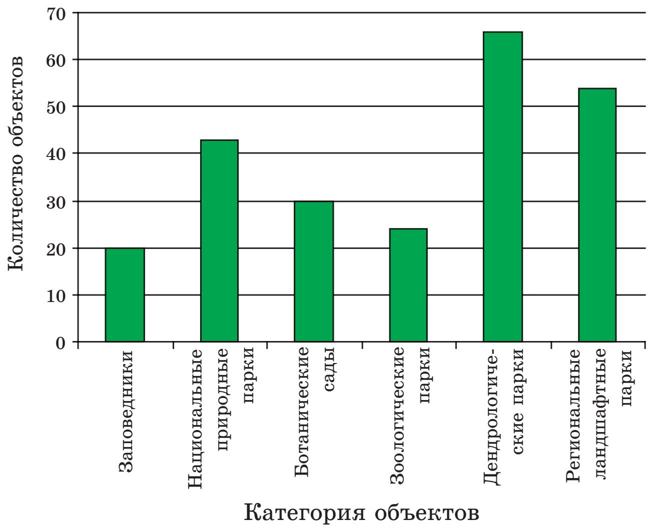



**Рис. 24.1**

**ПРИМЕР 3** Информацию также можно представлять в виде графиков. Так, на рисунке 24.2 изображен график ежегодного процентного роста количества пользователей Интернета в мире в течение 1995–2016 гг.

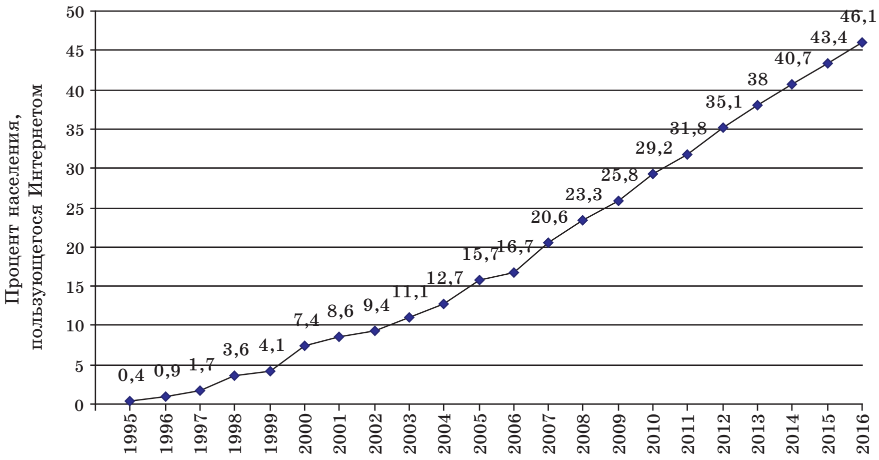



**Рис. 24.2**

Столбчатые диаграммы и графики обычно используют тогда, когда хотят продемонстрировать, как с течением времени изменяется некоторая величина.

**ПРИМЕР 4** На рисунке 24.3 приведено распределение медалей, завоеванных украинскими школьниками на международных олимпиадах в 2016 г. Для этого использована **круговая диаграмма**: круг представляет общее количество медалей, а каждому предмету соответствует некоторый сектор круга.

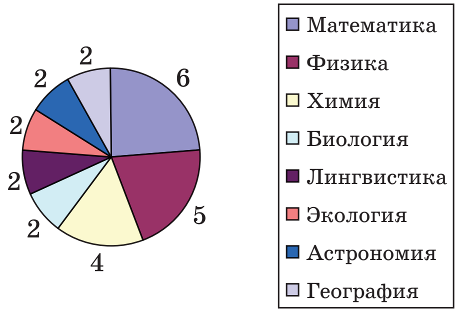



**Рис. 24.3**

**Анализ данных, выводы и рекомендации**

Статистические сведения поступают из разных областей знаний и деятельности человека: экономики, медицины, социологии, демографии, сельского хозяйства, метеорологии, спорта и т. д. Однако статистические методы обработки (анализа) данных имеют много общего. Ознакомимся с некоторыми из них.

Обратимся к примеру 1. Приведенная таблица позволяет узнать, сколько в среднем медалей в год завоевывали школьники Украины на международных математических олимпиадах. Для этого надо количество всех медалей, полученных на протяжении рассматриваемого периода, разделить на количество лет. Например, за период 1993–2016 гг. имеем:

$$\frac{5+4+3+6+6+6+5+4+6+4+6+6+6+5+6+6+6+6+6+5+5+6+6+6}{24}=$$

$$=\frac{130}{24}=5\frac{5}{12}.$$

Поскольку за год можно завоевать не более 6 медалей, то найденное **среднее значение** $5\frac{5}{12}$ свидетельствует о том, что команда Украины достойно выступает на этом престижном форуме.

В статистической информации средние значения полученной совокупности данных встречаются довольно часто. Например, приведем таблицу реализации основных продуктов питания через сети больших магазинов в некоторых странах (в килограммах на человека в год).

| Страна | Мясо | Рыба и морепродукты | Зерновые | Овощи | Фрукты |
|---|---|---|---|---|---|
| Австралия | 118,1 | 22,1 | 86,6 | 93,8 | 103,5 |
| Дания | 111,9 | 24,3 | 139,5 | 102,2 | 146,5 |
| Испания | 122,0 | 27,4 | 98,9 | 143,3 | 105,4 |
| Италия | 91,0 | 26,2 | 162,6 | 178,3 | 131,0 |
| Канада | 99,0 | 25,6 | 119,3 | 120,3 | 119,2 |
| США | 123,4 | 21,1 | 110,8 | 123,5 | 113,5 |
| Украина | 33,9 | 15,6 | 158,4 | 116,0 | 36,4 |
| Франция | 98,3 | 31,2 | 117,2 | 142,9 | 95,5 |

Такую таблицу могут использовать, например, экономисты в исследованиях, выводах и рекомендациях, владельцы магазинов и производители продукции при планировании своей деятельности.

Однако среднее значение не всегда точно (адекватно) отображает ситуацию. Например, если в стране доходы разных слоев населения очень различаются, то средний доход на одного человека для большинства жителей может не отображать их материальное состояние.

Например, в какой-то стране 100 жителей — очень богатые, а остальные 5 миллионов — очень бедные. Тогда показатель среднего дохода может оказаться не низким, а следовательно, не будет адекватно отображать общую бедность населения.

В подобных случаях для анализа данных используют другие характеристики.

С помощью примера 1 составим таблицу, отображающую количество медалей каждого вида:

| Золотые медали | Серебряные медали | Бронзовые медали | Без медалей |
|---|---|---|---|
| 33 | 55 | 42 | 14 |

Такую таблицу называют **частотной**, а числа, записанные во второй строке, — **частотами**.

Частота 55 показывает, что украинские школьники чаще всего завоевывали серебряные медали. Показатель «серебряные медали» называют **модой** полученных данных.

Это слово всем хорошо знакомо. Мы часто говорим «войти в моду», «выйти из моды», «дань моде». В повседневной жизни мода означает совокупность взглядов и привычек, которым большинство отдает предпочтение в данный момент времени.

Именно мода является важнейшей характеристикой тогда, когда полученная совокупность данных не является числовым множеством. Продемонстрируем это на таком примере.

Одна известная фирма, планирующая поставлять джинсы в Украину, провела опрос репрезентативной выборки, состоящей из 500 человек. В результате получили такую частотную таблицу:

| Размер джинсов | XS | S | M | L | XL | XXL | XXXL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 52 | 71 | 145 | 126 | 59 | 40 | 7 |
| Относительная частота (в %) | 10,4 | 14,2 | 29 | 25,2 | 11,8 | 8 | 1,4 |

В третьей строке этой таблицы записано отношение соответствующей частоты к величине выборки. Это отношение, записанное в процентах, называют **относительной частотой**. Например, для размера XS имеем:

$$\frac{52}{500}\cdot 100 = 10{,}4\ (\%).$$

Мода данной выборки — это размер М, и ей соответствует относительная частота 29 %.

Тем самым фирма получила информацию, что наибольшую часть объемов поставок (приблизительно 29 %) должны составлять джинсы размера М.

Заметим, что если бы в таблице две частоты были равны и принимали наибольшие значения, то модой являлись бы два соответствующих размера.

Выше мы привели пример, когда среднее значение не отображает точно материальное состояние людей в стране. Более полную характеристику можно получить, если среднее значение дополнить результатом такого исследования.

Формируют репрезентативную выборку, состоящую из жителей данной страны, и получают совокупность данных, составленную из доходов. Далее в соответствии со шкалой, определяющей уровень доходов (низкий, средний, высокий), разбивают полученный ряд данных на три группы. Составляют таблицу, в которую вносят значения частот и относительных частот:

| Уровень доходов | Низкий | Средний | Высокий |
|---|---|---|---|
| Частота | $m$ | $n$ | $k$ |
| Относительная частота | $p$ % | $q$ % | $r$ % |

Мода такой совокупности данных может характеризовать уровень доходов в стране.

Исследование совокупности данных можно сравнить с работой врача, ставящего диагноз. В зависимости от жалоб пациента или видимых симптомов врач выбирает определенную методику поиска причины болезни. Понятно, что эта методика определяет точность диагноза. Так и в статистике: в зависимости от собранной информации и способа ее получения применяют различные методы ее обработки. Эти методы могут дополнять друг друга, какой-то из них может более точно (адекватно), чем другие, отображать конкретную ситуацию. Так, анализируя выступления украинских школьников на международных математических олимпиадах, можно установить, что статистические характеристики среднее значение и мода удачно сочетаются. А в примере, определяющем ходовой размер джинсов, наиболее приемлем поиск моды.

