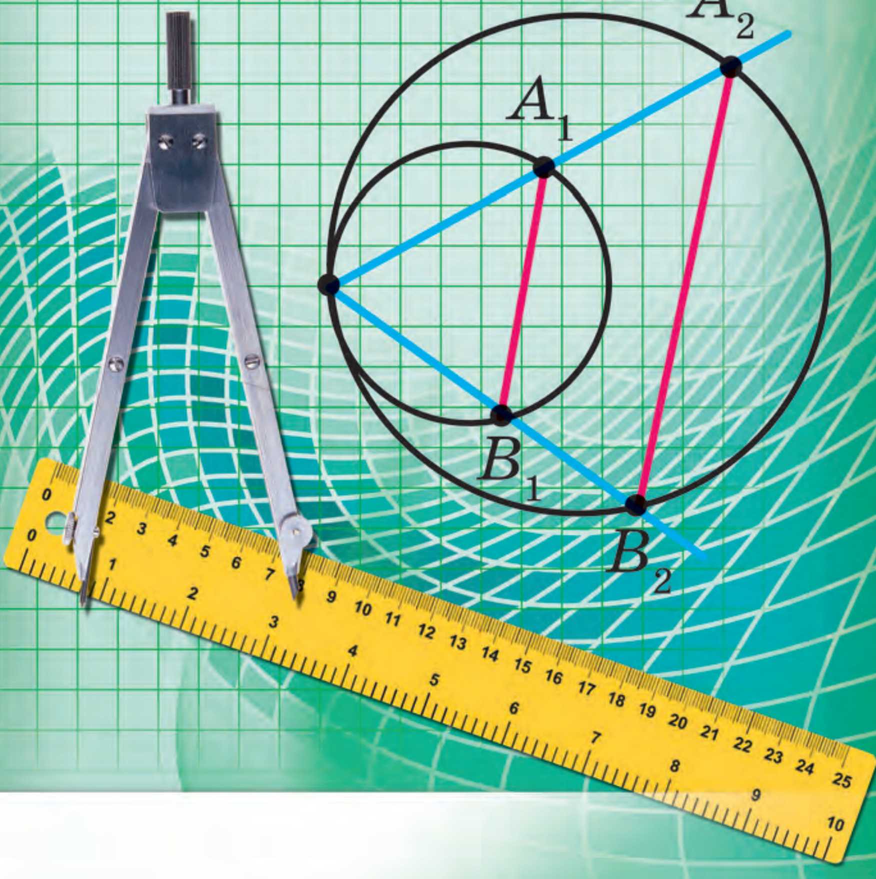
A. Merzlak
W. Połonski
M. Jakir

9

GEOMETRIA



УДК 373.167.1:512
М52

Перекладено за виданням:

Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017.

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа “Рекомендовано Міністерством освіти і науки України”:

Л. І. Філософ, доцент кафедри алгебри і математичного аналізу Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, кандидат фізико-математичних наук;

О. В. Тесленко, методист методичного центру Управління освіти адміністрації Слобідського району Харківської міської ради;

Т. А. Євтушевська, учитель Черкаської загальноосвітньої школи I–III ступенів № 7, учитель-методист

Експертка з антидискримінації в освіті

Н. М. Дашенкова, доцентка кафедри філософії, співробітниця ЦГО ХНУРЕ

Мерзляк А. Г.

М52 Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів з навч. польською мовою / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір; пер. Б.-Г.І.Смірнова. – Львів : Світ, 2017. – 240 с. : іл.

ISBN 978-966-914-074-6

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-914-074-6 (польськ.)
ISBN 978-966-474-295-2 (укр.)

OD AUTORÓW

Drogie dzieci!

W tym roku szkolnym nadal będziecie kontynuować geometrię. Spodziewamy się, że już zdążyliście polubić tą trudną ale ciekawą naukę, a więc z ciekawością będziecie opanowywać nowe wiadomości. Mamy nadzieję, że sprzyjać będzie temu ten podręcznik, który trzymacie w ręku.

Prosimy zapoznać się z jego budową.

Podręcznik składa się z pięciu paragrafów, każdy z których zawiera kilka punktów. W punktach jest podany materiał teoretyczny. Specjalną uwagę należy zwrócić na informację, którą nadrukowano drukiem **pogrubionym**, ***grubszą kursywą*** i *kursywą*, tak w książce wydzielono definicje, twierdzenia i najważniejsze matematyczne rozwiązania.

Zazwyczaj materiał teoretyczny kończy się przykładami wraz z ich rozwiązywaniem. Podane te rozwiązywania mogą służyć wzorcem zapisywania poszczególnych etapów rozwiązań.

W każdym punkcie są podane zadania do pracy samodzielnej, które należy rozwiązywać po opanowaniu materiału teoretycznego. Wśród tych zadań są łatwe, o średniej trudności oraz trudniejsze ćwiczenia i zadania, które przeważnie są oznaczone gwiazdką (*). Swoje wiadomości można sprawdzić rozwiązując zadania podane w kształcie testu, które są umieszczone na końcu każdego paragrafu.

Każdy punkt kończy się specjalną rubryką pod tytułem: “Spostrzegajcie, rysujcie, konstruujcie, fantazjujcie”. Zostałe tu umieszczone zadania, do rozwiązania których są nie potrzebne specjalne geometryczne wiadomości lecz logiczne myślenie, pomysłowość i bystrość. Te zadania są korzystne, jak witaminy. One pomogą rozwinąć umiejętności podejmowania nieoczekiwanych i niestandardowych decyzji nie tylko w matematyce, jak i w życiu codziennym.

Gdy po odrabianiu zadań domowych pozostanie czas wolny, i pragnienie dowiedzieć się więcej, to radzimy zwrócić się do rubryki “Gdy lekcje są odrobione”. Materiał, który jest tam umieszczony nie jest łatwy. Ale tym ciekawiej jest spróbować swoich sił!

A więc śmiało! Życzymy powodzenia!

Szanowni koledzy!

Spodziewamy się bardzo, że ten podręcznik będzie niezawodnym pomocnikiem w waszej ciężkiej pracy szkolnej i będziemy bardzo cieszyć się, że będzie się wam podobać.

Książka zawiera różnorodny materiał dydaktyczny. Lecz <u>w ciągu roku szkolnego niemożliwie rozwiązać wszystkie zadania, chociaż jest to niepotrzebnie</u>. Jednocześnie, posiadając większy zapas zadań, łatwiej się pracuje. Sprzyja to realizacji zasad poziomowego różnicowania oraz indywidualnego podejścia w nauczaniu.

W programach edukacyjnych do nauki matematyki dla uczniów klas 5–9 ogólnokształcących szkół zapisane jest następujące: „Treść edukacyjnych programów jest rozdzielona według tematów odpowiednich naukowych rozdziałów z określeniem liczby godzin na ich naukę. Taki podział treści z określoną liczbą godzin jest orientacyjny. Nauczycielom oraz autorom podręczników daje się prawo koregować materiał w zależności od przyjętej metodycznej koncepcji”.

Biorąc to pod uwagę uważamy, że jest możliwe przestawienie niektórych tematów naukowego materiału zgodnie z autorską koncepcją. Daje to możliwość istotnie urozmaicić materiał dydaktyczny podręcznika.

Zielonym kolorem są oznaczone numery zadań poleconych do odrabiania prac domowych, niebieskim kolorem – numery zadań, które z uwzględnieniem indywidualnych możliwości uczniów klasy według uznania nauczyciela można rozwiązać ustnie.

Materiał rubryki: “Gdy lekcje są odrobione” można zastosować przy pracy kółka matematycznego oraz zajęć fakultatywnych.

Życzymy twórczego natchnienia i cierpliwości.

ZNAKI UMOWNE

n° zadania, które odpowiadają poziomowi podstawowemu i średniemu osiągnięć w nauce;

$n^{\bullet}$ zadania, które odpowiadają poziomowi dostatecznemu osiągnięć w nauce;

$n^{\bullet\bullet}$ zadania, które odpowiadają poziomowi wysokiemu osiągnięć w nauce;

n^{*} zadania dla kółek matematycznych oraz zajęć fakultatywnych;

zadania pod klucz, wynik których można zastosować podczas rozwiązywania innych zadań;

⊙ udowodnienie twierdzeń, które odpowiadają poziomowi dostatecznemu osiągnięć w nauce;

udowodnienie twierdzeń, które odpowiadają poziomowi wysokiemu osiągnięć w nauce;

udowodnienie twierdzeń, które nie obowiązkowe w nauce;

◀ koniec udowodnienia twierdzeń, rozwiązywania zadań;


rubryka „Gdy lekcje są odrobione”.

ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW §1

W tym paragrafie dowiecie się co oznacza sinus, kosinus i tangens kąta α, gdzie $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Znając dwa boki trójkąta i kąt między nimi nauczycie się obliczać trzeci bok, oraz według boku i kątów przyległych do niego obliczać dwa inne boki trójkąta.

W klasie 8. nauczyliście się rozwiązywać trójkąty prostokątne. Gdy nauczycie się ten paragraf, to będziecie umieli rozwiązywać dowolne trójkąty.

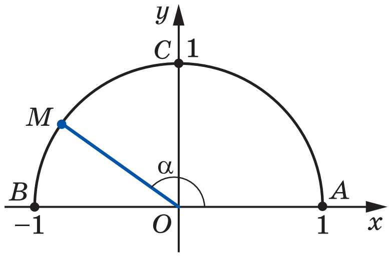
Nauczycie się wzorów, za pomocą których można obliczyć pole trójkąta.

1. Sinus, kosinus i tangens kąta od 0° do 180°

Z definicjami sinusa, kosinusa i tangensa kąta zapoznaliście się w klasie 8. Rozpatrzymy te pojęcia dla dowolnego kąta α, gdzie $\mathbf{0° \leqslant \alpha \leqslant 180°}$.

W górnej części płaszczyzny układu współrzędnych rozpatrzymy połowę okręgu o promieniu o długości 1 i ze środkiem w początku układu współrzędnych (rys. 1). Taki półokrąg nazywa się **jednostkowym**.

Będziemy uważać, że **kątowi** α $\mathbf{(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)}$ **odpowiada punkt** M półokręgu jednostkowego, jeżeli $\angle MOA = \alpha$, gdzie punkty O i A posiadają odpowiednio współrzędne (0; 0) i (1; 0) (rys. 1.1). Na przykład, na rysunku 1.1, kątowi który wynosi 90°, odpowiada punkt C; kątowi, który wynosi 180°, – odpowiada punkt B; kątowi, który wynosi 0°, – odpowiada punkt A.



Rys. 1.1

Przypuśćmy, że α – ostry kąt. Jemu odpowiada wielkość łuku $M\,(x;\,y)$ należącego do łuku AC jednostkowego półokręgu (rys. 1.2). W trójkącie prostokątnym OMN, otrzymamy:

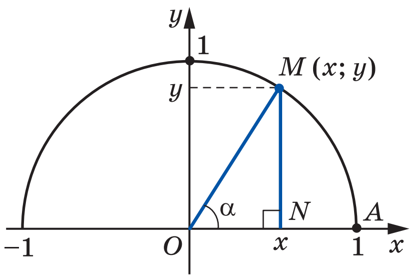
$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM},\quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Ponieważ $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, to

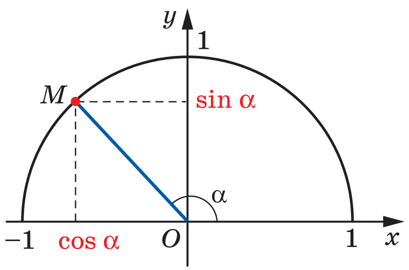
$$\cos\,\alpha = x,\ \sin\,\alpha = y.$$

A więc, kosinus i sinus kąta ostrego α – to odpowiednio odcięta i rzędna punktu M jednostkowego półokręgu, która odpowiada kątowi α.

Otrzymany wynik podpowiada, w jaki sposób określić sinus i kosinus dowolnego kąta α, gdzie $\mathbf{0° \leqslant \alpha \leqslant 180°}$.



Rys. 1.2



Rys. 1.3

Definicja. Kosinusem i sinusem kąta α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ nazywa się odpowiednio odcięta i rzędna punktu M jednostkowego półokręgu, który odpowiada kątowi α (rys. 1.3)**.**

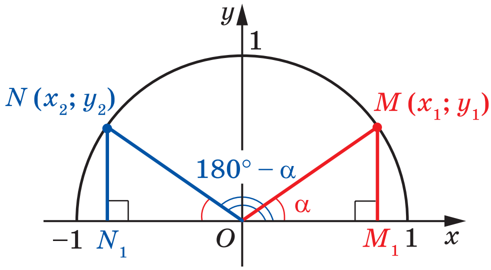
Zastosowując tę definicję można na przykład, ustalić, że $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Jeżeli $M\,(x;\,y)$ – dowolny punkt jednostkowego półokręgu, to $\mathbf{-1 \leqslant x \leqslant 1}$ i $\mathbf{0 \leqslant y \leqslant 1}$. A więc, dla dowolnego kąta α, gdzie $\mathbf{0° \leqslant \alpha \leqslant 180°}$, otrzymamy:

$$\mathbf{0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,}$$

$$\mathbf{-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.}$$

Jeżeli α – kąt rozwarty, to odcięta punktu, który odpowiada temu kątowi jest ujemna. A więc, kosinus kąta rozwartego jest liczbą ujemną. Prawdziwa jest następująca wypowiedź: jeżeli $\cos\,\alpha < 0$, to α – rozwarty lub półpełny kąt.



Rys. 1.4

Z kursu geometrii klasy 8. wiecie, że dla dowolnego kąta ostrego α spełniają się równości:

$$\mathbf{sin}\ (\mathbf{90°} - \alpha) = \mathbf{cos}\ \alpha,$$
$$\mathbf{cos}\ (\mathbf{90°} - \alpha) = \mathbf{sin}\ \alpha$$

Wzory te spełniają się i dla $\alpha = 0°$ i dla $\alpha = 90°$ (przekonajcie się w tym samodzielnie).

Przypuśćmy, że kątom α i $180° - \alpha$, gdzie $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 90°$ i $\alpha \neq 180°$, odpowiadają punkty $M\ (x_1; y_1)$ i $N\ (x_2; y_2)$ jednostkowego półokręgu (rys. 1.4).

Trójkąty prostokątne OMM_1 i ONN_1 są przystające względem przeciwprostokątnej i kącie ostrym ($OM = ON = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Stąd $y_2 = y_1$ i $x_2 = -x_1$. A więc,

$$\mathbf{sin}\ (\mathbf{180°} - \alpha) = \mathbf{sin}\ \alpha,$$
$$\mathbf{cos}\ (\mathbf{180°} - \alpha) = -\mathbf{cos}\ \alpha$$

Przekonajcie się samodzielnie, że te równości są prawdziwe dla $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$.

Jeżeli α – kąt ostry, jak wiecie z kursu geometrii klasy 8., to spełnia się tożsamość, która nazywa się **podstawową trygonometryczną tożsamością**:

$$\mathbf{sin}^2\,\alpha + \mathbf{cos}^2\,\alpha = \mathbf{1}$$

Równość ta spełnia się dla $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ (przekonajcie się w tym samodzielnie).

Przypuśćmy, że α – kąt rozwarty. Wtedy kąt $180° - \alpha$ jest kątem ostrym. Otrzymamy:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin\ (180° - \alpha))^2 + (-\cos\ (180° - \alpha))^2 =$$
$$= \sin^2 (180° - \alpha) + \cos^2 (180° - \alpha) = 1.$$

A więc, równość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ spełnia się dla wszystkich $\mathbf{0° \leqslant \alpha \leqslant 180°}$.

Definicja. Tangensem kąta α, gdzie $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ i $\alpha \neq 90°$, nazywa się stosunek $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, czyli

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Ponieważ $\cos 90° = 0$, to $\operatorname{tg}\alpha$ nie określony dla $\alpha = 90°$.

Oczywiście, że każdemu kątowi α **($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$)** odpowiada *jeden* punkt jednostkowego półokręgu. A więc, każdemu kątowi α odpowiada jedna liczba, która jest wartością sinusa (kosinusa, tangensa dla $\alpha \neq 90°$). Dlatego, zależność wartości sinusa (kosinusa, tangensa) od wielkości kąta jest funkcjonalną.

Funkcje $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, które odpowiadają tym funkcjonalnym zależnościom, nazywają się **trygonometrycznymi funkcjami** kąta α.

Zadanie 1. Udowodnij, że $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Rozwiązanie

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha. \blacktriangleleft$$

Zadanie 2. Oblicz $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$.

Rozwiązanie. Mamy: $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}. \blacktriangleleft$$

?

1. Jaki półokrąg okręgu nazywa się jednostkowym?
2. Objaśnij kiedy mówi się, że kątowi α 2. odpowiada punkt M jednostkowego półokręgu.
3. Co nazywa się sinusem kąta α, gdy $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
4. Co nazywa się kosinusem kąta α, gdy $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
5. Ile wynosi $\sin 0°$, $\cos 0°$, $\sin 90°$, $\cos 90°$, $\sin 180°$, $\cos 180°$?
6. W jakich przedziałach leżą wartości $\sin\alpha$, gdy $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
7. W jakich przedziałach leżą wartości $\cos\alpha$, gdy $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
8. Jaką liczbą – dodatnią czy ujemną jest sinus kąta ostrego? sinus kąta rozwartego? kosinus kąta ostrego? kosinus kąta rozwartego?
9. Jakim kątem będzie kąt α, gdy $\cos\alpha < 0$?
10. Ile wynosi $\sin(180° - \alpha)$? $\cos(180° - \alpha)$?