Чем богаче арсенал методик обработки данных, тем более объективный вывод можно получить.

Ознакомимся еще с одной важной статистической характеристикой.

Семья, приняв решение сделать ремонт на кухне, интересуется, сколько стоит положить один квадратный метр керамической плитки. Изучив прейскуранты 11 строительных фирм, получили такую информацию (цены записаны в гривнях в порядке возрастания):

80, 80, 90, 90, 100, 130, 180, 200, 300, 450, 500.

Семья хочет выбрать фирму со средними ценами.

Среднее значение полученной совокупности данных равно 200.

Однако полученные данные показывают, что цену 200 грн скорее можно отнести к высоким, чем к средним.

Отметим, что число 130 стоит посередине упорядоченной совокупности данных. Его называют **медианой** этой выборки. В рассматриваемой ситуации именно медиана помогает выбрать фирму со средними ценами. Действительно, в последовательности из 11 чисел есть пять меньших, чем 130, и пять бóльших, чем 130.

Теперь рассмотрим упорядоченную совокупность данных, состоящую из четного количества чисел, например из восьми:

1, 4, 4, 7, 8, 15, 24, 24.

Здесь «серединой» выборки являются сразу два числа: 7 и 8. Считают, что медиана такой выборки равна их среднему арифметическому $\frac{7+8}{2} = 7{,}5$.

Среднее значение, моду и медиану называют **мерами центральной тенденции** полученной совокупности данных.

## УПРАЖНЕНИЯ

**24.1.**° Пользуясь таблицей средних годовых температур воздуха в отдельных городах Украины, постройте соответствующую столбчатую диаграмму.

| Город | Температура, °C | Город | Температура, °C |
|---|---|---|---|
| Львов | 7,8 | Черкассы | 7,7 |
| Ужгород | 10,1 | Полтава | 7,6 |
| Киев | 8,4 | Донецк | 8,5 |
| Сумы | 6,8 | Луганск | 8,8 |
| Одесса | 10,7 | Херсон | 10,3 |
| Николаев | 10,0 | | |

**24.2.°** Пользуясь таблицей развития Киевского метрополитена, постройте график роста длины его линий.

| Год | Количество станций | Длина линий, км | Год | Количество станций | Длина линий, км |
|---|---|---|---|---|---|
| 1960 | 5 | 5,2 | 2000 | 40 | 51,4 |
| 1965 | 10 | 12,7 | 2004 | 43 | 56,3 |
| 1971 | 14 | 18,1 | 2008 | 46 | 59,8 |
| 1976 | 17 | 20,42 | 2010 | 49 | 63,6 |
| 1981 | 23 | 27,72 | 2011 | 50 | 65,08 |
| 1987 | 28 | 32,6 | 2012 | 52 | 66 |
| 1992 | 35 | 43,1 | 2013 | 53 | 67,5 |

**24.3.°** Пользуясь таблицей развития Киевского метрополитена, постройте график увеличения количества его станций.

**24.4.°** Определите, является ли репрезентативной выборка:
1) чтобы узнать, как часто жители города в выходные дни бывают на природе, были опрошены члены трех садовых кооперативов;
2) с целью выяснить знание девятиклассниками наизусть стихов Леси Украинки случайным образом были опрошены 4 тысячи девятиклассников в разных регионах страны;
3) для определения процента пользователей Интернета в Украине случайным образом были опрошены 500 киевлян;
4) для выяснения рейтинга молодежной телепрограммы случайным образом были опрошены 10 тысяч юношей и девушек в возрасте от 15 до 20 лет.

**24.5.°** Найдите меры центральной тенденции совокупности данных:
1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;
2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

**24.6.°** Девушки 9 класса на уроке физкультуры сдавали зачет по прыжкам в высоту. Учитель записал такую последовательность результатов:
105 см, 65 см, 115 см, 100 см, 105 см, 110 см, 110 см, 115 см, 110 см, 100 см, 115 см.

Найдите среднее значение и медиану полученных данных.

**24.7.•** Классный руководитель 9 класса ведет учет посещения учащимися занятий. В конце недели его записи выглядели так:

| День недели | Понедельник | Вторник | Среда | Четверг | Пятница |
|---|---|---|---|---|---|
| Количество отсутствующих | 3 | 2 | 5 | 4 | 8 |

1) Найдите, сколько учащихся отсутствовало в среднем в день в течение этой недели.
2) Найдите моду полученных данных.

**24.8.**° В 9 классе, в котором учится 23 ученика, провели опрос: сколько часов в день тратит девятиклассник на выполнение домашних заданий. Ответы учащихся представлены в виде гистограммы (рис. 24.4).

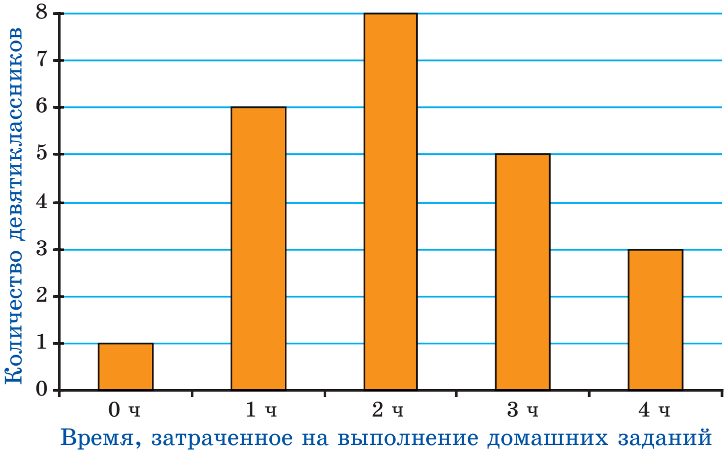



**Рис. 24.4**

1) Заполните частотную таблицу.

| Время, затраченное на выполнение домашних заданий, ч | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота | | | | | |
| Относительная частота | | | | | |

2) Сколько времени в день в среднем учащийся этого класса выполняет домашнее задание? (Найдите среднее значение ряда данных.)
3) Сколько времени на выполнение домашнего задания тратит большинство учеников этого класса? (Найдите моду ряда данных.)

**24.9.**• На рисунке 24.5 изображена столбчатая диаграмма результатов письменной работы по алгебре в трех девятых классах.

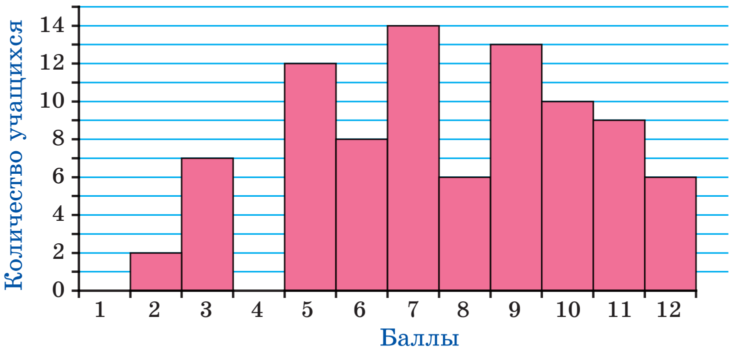



**Рис. 24.5**

1) Заполните частотную таблицу:

| Количество баллов | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | | | | | | | | | | | | |
| Относительная частота | | | | | | | | | | | | |

2) Найдите средний балл, полученный учащимися за эту письменную работу.
3) Найдите моду полученных данных.

**24.10.**• По результатам последней контрольной работы по алгебре, проведенной в вашем классе, заполните частотную таблицу, приведенную в задаче 24.9.
1) Найдите средний балл, полученный учащимися за эту контрольную работу.
2) Найдите моду полученных данных.

**24.11.**• Учащихся одной херсонской школы опросили: сколько раз в жизни они летали на самолете. Полученные данные приведены в таблице:

| Количество полетов | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество учащихся | 530 | 92 | 46 | 30 | 8 | 4 |
| Относительная частота (%) | | | | | | |

1) Заполните третью строку таблицы.
2) Представьте полученные данные в виде столбчатой диаграммы.
3) Найдите моду и среднее значение полученных данных.
4) Поясните, можно ли считать рассматриваемую выборку репрезентативной для выводов относительно всех школьников г. Херсона.

**24.12.**• Выпишите все ваши оценки по алгебре, полученные в течение года. Найдите среднее значение, моду и медиану полученного ряда данных.

**24.13.**• Директор фирмы получает 50 000 грн в месяц, два его заместителя — по 20 000 грн, а остальные 17 сотрудников фирмы — по 4500 грн в месяц. Найдите среднее значение, моду, медиану заработных плат в этой фирме.

**24.14.**• Прочтите одно из известнейших стихотворений Т. Г. Шевченко:

Садок вишневий коло хати,
Хрущі над вишнями гудуть,
Плугатарі з плугами йдуть,
Співають ідучи дівчата,
А матері вечерять ждуть.

Сем'я вечеря коло хати,
Вечірня зіронька встає.
Дочка вечерять подає,
А мати хоче научати,
Так соловейко не дає.

Поклала мати коло хати
Маленьких діточок своїх;
Сама заснула коло їх.
Затихло все, тілько дівчата
Та соловейко не затих.[1]

Для букв «а», «е», «и», «і», «н», «о», «р», «у», «ф», «я» составьте частотную таблицу их наличия в данном стихотворении. Определите моду полученных данных.

---

[1] Т. Г. Шевченко. Твори у 12 т. Інститут літератури ім. Т. Г. Шевченка Академії наук України. — К. : Наукова думка, 2003. — Т. 2. — С. 17.

**24.15.**• В течение мая 2016 г. температура воздуха в Киеве в 8 ч утра составляла:

| Дата | Темпе- ратура, °C | Дата | Темпе- ратура, °C | Дата | Темпе- ратура, °C |
|---|---|---|---|---|---|
| 01.05.2016 | 13,1 | 11.05.2016 | 17,8 | 21.05.2016 | 14,0 |
| 02.05.2016 | 15,3 | 12.05.2016 | 15,0 | 22.05.2016 | 16,9 |
| 03.05.2016 | 15,7 | 13.05.2016 | 16,6 | 23.05.2016 | 18,7 |
| 04.05.2016 | 15,4 | 14.05.2016 | 12,6 | 24.05.2016 | 17,4 |
| 05.05.2016 | 16,2 | 15.05.2016 | 13,1 | 25.05.2016 | 16,1 |
| 06.05.2016 | 13,1 | 16.05.2016 | 13,5 | 26.05.2016 | 16,8 |
| 07.05.2016 | 10,5 | 17.05.2016 | 8,8 | 27.05.2016 | 20,1 |
| 08.05.2016 | 14,2 | 18.05.2016 | 12,4 | 28.05.2016 | 19,2 |
| 09.05.2016 | 15,5 | 19.05.2016 | 9,5 | 29.05.2016 | 20,7 |
| 10.05.2016 | 17,5 | 20.05.2016 | 10,8 | 30.05.2016 | 17,3 |
| | | | | 31.05.2016 | 17,4 |

Найдите меры центральной тенденции полученных данных.

**24.16.**• Постройте ряд: 1) из пяти чисел; 2) из шести чисел, у которого:

а) среднее значение равно медиане;

б) среднее значение больше медианы.

# Дружим с компьютером

Вы продолжите совершенствовать навыки пользования компьютером, приобретенные в 7 и 8 классах, осваивать новые инструменты и новые программные средства. Напомним, что кроме заданий, приведенных в этом разделе, вы можете использовать разнообразные программы, созданные для освоения школьного курса математики. Вы можете обращаться к глобальной сети Интернет для поиска таких программ и другой дополнительной информации к курсу алгебры.

Если вы планируете выбрать профессию, которая требует постоянно использовать математические знания, то можно начать осваивать математические пакеты (например, *Mathcad*, *MATLAB* и т. п.), содержащие мощный инструментарий для математических вычислений, геометрических построений и т. п.

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Большинство этих заданий — продолжение и развитие упражнений этого учебника, которые вы будете решать на уроках и дома (такие упражнения отмечены пиктограммой «», а в этом разделе указаны их номера).

Для тех, кто любит программирование, предлагаем создавать алгоритмы и программы, в которых будут использоваться полученные математические знания. Такие задания, содержащие элементы программирования, отмечены звездочкой. Пока вы не изучили на нужном уровне какой-либо язык программирования, достаточно придумать алгоритм и записать его словами либо в виде блок-схемы; по мере изучения языков программирования вы можете реализовывать эти алгоритмы в виде программ. Заметим, что умение составлять алгоритмы (последовательности действий) пригодится вам не только в программировании, но и в других областях деятельности.

**К п. 1 «Числовые неравенства»**

Найдите в сети Интернет правила дорожного движения. Выберите из дорожных знаков те, которые задают предельно допустимые значения каких-либо числовых величин. Запишите соответствующие неравенства.

Нарисуйте с помощью графического редактора координатную прямую. Продемонстрируйте наглядно, что меньшее число находится на координатной прямой левее большего.

Сохраните рисунок координатной прямой в файле для использования в следующих заданиях.

**К п. 2 «Основные свойства числовых неравенств»**

Каким образом с помощью графического редактора продемонстрировать свойства числовых неравенств? Какие инструменты редактора можно при этом использовать?

**К п. 3 «Сложение и умножение числовых неравенств. Оценивание значения выражения»**

Найдите в сети Интернет информацию о наибольшем и наименьшем расстоянии от планет Солнечной системы до Солнца. Каким образом можно сделать вывод о наибольших и наименьших расстояниях между каждыми двумя планетами? Составьте таблицу с помощью табличного редактора. Можете ли вы сделать так, чтобы наибольшее и наименьшее расстояния между каждой парой планет были вычислены автоматически?

**К п. 4 «Неравенства с одной переменной»**

Нарисуйте с помощью графического редактора координатную прямую. Проиллюстрируйте решение примеров 4.5, 4.6, 4.13. Какие инструменты графического редактора помогли наглядно продемонстрировать ход решения?

**К п. 5 «Решение линейных неравенств с одной переменной. Числовые промежутки»**

Выполните задания 5.1, 5.2, 5.3 с помощью графического редактора.

**К п. 6 «Системы линейных неравенств с одной переменной»**

Выполните задания 6.3, 6.4 с помощью графического редактора.

* **6.33.** Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

* **6.54, 6.55, 6.56.** Эти три задачи представляют собой три типовых примера задач на проценты. Опишите каждую из них в общем случае, создайте математическую модель, опишите входные и выходные данные задачи и запишите алгоритм решения.

**К п. 7 «Повторение и расширение сведений о функции»**

Какие способы задания функции удобны для того, чтобы представить эту функцию с помощью компьютера? Какие инструменты для этого можно использовать?

**К п. 8 «Свойства функции»**

* Функция задана таблично. Запишите алгоритм для поиска промежутков знакопостоянства и алгоритм для поиска промежутков возрастания и убывания функции. Какому условию должно удовлетворять расположение информации в этой таблице?

* **8.31.** Составьте математическую модель этой задачи в общем виде. Запишите алгоритм решения этой задачи в общем виде.

**К п. 9 «Как построить график функции $y=kf(x)$, если известен график функции $y=f(x)$»**

С помощью табличного редактора задайте какую-либо функцию $y=f(x)$ таблично и постройте на основании таблицы график этой функции. Какие изменения надо внести в таблицу, чтобы получить график функции $y=kf(x)$? Как сделать это автоматически? Постройте таким образом несколько графиков функции $y=kf(x)$ для различных значений $k$.

Постройте график какой-либо функции $y=f(x)$ с помощью графического редактора. Какие инструменты графического редактора надо использовать, чтобы получить из этого графика график функции $y=kf(x)$ при $k>1$; при $0<k<1$; при $k=-1$? Как можно использовать эти инструменты, чтобы получить график функции $y=kf(x)$ при $k<0$ и $k \neq -1$?

**К п. 10 «Как построить графики функций $y=f(x)+b$ и $y=f(x+a)$, если известен график функции $y=f(x)$»**

С помощью табличного редактора задайте какую-либо функцию $y=f(x)$ таблично и постройте на основании таблицы график этой функции. Какие изменения надо внести в таблицу, чтобы получить график функции $y=f(x)+b$? $y=f(x+a)$? $y=f(x+a)+b$? Как сделать это автоматически? Постройте таким образом несколько графиков функции $y=f(x+a)+b$ для различных значений $a$ и $b$.

Постройте график какой-либо функции $y=f(x)$ с помощью графического редактора. Какие инструменты графического редактора надо использовать, чтобы получить из этого графика график функции $y=f(x)+b$? $y=f(x+a)$? Как можно использовать эти инструменты, чтобы получить график функции $y=f(x+a)+b$?

**К п. 11 «Квадратичная функция, ее график и свойства»**

* Парабола задана формулой $y=ax^2+bx+c$. Запишите алгоритм, входными данными для которого являются значения $a$, $b$, $c$. Алгоритм должен определить такие характеристики параболы: направление ветвей, координаты вершины, точки пересечения с осями

координат, на основании чего сделать вывод, какой участок параболы целесообразно изобразить на графике.

Автоматизируйте процесс составления соответствующей таблицы значений функции и постройте график по полученной таблице. Как вы будете выбирать значения аргумента функции для этой таблицы, чтобы график получился как можно более точным?

**К рассказу «О некоторых преобразованиях графиков функций»**

Определите, каким образом с помощью табличного редактора и графического редактора из графика функции $y=f(x)$ получить графики функций $y=f(-x)$, $y=f(|x|)$, $y=|f(x)|$.

**К п. 12 «Решение квадратных неравенств»**

* Пользуясь таблицей, приведенной в п. 12, запишите алгоритм для решения квадратного неравенства $ax^2+bx+c>0$, входными данными для которого являются значения $a$, $b$, $c$.

Какие входные данные надо добавить к этому алгоритму и как изменить его, чтобы можно было решать также неравенства $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c\leqslant 0$?

**К п. 13 «Системы уравнений с двумя переменными»**

Остап Ошибочкин захотел решить систему уравнений таким образом: для каждого из них построить график уравнения, задав в табличном редакторе таблицу соответствующих значений, а затем найти на экране компьютера точки пересечения этих графиков. В чем состоят недостатки этого плана?