11. W jaki sposób są powiązane między sobą sinus i cosinus tego samego kąta?
12. Co nazywa się tangensem α, gdzie $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ i $\alpha \neq 90°$?
13. Dlaczego $\operatorname{tg} \alpha$ jest nie określony dla $\alpha = 90°$?
14. Jaką ogólną nazwę mają funkcję $f(\alpha) = \sin \alpha$, $g(\alpha) = \cos \alpha$ i $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$?

ZADANIA PRAKTYCZNE

1.1.° Wykreśl jednostkowy półokrąg, biorąc za jednostkę taki odcinek, długość którego jest 5 razy większa od kratki w zeszycie. Skonstruuj kąt o wierzchołku w początku układu współrzędnych, zaś jeden z jego ramion – dodatnia część osi odciętych:

1) kosinus którego wynosi $\frac{1}{5}$;
2) kosinus którego wynosi –0,4;
3) sinus którego wynosi 0,6;
4) sinus którego wynosi 1;
5) kosinus którego wynosi 0;
6) kosinus którego wynosi –1.

ĆWICZENIA

1.2.° Ile wynosi:

1) $\sin(180° - \alpha)$, jeżeli $\sin \alpha = \frac{1}{3}$;
2) $\cos(180° - \alpha)$, jeżeli $\cos \alpha = 0{,}7$;
3) $\cos(180° - \alpha)$, jeżeli $\cos \alpha = -\frac{4}{9}$;
4) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = -5$?

1.3.° Kąty α i β przyległe, $\cos \alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Oblicz $\cos \beta$.
2) Który z kątów α czy β jest ostrym, a który – rozwartym?

1.4.° Oblicz wartość wyrażenia:

1) $2 \sin 90° + 3 \cos 0°$;
2) $3 \sin 0° - 5 \cos 180°$;
3) $\operatorname{tg} 23° \cdot \operatorname{tg} 0° \cdot \operatorname{tg} 106°$;
4) $6 \operatorname{tg} 180° + 5 \sin 180°$;
5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$;
6) $\dfrac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$.

1.5.° Oblicz:

1) $4 \cos 90° + 2 \cos 180° - \operatorname{tg} 180°$;
2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90°$.

1.6.° Ile wynosi sinus kąta, jeżeli jego kosinus jest równy:

1) 1; 2) 0?

1.7.° Ile wynosi kosinus kąta, jeżeli jego sinus jest równy:

1) 1; 2) 0?

1.8.° Oblicz sin 135°, cos 135°, tg 135°.

1.9.° Oblicz sin 150°, cos 150°, tg 150°.

1.10.° Czy istnieje kąt α, dla którego:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$; 5) $\cos\alpha = 1{,}001$;

2) $\sin\alpha = 0{,}3$; 4) $\cos\alpha = -0{,}99$; 6) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

1.11.• Oblicz:

1) $\cos\alpha$, jeżeli $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

2) $\cos\alpha$, jeżeli $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

3) $\cos\alpha$, jeżeli $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

4) $\sin\alpha$, jeżeli $\cos\alpha = -0{,}8$;

5) $\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

1.12.• Oblicz:

1) $\cos\alpha$, jeżeli $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

2) $\sin\alpha$, jeżeli $\cos\alpha = \frac{1}{6}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ i $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

1.13.• Czy prawidłowa jest wypowiedź (odpowiedź uzasadnijcie):

1) kosinus kąta ostrego jest większy od kosinusa kąta rozwartego;
2) istnieje kąt rozwarty dla którego wartość sinusa i kosinusa jest jednakowa;
3) istnieje kąt, dla którego sinus i kosinus jest równy zeru;
4) kosinus kąta trójkąta może być wyrażony liczbą ujemną;
5) wartość sinusa kąta trójkąta może być liczbą ujemną;
6) wartość kosinusa kąta trójkąta jest równa zeru;
7) wartość sinusa kąta trójkąta jest równa zeru;

8) wartość kosinusa kąta trójkąta jest równa –1;
9) wartość sinusa kąta trójkąta jest równa 1;
10) sinus kąta, odmiennego od prostego jest mniejszy od sinusa kąta prostego;
11) kosinus kąta rozwartego jest mniejszy od kosinusa kąta odmiennego od prostego;
12) sinusy kątów przyległych są równe;
13) kosinusy nie równych kątów przyległych są wyrażone liczbami przeciwnymi;
14) jeżeli kosinusy dwóch kątów są równe, to równe są te kąty;
15) jeżeli sinusy dwóch kątów są równe, to kąty te są równe;
16) tangens kąta ostrego jest większy od tangensa kąta rozwartego?

1.14.• Porównaj wartość wyrażenia z zerem:

1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$.

1.15.• Oblicz wartość wyrażenia:

1) $2 \sin 120° + 4 \cos 150° - 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $2 \cos^2 120° - 8 \sin^2 150° + 3 \cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{tg} 60° - \cos 135°)^2$.

1.16.• Ile wynosi wartość wyrażenia:

1) $2 \sin 150° - 4 \cos 120°$;
2) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° - \operatorname{tg} 120° \cos 135°)^2$?

1.17.• Nie korzystając z kalkulatora, oblicz wartość wyrażenia:

1) $\dfrac{\sin 18°}{\sin 162°}$; 2) $\dfrac{\cos 18°}{\cos 162°}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 162°}$.

1.18.• Nie korzystając z kalkulatora, oblicz wartość wyrażenia:

1) $\dfrac{\sin 28°}{\sin 152°}$; 2) $\dfrac{\cos 49°}{\cos 131°}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 14°}{\operatorname{tg} 166°}$.

1.19.• Oblicz sumy kwadratów sinusów wszystkich kątów w trójkącie prostokątnym.

1.20.• Oblicz sumy kwadratów kosinusów wszystkich kątów w trójkącie prostokątnym.

1.21.• W trójkącie ABC wiadomo że $\angle B = 60°$, punkt O – środek wpisanego okręgu. Oblicz wartość kosinusa kąta AOC?

1.22.• Punkt O – środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC, $\cos \angle BOC = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz kąt A trójkąta.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

1.23. W równoległoboku wysokość opuszczona z kąta rozwartego wynosi 5 cm i dzieli bok równoległoboku na połowę. Kąt ostry w równoległoboku jest równy 30°. Oblicz długość przekątnej równoległoboku poprowadzonej z kąta rozwartego oraz kąty, które ona tworzy z bokami równoległoboku.

1.24. W trapezie $ABCD$ prosta CE jest równoległa do ramienia AB i dzieli podstawę AD na odcinki AE i DE, tak, że $AE = 7$ cm; $DE = 10$ cm. Oblicz długość linii środkowej trapezu.

PRZYGOTOWUJEMY SIĘ DO NOWEGO TEMATU

1.25. Dwa boki trójkąta są równe 8 cm i 11 cm. Czy kąt, który jest przeciwległy bokowi 8 cm, może być:
1) rozwartym; 2) prostym?
Odpowiedź uzasadnij.

1.26. W trójkącie ABC poprowadzono wysokość BD, $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $AB = 10$ cm. Oblicz bok BC.

1.27. Oblicz wysokość BD w trójkącie ABC oraz rzut boku AB na prostą AC, jeżeli $\angle BAC = 150°$, $AB = 12$ cm.

SPOSTRZEGAJCIE, RYSUJCIE, KONSTRUUJCIE, FANTAZJUJCIE

1.28. Przekonaj się, że dowolny trójkąt można podzielić na 3 części w taki sposób, że z otrzymanych części można ułożyć prostokąt.

2. Twierdzenie kosinusów

Z pierwszej cechy przystawania trójkątów wynika, że wiedząc dwa boki trójkąta i kąt zawarty między nimi można skonstruować dokładnie jeden trójkąt. A więc, według wyżej wymienionymi elementami można, na przykład, obliczyć trzeci bok trójkąta. W jaki sposób to można zrobić pomoże następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1 (twierdzenie kosinusów). ***Kwadrat boku trójkąta jest równy sumie kwadratów dwóch pozostałych boków minus podwojony iloczyn tych boków i kosinus kąta zawartego między nimi.***

Dowód. Rozpatrzymy trójkąt ABC. Udowodnimy na przykład, że

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Istnieją trzy przypadki:
1) kąt A ostry;
2) kąt A rozwarty;
3) kąt A prosty.

Pierwszy przypadek. Przypuśćmy, że kąt A ostry. Wówczas chociażby jeden z kątów B lub C jest ostry.

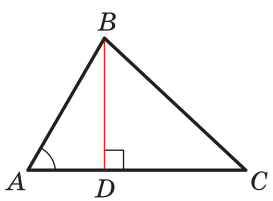
• Przyjmiemy, że $\angle C < 90°$. Poprowadzimy wysokość BD. Ona będzie całkowicie leżeć wewnątrz trójkąta ABC (rys. 2.1).

W trójkącie prostokątnym ABD mamy:

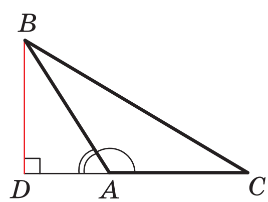
$$BD = AB \cdot \sin A, \quad AD = AB \cdot \cos A.$$

W trójkącie prostokątnym BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$
$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$
$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$



Rys. 2.1



Rys. 2.2

• Przypuśćmy, że $\angle B < 90°$. Z wierzchołka kąt C w trójkącie ABC poprowadzimy wysokość. Ona będzie całkowicie leżeć wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnienie tego przypadku jest analogiczne wyżej wymienionego. Udowodnijcie to samodzielnie.

Drugi przypadek. Przypuśćmy, że kąt A jest rozwarty. W trójkącie ABC poprowadzimy wysokość BD (rys. 2.2).

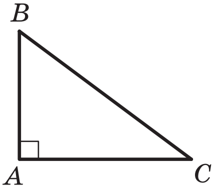
W trójkącie prostokątnym ABD mamy: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$

$$= AB \cdot \sin(180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC,$$
$$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos(180° - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

W trójkącie prostokątnym BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$$

Trzeci przypadek. Przypuśćmy, że kąt A prosty (rys. 2.3). Wtedy $\cos A = 0$. Należy udowodnić, że $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Ta równość wynika z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC. ◀



Rys. 2.3

Udowodnienie twierdzenia kosinusów wskazuje, że *twierdzenie Pitagorasa jest szczególnym przypadkiem twierdzenia kosinusów, zaś twierdzenie kosinusów jest uogólniającym twierdzeniem Pitagorasa.*

Jeżeli skorzystać się oznaczeniami dla długości boków i wielkości kątów trójkąta ABC (patrz. wyklejkę), to, na przykład dla strony o długości a, można zapisać:

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}$$

Znając trzy boki trójkątów można zastosować twierdzenie kosinusów aby określić rodzaj trójkąta: czy on jest ostrokątny, rozwartokątny, czy prostokątny.

Twierdzenie 2.2 (wniosek z twierdzenia kosinusów). ***Przypuśćmy, że a, b i c – długości boków trójkąta, przy czym a – długość największego boku trójkąta. Jeżeli $a^2 < b^2 + c^2$, to trójkąt jest ostrokątny. Jeżeli $a^2 > b^2 + c^2$, to trójkąt jest rozwartokątny. Jeżeli $a^2 = b^2 + c^2$, to trójkąt jest prostokątny.***

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem kosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Stąd $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

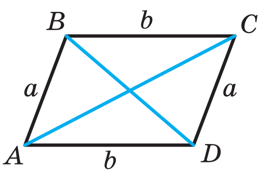
Przypuśćmy, że $a^2 < b^2 + c^2$. Wtedy $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Stąd $2bc \cos \alpha > 0$, to znaczy, że $\cos \alpha > 0$. A więc, kąt α ostry.

Ponieważ a – długość największego boku trójkąta, to naprzeciw tego boku leży największy kąt, który, jak wyżej udowodniono, jest ostry. A więc, w tym przypadku trójkąt jest ostrokątny.

Przypuśćmy, że $a^2 > b^2 + c^2$. Wtedy $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Stąd $2bc \cos \alpha < 0$, to oznacza, że $\cos \alpha < 0$. Dlatego kąt α jest kątem rozwartym. A więc, w tym przypadku trójkąt jest rozwartokątny.

Przypuśćmy, że $a^2 = b^2 + c^2$. Wtedy $2bc \cos \alpha = 0$. Stąd $\cos \alpha = 0$. A więc, $\alpha = 90°$. W tym przypadku trójkąt jest prostokątny. ◀

Zadanie 1. Udowodnij, że suma kwadratów przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów jego boków.



Rys. 2.4

Rozwiązanie. Na rysunku 2.4 przedstawiono równoległobok $ABCD$.

Przypuśćmy, że $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, wtedy $\angle ADC = 180° - \alpha$.

Z trójkąta ABD zgodnie z twierdzeniem kosinusów otrzymamy:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (1)$$

Z trójkąta ACD zgodnie z twierdzeniem kosinusów otrzymamy:

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$. Stąd

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Po obustronnym dodawaniu równości (1) i (2) otrzymamy:

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2. \blacktriangleleft$$

Zadanie 2. W trójkącie ABC bok AB jest o 4 cm dłuższy od boku BC, oraz $\angle B = 120°$, $AC = 14$ cm. Oblicz boki AB i BC.

Rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem kosinusów

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos B.$$

Przypuśćmy, że $BC = x$ cm, $x > 0$, wtedy $AB = (x + 4)$ cm.

Otrzymamy:

$$14^2 = (x + 4)^2 + x^2 - 2x(x + 4)\cos 120°;$$

$$196 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x(x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196 = 2x^2 + 8x + 16 + x(x + 4);$$

$$3x^2 + 12x - 180 = 0;$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0;$$

$$x_1 = 6;\ x_2 = -10.$$

Pierwiastek -10 nie spełnia warunku, że $x > 0$.

A więc, $BC = 6$ cm, $AB = 10$ cm.

Odpowiedź: 10 cm, 6 cm. ◀

Zadanie 3. W trójkącie ABC na boku BC obrano punkt D tak, że $CD : AD = 1 : 2$. Oblicz odcinek BD, jeżeli $AB = 14$ cm, $BC = 13$ cm, $AC = 15$ cm.

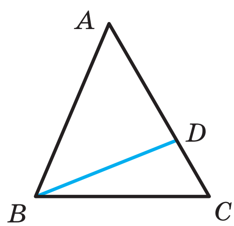
Rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem kosinusa dla trójkąta ABC (rys. 2.5) otrzymamy:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos C.$$

Stąd $\cos C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC\cdot BC} =$

$$= \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2\cdot15\cdot13} = \frac{225 + 169 - 196}{2\cdot15\cdot13} = \frac{33}{65}.$$

Ponieważ $CD : AD = 1 : 2$, to $CD = \dfrac{1}{3}AC = 5$ (cm).



Rys. 2.5

Wtedy z trójkąta BCD otrzymamy:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

A więc, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (cm).

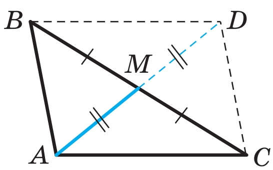
Odpowiedź: $8\sqrt{2}$ cm. ◀

Zadanie 4. Dwa boki trójkąta są równe 23 cm i 30 cm, zaś środkowa poprowadzona do wymienionego większego boku wynosi 10 cm. Oblicz trzeci bok trójkąta.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że w trójkącie ABC wiadomo, że $AC = 23$ cm, $BC = 30$ cm, odcinek AM – środkowa, $AM = 10$ cm.

Na przedłużeniu odcinka AM od punktu M odłożymy odcinek równy długości środkowej AM (rys. 2.6). Wtedy $AD = 20$ cm.

W czworokącie $ABDC$ przekątne AD i BC dzielą się punktem M na połowę ($BM = MC$ według założenia, $AM = MD$ według konstrukcji). A więc, czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem.



Rys. 2.6

Ponieważ suma kwadratów przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów wszystkich jego boków (patrz zadanie kluczowe 1), to

$$AD^2 + BC^2 = 2\,(AB^2 + AC^2).$$

Wtedy

$$20^2 + 30^2 = 2\,(AB^2 + 23^2);$$
$$400 + 900 = 2\,(AB^2 + 529);$$
$$AB^2 = 121;$$
$$AB = 11 \text{ cm}.$$

Odpowiedź: 11 cm. ◀

1. Sformułuj twierdzenie kosinusów.
2. Trójkąt o bokach a, b i c, gdzie a – długość największego boku, jest ostrokątny, rozwartokątny, prostokątny, gdy:
   1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 > b^2 + c^2$; 3) $a^2 = b^2 + c^2$?
3. Jaka jest zależność między bokami a przekątnymi w równoległoboku?

ĆWICZENIA

2.1.° Oblicz niewiadomy bok w trójkącie ABC, jeżeli:

1) $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm, $\angle B = 60°$;

2) $AB = 3$ cm, $AC = 2\sqrt{2}$ cm, $\angle A = 135°$.

2.2.° Oblicz niewiadomy bok trójkąta DEF, gdy:
1) $DE = 4$ cm, $DF = 2\sqrt{3}$ cm, $\angle D = 30°$;
2) $DF = 3$ cm, $EF = 5$ cm, $\angle F = 120°$.

2.3.° Boki trójkąta są równe 12 cm, 20 cm i 28 cm. Oblicz największy kąt trójkąta.

2.4.° Boki trójkąta są równe $\sqrt{18}$ cm, 5 cm i 7 cm. Oblicz średniej wielkości kąt trójkąta.

2.5.° Ustal czy trójkąt jest ostrokątny, rozwartokątny, prostokątny o bokach równych:
1) 5 cm, 7 cm i 9 cm;
2) 5 cm, 12 cm i 13 cm;
3) 10 cm, 15 cm i 18 cm.