**К п. 14 «Система двух уравнений с двумя переменными как математическая модель прикладной задачи»**

* Проанализируйте задачи этого пункта. Многие из них описывают похожие ситуации. Можете ли вы найти такие задачи и записать алгоритм их решения в общем виде?

**К п. 15 «Числовые последовательности»**

В табличном редакторе можно заполнять ячейки таблицы членами последовательности, заданной с помощью формулы $n$-го члена последовательности и с помощью рекуррентной формулы. Освойте эти способы заполнения таблицы.

Примечание. Очевидно, что таким способом можно сформировать только конечную последовательность.

Используйте эти способы для выполнения некоторых заданий этого пункта по вашему выбору.

**К п. 16 «Арифметическая прогрессия»**

В табличном редакторе создайте механизм для заполнения ячеек таблицы членами конечной арифметической прогрессии. Сделайте так, чтобы этот механизм можно было использовать для получения арифметической прогрессии с любыми значениями $a_1$ и $d$.

**К п. 17 «Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии»**

Создайте в табличном редакторе таблицу, первый столбец которой содержит натуральное число $k$ — номер члена арифметической прогрессии, второй — значение $k$-го члена, третий — сумму $k$ первых членов арифметической прогрессии. Максимальное значение $k$ выберите по своему усмотрению. Можете ли вы полностью автоматизировать построение этой таблицы по данным значениям $a_1$ и $d$?

**К п. 18 «Геометрическая прогрессия»**

В табличном редакторе создайте механизм для заполнения ячеек таблицы членами конечной геометрической прогрессии. Сделайте так, чтобы этот механизм можно было использовать для получения геометрической прогрессии с любыми значениями $b_1$ и $q$.

Как использовать калькулятор для вычислений по формуле сложных процентов? Решите задачи 18.17–18.20 с помощью калькулятора.

**К п. 19 «Сумма *n* первых членов геометрической прогрессии»**

В задании к п. 17 вы создали таблицу, которая строит арифметическую прогрессию с заданными $a_1$ и $d$. Дополните эту таблицу четвертым столбцом, который содержит величину $k$-го члена геометрической прогрессии, у которой $b_1=a_1$, $q=d$, и пятым столбцом, который содержит сумму первых $k$ элементов этой геометрической прогрессии. Постройте график на основании этой таблицы.

Исследуйте поведение этих арифметической и геометрической прогрессий для различных значений $a_1$ и $d$.

# Ответы и указания к упражнениям

## § 1. Неравенства

### 1. Числовые неравенства

**1.10.** 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет. **1.18.** Значение дроби увеличится. **1.19.** Значение дроби уменьшится или не изменится. **1.22.** 1) Нет; 2) да. **1.26.** Да. **1.28.** 1) *Указание.* $a^2+b^2+6a-4b+13=$ $=(a^2+6a+9)+(b^2-4b+4)$.

### 2. Основные свойства числовых неравенств

**2.13.** 3) Сравнить невозможно. **2.19.** 4) Если $c>0$, то $c^2>-4c$; если $-4<c<0$, то $c^2<-4c$; если $c=0$, то верное неравенство получить невозможно. **2.21.** 1. **2.22.** 24.

### 3. Сложение и умножение числовых неравенств. Оценивание значения выражения

**3.12.** 3) Нет; 4) нет; 5) нет; 6) да; 8) да; 10) да; 11) нет; 12) да; 13) нет; 14) нет. **3.27.** 1) $\sqrt{10}+\sqrt{6}>\sqrt{11}+\sqrt{5}$; 2) $2+\sqrt{11}<\sqrt{5}+\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{15}-\sqrt{5}>\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{21}+\sqrt{20}>9$. **3.28.** 1) $\sqrt{6}+\sqrt{3}>\sqrt{7}+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26}-\sqrt{2}<\sqrt{14}$. **3.32.** 400 %.

### 4. Неравенства с одной переменной

**4.15.** 4) Корней нет; 5) $x$ — любое число; 6) −6. **4.16.** 6 км.

### 5. Решение линейных неравенств с одной переменной. Числовые промежутки

**5.25.** 3) $(-\infty; -5]$; 4) $(-\infty; 1)$; 5) $[7; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; \frac{6}{11}\right]$; 7) $(-\infty; 7{,}5]$; 8) $(1; +\infty)$; 9) $(-\infty; +\infty)$; 10) $\varnothing$; 11) $(-\infty; +\infty)$; 12) $(-\infty; 0)$. **5.26.** 1) $\left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$; 2) $[-6; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; -6]$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $(-3{,}5; +\infty)$. **5.27.** 1) −8; 2) −1. **5.28.** 1) −6; 2) −3. **5.29.** 5 решений. **5.30.** 8 решений. **5.33.** 1) $a<-\frac{9}{4}$; 2) $a\leqslant 1{,}6$. **5.34.** 1) $b<3$; 2) $b<-\frac{1}{8}$. **5.35.** 12 км. **5.36.** Таких чисел не существует. **5.37.** 18 шаров. **5.38.** 44 вишни. **5.39.** 21. **5.40.** 28, 30, 32. **5.41.** 25, 30, 35. **5.42.** 1) При $-4\leqslant x<2$ и $x>2$; 2) при $x<-4$ и $-4<x\leqslant 3$; 3) при $-3<x<-2$, $-2<x<2$ и $x>2$; 4) при $-1<x<1$ и $x>1$. **5.43.** 1) При $x<-3$ и $-3<x\leqslant 9$; 2) при

$7<x<8$ и $x>8$. **5.44.** 1) 9; 2) $-3$; 3) 13; 2,2; 4) корней нет. **5.45.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $-2$; 12. **5.48.** 3) При $a>-1$ и $a \neq 1$. **5.49.** 2) При $m<7$ и $m \neq 0$. **5.50.** 1) При $a>-1$ и $a \neq 0$; 2) при $a<\frac{9}{16}$ и $a \neq -1$; 3) при $a<\frac{19}{5}$ и $a \neq 3$. **5.51.** При $a<-\frac{1}{12}$. **5.52.** 1) 3; 2) $-1$. **5.53.** 1) $-7$; 2) $-4$. **5.54.** 1) Если $a>0$, то $x>0$; если $a<0$, то $x<0$; если $a=0$, то решений нет; 2) если $a>0$, то $x<\frac{1}{a}$; если $a<0$, то $x>\frac{1}{a}$; если $a=0$, то $x$ — любое число; 3) если $a>0$, то $x \geqslant 1$; если $a<0$, то $x \leqslant 1$; если $a=0$, то $x$ — любое число; 4) если $a<2$, то $x<-2$; если $a>2$, то $x>-2$; если $a=2$, то решений нет; 5) если $a>2$, то $x>a+2$; если $a<2$, то $x<a+2$; если $a=2$, то решений нет; 6) если $a>-3$, то $x \leqslant a-3$; если $a<-3$, то $x \geqslant a-3$; если $a=-3$, то $x$ — любое число. **5.55.** 1) Если $a \neq 0$, то $x \leqslant 0$; если $a=0$, то $x$ — любое число; 2) если $a>-1$, то $x<\frac{2-a}{a+1}$; если $a<-1$, то $x>\frac{2-a}{a+1}$; если $a=-1$, то $x$ — любое число; 3) если $a>-4$, то $x>\frac{1}{a+4}$; если $a<-4$, то $x<\frac{1}{a+4}$; если $a=-4$, то решений нет. **5.59.** 15 ч, 10 ч.

### 6. Системы линейных неравенств с одной переменной

**6.23.** 1) $\left(\frac{1}{7}; \frac{13}{10}\right)$; 2) $(-\infty; -4{,}2)$; 3) $[-2;\ 3]$; 4) $[-0{,}8; +\infty)$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $(-\infty; -4]$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **6.24.** 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$; 2) $[-10; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **6.25.** 1) $-3$; $-2$; $-1$; 0; 2) 7; 8; 9; 10; 11. **6.26.** 1) 4 решения; 2) 6 решений. **6.27.** 1) $[2{,}5; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{5}{3}; 3\right)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty;\ 4)$. **6.28.** 1) $(0;\ 8]$; 2) $(5; +\infty)$. **6.29.** 1) $(-0{,}5;\ 6{,}5)$; 2) $[14;\ 17]$. **6.30.** 1) $[-1{,}5;\ 2{,}5)$; 2) $\left[0; \frac{1}{3}\right)$. **6.31.** 2) $(1{,}5;\ 7)$; 3) $(-\infty; -2)$. **6.32.** 1) $\varnothing$; 2) $(1;\ 3)$. **6.33.** 3 см, 5 см или 4 см, 4 см. **6.34.** 1) $[-4;\ 3]$; 2) $x<-1$ или $x>3{,}5$; 3) $x<1$ или $x>8$; 4) $(-2;\ 9)$; 5) $(-2;\ 0{,}5]$; 6) $x \leqslant -0{,}8$ или $x>6$. **6.35.** 1) $(-3;\ 2)$; 2) $x<4$ или $x>8$; 3) $x<-9$ или $x \geqslant 1{,}2$; 4) $\left[-\frac{1}{4}; 10\right)$. **6.36.** 1) $[-1{,}6;\ 5{,}6]$; 2) $(-4;\ 1)$; 3) $x<-12$ или $x>6$;

4) $x \leqslant 2$ или $x \geqslant \frac{8}{3}$; 5) $[1; +\infty)$; 6) $\left(-\frac{11}{7}; +\infty\right)$. **6.37.** 1) $x \leqslant 3{,}6$ или $x \geqslant 8{,}4$; 2) $[-2; -1{,}2]$; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty; 2]$. **6.38.** 1) При $a > 3$; 2) при $a \leqslant 3$. **6.39.** 1) При $a \leqslant 4$; 2) при $a > 1$. **6.40.** 1) При $a \leqslant -1$; 2) при $a = 1$. **6.41.** Если $a < 2$, то $x \leqslant a$; если $a \geqslant 2$, то $x < 2$. **6.42.** Если $a < -3$, то $a < x < -3$; если $a \geqslant -3$, то решений нет. **6.43.** При $10 < a \leqslant 11$. **6.44.** При $1 < b \leqslant 2$. **6.45.** При $8 \leqslant a < 9$. **6.46.** При $-6 \leqslant b < -5$. **6.47.** При $a < 3$. **6.48.** При $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 3$. **6.49.** При $a < -7$ или $a > 8$. **6.50.** 1) $-1$; 2) $-2$; 4. **6.51.** 1) $2\sqrt{10} - \sqrt{6}$; 2) $0{,}5\sqrt{2b}$; 3) $-4\sqrt{6}$.

## § 2. Квадратичная функция

### 7. Повторение и расширение сведений о функции

**7.17.** 2) Все числа, кроме 7 и $-7$; 4) все числа, не меньшие 4, кроме числа 6. **7.27.** 60 км/ч.

### 8. Свойства функции

**8.17.** $a < \frac{1}{8}$. **8.18.** $a > 9$. **8.19.** 2. **8.20.** $m < -2$. **8.26.** $a = 1$, $a = 2$ и $a = 1{,}5$. **8.27.** Если $a < -2$, то наибольшее значение $f_{\text{наиб}} = f(a) = a^2$, наименьшее значение $f_{\text{наим}} = f(0) = 0$; если $a = -2$, то $f_{\text{наиб}} = f(-2) = f(2) = 4$, $f_{\text{наим}} = f(0) = 0$; если $-2 < a \leqslant 0$, то $f_{\text{наиб}} = f(2) = 4$, $f_{\text{наим}} = f(0) = 0$; если $0 < a < 2$, то $f_{\text{наиб}} = f(2) = 4$, $f_{\text{наим}} = f(a) = a^2$. **8.30.** 10 ч, 40 ч. **8.31.** 20 %.

### 9. Как построить график функции $y = kf(x)$, если известен график функции $y = f(x)$.

**9.21.** 3 т.

### 10. Как построить графики функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$, если известен график функции $y = f(x)$

**10.17.** *а*) $y = x^2 + 3$; *б*) $y = -2x^2 - 1$. **10.18.** *а*) $y = 2x^2 - 6$; *б*) $y = 4 - x^2$. **10.19.** *а*) $y = (x - 2)^2$; *б*) $y = -3(x + 3)^2$. **10.20.** *а*) $y = \frac{1}{2}(x + 4)^2$; *б*) $y = -2(x - 1)^2$. **10.21.** *а*) $y = (x + 2)^2 - 4$; *б*) $y = -(x - 2)^2 + 5$; *в*) $y = \frac{1}{3}(x - 3)^2 + 1$.

**10.22.** *а*) $y=(x-4)^2-5$; *б*) $y=-2(x+6)^2+7$. **10.25.** Оба утверждения верны. **10.28.** 3) *Указание*. $y=\dfrac{-2x+2-2}{x-1}=-2-\dfrac{2}{x-1}$. **10.32.** $\dfrac{3}{4}$.

### 11. Квадратичная функция, ее график и свойства

**11.12.** $-1$; 1; 3. **11.13.** 4. **11.14.** 1) 2 корня; 2) 1 корень. **11.15.** 3 корня. **11.16.** 1) $(-1;\ -1)$, $(9;\ 9)$; 2) $(2;\ 23)$, $(8;\ 17)$. **11.17.** $(3;\ 15)$, $(-1;\ 11)$. **11.23.** 1) $-25$; 2) $-13$; 3) $-22$. **11.24.** 1) 26; 2) 17; 3) $-10$. **11.25.** $p=1$, $q=4$. **11.26.** $a=-\dfrac{7}{6}$, $b=\dfrac{7}{6}$. **11.27.** $a=3$, $b=5$. **11.30.** $b=-16$. **11.31.** $b=18$. **11.32.** $a=1$ или $a=4$. **11.33.** $a\geqslant\dfrac{9}{2}$. **11.34.** $a<-16$. **11.35.** $c=-8$. **11.36.** $c=14$. **11.37.** *а*) $a>0$, $b<0$, $c<0$; *б*) $a<0$, $b<0$, $c>0$. **11.39.** $p=-4$, $q=9$. **11.40.** $a=1$, $b=-8$, $c=6$. **11.41.** *а*) $-4$; *б*) 4. **11.42.** $-1$. **11.43.** 1) 25. *Указание*. Пусть одно из чисел равно $x$, тогда другое число равно $10-x$. Рассмотрите функцию $f(x)=x(10-x)=10x-x^2$; 2) 50. **11.44.** Через 1 ч 30 мин. **11.45.** 1600 м$^2$. **11.50.** 1) $a>-4$; 2) $a=-4$; 3) $a<-4$. **11.52.** $a>\dfrac{13}{8}$. **11.53.** $a\geqslant-0{,}5$. **11.57.** 1) $8a\sqrt{a}$; 2) 56; 3) $6\sqrt{2}-5$. **11.58.** 4 км/ч. **11.59.** 20 мин, 30 мин.

### 12. Решение квадратных неравенств

**12.10.** 1) $(-2;\ 1)$; 2) $(-\infty;-5]\cup[2;+\infty)$; 3) $\left[-3;-\dfrac{1}{3}\right]$; 4) $(-\infty;-21)\cup$ $\cup(1;+\infty)$; 5) $(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$; 6) $\left[-\dfrac{13}{3};1\right]$. **12.11.** 1) $(-\infty;\ 1]\cup[4;+\infty)$; 2) $(-5;\ -3)$; 3) $\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty;-10)\cup(1;+\infty)$. **12.12.** 1) При $-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{7}{3}$; 2) при $x\leqslant-0{,}2$ или $x\geqslant2{,}4$. **12.13.** 1) При $-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{9}{2}$; 2) при $-\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{10}{3}$. **12.14.** При $-5<x<4$. **12.15.** При $1<x<2{,}5$. **12.16.** 1) $-5$, $-4$, $-3$, $-2$, $-1$, 0; 2) $-3$, $-2$, $-1$, 0, 1, 2, 3; 3) 0; 4) $-1$, 0, 1, 2, 3, 4, 5. **12.17.** 1) 11; 2) 4. **12.18.** 1) $-6$; 2) $-2$. **12.19.** 1) 1; 2) $-3$. **12.24.** 1) $-4<a<4$; 2) $-8<a<12$; 3) $\dfrac{3}{8}<a<\dfrac{3}{2}$. **12.25.** 1) $b<-\dfrac{1}{16}$ или $b>1$; 2) $b<4$ или $b>10$. **12.26.** 1) $(0;\ 3]$; 2) $[-4;-0{,}5]\cup[6;+\infty)$;

3) $[-1;\ 0)\cup(6;\ 10]$; 4) $(-5;\ -3]$. **12.27.** 1) $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{3};\ 3\right)$; 2) $(-2;\ 0]\cup\cup[5;\ 9)$. **12.28.** 1) $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$; 2) $-3,\ -2,\ 1,\ 2$. **12.29.** 1) $(6;\ +\infty)$; 2) $(-3;\ 5)\cup(5;\ 6)$; 3) $(-\infty;\ -9)\cup(-9;\ -2]\cup[7;\ 9)\cup(9;\ +\infty)$; 4) $\left(-1;\ \frac{2}{3}\right)$. **12.30.** 1) $[-2;\ 2)$; 2) $(-5;\ 6)\cup(6;\ 7)$. **12.31.** 1) $(-11;\ 11)$; 2) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{8}\right]\cup\cup\left[\frac{1}{8};\ +\infty\right)$. **12.32.** 1) $(-\infty;\ -1]\cup[-0{,}4;\ 0{,}4]\cup[1;\ +\infty)$; 2) $[-2;\ 2]$. **12.33.** 1) $(-5;\ 0)\cup(0;\ 2)$; 2) $[0;\ 2]$; 3) $(-1;\ 2)\cup(2;\ 9)$; 4) $(-\infty;\ -5)\cup\cup(-5;\ -3)\cup(5;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -8]\cup[1;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$; 6) $[-11;\ -3)\cup(-3;\ 1]$. **12.34.** 1) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$; 2) $(4;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ -2)\cup\cup(3;\ +\infty)$; 4) $\left[-\frac{1}{3};\ 1\right)\cup(1;\ 3]$. **12.35.** 1) $(-4;\ -3)\cup(5;\ +\infty)$; 2) $[-4;\ -3]\cup\cup[5;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -4)$; 4) $(-\infty;\ -4]\cup\{-3,\ 5\}$. **12.36.** 1) $(3;\ 7)$; 2) $[3;\ 7]\cup\cup\{-2\}$; 3) $(-2;\ 3)$; 4) $[-2;\ 3]\cup\{7\}$. **12.37.** 1) При $a>4$; 2) при $-1\leqslant a\leqslant\frac{3}{5}$; 3) при $0<a<\frac{1}{2}$; 4) при $a>\frac{5}{3}$. **12.38.** 1) При $a\geqslant 9$; 2) при $3\leqslant a\leqslant 7$; 3) при $a\geqslant 1$. **12.39.** 1) Если $a<1$, то $a<x<1$ или $x>4$; если $1\leqslant a\leqslant 4$, то $x>4$; если $a>4$, то $x>a$; 2) если $a\leqslant-\frac{1}{4}$, то решений нет; если $-\frac{1}{4}<a\leqslant 1$, то $-\frac{1}{4}\leqslant x<a$; если $a>1$, то $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1$. **12.40.** 1) Если $a\leqslant-8$, то $-8<x<9$; если $-8<a<9$, то $a<x<9$; если $a\geqslant 9$, то решений нет; 2) если $a<1$, то $x<a$; если $1\leqslant a\leqslant 8$, то $x<1$; если $a>8$, то $x<1$ или $8<x<a$. **12.43.** 3 дня. **12.44.** 40 л.