2.6.° Boki trójkąta są równe 7 cm, 8 cm i 12 cm. Czy dany trójkąt jest ostrokątny?

2.7.° Udowodnij, że trójkąt o bokach równych 8 cm, 15 cm i 17 cm jest prostokątny.

2.8.° Boki równoległoboku są równe $2\sqrt{2}$ cm i 5 cm, i jeden z jego kątów ma 45°. Oblicz przekątne równoległoboku.

2.9.° W trapezie $ABCD$ wiadome są $BC \parallel AD$, $BC = 3$ cm, $AD = 10$ cm, $CD = 4$ cm, $\angle D = 60°$. Oblicz przekątne trapezu.

2.10.° Na ramieniu AB w trójkącie równoramiennym ABC obrano punkt D tak, że $AD : DB = 2 : 1$. Oblicz odcinek CD, jeżeli $AB = 6$ cm.

2.11.° Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC obrano punkt M tak, że $AM : BM = 1 : 3$. 2.11. Oblicz odcinek CM, jeżeli $AC = BC = 4$ cm.

2.12.• Dwa boki trójkąta są równe 3 cm i 4 cm, a sinus kąta zawartego między nimi wynosi $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Oblicz trzeci bok trójkąta. Ile rozwiązań posiada to zadanie?

2.13.• W trójkącie ABC wiadomo, że $\angle C = 90°$, $AC = 20$ cm, $BC = 15$ cm. Na boku AB oznaczono punkt M tak, że $BM = 4$ cm. Oblicz odcinek CM.

2.14.• Na przedłużeniu przeciwprostokątnej AB w trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC poza punktem WB obrano punkt D tak, że $BD = BC$. Oblicz odcinek CD, jeżeli przyprostokątna trójkąta ABC jest równa a.

2.15.• W trójkącie ABC wiadomo, że $\angle C = 90°$, $AB = 13$ cm, $AC = 12$ cm. Na przedłużeniu przeciwprostokątnej AB poza punktem B obrano punkt D tak, że $BD = 26$ cm. Oblicz odcinek CD.

2.16.• Środek okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny jest oddalony od końców przeciwprostokątnej na odległości a i b. Oblicz przeciwprostokątną trójkąta.

2.17.• Punkt O – środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC, gdzie $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Oblicz bok AB.

2.18.• Dwa boki trójkąta mają się jak 5 : 8, a kąt zawarty między nimi równy 60°, oraz trzeci bok trójkąta jest równy 21 cm. Oblicz niewiadome boki trójkąta.

2.19.• Dwa boki trójkąta mają się, jak $1 : 2\sqrt{3}$ a kąt zawarty między nimi równy 30°. Trzeci bok trójkąta jest równy $2\sqrt{7}$ cm. Oblicz niewiadome boki trójkąta.

2.20.• Suma dwóch boków trójkąta wynosi 8 cm, a kąt zawarty między nimi wynosi 120°, długość trzeciego boku – 7 cm. Oblicz niewiadome boki trójkąta.

2.21.• Dwa boki trójkąta mają się jak 5 : 3, a kąt zawarty między nimi równy 120°. Oblicz boki trójkąta, jeżeli jego obwód wynosi 30 cm.

2.22.• Dwa boki trójkąta są równe 16 cm i 14 cm, a kąt przeciwległy do mniejszego z danych boków jest równy 60°. Oblicz niewiadomy bok trójkąta.

2.23.• Dwa boki trójkąta są równe 15 cm i 35 cm, a kąt przeciwległy do większego z wiadomych boków jest równy 120°. Oblicz obwód trójkąta.

2.24.• Na boku BC w trójkącie ABC oznaczono punkt D tak, że $CD = 14$ cm. Oblicz odcinek AD, jeżeli $AB = 37$ cm, $BC = 44$ cm i $AC = 15$ cm.

2.25.• Na boku AB w trójkącie ABC wybrano punkt K, a na przedłużeniu boku BC poza punktem C – punkt M. Oblicz odcinek MK, jeżeli $AB = 15$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 13$ cm, $AK = 8$ cm, $MC = 3$ cm.

2.26.• Jeden z boków trójkąta jest 2 razy dłuższy od drugiego, a kąt zawarty między tymi bokami jest równy 60°. Udowodnij, że dany trójkąt jest prostokątny.

2.27.• Udowodnij, że gdy kwadrat boku trójkąta jest równy niepełnemu kwadratowi sumy dwóch innych boków, to kąt przeciwległy do tego boku jest równy 120°.

2.28.$^{\bullet}$ Udowodnij, że gdy kwadrat boku trójkąta jest równy niepełnemu kwadratowi różnicy dwóch pozostałych boków, to kąt przeciwległy do tego boku jest równy 60°.

2.29.$^{\bullet}$ Dwa boki równoległoboku są równe 7 cm i 11 cm, a jedna z jego przekątnych – 12 cm. Oblicz drugą przekątną równoległoboku.

2.30.$^{\bullet}$ Przekątne równoległoboku są równe 13 cm i 11 cm, zaś jeden z jego boków – 9 cm. Oblicz obwód równoległoboku.

2.31.$^{\bullet}$ Przekątne równoległoboku są równe 8 cm i 14 cm, a jeden z jego boków o 2 cm dłuższy od drugiego. Oblicz boki równoległoboku.

2.32.$^{\bullet}$ Boki równoległoboku są równe 11 cm i 23 cm, a jego przekątne mają się jak 2 i 3. Oblicz przekątne równoległoboku.

2.33.$^{\bullet\bullet}$ W trapezie $ABCD$ wiadomo, że $AD \parallel BC$, $AB = 5$ cm, $BC = 9$ cm, $AD = 16$ cm, $\cos A = \frac{1}{7}$. Oblicz ramię CD trapezu.

2.34.$^{\bullet\bullet}$ W trapezie $ABCD$ wiadomo, że $AD \parallel BC$, $AB = \sqrt{15}$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 4$ cm, $AD = 11$ cm. Oblicz kosinus kąta D trapezu.

2.35.$^{\bullet\bullet}$ Oblicz przekątną AC w czworokącie $ABCD$, jeżeli dookoła niego można opisać okrąg i $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 5$ cm, $AD = 6$ cm.

2.36.$^{\bullet\bullet}$ Czy można wpisać okrąg na czworokącie $ABCD$, jeżeli $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm, $BD = 6$ cm i $\angle C = 30°$?

2.37.$^{\bullet\bullet}$ Udowodnij, że naprzeciw większego kąta równoległoboku leży większa przekątna. Sformułuj i udowodnij odwrotne twierdzenie.

2.38.$^{\bullet\bullet}$ Boki trójkąta są równe 12 cm, 15 cm i 18 cm. Oblicz dwusieczną trójkąta. Poprowadzoną z wierzchołka jego największego kąta.

2.39.$^{\bullet\bullet}$ Podstawa trójkąta równoramiennego jest równa 5 cm, a jego ramię – 20 cm. Oblicz dwusieczną trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka kąta przy jego podstawie.

2.40.$^{\bullet\bullet}$ Boki trójkąta są równe 16 cm, 18 cm i 26 cm. Oblicz środkową trójkąta poprowadzoną do jego większego boku.

2.41.$^{\bullet\bullet}$ Podstawa trójkąta równoramiennego jest równa $4\sqrt{2}$ cm, a środkowa poprowadzona do ramienia – 5 cm. Oblicz ramię trójkąta.

2.42.•• Dwa boki trójkąta są równe 12 cm i 14 cm, a środkowa poprowadzona do trzeciego boku – 7 cm. Oblicz niewiadomy bok trójkąta.

2.43.•• W trójkącie ABC wiadomo, że $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$. Na przedłużeniu odcinka AB od punktu B wybrano punkt D tak, że $BD = 2AB$. Udowodnij, że trójkąt ACD równoramienny.

2.44.•• Udowodnij, że w trójkącie o bokach a, b i c spełnia się równość $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, gdzie m_c – środkowa trójkąta poprowadzona do boku, długość którego wynosi c.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

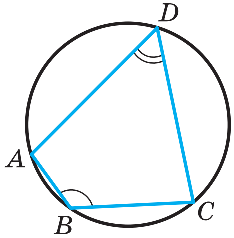
2.45. W okręgu poprowadzono średnicę AC i cięciwę AB, długość której jest równa promieniowi okręgu. Oblicz kąty trójkąta ABC.

2.46. Jeden z kątów, utworzonych przy przecięciu dwusiecznych kątów równoległoboku z jego bokiem, jest równy jednemu z kątów równoległoboku. Oblicz kąty równoległoboku.

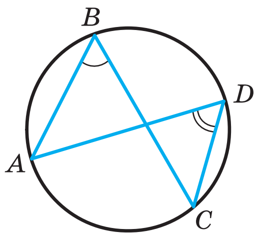
2.47. W trójkącie ABC wpisano równoległobok $ADEF$ tak, że kąt A jest kątem wspólnym, a punkty D, E i F leżą odpowiednio na bokach AB, BC i AC trójkąta. Oblicz boki równoległoboku $ADEF$ jeżeli $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm, $AD : AF = 2 : 3$.

PRZYGOTOWUJEMY SIĘ DO NOWEGO TEMATU

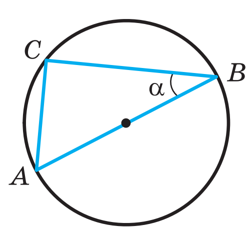
2.48. Oblicz kąt ADC (rys. 2.7), jeżeli $\angle ABC = 140°$.



Rys. 2.7



Rys. 2.8



Rys. 2.9

2.49. Oblicz kąt (rys. 2.8), jeżeli $\angle ADC = 43°$.

2.50. Odcinek AB – średnica okręgu, o promieniu równym R, $\angle ABC = \alpha$ (rys. 2.9). Oblicz cięciwę AC.

3. Twierdzenie sinusów

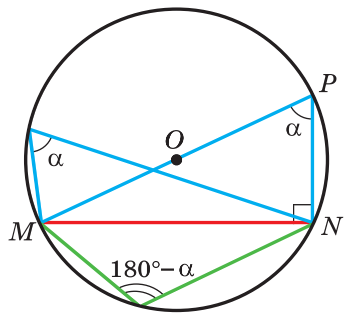
Podczas udowodnienia wielu twierdzeń i przy rozwiązywaniu zadań zastosowuje się następujący lemat.

Lemat. ***Cięciwa okręgu jest równa iloczynowi średnicy i sinusa dowolnego kąta wpisanego, który opiera się na tę cięciwę.***

Dowód. Na rysunku 3.1 odcinek MN – cięciwa okręgu ze środkiem w punkcie O. Poprowadzimy średnicę MP. Wtedy $\angle MNP = 90°$ jako kąt wpisany, oparty na średnicy. Przypuśćmy, że kąt wpisany MPN jest równy α. Wtedy z trójkąta prostokątnego MPN otrzymamy:

$$MN = MP \sin \alpha. \qquad (1)$$

Wszystkie kąty wpisane, które opierają się na cięciwę MN dorównują α lub $180° - \alpha$. A więc, sinusy ich są równe. Dlatego otrzymana równość (1) sprawiedliwa dla wszystkich wpisanych kątów, które opierają się na cięciwę MN. ◀



Rys. 3.1

Zgodnie z drugą cechą przystawania trójkątów wynika, że można skonstruować dokładnie jeden trójkąt znając jego bok i wielkość dwóch kątów przyległych do niego. A więc, znając wyżej wymienione elementy w trójkącie, można obliczyć dwa pozostałe boki tego trójkąta. W jaki sposób można to wykonać pomoże następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1 (twierdzenie sinusów). ***Boki trójkąta są proporcjonalne do sinusów kątów przeciwległych.***

Dowód. Przypuśćmy, że w trójkącie ABC wiadomo, że $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Udowodnimy, że

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Przypuśćmy, że promień opisanego okręgu na trójkącie ABC jest równy R. Wtedy, zgodnie z lematem $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Stąd

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}} = \boldsymbol{2R}}$$ ◀

Wniosek. ***Promień okręgu opisanego na trójkącie można obliczyć według wzoru***

$$\boxed{\boldsymbol{R = \frac{a}{2\sin\alpha}},}$$

gdzie a – długość boku trójkąta, α ***– kąt przeciwległy do tego boku.***

Zadanie 1. W trójkącie ABC wiadomo, że $AC = \sqrt{2}$ cm, $BC = 1$ cm, $\angle B = 45°$. Oblicz kąt A.

Rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem sinusów

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Wtedy

$$\sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{1 \cdot \sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ $BC < AC$, to $\angle A < \angle B$. A więc, kąt A – ostry. Biorąc pod uwagę, że $\sin A = \frac{1}{2}$, otrzymamy $\angle A = 30°$.

Odpowiedź: 30°. ◀

Zadanie 2. W trójkącie ABC wiadomo, że $AC = \sqrt{2}$ cm, $BC = 1$ cm, $\angle A = 30°$. Oblicz kąt B.

Rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem sinusów $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Wtedy

$$\sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ponieważ $BC < AC$, to $\angle A < \angle B$. Wtedy kąt B może być ostrym lub rozwartym. Stąd $\angle B = 45°$ lub $\angle B = 180° - 45° = 135°$.

Odpowiedź: 45° lub 135°. ◀

Zadanie 3. Na boku AB w trójkącie ABC obrano punkt D tak, że $\angle BDC = \gamma$, $AD = m$ (rys. 3.2). Oblicz odcinek BD, jeżeli $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Rozwiązanie. Kąt BDC – kąt zewnętrzny w trójkącie ADC. Wtedy $\angle ACD + \angle A = \angle BDC$, stąd $\angle ACD = \gamma - \alpha$.

Z trójkąta ADC zgodnie z twierdzeniem sinusów, otrzymamy:

$$\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}.$$

A więc, $CD = \dfrac{AD \sin \angle CAD}{\sin \angle ACD} = \dfrac{m \sin \alpha}{\sin(\gamma - \alpha)}$.

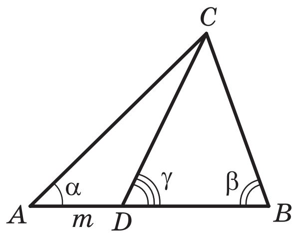
Zgodnie z twierdzeniem sinusów z trójkąta BCD otrzymamy:

$$\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}.$$

A więc,

$$BD = \frac{CD \sin \angle BCD}{\sin \angle CBD} =$$

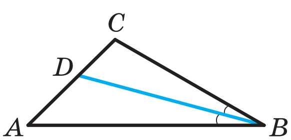
$$= \frac{m \sin \alpha \sin(180^\circ - (\beta + \gamma))}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)} = \frac{m \sin \alpha \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)}.$$



Rys. 3.2

Odpowiedź: $\dfrac{m \sin \alpha \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)}$. ◀

Zadanie 4. Odcinek BD – dwusieczna trójkąta ABC, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$ (rys. 3.3). Oblicz promień okręgu, opisanego na trójkącie ABC, jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie BDC jest równy $8\sqrt{6}$ cm.



Rys. 3.3

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że R_1 – promień okręgu opisanego na trójkącie BDC, $R_1 = 8\sqrt{6}$ cm.

Ponieważ, odcinek BD – dwusieczna trójkąta, to $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 15^\circ$.

Z trójkąta BDC, otrzymamy:

$$\angle BDC = 180^\circ - (\angle CBD + \angle C) = 180^\circ - (15^\circ + 105^\circ) = 60^\circ.$$

Według wniosku z twierdzenia sinusów $\dfrac{BC}{2 \sin \angle BDC} = R_1$. Stąd

$$BC = 2R_1 \sin \angle BDC = 2 \cdot 8\sqrt{6} \sin 60^\circ = 24\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

Z trójkąta ABC otrzymamy:

$$\angle A = 180^\circ - (\angle ABC + \angle C) = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ.$$

Przypuśćmy, że R – szukany promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

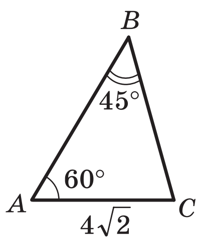
Wtedy $\dfrac{BC}{2 \sin A} = R$, stąd $R = \dfrac{BC}{2 \sin A} = \dfrac{24\sqrt{2}}{2 \sin 45^\circ} = 24$ (cm).

Odpowiedź: 24 cm. ◀

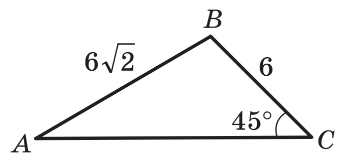
1. W jaki sposób można znaleźć cięciwę okręgu, jeżeli wiadoma jest średnica okręgu oraz kąt wpisany, który opiera się na tę cięciwę??
2. Podaj definicję twierdzenia sinusów.
3. Jak można znaleźć promień okręgu opisanego na trójkącie o boku równym a oraz przeciwległym do tego boku kątem równym α?

ĆWICZENIA

3.1.° Oblicz bok BC w trójkącie ABC przedstawionego na rysunku 3.4. (długość odcinka jest podana w centymetrach).



Rys. 3.4



Rys. 3.5

3.2.° Oblicz kąt A w trójkącie ABC przedstawionego na rysunku 3.5 (długość odcinka jest podana w centymetrach).

3.3.° Oblicz bok AB w trójkącie ABC, jeżeli $AC = \sqrt{6}$ cm, $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$.

3.4.° W trójkącie ABC wiadomo, że $AB = 12$ cm, $BC = 10$ cm, $\sin A = 0{,}2$. Oblicz sinus kąta C trójkąta.

3.5.° W trójkącie DEF wiadomo, że $DE = 16$ cm, $\angle F = 50°$, $\angle D = 38°$. Oblicz bok EF.

3.6.° W trójkącie MKP wiadomo, że $KP = 8$ cm, $\angle K = 106°$, $\angle P = 32°$. Oblicz bok MP.

3.7.° Aby znaleźć odległość punktu A od dzwonnicy B, która znachodzi się na drugim brzegu rzeki (rys. 3.6) wykorzystano drągi, taśmę mierniczą oraz przyrząd do mierzenia kątów (teodolitu) i obrano na miejscowości punkt C tak, że $\angle BAC = 42°$, $\angle ACB = 64°$, $AC = 20$ m. W jaki sposób można obliczyć odległość punktu A od dzwonnicy B? Oblicz tę odległość.

Rys. 3.6

3.8.° W trójkącie ABC wiadomo, że $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Oblicz boki AB i AC.

3.9.° Przekątna równoległoboku jest równa d i tworzy z jego bokami kąty α i β. Oblicz boki równoległoboku.

3.10.° Oblicz kąt A w trójkącie ABC, jeżeli:
1) $AC = 2$ cm, $BC = 1$ cm, $\angle B = 135°$;
2) $AC = \sqrt{2}$ cm, $BC = \sqrt{3}$ cm, $\angle B = 45°$.
Ile rozwiązań w każdym przypadku ma zadanie? Odpowiedź uzasadnij.

3.11.° Czy trójkąt ABC istnieje, gdy $\sin A = 0{,}4$, $AC = 18$ cm, $BC = 6$ cm? Odpowiedź uzasadnij.

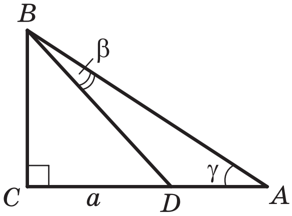
3.12.° W trójkącie DEF wiadomo, że $DE = 8$ cm, $\sin F = 0{,}16$. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie DEF.

3.13.° Promień okręgu opisanego na trójkącie MKP jest równy 5 cm, $\sin M = 0{,}7$. Oblicz bok KP.

3.14.• Na przedłużeniu boku AB w trójkącie ABC poza punktem B obrano punkt D. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ACD, jeżeli $\angle ABC = 60°$, $\angle ADC = 45°$, zaś promień okręgu opisanego na trójkącie ABC wynosi 4 cm.

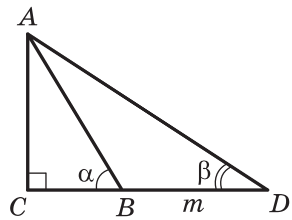
3.15.• Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC wynosi 6 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie AOC, gdzie O – punkt przecięcia dwusiecznych trójkąta ABC, jeżeli $\angle ABC = 60°$.

3.16.• Korzystając z danych podanych na rysunku 3.7 oblicz odcinek AD, jeżeli $CD = a$, $\angle BAC = \gamma$, $\angle DBA = \beta$.



Rys. 3.7

3.17.• Korzystając z danych, podanych na rysunku 3.8 oblicz odcinek AC, jeżeli $BD = m$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$.



Rys. 3.8

3.18.• Na boku AB w trójkącie ABC oznaczono punkt M tak, że $\angle AMC = \varphi$. Oblicz odcinek CM, jeżeli $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

3.19.• W trójkącie ABC wiadomo, że $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Na boku BC obrano punkt D tak, że $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Oblicz bok BC.

3.20.• Udowodnij, że dwusieczna trójkąta dzieli jego bok na odcinki, długości których są odwrotnie proporcjonalne do sinusów kątów przyległych do tego boku.

3.21.• Dwa boki trójkąta są równe 6 cm i 12 cm, zaś wysokość opuszczona na trzeci bok – 4 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

3.22.• Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie równej 16 cm i ramieniu 10 cm.

3.23.• Bok trójkąta jest równy 24 cm, a promień okręgu opisanego – $8\sqrt{3}$ cm. Ile wynosi kąt trójkąta, który jest przeciwległy do tego boku?

3.24.• Trasa dla rowerzystów ma kształt trójkąta, dwa kąty którego wynoszą 50° i 100°. Mniejszy bok tego trójkąta jeden z rowerzystów przejeżdża za 1 godz. Za jaki czas on przejedzie całą trasę? Odpowiedź podaj w godzinach, zaokrąglając do dziesiątych.

3.25.•• W trójkącie ABC, wiadomo że $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Oblicz dwusieczną BD danego trójkąta.

3.26.•• Podstawa trójkąta równoramiennego jest równa a, zaś kąt przeciwległy do niej wynosi α. Oblicz dwusieczną trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka kąta przy podstawie.

3.27.•• Udowodnij, korzystając z twierdzenia sinusów, że dwusieczna trójkąta dzieli jego bok na odcinki proporcjonalne do przyległych boków[1].

---

[1] Przypomnijmy, że wypowiedź z zastosowaniem twierdzenia o proporcjonalnych była udowodniona w podręczniku A. Merzlak, W. Połonski, M. Jakir, Geometria 8 kl. ogólnokształcących szkół. Ch. Gimnazjum 2016. Dalej będziemy powoływać się na ten podręcznik tak: „Geometria 8 kl."

3.28.•• Podstawy trapezu równoramiennego są równe 9 cm i 21 cm, a wysokość – 8 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.

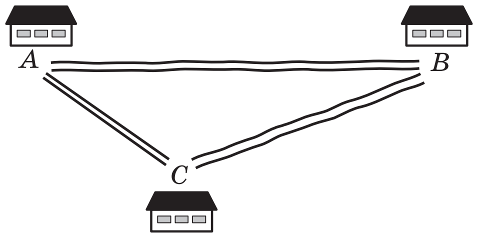
3.29.•• Odcinek CD – dwusieczna w trójkącie ABC, w którym $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku BC i przecinającą bok AC w punkcie E, przy czym $AE = a$. Oblicz odcinek CE.

3.30.•• Środkowa AM w trójkącie ABC jest równa m i tworzy z bokiem AB i AC odpowiednio kąty α i β. Oblicz boki AB i AC.

3.31.•• W trójkącie ABC środkowa CD tworzy z bokami AC i BC odpowiednio kąty α i β, gdzie $BC = a$. Oblicz środkową CD.

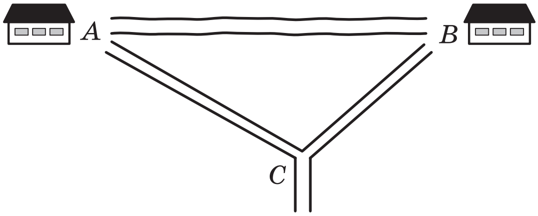
3.32.•• W ostrokątnym trójkącie ABC wysokości przecinają się w punkcie H. Udowodnij, że promienie okręgów, opisanych na trójkątach AHB, BHC, AHC i ABC są równe.

3.33.•• Drogi, które łączą wioski A, B i C (rys. 3.9), tworzą trójkąt, przy czym droga z wioski A do wioski C jest asfaltowa, zaś droga z wioski A do wioski B oraz z wioski B do wioski C – gruntowa. Drogi, które prowadzą z wioski A do wioski B i C tworzą kąt, który ma 15°, a drogi, które prowadzą z wioski B do wiosek A i C – kąt, który wynosi 5°. Prędkość ruchu samochodu na asfaltowanej drodze jest 2 razy większa od prędkości jego ruchu na drodze gruntowej. Jaką drogę ma wybrać kierowca samochodu, aby jak najprędzej dojechać z wioski A do wioski B?



Rys. 3.9

3.34.•• Drogi z wiosek A i B schodzą się w skrzyżowaniu C (rys. 3.10). Droga z wioski A do skrzyżowania tworzy z drogą z wioski A do wioski B kąt o wielkości 30°, zaś droga z wioski B do skrzyżowania tworzy z drogą z wioski B do wioski A kąt o wielkości 70°. Jednocześnie z wioski A do skrzyżowania wyjechał samochód z prędkością 70 km/h, oraz z wioski B – autobus z prędkością 60 km/h. Który z nich pierwszy przyjedzie do skrzyżowania?

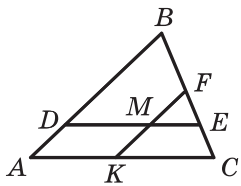


Rys. 3.10

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

3.35. W prostokącie $ABCD$ dwusieczne poprowadzone z kątów B i C przecinają bok AD odpowiednio w punktach M i K. Udowodnij, że $BM = CK$.

3.36. Na rysunku 3.11 $DE \parallel AC$, $FK \parallel AB$. Wskaż, które z trójkątów przedstawionych na rysunku są podobne.



Rys. 3.11

3.37. W kwadracie $ABCD$ na boku AB obrano punkt K, zaś na boku CD – punkt M tak, że $AK : KB = 1 : 2$, $DM : MC = 3 : 1$. Oblicz bok kwadratu, jeżeli $MK = 13$ cm.

PRZYGOTOWUJEMY SIĘ DO NOWEGO TEMATU

3.38. Rozwiąż trójkąt prostokątny, znając:

1) dwie przyprostokątne $a = 7$ cm i $b = 35$ cm;
2) przeciwprostokątną $c = 17$ cm i przyprostokątną $a = 8$ cm;
3) przeciwprostokątną $c = 4$ cm i kąt ostry $\alpha = 50°$;
4) przyprostokątną $a = 8$ cm i kąt przeciwległy do niej $\alpha = 42°$.

SPOSTRZEGAJCIE, RYSUJCIE, KONSTRUUJCIE, FANTAZJUJCIE

3.39. W okrąg o promieniu 1 cm wpisano pięciokąt. Udowodnij, że suma długości jego boków i prostokątnych jest mniejsza od 17 cm.

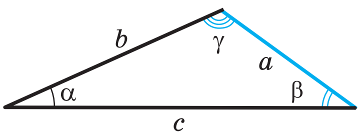
4. Rozwiązywanie trójkątów

Rozwiązać trójkąt znaczy znaleźć niewiadome jego boki i kąty znając wielkości pozostałych jego boków i kątów[1].

W klasie 8. rozwiązywaliśmy zadania dotyczące trójkątów prostokątnych. Twierdzenia kosinusów i sinusów umożliwiają rozwiązywać dowolny trójkąt.

W następnych zadaniach wartości funkcji trygonometrycznych będziemy znachodzić za pomocą kalkulatora, zaokrąglając ich wartości do setnych. Wielkości kątów będziemy obliczać za pomocą kalkulatora, zaokrąglając wartości do setnych. Obliczając długości boków wyniki będziemy zaokrąglać do setnych.

Zadanie 1. Rozwiąż trójkąt (rys. 4.1), znając bok $a = 12$ cm, dane kąty $\beta = 36°$, $\gamma = 119°$.



Rys. 4.1

Rozwiązanie. Zastosowując twierdzenie o sumie kątów trójkąta otrzymamy: $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 155° = 25°$.

Zgodnie z twierdzeniem sinusów $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Stąd $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$. Otrzymamy:

$$b = \frac{12\sin 36°}{\sin 25°} \approx \frac{12\cdot 0{,}59}{0{,}42} \approx \mathbf{16{,}9} \text{ (cm)}.$$

Ponownie zastosowując twierdzenie sinusów, otrzymamy:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Stąd $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Otrzymamy:

$$c = \frac{12\sin 119°}{\sin 25°} = \frac{12\sin 61°}{\sin 25°} \approx \frac{12\cdot 0{,}87}{0{,}42} \approx \mathbf{24{,}9} \text{ (cm)}.$$

Odpowiedź: $b \approx 16{,}9$ cm, $c \approx 24{,}9$ cm, $\alpha = 25°$. ◄

Zadanie 2. Rozwiąż trójkąt znając dwa boki $a = 14$ cm, $b = 8$ cm i kątem $\gamma = 38°$ zawartego między nimi.

---

[1] W zadaniach rozmieszczonych w tym punkcie oraz w ćwiczeniach 4.1.–4.9 wprowadzono oznaczenia: a, b i c – długości boków trójkąta, α, β i γ – wielkości kątów odpowiednio przyległych do boków o długościach a, b i c.

Rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem kosinusów $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Stąd

$$c^2 = 196 + 64 - 2 \cdot 14 \cdot 8\cos 38° \approx 260 - 224 \cdot 0{,}79 = 83{,}04;$$

$$c \approx 9{,}1 \text{ cm}.$$

Otrzymamy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos\alpha \approx \frac{8^2 + 9{,}1^2 - 14^2}{2 \cdot 8 \cdot 9{,}1} \approx -0{,}34.$$

Stąd $\alpha \approx 110°$.

Korzystając z twierdzenia o sumie kątów trójkąta, otrzymamy:

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma); \quad \beta \approx 180° - 148° = 32°.$$

Odpowiedź: $c \approx 9{,}1$ cm, $\alpha \approx 110°$, $\beta \approx 32°$. ◀

Zadanie 3. Rozwiąż trójkąt według trzech boków $a = 7$ cm, $b = 2$ cm, $c = 8$ cm.

Rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem kosinusów $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Stąd

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos\alpha = \frac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} \approx 0{,}59.$$ Otrzymamy: $\alpha \approx 54°$.

Według twierdzenia sinusów $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$. Stąd

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}; \quad \sin\beta \approx \frac{2\sin 54°}{7} \approx \frac{2 \cdot 0{,}81}{7} \approx 0{,}23.$$

Ponieważ b – długość najmniejszego boku danego trójkąta, to kąt β jest ostrym. Wtedy określamy, że $\beta \approx 13°$.

Korzystając z twierdzenia o sumie kątów trójkąta, otrzymamy:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta); \quad \gamma \approx 180° - 67° = 113°.$$

Odpowiedź: $\alpha \approx 54°$, $\beta \approx 13°$, $\gamma \approx 113°$. ◀

Zadanie 4. Rozwiąż trójkąt względem dwóch boków i kątem przeciwległym do jednej z boków:

1) $a = 17$ cm, $b = 6$ cm, $\alpha = 156°$;
2) $b = 7$ cm, $c = 8$ cm, $\beta = 65°$;
3) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $\beta = 50°$.

Rozwiązanie. 1) Zgodnie z twierdzeniem sinusów $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$.

Stąd $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$; $\sin\beta = \dfrac{6\sin 156°}{17} = \dfrac{6\sin 24°}{17} \approx \dfrac{6 \cdot 0{,}41}{17} \approx 0{,}14.$

Ponieważ kąt α danego trójkąta jest rozwarty, to kąt β jest ostrym. Wtedy obliczamy, że $\beta \approx 8°$.

Korzystając z twierdzenia o sumie kątów trójkąta, otrzymamy: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$; $\gamma \approx 16°$.

Zgodnie z twierdzeniem sinusów $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Stąd $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$; $c \approx \frac{17\sin 16°}{\sin 156°} \approx \frac{17 \cdot 0{,}28}{0{,}41} \approx \mathbf{11{,}6}$ (cm).

Odpowiedź: $\beta \approx 8°$, $\gamma \approx 16°$, $c \approx 11{,}6$ cm.

2) Zgodnie z twierdzeniem sinusów $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Stąd $\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b}$; $\sin\gamma = \frac{8\sin 65°}{7} \approx \frac{8 \cdot 0{,}91}{7} = \mathbf{1{,}04 > 1}$, co jest niemożliwe.

Odpowiedź: zadanie nie ma rozwiązania.

3) 3) Zgodnie z twierdzeniem sinusów $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Stąd

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b};\quad \sin\alpha = \frac{6\sin 50°}{5} \approx \frac{6 \cdot 0{,}77}{5} \approx \mathbf{0{,}92}.$$

Możliwe są dwa przypadki: $\alpha \approx 67°$ lub $\alpha \approx 180° - 67° = 113°$.

Rozpatrzymy przypadek gdy $\alpha \approx 67°$.

Korzystając z twierdzenia o sumie kątów trójkąta, otrzymamy:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 180° - 117° = 63°.$$

Zgodnie z twierdzeniem sinusów $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Stąd $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$; $c \approx \frac{5\sin 63°}{\sin 50°} \approx \frac{5 \cdot 0{,}89}{0{,}77} \approx \mathbf{5{,}8}$ (cm).

Rozpatrzymy przypadek, gdy $\alpha \approx 113°$.

Korzystając z twierdzenia o sumie kątów trójkąta otrzymamy:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 180° - 163° = 17°.$$

Ponieważ $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, to $c \approx \frac{5\sin 17°}{\sin 50°} \approx \frac{5 \cdot 0{,}29}{0{,}77} \approx 1{,}9$ (cm).

Odpowiedź: $\alpha \approx 67°$, $\gamma \approx 63°$, $c \approx 5{,}8$ cm lub $\alpha \approx 113°$, $\gamma \approx 17°$, $c \approx 1{,}9$ cm. ◄

Co oznacza rozwiązać trójkąt?

ĆWICZENIA

4.1.° Rozwiąż trójkąt, jeżeli wiadomo bok oraz dwa kąty:
1) $a = 10$ cm, $\beta = 20°$, $\gamma = 85°$; 2) $b = 16$ cm, $\alpha = 40°$, $\beta = 110°$.

4.2.° Rozwiąż trójkąt, jeżeli wiadomo bok oraz dwa kąty:
1) $b = 9$ cm, $\alpha = 35°$, $\gamma = 70°$; 2) $c = 14$ cm, $\beta = 132°$, $\gamma = 24°$.

4.3.° Rozwiąż trójkąt, jeżeli wiadomo dwa boki i kąt zawarty między nimi:
1) $b = 18$ cm, $c = 22$ cm, $\alpha = 76°$;
2) $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, $\gamma = 104°$.