### 13. Системы уравнений с двумя переменными

**13.3.** 1) $(5;\ 8)$, $(-3;\ 0)$; 2) $(4;\ 1)$, $(1;\ 4)$; 3) $(-1;\ 1)$, $(-3;\ -1)$; 4) $(6;\ 1)$, $(-6;\ -2)$; 5) $(5;\ 3)$, $(-1{,}5;\ -10)$; 6) $(2;\ -2)$. **13.4.** 1) $(-4;\ -7)$, $(7;\ 4)$; 2) $(2;\ 4)$, $(-5;\ -3)$; 3) $(-1;\ 4)$, $(-0{,}5;\ 2{,}5)$; 4) $(4;\ 2)$, $(20;\ -14)$. **13.5.** 1) 2 решения; 2) 3 решения; 3) 1 решение; 4) 2 решения; 5) решений нет; 6) 3 решения. **13.6.** 1) 2 решения; 2) решений нет; 3) 2 решения; 4) 4 решения. **13.7.** 1) $(4;\ 3)$; 2) $(0;\ 0)$, $(-2{,}4;\ 4{,}8)$; 3) $(4;\ -3)$, $(17;\ 10)$; 4) $(9;\ -4)$, $(4;\ 1)$; 5) $(2;\ 2{,}5)$, $(-4{,}4;\ -2{,}3)$; 6) $(4;\ -1)$, (0; 3). **13.8.** 1) (6; 9), (−9; −6); 2) (1; 0), (−0,5; 0,75); 3) (2; 4), (3; 3); 4) (1; 1), $\left(\frac{17}{3}; \frac{38}{3}\right)$. **13.9.** 1) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$, (−2; −7); 2) (2; 2), (−1; −4); 3) (1; 0), (5; −4); 4) (2; 3), $\left(\frac{2}{3}; \frac{43}{9}\right)$. **13.10.** (−4; −1). **13.11.** 2) (0,5; 5,5); 3) (−4; 52), (3; 3). **13.12.** 1) (3; 4), (4; 6); 2) (−2; 1), $\left(-6; \frac{9}{5}\right)$. **13.13.** 1) (2; 1), $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 2) (1; 5), $\left(\frac{10}{3}; -2\right)$. **13.14.** 1) (−5; 1), (1; −5), (4; 1), (1; 4); 2) (5; −2), $\left(\frac{6}{7}; \frac{15}{7}\right)$; 3) (3; 1), (−3; −1), $(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; 4) (2; 3); 5) (−3; 3), (3; −3); 6) (2; 1), $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$; 7) (1; 0), $\left(-\frac{19}{21}; -\frac{8}{21}\right)$. **13.15.** 1) (6; 3), $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$; 2) (2; −1), $\left(\frac{21}{53}; \frac{15}{53}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; 4) (9; 3), (−9; −3); 5) (−2; 1), $\left(\frac{29}{28}; -\frac{3}{14}\right)$; 6) (−3; 4), (−5; 2), (1; −4), (3; −2). **13.16.** 1) (1; 0), (0; 1); 2) (3; −1), (1; −3); 3) (4; 3), (−4; −3); 4) (−3; 2), (3; −2). **13.17.** 1) (4; 2), (−2; −4); 2) (1; 3), (−1; −3). **13.18.** 1) (1; 2), $\left(7\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$; 2) (−7; −5), (4; 6); 3) (−4; −3), (−4; 2), (3; −3), (3; 2); 4) (3; 1), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **13.19.** 1) (4; 1), (1; 4); 2) (1; −2), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$; 3) (6; 5), (−4; −5); 4) (5; 4), (−5; −4), (5; −4), (−5; 4). **13.20.** 1) $\left(7; \frac{1}{6}\right)$, $\left(1; \frac{7}{6}\right)$; 2) (−2; 4), (2; −4), $\left(\frac{94}{7}; -\frac{8}{7}\right)$, $\left(-\frac{94}{7}; \frac{8}{7}\right)$; 3) (4; 3), (3; 4), (−4; −3), (−3; −4); 4) (1; −1), $\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$, (−1; 1), $\left(\frac{1}{3}; -3\right)$. **13.21.** 1) (2; 1), (−5; −0,4); 2) (4; 0); 3) (1; 3), (3; 1), (−3; −1), (−1; −3); 4) (−2; 2), $\left(-10; \frac{2}{5}\right)$, (2; −2), $\left(10; -\frac{2}{5}\right)$. **13.22.** 1) $a = 3\sqrt{2}$ или $a = -3\sqrt{2}$; 2) $-3\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2}$; 3) $a < -3\sqrt{2}$ или $a > 3\sqrt{2}$. **13.23.** 1) $k = 2$ или $k = -2$; 2) $k < -2$ или $k > 2$; 3) $-2 < k < 2$. **13.24.** 1) Если $a > 0$, то 2 решения; если $a = 0$, то 1 решение; если $a < 0$, то решений нет; 2) если $-4 < a < 4$, то решений нет; если $a=-4$ или $a=4$, то 2 решения; если $a<-4$ или $a>4$, то 4 решения; 3) если $a>-\frac{1}{4}$, то 2 решения; если $a=-\frac{1}{4}$, то 1 решение; если $a<-\frac{1}{4}$, то решений нет; 4) если $a<-\frac{17}{4}$ или $a>2$, то решений нет; если $a=-\frac{17}{4}$ или $-2<a<2$, то 2 решения; если $-\frac{17}{4}<a<-2$, то 4 решения; если $a=-2$, то 3 решения; если $a=2$, то 1 решение. **13.25.** 1) Если $a<1$, то решений нет; если $a=1$, то 2 решения; если $a>1$, то 4 решения; 2) если $a>3\sqrt{2}$ или $a<-3$, то решений нет; если $a=3\sqrt{2}$ или $-3<a<3$, то 2 решения; если $3<a<3\sqrt{2}$, то 4 решения; если $a=3$, то 3 решения; если $a=-3$, то 1 решение; 3) если $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$, то решений нет; если $a=-2\sqrt{2}$ или $a=2\sqrt{2}$, то 2 решения; если $a<-2\sqrt{2}$ или $a>2\sqrt{2}$, то 4 решения. **13.26.** $a=-2$. *Указание*. Очевидно, что $a\neq 0$. Рассмотрите систему, состоящую из двух уравнений $ax^2+x+1=0$ и $ax^2+a^2x+a=0$. **13.28.** 5. **13.29.** $\left[0;\frac{6}{17}\right]$. **13.30.** 40. **13.33.** $7\frac{2}{17}$ динария, $9\frac{14}{17}$ динария. **13.34.** 72 км/ч, 10 км/ч.

## 14. Система двух уравнений с двумя переменными как математическая модель прикладной задачи

**14.1.** 9 и 12. **14.2.** 6 и 4. **14.3.** 80 м, 30 м. **14.4.** 7 см, 9 см. **14.5.** 36. **14.6.** 62. **14.7.** 84. **14.8.** 12 и 24. **14.9.** 6 и 9. **14.10.** 5 см, 12 см. **14.11.** 15 см, 17 см. **14.12.** 15 см и 12 см или 18 см и 10 см. **14.13.** 15 см, 6 см. **14.14.** 18 см, 12 см. **14.15.** 80 км/ч, 60 км/ч. **14.16.** 90 км/ч, 45 км/ч. **14.17.** 80 км/ч, 60 км/ч. **14.18.** 500 м/мин, 400 м/мин. **14.19.** 12 дней, 24 дня или 40 дней, 10 дней. **14.20.** 10 ч, 15 ч или 12 ч, 12 ч. **14.21.** 16 ч, 48 ч. **14.22.** 10 ч, 15 ч. **14.23.** 60 Ом, 90 Ом. **14.24.** 4 Ом, 6 Ом или 3,6 Ом, 7,2 Ом. **14.25.** 2 км/ч. **14.26.** 27 км/ч, 3 км/ч. **14.27.** 24 км/ч, 16 км/ч. **14.28.** 12 км/ч. **14.29.** 2 км/ч, 12 км/ч. **14.30.** 8,4 г/см$^3$, 6,4 г/см$^3$. **14.31.** 15 Н, 20 Н. **14.32.** 60 м, 80 м. **14.33.** 1) $-\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{2-b}$. **14.35.** 1) $(-\infty;\ 2]$; 2) $(0{,}16;+\infty)$. **14.36.** 3. **14.37.** $-0{,}5\leqslant x\leqslant 2{,}4$. **14.38.** 1) $(-\infty;-2{,}5]$; 2) $\left[\frac{5}{6};+\infty\right)$. **14.39.** 13 и 6 или 67 и 66.