4.4.° Rozwiąż trójkąt, jeżeli wiadomo dwa boki i kąt zawarty między nimi:
1) $a = 8$ cm, $c = 6$ cm, $\beta = 15°$; 2) $b = 7$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = 145°$.

4.5.° Rozwiąż trójkąt, jeżeli wiadomo trzy boki:
1) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm; 2) $a = 26$ cm, $b = 19$ cm, $c = 42$ cm.

4.6.° Rozwiąż trójkąt, jeżeli wiadomo trzy boki:
1) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 8$ cm; 2) $a = 21$ cm, $b = 17$ cm, $c = 32$ cm.

4.7.° Rozwiąż trójkąt, w którym:
1) $a = 10$ cm, $b = 3$ cm, $\beta = 10°$, kąt α ostry;
2) $a = 10$ cm, $b = 3$ cm, $\beta = 10°$, kąt α rozwarty.

4.8.• Rozwiąż trójkąt, jeżeli wiadome dwa boki i kąt przeciwległy do jednego z tych boków:
1) $a = 7$ cm, $b = 11$ cm, $\beta = 46°$; 3) $a = 7$ cm, $c = 3$ cm, $\gamma = 27°$.
2) $b = 15$ cm, $c = 17$ cm, $\beta = 32°$;

4.9.• Rozwiąż trójkąt, jeżeli wiadome dwa boki i kąt przeciwległy do jednego z danych boków:
1) $a = 23$ cm, $c = 30$ cm, $\gamma = 102°$;
2) $a = 18$ cm, $b = 25$ cm, $\alpha = 36°$.

4.10.• W trójkącie ABC, wiedząc że $AB = BC = 20$ cm, $\angle A = 70°$. Oblicz:
1) bok AC;
2) środkową CM;
3) dwusieczną AD;
4) promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

4.11.• Przekątna AC w trapezie równoramiennym $ABCD$ ($BC \parallel AD$) jest równa 8 cm, $\angle CAD = 38°$, $\angle BAD = 72°$. Oblicz:
1) ramiona trapezu;
2) promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

4.12.•• Podstawy trapezu są równe 12 cm i 16 cm, a ramiona jego – 7 cm i 9 cm. Oblicz kąty trapezu.

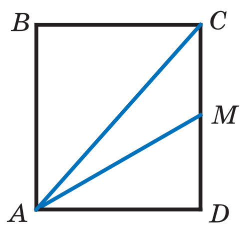
ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

4.13. W równoległoboku $ABCD$ dwusieczna kąta B przecina bok AD w punkcie M, a przedłużenie boku AD – poza punktem D – w punkcie K. Oblicz odcinek DK, jeżeli $AM = 8$ cm, a obwód równoległoboku wynosi 50 cm.

4.14. Obwód jednego z dwóch podobnych trójkątów jest o 18 cm mniejszy od obwodu drugiego trójkąta, zaś długości dwóch odpowiednich boków wynoszą 5 cm i 8 cm. Oblicz obwody danych trójkątów.

PRZYGOTOWUJEMY SIĘ DO NOWEGO TEMATU

4.15. Punkt M – środek boku CD w prostokącie $ABCD$ (rys. 4.2), $AB = 6$ cm, $AD = 5$ cm. Ile wynosi pole trójkąta ACM?



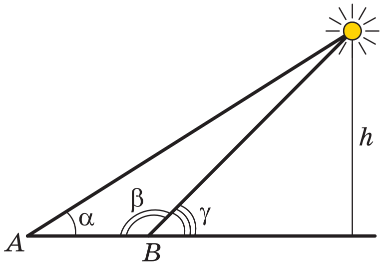
Rys. 4.2

4.16. Na boku AC w trójkącie ABC wybrano punkt D tak, że $\angle ADB = \alpha$. 4.16. Udowodnij, że $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha$.

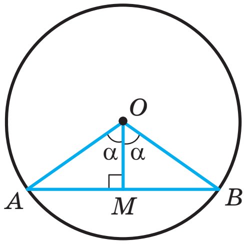
TRYGONOMETRIA – NAUKA O MIERZENIU TRÓJKĄTÓW

Wiecie, że starożytni podróżni orientowali się po gwiazdach i planetach. Oni mogli dość dokładnie określić miejsce lokalizacji okrętu w oceanie lub karawanu w pustyni za pomocą ciał niebieskich na horyzoncie. Przy czym, jednym z punktów orientacyjnych była wysokość, na którą podnosiło się to lub inne ciało niebieskie nad horyzontem w danej miejscowości w określonym momencie czasu.

Oczywiście, że bezpośrednio tę wysokość wymierzyć jest nie możliwie, więc uczeni zaczęli szukać różne poboczne sposoby dla jej wymierzenia. Wtedy wielką rolę odegrało rozwiązywanie trójkątów, dwa wierzchołki którego leżały na powierzchni Ziemi, a trzeci wierzchołek był ciałem niebieskim (rys. 4.3) dla was wiadome zadanie 3.17.



Rys. 4.3



Rys. 4.4

Aby rozwiązać tego rodzaju zadania, starożytni astronomowie musieli nauczyć się określać zależności między elementami trójkąta. W taki sposób powstała **trygonometria**, która uczy o zależnościach między bokami i kątami w trójkącie. Termin “trygonometria” (od greckich słów “trigonon” – trójkąt i “metron” – mierzyć) oznacza “mierzenie trójkątów”.

Na rysunku 4.4 przedstawiono kąt środkowy AOB, który jest równy 2α. Z trójkąta prostokątnego OMB otrzymamy: $MB = OB \sin \alpha$. A więc, jeżeli w okręgu jednostkowym wymierzy połowę długości cięciw, na które opierają się kąty środkowe o wielkości 2°, 4°, 6°, ..., 180°, to w taki sposób obliczymy odpowiednio wartości sinusów kątów 1°, 2°, 3°, ..., 90.

Mierząc długości połowy cięciw starogrecki astronom Hipparch (II st. p.n.e.) po raz pierwszy ułożył tablice trygonometryczne.

W terminach trygonometrycznych pojęcie sinusa i kosinusa pojawiły się w pracach indyjskich uczonych w IV–V st. n.e. W X st. arabscy uczeni wprowadzili pojęcie tangensu, które powstało z potrzeb gnomoniki – nauki o zegarze słonecznym (rys. 4.5).

Rys. 4.5

W Europie pierwsza praca, w której trygonometria rozpatrywała się jak odrębna nauka, był traktat “Pięć ksiąg o wszystkich rodzai trójkątów”, który po raz pierwszy nadrukowano w 1533 r. Autorem traktatu

Leonardo Euler
(1707–1783)

Wybitny matematyk, fizyk, mechanik i astronom, autor 860 naukowych prac Petersburskiej, Berlińskiej, Paryskiej akademii nauk, Londyńskiego królewskiego towarzystwa, wielu innych akademii i towarzystw. Imię Eulera pojawia się prawie we wszystkich dziedzinach matematyki, a mianowicie: twierdzenie Eulera, tożsamości Eulera, kąty, funkcje, całki, wzory, równania, podstawienia i inne.

był niemiecki uczony Regiomontanus (1436–1476). Ten uczony odkrył i twierdzenie tangensów:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}},\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

gdzie a, b i c – długości boków trójkąta, α, β i γ – wielkości kątów trójkąta, przeciwległych odpowiednio do boków o długości a, b i c.

Współczesny wygląd trygonometria zawdzięcza wybitnemu matematykowi Leonardo Eulerowi, który wprowadził ją w swoich pracach.

5. Wzory na obliczenie pola trójkąta

Z kursu geometrii klasy 8. wiecie, że pole S trójkąta o bokach a, b i c oraz wysokości h_a, h_b i h_c można obliczyć zastosowując wzory

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c.$$

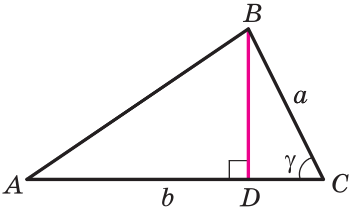
A teraz, mamy możliwość otrzymać jeszcze kilka wzorów na obliczenie pola trójkąta.

Twierdzenie 5.1. ***Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi.***

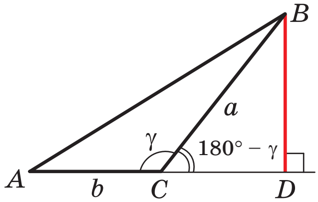
Dowód. Rozpatrzymy trójkąt ABC, pole którego jest równe S i taki, że $BC=a$, $AC=b$ i $\angle C=\gamma$. Udowodnimy, że

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma}$$

Możliwe są trzy przypadki:
1) kąt γ ostry (rys. 5.1);
2) kąt γ rozwarty (rys. 5.2);
3) kąt γ 3) prosty.



Rys. 5.1



Rys. 5.2

Na rysunkach 5.1 i 5.2 w trójkącie ABC poprowadzono wysokość BD. Wtedy $S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} BD \cdot b$.

Z trójkąta prostokątnego BDC w pierwszym przypadku (patrz rys. 5.1) otrzymamy: $BD = a \sin \gamma$, a w drugim przypadku (patrz rys. 5.2): $BD = a \sin (180° - \gamma) = a \sin \gamma$. Stąd, dla dwóch pierwszych przypadków otrzymamy: $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

Gdy kąt C – kąt prosty, to $\sin \gamma = 1$. Dla trójkąta prostokątnego ABC o przyprostokątnych a i b otrzymamy:

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab \sin 90° = \frac{1}{2} ab \sin \gamma. \blacktriangleleft$$

Twierdzenie 5.2 (wzór Herona[1]). ***Pole S trójkąta o bokach a, b i c można obliczyć według wzoru***

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

gdzie p – połowa obwodu trójkąta.

Dowód. Rozpatrzymy trójkąt ABC o polu S oraz bokach $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Udowodnimy, że

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Przypuśćmy, że $\angle C = \gamma$. Zapiszemy wzór na pole trójkąta:

[1] Heron z Aleksandrii– starożytny grecki matematyk, najprawdopodobniej żył w I w. n.e. Prace Herona z zakresu mechaniki mają charakter encyklopedii zawierającej stan ówczesnej wiedzy z tego zakresu.

$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Stąd $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma$.

Zgodnie z twierdzeniem kosinusów $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Wtedy $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Ponieważ $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)$, to:

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2\cdot\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2\cdot\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{16}(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2) =$$

$$= \frac{c-a+b}{2}\cdot\frac{c+a-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)-2a}{2}\cdot\frac{(a+b+c)-2b}{2}\cdot\frac{(a+b+c)-2c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{2p-2a}{2}\cdot\frac{2p-2b}{2}\cdot\frac{2p-2c}{2}\cdot\frac{2p}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Stąd $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. ◄

Twierdzenie 5.3. ***Pole S trójkąta o bokach a, b i c można obliczyć według wzoru***

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$$

gdzie R – promień okręgu, opisanego na trójkącie.

Dowód. Rozpatrzymy trójkąt ABC, o polu równym S i bokach $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Udowodnimy, że $S = \frac{abc}{4R}$, gdzie R – promień okręgu opisanego na trójkącie.

Przypuśćmy, że $\angle A = \alpha$. Zapiszemy wzór pola trójkąta:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

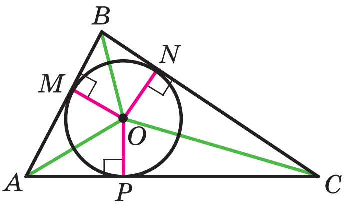
Zgodnie z lematem p. 3 wynika, że $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

Wtedy $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$. ◄

Zauważcie, że udowodnione twierdzenie pozwala obliczyć promień okręgu opisanego na trójkącie zgodnie ze wzorem

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Twierdzenie 5.4. ***Pole trójkąta jest równe iloczynowi jego połowy obwodu i promienia wpisanego okręgu.***



Rys. 5.3

Dowód. Na rysunku 5.3 przedstawiono trójkąt ABC, w który wpisano okrąg o promieniu równym r. Udowodnimy, że

$$\boxed{S = pr,}$$

gdzie S – pole danego trójkąta, p – połowa jego obwodu.

Przypuśćmy, że punkt O – środek okręgu wpisanego, który dotyka się do boków trójkąta ABC w punktach M, N i P. Pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów AOB, BOC i COA:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Poprowadzimy promienie do punktów styczności. Otrzymamy: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Stąd:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OM \cdot AB = \frac{1}{2}r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}ON \cdot BC = \frac{1}{2}r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}OP \cdot AC = \frac{1}{2}r \cdot AC.$$

A więc, $S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr.$ ◀

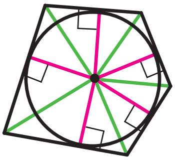
Twierdzenie 5.4. uogólnia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.5. ***Pole opisanego wielokąta jest równe iloczynowi jego połowy obwodu i promienia wpisanego okręgu.***

To twierdzenie udowodnijcie samodzielnie (rys. 5.4).

Zauważymy, że twierdzenie 5.5. umożliwia obliczyć promień okręgu wpisanego w wielokąt według wzoru

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

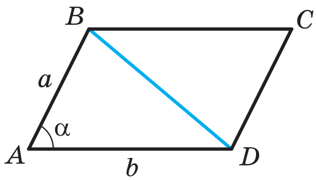


Rys. 5.4

Zadanie 1. Udowodnij, że pole S równoległoboku można obliczyć według wzoru

$$\boxed{\boldsymbol{S = ab \sin \alpha,}}$$

gdzie a i b – dowolne sąsiednie boki równoległoboku, α – kąt między nimi.

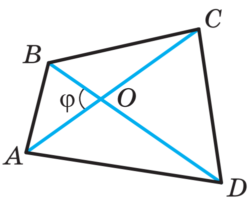


Rys. 5.5

Rozwiązanie. Rozpatrzymy równoległobok $ABCD$, w którym $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = \alpha$ (rys. 5.5). Poprowadzimy przekątną BD. Ponieważ $\Delta ABD = \Delta CBD$, to zapiszemy:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha = ab \sin \alpha.$$

Zadanie 2. Udowodnij, że pole wypukłego czworokąta jest równe połowie iloczynu przekątnych i sinusa kąta między nimi.



Rys. 5.6

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że kąt między przekątnymi AC i BD w czworokącie $ABCD$ jest równy φ. Na rysunku 5.6 $\angle AOB = \varphi$. Wtedy $\angle BOC = \angle AOD = 180° - \varphi$ i $\angle COD = \varphi$. Otrzymamy:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin (180° - \varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD \cdot OA \cdot \sin (180° - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} OB (OA + OC) \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD (OC + OA) \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} OB \cdot AC \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD \cdot AC \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} AC (OB + OD) \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi.$$

Zadanie 3. Boki trójkąta są równe 17 cm, 65 cm i 80 cm. Oblicz najmniejszą wysokość trójkąta, promienie jego wpisanego i opisanego kół.

Rozwiązanie. Oznaczymy, że $a = 17$ cm, $b = 65$ cm, $c = 80$ cm.

Obliczymy połowę obwodu trójkąta: $p = \dfrac{17 + 65 + 80}{2} = 81$ (cm). Pole trójkąta obliczymy według twierdzenia Herona:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} =$$

$$= \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288 \ (\text{cm}^2).$$

Najmniejsza wysokość trójkąta jest wysokość opuszczona na największy bok, długość którego c.

Ponieważ $S = \frac{1}{2}ch_c$, to $h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7{,}2$ (cm).

Promień okręgu wpisanego $r = \frac{S}{p} = \frac{288}{81} = \frac{32}{9}$ (cm).

Promień okręgu opisanego $R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72}$ (cm).

Odpowiedź: 7,2 cm, $\frac{32}{9}$ cm, $\frac{5525}{72}$ cm. ◄

1. Jak można obliczyć pole trójkąta, jeśli znane są dwa jego boki i kąt zawarty między nimi?
2. Podaj wzór Herona do obliczenia pola trójkąta.
3. Jak można obliczyć pole trójkąta jeśli znane są jego boki a, b i c i promień R okręgu opisanego na trójkącie?
4. Jak można znaleźć promień okręgu opisanego na trójkącie, jeśli znane są pole trójkąta i jego boki?
5. Jak można znaleźć pole trójkąta, jeśli znane są połowę obwodu oraz promień okręgu wpisanego?
6. Jak można obliczyć promień okręgu wpisanego w trójkąt, jeśli znane są pole trójkąta oraz jego boki?
7. Czemu jest równe pole opisanego wielokąta?

ĆWICZENIA

5.1.° Oblicz pole trójkąta ABC, jeżeli:
1) $AB = 12$ cm, $AC = 9$ cm, $\angle A = 30°$;
2) $AC = 3$ cm, $BC = 6\sqrt{2}$ cm, $\angle C = 135°$.

5.2.° Oblicz pole trójkąta DEF, jeżeli:
1) $DE = 7$ cm, $DF = 8$ cm, $\angle D = 60°$;
2) $DE = 10$ cm, $EF = 6$ cm, $\angle E = 150°$.

5.3.° 5.3. Pole trójkąta MKN wynosi 75 cm^2. 5.3. Oblicz bok MK, jeżeli $KN = 15$ cm, $\angle K = 30°$.

5.4.° Oblicz kąt zawarty między danymi bokami trójkąta ABC, jeżeli:
1) $AB = 12$ cm, $BC = 10$ cm, pole trójkąta wynosi $30\sqrt{3}$ cm^2;
2) $AB = 14$ cm, $AC = 8$ cm, pole trójkąta wynosi 56 cm^2.

5.5.° Pole trójkąta ABC wynosi 18 cm^2. Wiadomo, że $AC = 8$ cm, $BC = 9$ cm. 5.5. Oblicz kąt C.

5.6.° Oblicz pole trójkąta równoramiennego, ramię którego jest równe 16 m i kąt przy podstawie który wynosi 15°.

5.7.° Oblicz pole trójkąta o bokach:
1) 13 cm, 14 cm, 15 cm; 2) 2 cm, 3 cm, 4 cm.

5.8.° Oblicz pole trójkąta o bokach:
1) 9 cm, 10 cm, 17 cm; 2) 4 cm, 5 cm, 7 cm.

5.9.° Oblicz najmniejszą wysokość trójkąta o bokach 13 cm, 20 cm i 21 cm.

5.10.° Oblicz największą wysokość trójkąta o bokach 11 cm, 25 cm i 30 cm.

5.11.° Obwód trójkąta wynosi 32 cm, a promień okręgu wpisanego – 1,5 cm. Oblicz pole trójkąta.

5.12.° Pole trójkąta wynosi 84 cm^2, a jego obwód – 72 cm. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt.

5.13.° Oblicz promienie okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie o bokach:
1) 5 cm, 5 cm i 6 cm; 2) 25 cm, 29 cm i 36 cm.

5.14.° Oblicz promienie okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie o bokach 6 cm, 25 cm i 29 cm.

5.15.° Oblicz pole równoległoboku jeśli znane są jego boki a i b oraz kąt α zawarty między nimi, jeżeli:
1) $a = 5\sqrt{2}$ cm, $b = 9$ cm, $\alpha = 45°$;
2) $a = 10$ cm, $b = 18$ cm, $\alpha = 150°$.

5.16.° Ile wynosi pole równoległoboku o bokach równych 7 cm i 12 cm, oraz jednym z jego kątów o 120°?

5.17.° Oblicz pole rombu o boku $9\sqrt{3}$ cm i kącie 60°.

5.18.° Przekątne czworokąta wypukłego wynoszą 8 cm i 12 cm, a kąt zawarty między nimi – 30°. Oblicz pole czworokąta.

5.19.° Oblicz pole czworokąta wypukłego, przekątne którego wynoszą $3\sqrt{3}$ cm i 4 cm, a kąt zawarty między nimi – 60°.

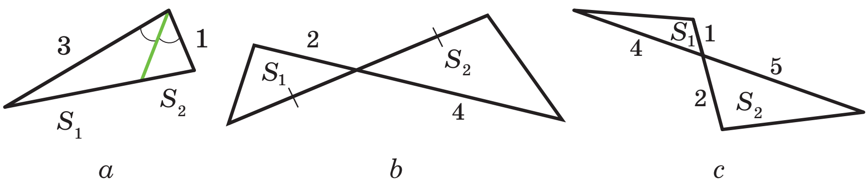
5.20.° Oblicz ramię trójkąta równoramiennego, jeżeli pole jego wynosi 36 cm^2, a kąt przy wierzchołku – 30°.

5.21.• Jaki trójkąt z dwoma danymi bokami posiada największe pole?

5.22.• Czy pole trójkąta o bokach 4 cm i 6 cm może wynosić:
1) 6 cm²; 2) 14 cm²; 3) 12 cm²?

5.23.• Dwa sąsiednie boki równoległoboku odpowiednio są równe dwom sąsiednim bokom prostokąta. Ile wynosi ostry kąt równoległoboku, jeżeli jego pole jest dwa razy mniejsze od pola prostokąta?

5.24.• Oblicz stosunek pól S_1 i S_2 trójkątów przedstawionych na rysunku 5.7 (długości boków są podane w centymetrach).



Rys. 5.7

5.25.• Odcinek AD dwusieczna trójkąta ABC. Pole trójkąta ABD wynosi 12 cm², a trójkąta ACD – 20 cm². Oblicz stosunek boku AB do boku AC.

5.26.• Oblicz pole trójkąta o boku równym a i kątach przy tym boku równym β i γ.

5.27.• Promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy R, zaś dwa kąty trójkąta wynoszą α i β. Oblicz pole trójkąta.

5.28.• W trójkącie ABC wiadomo, że $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Oblicz pole trójkąta.

5.29.• W trójkącie ABC kąt A jest równy α, zaś wysokości BD i CE odpowiednio są równe h_1 i h_2. Oblicz pole trójkąta ABC.

5.30.• Odcinek BM – wysokość trójkąta ABC, $BM = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Oblicz pole trójkąta ABC.

5.31.• W trójkącie o bokach 17 cm, 25 cm i 28 cm wypisano okrąg, środek którego połączono z wierzchołkami trójkąta. Oblicz pola trójkątów, które utworzyły się.

5.32.•• Odcinek AD – 5.32. dwusieczna trójkąta ABC, w którym $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $\angle BAC = 120°$. Oblicz długość dwusiecznej AD.

5.33.•• Oblicz pole trapezu, podstawy którego wynoszą 10 cm i 50 cm, a ramiona – 13 cm i 37 cm.

5.34.•• Podstawy trapezu są równe 4 cm i 5 cm, a przekątne – 7 cm i 8 cm. Oblicz pole trapezu.

5.35.•• Odcinki BM i CK – wysokości trójkąta ostrokątnego ABC, gdzie $\angle A = 45°$. Oblicz stosunek pól trójkątów AMK i ABC.

5.36.•• Boki trójkąta są równe 39 cm, 41 cm i 50 cm. Oblicz promień okręgu, środek którego leży na większym boku trójkąta, a okrąg jest styczny do dwóch pozostałych boków.

5.37.•• Wierzchołki trójkąta połączonego ze środkiem okręgu wpisanego. Poprowadzone odcinki dzielą dany trójkąt na trójkąty, pole których wynosi 26 cm², 28 cm² i 30 cm². Oblicz boki danego trójkąta.

5.38.•• Udowodnij, że $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$, gdzie h_1, h_2 i h_3 – 5.38. długości wysokości trójkąta, zaś r – promień okręgu opisanego.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

5.39. Prostopadła opuszczona z wierzchołka prostokąta na jego przekątną dzieli kąt w stosunku 4 : 5. Oblicz kąt między tą prostopadłą i drugą przekątną.

5.40. Linia środkowa MK w trapezie $ABCD$ **(**$BC \parallel AD$**)** wynosi 56 cm. Przez środek M leżący na AB poprowadzono prostą równoległą do boku CD i przecina podstawę AD w punkcie E tak, że $AE : ED = 5 : 8$. Oblicz podstawy trapezu.

5.41. Odcinek CD – dwusieczna trójkąta ABC. Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do prostej AC i przecina bok BC w punkcie E. Oblicz odcinek DE, jeżeli $AC = 16$ cm, $BC = 24$ cm.

PRZYGOTOWUJEMY SIĘ DO NOWEGO TEMATU

5.42. Oblicz sumę siedmiokąta wypukłego.

5.43. Czy istnieje wielokąt wypukły, suma kątów którego jest równa:
1) 1080°; 2) 1200°?

5.44. Czy istnieje wielokąt, gdy każdy jego kąt jest równy:
1) 72°; 2) 171°?

5.45. Czy wypowiedź jest prawdziwa (Odpowiedź uzasadnij):

1) jeżeli wszystkie boki wielokąta wpisanego w okrąg są równe, to wszystkie kąty jego też są równe;
2) jeżeli wszystkie kąty wielokąta wpisanego w okrąg są równe, to i wszystkie jego boki też są równe;
3) jeżeli wszystkie boki wielokąta opisanego na okręgu są równe, to i wszystkie jego kąty są równe;
4) jeżeli wszystkie kąty wielokąta opisanego na okręgu są równe, to i wszystkie boki też są równe?

SPOSTRZEGAJCIE, RYSUJCIE, KONSTRUUJCIE, FANTAZJUJCIE

5.46. Dany kwadrat o wymiarach 99×99 kratek. Każdą kratkę kwadratu pomalowano w czarny i biały kolor. Pozwolono jednocześnie przemalować wszystkie kratki dowolnego słupka lub dowolnego rzędu w ten kolor, których kratek w tym słupku lub w tym rzędzie do przemalowania było najwięcej. Czy zawsze można zrobić tak, aby wszystkie kratki były jednakowego koloru?

ZEWNĘTRZNO WPISANY OKRĄG W TRÓJKĄT

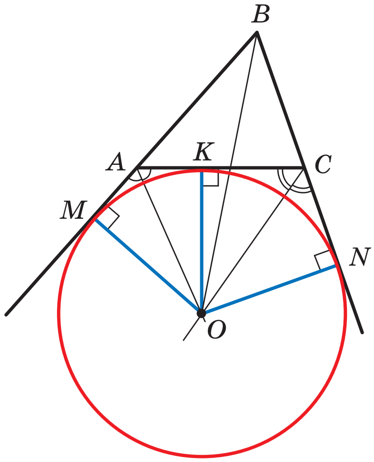
Poprowadzimy dwusieczne dwóch kątów zewnętrznych poprowadzonych z wierzchołków A i C w trójkącie ABC (rys. 5.8). przypuśćmy, że O – punkt przecięcia tych dwusiecznych. Wtedy punkt O równo oddalony od prostych AB, BC i AC.

Poprowadzimy trzy prostopadłe: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Wiadomo, że $OM = OK = ON$. A więc, istnieje okrąg ze środkiem w punkcie O, który jest styczny do boku trójkąta oraz do przedłużeń dwóch pozostałych boków. Taki okrąg nazywa się zewnętrzno wpisanym okręgiem w trójkąt ABC (rys. 5.8).

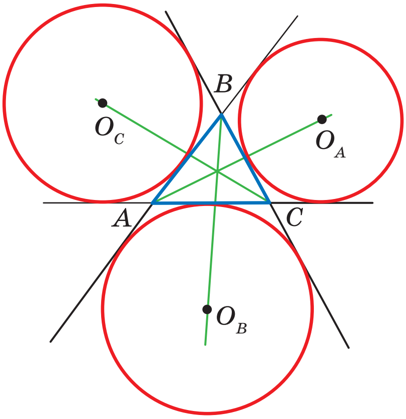
Ponieważ $OM = ON$, to punkt O leży na dwusiecznej kąta ABC.

Dowolny trójkąt posiada trzy okręgi wpisane zewnętrznie. Na rysunku 5.9 środki ich są oznaczone O_A, O_B i O_C. Promienie tych okręgów są oznaczone odpowiednio r_a, r_b i r_c.

Zgodnie z własnością stycznych poprowadzonych do okręgu z jednego punktu otrzymamy: $CK = CN$, $AK = AM$ (rys. 5.8). Wtedy $AC = CN + AM$. A więc, obwód trójkąta ABC jest równy sumie $BM + BN$. Ale $BM = BN$. Wtedy $BM = BN = p$, gdzie p – połowa obwodu trójkąta ABC.



Rys. 5.8



Rys. 5.9

Otrzymamy:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} = \frac{1}{2}OM \cdot AB + \frac{1}{2}ON \cdot BC - \frac{1}{2}OK \cdot AC =$$
$$= \frac{1}{2}r_b\,(c + a - b) = r_b \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2} = r_b \cdot \frac{2p - 2b}{2} = r_b\,(p - b).$$

Stąd $r_b = \dfrac{S}{p - b}$, gdzie S – pole trójkąta ABC.

Analogicznie można przekonać się, że $r_a = \dfrac{S}{p - a}$, $r_c = \dfrac{S}{p - c}$.

ĆWICZENIA

1. Udowodnij, że $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$, gdzie r – promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC.
2. Udowodnij, że pole S trójkąta prostokątnego można obliczyć według wzoru $S = r_c \cdot r$, gdzie r_c – promień okręgu zewnętrzno wpisanego, który jest styczny do przeciwprostokątnej trójkąta, r – promień okręgu wpisanego w dany trójkąt.
3. W trójkąt równoboczny o boku a wpisano okrąg. Do okręgu poprowadzono styczną tak, że odcinek stycznej, który należy do trójkąta, jest równy b. Oblicz pole trójkąta, który ta styczna odcina od trójkąta równobocznego.

4. W czworokącie $ABCD$ przekątna BD prostopadła do boku AD, $\angle ADC = 135°$, $\angle BAD = \angle BCD = 60°$. Udowodnij, że przekątna AC jest dwusieczną kąta BAD.
Wskazówka. Udowodnij, że punkt C – środek okręgu zewnętrznego wpisanego w trójkąt ABD.

5. W trójkącie ABC kąt B wynosi 120°. Odcinki AN, CF i BK są dwusiecznymi trójkąta ABC. Udowodnij, że kąt NKF wynosi 90°.
Wskazówka. Na przedłużeniu boku AB poza punktem B wybrano punkt M. Wtedy $\angle MBC = \angle KBC = 60°$, to znaczy, że półprosta BC – dwusieczna kąta zewnętrznego MBK w trójkącie ABK. Stąd wynika, że punkt N – środek okręgu zewnętrznego wpisanego w trójkąt ABK. Analogicznie można udowodnić, że punkt F – środek okręgu zewnętrzno wpisanego w trójkąt BCK.

6. Bok kwadratu $ABCD$ jest równy 1 cm. Na bokach AB i BC obrano odpowiednio punkty M i N tak, że obwód trójkąta MBN wynosi 2 cm. Oblicz kąt MDN.
Wskazówka. Udowodnij, że punkt D – środek okręgu wpisanego zewnetrznie w trójkąt MBN.

ZADANIA TESTOWE N1 “SPRAWDŹ SIEBIE”

1. Która z równości jest prawdziwa?
A) $\cos(180° - \alpha) = \sin \alpha$;
B) $\cos(180° - \alpha) = \cos \alpha$;
C) $\sin(180° - \alpha) = \cos \alpha$;
D) $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$.

2. Która z nierówności jest prawdziwa?
A) $\sin 100° \cos 110° > 0$;
B) $\sin 100° \cos 10° < 0$;
C) $\sin 100° \cos 110° < 0$;
D) $\sin 100° \cos 90° > 0$.

3. Oblicz trzeci bok trójkąta, jeżeli dwa jego boki są równe 3 cm i 8 cm, a kąt zawarty między nimi 120°.
A) $\sqrt{97}$ cm; B) 7 cm; C) 9 cm; D) $\sqrt{32}$ cm.

4. Jakim jest kąt, który jest przeciwległy do największego boku trójkąta o bokach 4 cm, 7 cm i 9 cm?
A) ostrym;
B) rozwartym;
C) prostym;
D) dowiedzieć się jest niemożliwym.

5. Kąt, zawarty między bokami trójkąta, z których jeden z nich o 10 cm dłuższy od drugiego, jest równy 60°, zaś trzeci bok wynosi 14 cm. Jaka jest długość największego boku trójkąta?
A) 16 cm; B) 14 cm; C) 18 cm; D) 15 cm.

6. Przekątne równoległoboku są równe 17 cm i 19 cm, a jego boki mają się, jak 2 : 3. Ile wynosi obwód równoległoboku?
A) 25 cm; B) 30 cm; C) 40 cm; D) 50 cm.

7. W trójkącie ABC wiadomo, że $AB = 8$ cm, $\angle C = 30°$, $\angle A = 45°$. Oblicz bok BC.
A) $8\sqrt{2}$ cm; B) $4\sqrt{2}$ cm; C) $16\sqrt{2}$ cm; D) $12\sqrt{2}$ cm.

8. Ile wynosi stosunek AC i BC boków trójkąta ABC, jeżeli $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$?
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $\sqrt{3}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

9. W trójkącie ABC wiadomo, że $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $\angle C = 135°$. Oblicz średnicę okręgu opisanego na danym trójkącie.
A) 4 cm; B) 8 cm; C) 16 cm; D) 2 cm.

10. Jaką największą wartość może osiągnąć pole trójkąta o bokach 8 cm i 12 cm?
A) 96 cm^2;
B) 48 cm^2;
C) 24 cm^2;
D) ustalić niemożliwie.

11. Oblicz sumę promieni okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie o bokach 25 cm, 33 cm i 52 cm.
A) 36 cm; B) 30 cm; C) 32,5 cm; D) 38,5 cm.

12. Dwa boki trójkąta są równe 11 cm i 23 cm, a środkowa poprowadzona do trzeciego boku – 10 cm. Oblicz niewiadomy bok trójkąta.
A) 15 cm; B) 30 cm; C) 25 cm; D) 20 cm.

GŁÓWNE W PARAGRAFIE 1

Kosinus i sinus

Kosinusem i sinusem kąta α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$, któremu odpowiada punkt M jednostkowego półokręgu nazywa się odpowiednio odcięta i rzędna punktu M.

Tangens

Tangensem kąta α, gdzie $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ i $\alpha \neq 90°$, nazywa się stosunek $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Twierdzenie kosinusów

W trójkącie kwadrat dowolnego boku równa się sumie kwadratów dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn tych boków i kosinus kąta, zawartego między nimi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Wnioski z twierdzenia kosinusów

Przypuśćmy, że a, b i c – długości boków trójkąta, przy czym a – długość jego największego boku. Jeżeli $a^2 < b^2 + c^2$, to trójkąt ostrokątny. Jeżeli $a^2 > b^2 + c^2$, to trójkąt rozwartokątny. Jeżeli $a^2 = b^2 + c^2$, to trójkąt prostokątny.

Lemat o cięciwie okręgu

Cięciwa okręgu jest równa iloczynowi średnicy i sinusa dowolnego kąta wpisanego, który opiera się na tę cięciwę.

Twierdzenie sinusów

Boki trójkąta są proporcjonalne do sinusów kątów przeciwległych:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Wzór na obliczenie pola trójkąta

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Wzór Herona: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

Wzór na obliczenie promienia okręgu, wpisanego w trójkącie

$$r = \frac{S}{p}$$

Wzór na obliczenie promienia okręgu, opisanego na trójkącie

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Pole wielokąta opisanego na okręgu

Pole wielokąta opisanego na okręgu jest równe iloczynowi jego połowy obwodu i promienia opisanego okręgu.