## § 3. Числовые последовательности

### 15. Числовые последовательности

**15.11.** 8 членов. **15.12.** 13. **15.13.** 1, 2, 3, 4, 5. **15.14.** 8. **15.15.** 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 4) $a_n = (-1)^n + 1$. **15.16.** 1) $a_n = n^3 + 1$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. **15.18.** 2) $[-6; 1)$. **15.20.** 32 детали. **15.21.** 60 кг. **15.22.** 400 страниц.

### 16. Арифметическая прогрессия

**16.13.** 1) Да, $n = 16$; 2) нет. **16.14.** 15. **16.17.** 23. **16.18.** −6. **16.20.** 18. **16.21.** 16. **16.22.** −0,6. **16.23.** −6; −4,5; −3; −1,5; 0; 1,5; 3. **16.2 4.** 2,2; 0,4; −1,4; −3,2. **16.25.** 1) $a_1 = 5$, $d = 2{,}5$; 2) $a_1 = -6$, $d = 4$ или $a_1 = 15$, $d = \frac{1}{2}$. **16.26.** 1) $a_1 = -2$, $d = 3$; 2) $a_1 = 20$, $d = -8$ или $a_1 = 51{,}5$, $d = -11{,}5$. **16.27.** Если первый член прогрессии равен ее разности или разность прогрессии равна нулю. **16.30.** 60°. **16.31.** 1) Да, $a_1 = -3$, $d = -6$; 2) нет; 3) да, $a_1 = -2{,}8$, $d = -2{,}8$; 4) нет. **16.32.** 1) Да, $a_1 = 13$, $d = 7$; 2) да, $a_1 = \frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$; 3) нет. **16.38.** При $x = -1$ имеем: $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$; при $x = 8$ имеем: $a_1 = 60$, $a_2 = 43$, $a_3 = 26$. **16.39.** $y = 3$; $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 14$. **16.40.** $y = 1$; $a_1 = -1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 17$, $a_4 = 26$. **16.41.** $x = -1$; $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. **16.45.** 1) (7; −1), (11; −5); 2) (2; 2), (2; −2), (−2; 2), (−2; −2). **16.47.** −4. **16.48.** 1) $120\sqrt{2}$; 2) $150 - 30\sqrt{2}$. **16.50.** 24 детали. **16.51.** 40 пистолей или 60 пистолей. **16.52.** 120 %.

### 17. Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии

**17.9.** 1) 204; 2) 570. **17.10.** −310. **17.11.** 156 ударов. **17.12.** 1400. **17.13.** 710. **17.14.** 1188. **17.15.** 8, 14, 20. **17.16.** −17. **17.17.** $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$. **17.18.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) $n^2$. **17.19.** $n(n+1)$. **17.20.** 3. **17.21.** −67,2. **17.22.** 63. **17.23.** 5880. **17.24.** 2112. **17.25.** 1632. **17.26.** 61 376. **17.27.** 70 336. **17.28.** 0,3. **17.29.** 10. **17.30.** 20. **17.31.** 16. **17.32.** Да, 19, 23, 27, 31, 35. **17.33.** Нет. **17.34.** 10 с. **17.35.** 42 страницы. **17.36.** −1976. **17.37.** 348. **17.38.** $a_1 = 14$, $d = -3$. **17.39.** −10. **17.40.** 10. **17.41.** 690. **17.42.** 250. **17.43.** 1) 12; 2) 26.

**17.44.** 1) 10; 2) 69. **17.45.** $a_1=1$, $d=2$. **17.47.** $a_1=-2$, $d=2$. *Указание*. $a_n=S_n-S_{n-1}$. **17.48.** 2610. **17.52.** 1) $\frac{a-\sqrt{bc}}{\sqrt{abc}}$; 2) $\frac{4\sqrt{d}-28}{3\sqrt{d}+18}$. **17.53.** 24 км/ч. **17.54.** 2 ч. **17.55.** 200 г, 600 г.

### 18. Геометрическая прогрессия

**18.17.** 6298,56 грн. **18.18.** 29 736 единиц. **18.19.** 3600 грн. **18.20.** 600 грн. **18.21.** 5 %. **18.22.** На 15 %. **18.25.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ или $-\frac{3}{5}$. **18.26.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) 0,001. **18.27.** 6. **18.28.** 9. **18.29.** 30 и 150. **18.30.** 1; 2; 4; 8. **18.31.** Да, $b_1=\frac{5}{4}$, $q=4$. **18.32.** $x_1=49$, $q=7$. **18.33.** 1) 15 или $-15$; 2) 6 или $-6$; 3) $2\sqrt{5}$ или $-2\sqrt{5}$. **18.34.** 2. **18.35.** $\sqrt{2}$ или $-\sqrt{2}$. **18.36.** 216. **18.37.** 243. **18.39.** $P_n=\frac{3a}{2^{n-1}}$. **18.41.** 3) Последовательность является геометрической прогрессией, если $q\neq-1$. **18.43.** 80, 40, 20, 10, 5 или 80, $-40$, 20, $-10$, 5. **18.44.** 6, 18, 54, 162, 486 или 6, $-18$, 54, $-162$, 486. **18.45.** 1) $b_1=2\sqrt{3}$, $q=\sqrt{3}$ или $b_1=-2\sqrt{3}$, $q=-\sqrt{3}$; 2) $b_1=162$, $q=\frac{1}{3}$; 3) $b_1=7$, $q=-2$ или $b_1=\frac{14}{9}$, $q=-3$. **18.46.** 1) $b_1=\frac{1}{2}$, $q=4$; 2) $b_1=-1$, $q=3$. **18.47.** При $x=1$ имеем 3, 6, 12; при $x=-14$ имеем $-27$, $-9$, $-3$. **18.48.** При $x=2$ имеем 8, 4, 2; при $x=-7$ имеем $-1$, $-5$, $-25$. **18.50.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **18.51.** 3, 7, 11. **18.52.** 8, 10, 12 или 17, 10, 3. **18.53.** 5, 15, 45 или 45, 15, 5. **18.54.** 2, 6, 18 или 18, 6, 2. **18.59.** За 2 дня. **18.60.** 6 кг, 18 кг или 9 кг, 21 кг. **18.61.** 3 кг. **18.62.** 6 %. **18.63.** 10 %.

### 19. Сумма *n* первых членов геометрической прогрессии

**19.5.** 1) 1456; 2) $155\left(5+\sqrt{5}\right)$. **19.6.** 762. **19.7.** 1210. **19.8.** $-68{,}2$. **19.9.** 27. **19.10.** $-7$ или 6. **19.11.** 5. **19.12.** $(2^{72}-1)$ бактерий. **19.13.** 72. **19.14.** $\frac{9}{8}$. **19.15.** 4368. **19.16.** $-12\,285$. **19.19.** 5. **19.20.** 1) $\left[-\frac{18}{7};13\right]$; 2) $[-1;\ 4)$. **19.23.** 50 деталей, 40 деталей. **19.24.** 1) $b-5a$; 2) $x+2y$. **19.25.** На 10 % в первый раз и на 20 % во второй. **19.26.** 20 %.