WIELOKĄTY FOREMNE §2

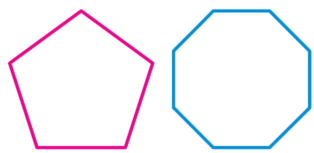
W tym paragrafie dowiedziecie się jaki wielokąt nazywa się foremnym. Nauczycie się własności wielokątów foremnych. Dowiecie się, jak za pomocą cyrkla i liniału można narysować niektóre z nich.

Nauczycie się obliczać promienie okręgów wpisanych i opisanych na wielokątach foremnych, długość łuku okręgu, pole wycinka i odcinka koła.

6. Wielokąty foremne oraz ich własności

Definicja. Wielokąt nazywa się foremnym, gdy wszystkie jego boki są równe i wszystkie jego kąty są równe.

Z niektórymi wielokątami foremnymi już zapoznaliście się: trójkąt równoboczny – to trójkąt foremny; kwadrat – to czworokąt foremny. Na rysunku 6.1 są przedstawione foremny pięciokąt i sześciokąt.



Rys. 6.1

Zapoznamy się z niektórymi własnościami, które odnoszą się do wszystkich n-kątnych wielokątów foremnych.

Twierdzenie 6.1. ***Wielokąt foremny jest wielokątem wypukłym.***

Z udowodnieniem tego twierdzenia można zapoznać się na str. 60–61.

Każdy kąt wielokąta foremnego jest równy $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Oczywiście, ponieważ suma wszystkich kątów wielokąta jest równa $180^\circ(n-2)$ i wszystkie kąty równe, to każdy z nich dorównuje $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

W trójkącie foremnym istnieje punkt równo oddalony od wszystkich jego wierzchołków i od wszystkich jego boków. To punkt przecięcia dwusiecznych w trójkącie foremnym. Punkt przecięcia przekątnych kwadratu posiada analogiczną własność. To, że w dowolnym wielokącie foremnym istnieje punkt równo oddalony od wszystkich jego wierzchołków oraz od wszystkich jego boków potwierdza następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.2. ***Dla dowolnego wielokąta foremnego, który jest opisany na okręgu lub wpisany w okrąg środkiem opisanego okręgu i wpisanego okręgu jest ten sam punkt.***

Dowód. Na rysunku 6.2 jest przedstawiony n-kątny wielokąt foremny $A_1A_2A_3...A_n$. Udowodnimy, że w niego można wpisać okrąg oraz na nim można opisać okrąg.

Poprowadzimy dwusieczne kątów A_1 i A_2. Przypuśćmy, że punkt O – punkt ich przecięcia. Złączymy punkty O i A_3. Ponieważ w trójkątach OA_1A_2 i OA_2A_3 kąty 2 i 3 są równe, $A_1A_2 = A_2A_3$ i OA_2 – wspólny bok, to te trójkąty są przystające według pierwszej cechy przystawania trójkątów. Oprócz tego kąty 1 i 2 są równe jako połówki równych kątów. Stąd, trójkąt OA_1A_2 – jest równoramienny, wtedy i trójkąt OA_2A_3 też będzie równoramiennym. Wtedy $OA_1 = OA_2 = OA_3$.

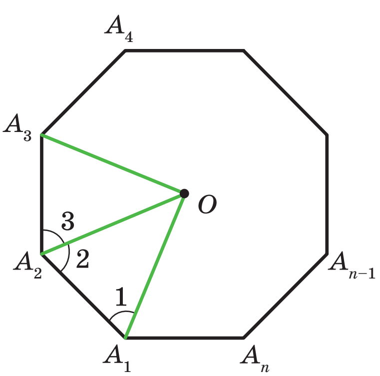
Łącząc punkt O odpowiednio z punktami A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n, analogicznie można przekonać się, że $OA_3 = OA_4 = ... = OA_{n-1} = OA_n$.

A więc, dla wielokąta $A_1A_2A_3...A_n$ istnieje punkt równo oddalony od wszystkich jego wierzchołków. To punkt O – środek okręgu opisanego.

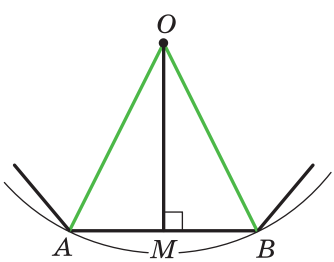
Ponieważ trójkąty równoramienne OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 są przystające, to ich wysokości, poprowadzone z wierzchołka O będą też równe. Stąd wypływa wniosek: punkt O jest równo oddalony od wszystkich boków wielokąta. Więc, punkt O – środek okręgu wpisanego. ◀

Punkt, który jest jednocześnie środkiem opisanego i wpisanego okręgu w wielokącie foremnym nazywa się **środkiem wielokąta foremnego**.

Na rysunku 6.3 przedstawiono fragment n-kątnego wielokąta foremnego ze środkiem O oraz bokiem AB, długość której oznaczono a_n.



Rys. 6.2



Rys. 6.3

Kąt AOB nazywa się **kątem środkowym wielokąta foremnego**. Wiadomo, że $\angle AOB = \frac{360°}{n}$.

W trójkącie równoramiennym AOB poprowadzimy wysokość OM. Wtedy $\angle AOM = \angle BOM = \frac{180°}{n}$, $AM = MB = \frac{a_n}{2}$. Z trójkąta OMB otrzymamy, że $OB = \frac{MB}{\sin \angle BOM} = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180°}{n}}$ i $OM = \frac{MB}{\operatorname{tg} \angle BOM} = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180°}{n}}$.

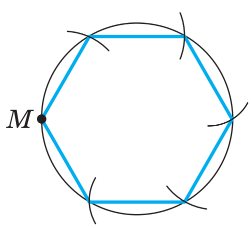
Odcinki OB i OM – promienie odpowiednio opisanego i wpisanego okręgu n-kątnego wielokąta foremnego. Gdy ich długości odpowiednio oznaczymy R_n i r_n to otrzymane wyniki można zapisać w postaci wzorów:

$$\boxed{R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180°}{n}}} \qquad \boxed{r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180°}{n}}}$$

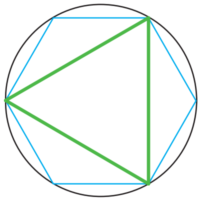
Zamieniając w tych wzorach n na liczby 3, 4, 6 otrzymamy wzory na obliczenie promieni okręgów opisanego i wpisanego dla trójkątów foremnych, czworokątów i sześciokątów o boku a:

Ilość boków w wielokącie foremnym	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Promień okręgu opisanego	$R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Promień okręgu wpisanego	$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

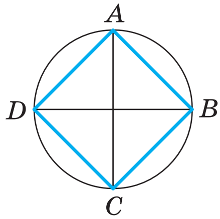
Z otrzymanych wyników wynika, że bok sześciokąta foremnego jest równy promieniowi jego okręgu opisanego. Teraz można zapisać algorytm konstrukcji sześciokąta foremnego: od dowolnego punktu M leżącego na okręgu należy kolejno odłożyć łuki, które są równe promieniowi (rys. 6.4). W ten sposób otrzymamy wierzchołki wielokąta foremnego.



Rys. 6.4



Rys. 6.5

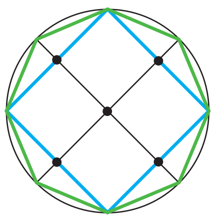


Rys. 6.6

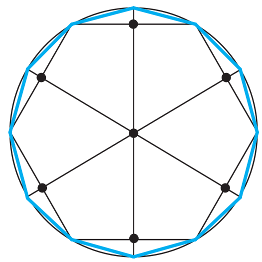
Łącząc co drugi wierzchołek sześciokąta foremnego otrzymamy trójkąt foremny (rys. 6.5).

Dla konstrukcji czworokąta foremnego wystarczy w okręgu poprowadzić dwie wzajemnie prostopadłe średnice AC i BD (rys. 6.6) i punkty przecięcia z okręgiem kolejno złączyć. Taki czworokąt $ABCD$ jest kwadratem (udowodnij samodzielnie).

Gdy skonstruowano n-kątny wielokąt foremny, to lekko skonstruować $2n$-kątny wielokąt foremny. W tym celu należy znaleźć środki boków wielokąta n-kątnego i poprowadzić promienie opisanego okręgu przez otrzymane punkty. Wtedy końce promieni i wierzchołki wielokąta n-kątnego będą wierzchołkami wielokąta $2n$-kątnego foremnego. Na rysunku 6.7 i 6.8 przedstawiono konstrukcję foremnego 8-kąta i 12-kąta.



Rys. 6.7



Rys. 6.8

Zadanie 1. Czy istnieje wielokąt foremny, kąt jakiego jest równy: 1) $155°$; 2) $177°$? W razie odpowiedzi stwierdzającej podaj rodzaj wielokąta.

1) Przyjmiemy, że n – ilość boków szukanego wielokąta foremnego. Po pierwsze, suma jego kątów jest równa $180°(n-2)$. A drugiego, ta sama suma jest równa $155°n$. A więc, $180°(n-2) = 155°n$; $25°n = 360°$; $n = 14{,}4$. Ponieważ n powinne być liczbą naturalną, to taki wielokąt foremny nie istnieje.

2) Mamy: $180°(n-2)=177°n$; $180°n-360°=177°n$; $n=120$.

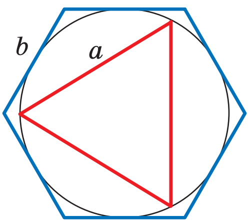
Odpowiedź: 1) nie istnieje, 2) istnieje – to sto dwudziestokąt. ◀

Zadanie 2. W okrąg wpisano trójkąt foremny o boku 18 cm. Oblicz bok sześciokąta foremnego na tym okręgu.

Rozwiązanie. Promień okręgu opisanego na trójkącie foremnym można obliczyć według wzoru $R_3=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, gdzie a – długość boku trójkąta (rys. 6.9). A więc, $R_3=\frac{18\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{3}$ (cm).

Według warunku, promień okręgu wpisanego w sześciokąt foremny jest równy promieniowi okręgu opisanego na trójkącie foremnym, to znaczy, że $r_6=R_3=6\sqrt{3}$ cm. Ponieważ $r_6=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, gdzie b – długość boku sześciokąta foremnego, to $b=\frac{2r_6}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=12$ (cm).

Odpowiedź: 12 cm. ◀



Rys. 6.9

?

1. Jaki wielokąt nazywa się foremny?
2. Jaką inną nazwę posiada trójkąt foremny?
3. Jaką inną nazwę posiada czworokąt foremny?
4. Na jakim wielokącie foremnym można opisać okrąg?
5. W jaki wielokąt foremny można wpisać okrąg?
6. Jak są rozmieszczone względem siebie środki wpisanego i opisanego okręgu na wielokącie?
7. Co nazywa się środkiem wielokąta foremnego?
8. Podaj wzory promieni wpisanych i opisanych okręgów wielokąta foremnego, wielokąta n-kątnego, trójkąta, czworokąta i sześciokąta.
9. Opisz konstrukcję sześciokąta foremnego.
10. Opisz konstrukcję czworokąta foremnego.
11. W jaki sposób mając skonstruowany wielokąt n-kątny można skonstruować wielokąt $2n$-kątny?

ZADANIA PRAKTYCZNE

6.1.° Nakreśl okrąg o promieniu równym 3 cm. Skonstruujcie wpisany w ten okrąg:
1) sześciokąt foremny;
2) trójkąt foremny;
3) dwunastokąt foremny.

6.2.° Nakreśl okrąg o promieniu równym 2,5 cm. Skonstruujcie wpisany w ten okrąg:
1) czworokąt foremny;
2) ośmiokąt foremny.

ĆWICZENIA

6.3.° Oblicz kąty wielokąta n-kątnego foremnego, jeżeli:
1) $n = 6$; 2) $n = 9$; 3) $n = 15$.

6.4.° Oblicz kąty foremnego:
1) ośmiokąta; 2) dziesięciokąta.

6.5.° Ile boków ma wielokąt foremny, jeżeli kąt jego równy:
1) 160°; 2) 171°?

6.6.° Ile boków ma wielokąt foremny, jeżeli kąt jego jest równy:
1) 108°; 2) 175°?

6.7.° Czy istnieje wielokąt foremny, kąt jakiego jest równy:
1) 140°; 2) 130°?

6.8.° Ile boków ma wielokąt foremny, jeżeli kąt przyległy z kątem wielokąta stanowi $\frac{1}{9}$ kąta wielokąta?

6.9.° Określ ilość boków wielokąta foremnego, jeżeli jego kąt o 168° większy od kąta przyległego do niego.

6.10.° Ile boków ma wielokąt foremny wpisany w okrąg, jeżeli stopniowa miara łuku opisanego okręgu, który opiera się na boku wielokąta, wynosi:
1) 90°; 2) 24°?

6.11.° Oblicz ilość boków wielokąta foremnego, kąt środkowy jakiego jest równy:
1) 120°; 2) 72°.

6.12.° Przypuśćmy, że a – długość boku wielokąta foremnego, R i r – odpowiednio jego promieni opisanego i wpisanego okręgu. Wypełnij tabelę (długości odcinków są podane w centymetrach):

a	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

6.13.° Przypuśćmy, że a – długość boku kwadratu, R i r – odpowiednio promieni opisanego i wpisanego okręgu. Wypełnij tabelę (długości odcinków są podane w centymetrach):

a	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

6.14.° Wysokość wielokąta foremnego jest równa 15 cm. Ile wynosi promień:
1) opisanego okręgu; 2) wpisanego okręgu?

6.15.° Przekątna kwadratu jest równa $6\sqrt{2}$ cm. Ile wynosi promień:
1) opisanego okręgu; 2) wpisanego okręgu?

6.16.° Promień okręgu jest równy 12 cm. Oblicz bok wpisanego w ten okrąg foremnego:
1) sześciokąta; 2) dwunastokąta.

6.17.° Promień okręgu jest równy $8\sqrt{3}$ cm. Oblicz bok sześciokąta foremnego, opisanego na tym okręgu.

6.18.° Udowodnij, że promień okręgu opisanego na trójkącie foremnym, jest trzykrotnie większy od promienia okręgu, wpisanego w ten trójkąt.

6.19.° Promień okręgu opisanego na trójkącie foremnym jest o 4 cm dłuższy od promienia okręgu wpisanego. Oblicz promienie wpisanego i opisanego okręgów oraz bok trójkąta.

6.20.° Bok wielokąta foremnego jest równy a, promień okręgu opisanego jest równy R. Oblicz promień okręgu wpisanego.

6.21.° Promienie okręgów wpisanego i opisanego na wielokącie foremnym są równe r i R. Oblicz bok wielokąta.

6.22.° Bok wielokąta foremnego jest równy a, promień okręgu wpisanego jest równy r. Oblicz promień okręgu opisanego.

6.23.° Na okręgu jest wpisany wielokąt foremny, bok jakiego jest równy $4\sqrt{3}$ cm. Oblicz bok kwadratu, wpisanego w ten okrąg.

6.24.° W okrąg wpisano kwadrat o boku $6\sqrt{2}$ cm. Oblicz bok trójkąta foremnego opisanego na tym okręgu.

6.25.° Średnica koła wynosi 16 cm. Czy można wyciąć z tego koła kwadrat o boku równym 12 cm?

6.26.° Jaką najmniejszą średnicę powinno mieć kołowe polano, aby z niego można było wyciąć belkę przekrój poprzeczny której jest trójkąt foremny o boku 15 cm?

6.27.° Jaką najmniejszą średnicę powinno mieć kołowe polano, aby z niego można było wyciąć belkę, przekrój osiowy której jest kwadrat o boku równym 14 cm?

6.28.• Ile boków ma wielokąt foremny, kąt jakiego o 36° większy od jego kąta środkowego?

6.29.• W wielokąt wpisano okrąg. Kąt między promieniami poprowadzonymi do punktu styczności sąsiednich boków wynosi 20°. Oblicz ile boków ma wielokąt.

6.30.• Udowodnij, że wszystkie przekątne pięciokąta foremnego są równe.

6.31.• Udowodnij, że każda przekątna pięciokąta foremnego jest równoległa do jednego z jego boku.

6.32.• Wspólna cięciwa dwóch okręgów, które przecinają się jest bokiem trójkąta foremnego opisanego w jeden okrąg i bokiem kwadratu wpisanego w drugi okrąg. Długość tej cięciwy jest równa a. Oblicz odległość między środkami okręgu, jeżeli one leżą:
1) po różnych stronach cięciwy; 2) po jednej stronie cięciwy.

6.33.• Wspólna cięciwa dwóch okręgów, które przecinają się, jest bokiem trójkąta foremnego wpisanego w jeden okrąg oraz bokiem sześciokąta foremnego wpisanego w drugi okrąg. Długość tej cięciwy jest równa a. Oblicz odległość między środkami okręgów jeżeli one leżą:
1) po różnych stronach tej cięciwy;
2) po jednej stronie tej cięciwy.

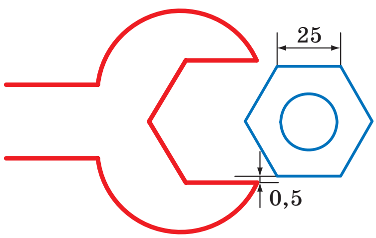
6.34.• W okrąg wpisano trójkąt foremny i na tym okręgu jest opisany trójkąt foremny. Oblicz stosunek boków tych okręgów.

6.35.• W okrąg wpisano sześciokąt foremny i po tym okręgu opisano sześciokąt foremny. Oblicz stosunek boków tych sześciokątów.