**20. Упражнения для повторения курса алгебры 9 класса**

**20.17.** 6. **20.24.** 1) $(1;+\infty)$; 2) $[2;\ 3)$; 3) $[-2;\ 16]$; 4) $(-4;\ 7]$. **20.25.** 1) $-9$; 2) $-2$. **20.27.** 2. **20.29.** 1) $a<4$; 2) $a<2$; 3) $a\leqslant-3$; 4) $a\geqslant1$. **20.30.** 1) $a\geqslant6$; 2) $a\geqslant5$; 3) $a>-8$; 4) $a\leqslant0$. **20.32.** $a<-1{,}5$ и $a\neq-2$. **20.33.** $a=0$. **20.41.** 1) $b=6$, $c=9$; 2) $b=0$, $c=4$; 3) $b=-3$, $c=-10$. **20.44.** 3) $-2\sqrt{2}$ или $2\sqrt{2}$. **20.46.** $a=\frac{1}{3}$, $b=-4$, $c=10$. **20.47.** $a=2$, $b=-1$, $c=-3$. **20.48.** 1) 1; 2) $-8$. **20.50.** 1. **20.51.** 10 при $a=1$ и $b=3$. **20.54.** При $c>0{,}1$. **20.58.** 1) $a\neq4$; 2) $a<\frac{1}{2}$, или $\frac{1}{2}<a<1$, или $a>13$; 3) $a<-1$, или $-\frac{1}{5}<a<0$, или $a>0$. **20.59.** 1) $a>\frac{1}{20}$; 2) $a<-5$; 3) $a\leqslant-1$; 4) $a>\frac{5}{3}$. **20.60.** 1) $(1;\ 4)$, $(-2;\ 7)$; 2) $(3;\ -4)$, $(4;\ -3)$; 3) $(4;\ 0)$, $(0;\ -4)$; 4) $(0;\ -5)$, $(3;\ 4)$, $(-3;\ 4)$. **20.61.** 1) $(-2;\ 1)$, $(-0{,}4;\ 1{,}4)$; 2) $(-2;\ 4)$, $\left(\frac{14}{9};-\frac{20}{3}\right)$; 3) $(3;\ 5)$, $(10;\ 1{,}5)$; 4) $(4;\ -3)$, $(2;\ -6)$; 5) $(-5;\ 2)$; 6) $(3;\ 2)$, $(-2;\ -3)$; 7) $(3;\ -2)$, $(0;\ 1)$; 8) $(1;\ -2)$, $(3;\ 0)$; 9) $(8;\ 4)$, $(4;\ 8)$; 10) $(1;\ 5)$, $(-5;\ -1)$. **20.62.** 1) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$; 2) $(5;\ 1)$, $(1;\ 5)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$; 3) $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$; 4) $(6;\ 4)$, $\left(\frac{4}{5};-\frac{6}{5}\right)$; 5) $(4;\ 1)$, $\left(-\frac{1}{4};5\frac{1}{4}\right)$, $(-4;\ -1)$, $\left(\frac{1}{4};-5\frac{1}{4}\right)$; 6) $(3;\ -2)$, $(-3;\ 2)$; 7) $(10;\ 5)$, $(-5;\ -10)$; 8) $(5;\ 3)$, $(5;\ -3)$, $(-5;\ 3)$, $(-5;\ -3)$; 9) $(3;\ 4)$, $(4;\ 3)$, $(-3;\ -4)$, $(-4;\ -3)$; 10) $(1;\ 2)$, $\left(-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $(-1;\ -2)$, $\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$. **20.63.** 1) $(3;\ 4)$, $(4{,}5;\ 8{,}5)$; 2) $(3;\ 1)$, $(-1{,}5;\ -2)$; 3) $(3;\ 2)$, $(2;\ 3)$, $(-3;\ -2)$, $(-2;\ -3)$. **20.64.** 1) $a=\frac{1}{2}$; 2) $a=2\sqrt{3}$ или $a=-2\sqrt{3}$. **20.65.** 8 см, 15 см. **20.66.** 9 см, 40 см. **20.67.** 80 км/ч, 60 км/ч. **20.68.** 6 км/ч, 4 км/ч. **20.69.** 12 км/ч, 4 км/ч. **20.70.** 55 км/ч, 75 км/ч. **20.71.** 2 ч, 6 ч. **20.72.** 36 ч, 12 ч. **20.73.** 0,5 км/ч. **20.74.** 15 км/ч, 12 км/ч. **20.75.** 72 км/ч, 48 км/ч. **20.78.** $\frac{11}{12}$. **20.80.** С тридцать второго по шестьдесят четвертый. **20.83.** 2,4 см, 3,2 см. **20.84.** 6) Да, $2d$; 7) да, $4d$. **20.85.** 0, 4, 8. **20.88.** 1) $\frac{n(a-n)}{a}$; 2) $\frac{n(na-b)}{a+b}$. **20.89.** 11. **20.90.** 1) $a_1=-7$, $d=3$; 2) $a_1=5$, $d=-2$ или

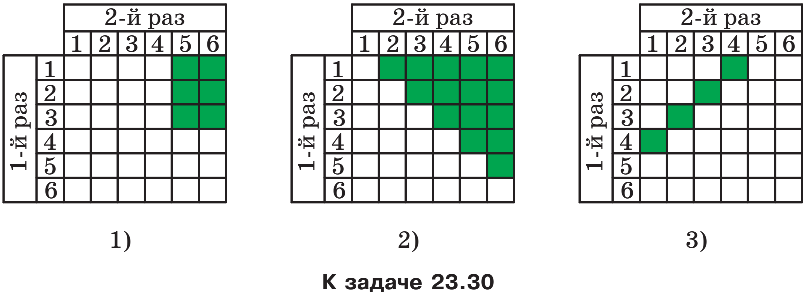
$a_1=3$, $d=-2$; 3) $a_1=d=3$ или $a_1=-33$, $d=15$; 4) $a_1=-0{,}7$, $d=0{,}3$; 5) $a_1=0$, $d=1{,}5$. **20.91.** 10. **20.92.** 255. **20.93.** $\frac{2a^2}{3}$. **20.94.** 1160. **20.95.** 2610. *Указание*. Искомая сумма $S=S_1-S_2-S_3+S_4$, где $S_1$ — сумма всех двузначных чисел, $S_2$ — сумма двузначных чисел, кратных 3, $S_3$ — сумма двузначных чисел, кратных 5, $S_4$ — сумма двузначных чисел, кратных 15. **20.96.** Да, $q=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. **20.97.** 20 %. **20.99.** 2. **20.100.** $2\frac{2}{3}$, 4, 6, 9. **20.101.** 3) Да, $q^2$; 4) да, $q$; 5) нет; 6) да, $\frac{1}{q}$.

### 21. Основные правила комбинаторики

**21.1.** 9 маршрутов. **21.2.** 6 вариантов. **21.3.** 15 вариантов. **21.4.** 70. **21.5.** 1) 8; 2) 4. **21.6.** $4\cdot3$. **21.7.** $3\cdot6\cdot5$. **21.8.** 1) $4\cdot2$; 2) $4\cdot4$. **21.9.** 1) 6; 2) 2. **21.10.** 100. **21.11.** 20. **21.12.** 25. **21.13.** 8. **21.14.** $6^3$. **21.15.** 16. **21.16.** $32\cdot24$. **21.17.** $9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot5$. **21.18.** $9\cdot10\cdot10\cdot10$. **23.19.** $11\cdot9+8\cdot7$. **21.20.** $5^5+4\cdot5^4$.

### 23. Классическое определение вероятности

**23.20.** 1) $\frac{1}{25}$; 2) $\frac{1}{20}$. **23.23.** 10 шаров. **23.24.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{1}{9}$. **23.25.** $\frac{2}{3}$. **23.26.** $\frac{2}{3}$. **23.27.** 8 карандашей. **23.28.** 19 карандашей. **23.30.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{1}{9}$. *Указание*. Благоприятные события отмечены на рисунке зеленым цветом.




К задаче 23.30

**23.31.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{5}{12}$. *Указание*. Бросить кубик дважды — то же самое, что независимо друг от друга бросить два кубика. Далее воспользуйтесь рисунком 23.2. **23.32.** У Петра. **23.33.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$.

**23.34.** $\frac{1}{5}$. **23.35.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{7}{8}$. *Указание*. Бросить монету трижды — то же самое, что независимо друг от друга бросить три монеты. Если пронумеровать монеты, то имеем 8 равновозможных результатов, как показано на рисунке.

| Первая монета | Вторая монета | Третья монета |
|---|---|---|
| Г | Г | Г |
| Г | Г | Ч |
| Г | Ч | Г |
| Г | Ч | Ч |
| Ч | Г | Г |
| Ч | Г | Ч |
| Ч | Ч | Г |
| Ч | Ч | Ч |

**К задаче 23.35**

**23.36.** $\frac{2}{n-1}$. *Указание*. Если один из знакомых сидит, то второй может с одинаковой вероятностью сесть на одно из остальных $n-1$ мест. **23.37.** $\frac{1}{2}$. *Указание*. Каждому варианту расстановки, в котором $A$ стоит перед $B$, соответствует вариант, где их поменяли местами и $A$ стоит после $B$. Поэтому количество благоприятных вариантов составляет половину всех вариантов.

## Ответы и указания к упражнениям рассказа «Суммирование» рубрики «Когда сделаны уроки»

**1.** $\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4\cdot 5^n}$. **2.** $n(n+1)^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\cdot 3^n}$. **3.** 1) $\dfrac{10(10^n-1)}{9}-n$; 2) $\dfrac{50(10^n-1)}{81}-\dfrac{5n}{9}$. **5.** 1) $\dfrac{n-1}{4n-3}$; 2) $\dfrac{n(n+2)}{n+1}$; 3) $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$. *Указание.* $\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$; 4) $1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$. *Указание.* $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$.
**6.** 1) $\dfrac{n}{2(5n+2)}$; 2) $\dfrac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}$. *Указание.* $\dfrac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+n$.
**7.** $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$. *Указание.* $\dfrac{1}{(n+1)^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$.
**8.** $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. *Указание.* $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)=$ $=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$. **9.** $S_n=\dfrac{na^n}{a-1}-\dfrac{a^n-1}{(a-1)^2}$. *Указание.* Рассмотрите равенство $aS_n=a+2a^2+3a^3+4a^4+\ldots+n\cdot a^n$.

## Ответы к заданиям «Проверьте себя» в тестовой форме

| Номер задания | Номер задачи | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 1 | Б | Г | Б | В | Б | А | В | В | В | А | Б | Г | Г | А | Г | В | Б | Б |
| 2 | Г | В | Б | В | А | Г | Г | В | В | В | В | Г | Б | Г | Б | В | В | А |
| 3 | В | Б | А | В | Г | А | А | В | В | А | Г | Б | Г | В | Г | А | Г | Б |
| 4 | Б | В | Б | Г | Г | В | А | Б | Б | В | Б | А | А | Г | В | Б | А | В |

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# Содержание

## Для тех, кто хочет знать больше

**Видано за рахунок державних коштів.**
**Продаж заборонено**

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

**АЛГЕБРА**
**підручник для 9 класу**
**загальноосвітніх навчальних закладів**
**з навчанням російською мовою**

*(Російською мовою)*

*Рекомендовано*
*Міністерством освіти і науки України*


Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп’ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 17,00. Обл.-вид. арк. 13,95.
Тираж 35 034 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
*E-mail:* contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003