6.36.• Udowodnij, że bok ośmiokąta foremnego jest równy $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, gdzie R – promień okręgu opisanego na nim.

6.37.• Udowodnij, że bok dwunastokąta foremnego jest równy $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, gdzie R – promień okręgu opisanego na nim.

6.38.• Oblicz średnicę otworu klucza do sześciokątnej foremnej śruby, jeżeli szerokość ściany śruby wynosi 25 mm (rys. 6.10). Wielkość odstępu między ścianami śruby i kluczem jest równa 0,5 mm?



Rys. 6.10

6.39.• Oblicz pole ośmiokąta foremnego, jeżeli promień opisanego na nim okręgu jest równy R.

6.40.• Oblicz przekątne i pole sześciokąta foremnego o boku równym a.

6.41.•• Kąty kwadratu o boku 6 cm ścięto tak, że otrzymano ośmiokąt foremny. Oblicz bok utworzonego ośmiokąta.

6.42.•• Kąty trójkąta foremnego o boku 24 cm ścięto tak, że otrzymano sześciokąt foremny. Oblicz bok utworzonego sześciokąta.

6.43.•• Oblicz długość przekątnych ośmiokątnego wielokąta foremnego o boku równym a.

6.44.•• W dwunastokątnym foremnym wielokącie o boku równym a są kolejno połączone środki sześciu boków wziętych przez jeden. Oblicz bok utworzonego sześciokąta foremnego.

6.45.•• W ośmiokątnym wielokącie foremnym o boku równym a kolejno są połączone środki czterech boków wziętych przez jeden. Oblicz bok utworzonego kwadratu.

6.46.* Jaki kształt równych wielokątów foremnych muszą mieć deseczki parkietu, aby nimi można było ułożyć całą podłogę?

6.47.* Mając dany sześciokąt foremny o boku 1 cm, skonstruuj odcinek o długości $\sqrt{7}$ cm korzystając tylko z liniału.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

6.48. Okrąg podzielono na pięć równych łuków: $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup AE$. Oblicz:

1) $\angle BAC$; 2) $\angle BAD$; 3) $\angle BAE$; 4) $\angle CAD$; 5) $\angle DAE$.

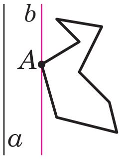
6.49. Na jednym ramieniu kąta o wierzchołku A obrano punkty B i C (punkt B leży między A i C), a na drugim ramieniu – punkty D i E (punkt D leży między A i E), przy czym $AB = 28$ cm, $BC = 8$ cm, $AD = 24$ cm, $AE = 42$ cm, $BE = 21$ cm. Oblicz odcinek CD.

6.50. Podstawa równoramiennego rozwartokątnego trójkąta wynosi 24 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie – 13 cm. Oblicz pole trójkąta.

6.51. Przez punkt A do okręgu przeprowadzono dwie styczne. Odległość od punktu A do punktu przecięcia wynosi 12 cm, a odległość między punktami przecięcia – 14,4 cm. Oblicz promień koła.

O KONSTRUKCJI n-KĄTNYCH WIELOKĄTÓW FOREMNYCH

Udowodnimy, że dowolny n-kątny wielokąt foremny jest wielokątem wypukłym. W tym celu wystarczy przekonać się, że w dowolnym wielokącie chociażby jeden z kątów jest mniejszy od 180°. Biorąc pod uwagę to, że w n-kątnym wielokącie foremnym wszystkie kąty są równe, wynika, że wszystkie kąty są mniejsze od 180°, znaczy, że wielokąt jest wypukły.



Rys. 6.11

Rozpatrzymy dowolny wielokąt i prostą a, która nie ma z nim wspólnych punktów (rys. 6.11). Z każdego wierzchołka tego wielokąta opuścimy prostopadłą na prostej a.

Porównując wielkości tych prostopadłych, możemy wybrać wierzchołek wielokąta, który leży na prostopadłej o najmniejszej odległości od prostej a (jeżeli takich wierzchołków jest kilka, to wybieramy jeden z nich). Przypuśćmy, że wierzchołek A przyporządkowuje się tej własności (rys. 6.11). Przez punkt A poprowadzimy prostą b, równoległą do prostej a. Wtedy kąt A wielokąta leży w jednej półpłaszczyźnie względem prostej b. A więc, $\angle A < 180°$.

Za pomocą cyrkla i liniału umiecie konstruować foremny wielokąt 4-kątny, a więc i 8-kątny, 16-kątny, 32-kątny, to znaczy dowolny wielokąt 2^n-kątny (n – liczba naturalna, $n > 1$). Umiejętność konstrukcji trójkąta foremnego umożliwia skonstruować taki łańcuszek z wielokątów foremnych, jak: 6-kątnych, 12-kątnych, 24-kątnych itd., dowolnych $3 \cdot 2^n$-kątnych (n – liczba naturalna).

Konstrukcją wielokątów foremnych zajmowali się jeszcze starożytni uczeni Grecji. W szczególności, oprócz wyżej wymienionej konstrukcji wielokątów oni znali konstrukcję foremnych wielokątów 5-kątnych i 15-kątnych, co jest nie łatwa sprawa.

Starożytni uczeni, którzy umieli konstruować dowolny foremny wielokąt n-kątny, gdzie $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, starali się rozwiązać to zadanie i dla $n = 7, 9$. To im nie udało się. W przeciągu więcej niż dwóch tysiącleci matematycy nie mogli rozstrzygnąć ten problem. W 1796 r. wybitny niemiecki matematyk Carl Friedrich Gauss znalazł sposób konstrukcji 17-kąta foremnego za pomocą cyrkla i linijki. W 1801 r. Gauss udowodnił, że za pomocą cyrkla i liniału można zbudować foremny wielokąt n--kątny. Wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2^k$, gdzie $k \in \mathrm{N}$, $k > 1$, lub $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$, gdzie k – całkowita nieujemna liczba, $p_1, p_2, \ldots, p_t$ – różne liczby pierwsze postaci $2^{2^m} + 1$, gdzie m – całkowita nieujemna liczba, która nazywa się liczbą pierwszą Fermata[1]. Teraz wiadomo tylko pięć liczb pierwszych Fermata, a mianowicie: 3, 5, 17, 257, 65 537.

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Gauss był tak dumny ze swojego odkrycia, że pod koniec życia prosił, aby zamiast epitafium wyryto na jego nagrobku regularny 17-kąt. Kamieniarz nie podjął się jednak tego zadania. Zamiast tego na piedestale pomnika umieszczona została 17-ramienna gwiazda.

[1] Pierre de Fermat (1601–1665) – francuski matematyk, dokonał wielu odkryć w teorii liczb, m.in. sformułował słynne twierdzenie Fermata.

7. Długość okręgu. Pole koła

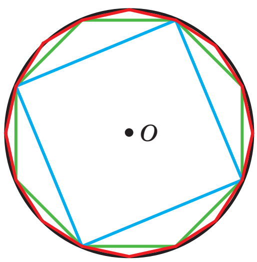
Na rysunku 7.1 przedstawiono foremny 4-kąt; 8-kąt, 16-kąt wpisany w okrąg.

Widzimy, że przy zwiększeniu ilości boków foremnego wielokąta n-kątnego, obwód P_n coraz mniej i mniej różni się od długości C okręgu opisanego.

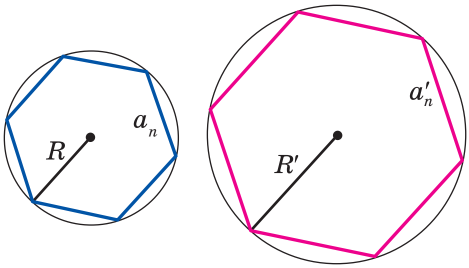
Tak, dla naszego przykładu można zapisać:

$$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16}.$$

Przy nieograniczonym zwiększeniu ilości boków wielokąta foremnego jego obwód będzie bardzo mało różnić się od długości okręgu. To oznacza, że różnicę $C - P_n$ można zrobić mniejszą od, na przykład 10^{-6}, 10^{-9} i ogółem od dowolnej liczby dodatniej.



Rys. 7.1



Rys. 7.2

Rozpatrzymy dwa wielokąty foremne n-kątne o bokach a_n i a'_n, wpisanych w okręgi, promienie których odpowiednio są równe R i R' (rys. 7.2). Wtedy ich obwody P_n i P'_n można obliczyć według wzorów

$$P_n = na_n = n \cdot 2R \sin \frac{180°}{n},$$

$$P'_n = na'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180°}{n}.$$

Stąd

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (*)$$

Ta równość sprawiedliwa dla dowolnych własności n (n – liczba naturalna, $n \geqslant 3$). Przy nieograniczonym zwiększeniu wartości n obwody P_n i P'_n odpowiednio będą jak najmniej różnić się od długości C i C' opisanych okręgów. Wtedy, przy nieograniczonym zwiększeniu wartości n stosunek $\frac{P_n}{P'_n}$ będzie bardzo mało różnić się od stosunku $\frac{C}{C'}$. Biorąc pod uwagę równość (*) możemy uważać, że liczba $\frac{2R}{2R'}$ jak najmniej będzie różnić się od liczby $\frac{C}{C'}$. Ale jest to możliwe tylko wtedy, gdy $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$, czyli $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Ostatnia równość oznacza, że ***że dla wszystkich okręgów stosunek długości okręgu do średnicy jest liczbą stałą***.

Z kursu matematyki klasy 6. wiecie, że ta liczba oznacza się literą alfabetu greckiego π (czyta się: "pi").

Z równości $\frac{C}{2R} = \pi$ otrzymamy wzór na obliczenie długości okręgu:

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

Liczba π jest liczbą niewymierną, a więc, nie można ją podać w postaci skończonego ułamka dziesiętnego. Przeważnie, przy rozwiązywaniu zadań przybliżoną wartość π uważa liczbę równą 3,14.

Wybitny uczony starożytności – Archimedes (III st. p.n.e.) wyrażając obwód foremnego wielokąta 96-kątnego przez średnicę opisanego okręgu ustalił, że $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Stąd wynika, że $\pi \approx 3{,}14$.

Za pomocą teraźniejszych komputerów i specjalnych programów można obliczyć π z wielką dokładnością. Podamy zapis liczby π do 47 cyfr po przecinku:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937...$.

W 1989 r. liczbę π obliczono z dokładnością do 1 011 196 691 cyfr po przecinku. Ten fakt było wniesiono do Księgi rekordów Guinnessa. Do książki tę liczbę nie zapisano, ponieważ dla jej zapisania potrzeba było ponad tysiąc stronic. W 2017 r. już obliczono więcej niż 22 tryliony znaków dziesiętnych liczby π.

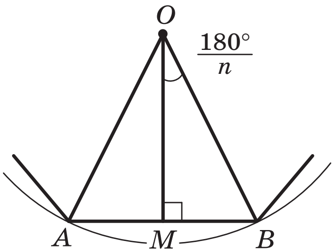
Wyznaczymy wzór do obliczenia długości łuku okręgu o mierze stopniowej równej $n°$. Ponieważ, miara stopniowa całego okręgu jest równa $360°$, to długość łuku $1°$ wynosi $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Wtedy długość l łuku o $n°$ można obliczyć korzystając ze wzoru

$$\boxed{l = \frac{\pi R n}{180}}$$

Wyznaczymy wzór na obliczenie pola koła.

Zwrócimy się znowu do rysunku 7.1. Widzimy, że przy zwiększeniu ilości boków foremnego wielokąta n-kątnego jego pole S_n coraz mniej różni się od pola S koła. Przy nieograniczonym zwiększeniu ilości boków jego pole bardzo mało różni się od pola koła.

Na rysunku 7.3 przedstawiono fragment foremnego wielokąta n-kątnego ze środkiem w punkcie O, bokiem $AB = a_n$ oraz promieniem okręgu opisanego, który jest równy R. Opuścimy prostopadłą OM na bok AB. Otrzymamy $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} a_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}$.



Rys. 7.3

Ponieważ promienie poprowadzone do wierzchołków foremnego wielokąta n-kątnego dzielą go na n przystających trójkątów, to pole S_n wielokąta jest n razy większe od pola trójkąta AOB.

Wtedy $S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}$.

Stąd

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}, \qquad (**)$$

gdzie P_n – obwód danego foremnego wielokąta n-kątnego.

Przy nieograniczonym zwiększeniu wartości n wielkość $\frac{180^\circ}{n}$ będzie jak najmniej odróżniać się od 0°, a więc, $\cos \frac{180^\circ}{n}$ będzie dążyć do 1. Obwód P_n dąży do długości C okręgu, a pole S_n – do pola S koła. Wtedy biorąc pod uwagę równość (**) możemy zapisać: $S = \frac{1}{2} C \cdot R$.

Z tej równości otrzymamy wzór na obliczenie pola koła:

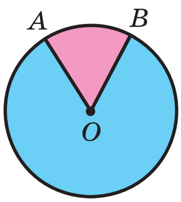
$$\boxed{S = \pi R^2}$$

Na rysunku 7.4 promienie OA i OB dzielą koło na dwie części, które zamalowano w różne kolory. Każda z tych części wraz z promieniami OA i OB nazywa się **wycinkiem kołowym** lub **wycinkiem**.

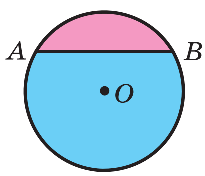
Wiadomo, że koło o promieniu R można podzielić na 360 równych wycinków, każdy z których zawiera łuk o 1°. Pole takiego wycinka jest równe $\frac{\pi R^2}{360}$. Wtedy pole S wycinka zawierającego łuk okręgu o $n°$, można obliczyć według wzoru

$$\boxed{S = \frac{\pi R^2 n}{360}}$$

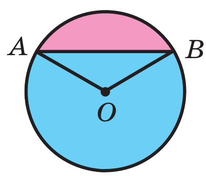
Na rysunku 7.5 cięciwa AB dzieli koło na dwie części, które zamalowane w różne kolory. Każda z części koła wraz z cięciwą AB nazywa się **odcinkiem kołowym** lub **odcinkiem**. Cięciwa AB nazywa się **podstawą odcinka**.



Rys. 7.4



Rys. 7.5



Rys. 7.6

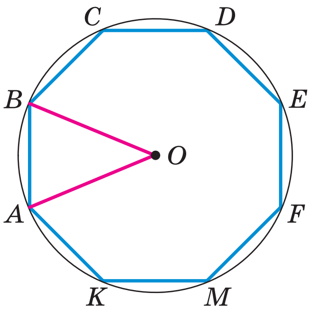
Aby obliczyć pole odcinka pomalowanego w różowy kolor (rys. 7.6) należy od pola wycinka, który zawiera cięciwę AB, odjąć pole trójkąta AOB (punkt O – środek koła). Aby znaleźć pole odcinka pomalowany w błękitny kolor należy do pola wycinka, który nie zawiera cięciwę AB, dodać pole trójkąta AOB.

Jeżeli cięciwa AB jest średnicą koła, to ona dzieli koło na dwie części, które nazywa się **półkolami**. Pole S półkola można obliczyć według wzoru $S = \frac{\pi R^2}{2}$, gdzie R – promień kola.

Zadanie 1. Długość łuku okręgu o promieniu 25 cm, wynosi π cm. Oblicz stopniową miarę łuku.

Rozwiązanie. Ze wzoru $l = \frac{\pi R n}{180}$ otrzymamy $n = \frac{180 l}{\pi R}$. A więc szukana miara stopniowa łuku $n° = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25}\right)^{\circ} = 7{,}2°$.

Odpowiedź: 7,2°. ◀



Rys. 7.7

Zadanie 2. W okręgu ze środkiem O promień którego jest równy 8 cm, wpisano foremny ośmiokąt $ABCDEFMK$ (rys. 7.7). Oblicz pole wycinka i odcinka jaki opiera się na łuk AB.

Rozwiązanie. Kąt AOB – kąt środkowy wielokąta foremnego, dlatego

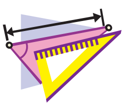
$$\angle AOB = \frac{360°}{8} = 45°.$$

Wtedy, szukane pole wycinka jest równe $S_{\text{wycin}} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi$ (cm²), pole odcinka:

$$S_{\text{odcin}} = S_{\text{wycin}} - S_{AOB} = 8\pi - \frac{1}{2} OA^2 \sin \angle AOB = \left(8\pi - 16\sqrt{2}\right) \quad (\text{cm}^2).$$

Odpowiedź: 8π cm², $\left(8\pi - 16\sqrt{2}\right)$ cm². ◀

1. Jaki stosunek oznacza się literą π?
2. Podaj przybliżoną wartość π z dokładnością do setnych.
3. Według jakiego wzoru oblicza się długość okręgu?
4. Według jakiego wzoru oblicza się długość łuku okręgu?
5. Według jakiego wzoru oblicza się pole koła?
6. Podaj, jaka figura geometryczna nazywa się wycinkiem kołowym.
7. Według jakiego wzoru można obliczyć pole wycinka kołowego?
8. Objaśnij, jaka figura nazywa się odcinkiem kołowym.
9. Objaśnij, jakim sposobem można obliczyć pole odcinka foremnego.



ĆWICZENIA

7.1.° Oblicz długość okręgu o średnicy równej:
1) 1,2 cm; 2) 3,5 cm.

7.2.° Oblicz długość okręgu, promień którego jest równy:
1) 6 cm; 2) 1,4 m.

7.3.° Oblicz pole koła, promień którego jest równy:
1) 4 cm; 2) 14 dm.

7.4.° Oblicz pole koła, średnica którego jest równa:
1) 20 cm; 2) 3,2 dm.

7.5.° Oblicz pole koła, długość okręgu którego jest równa l.

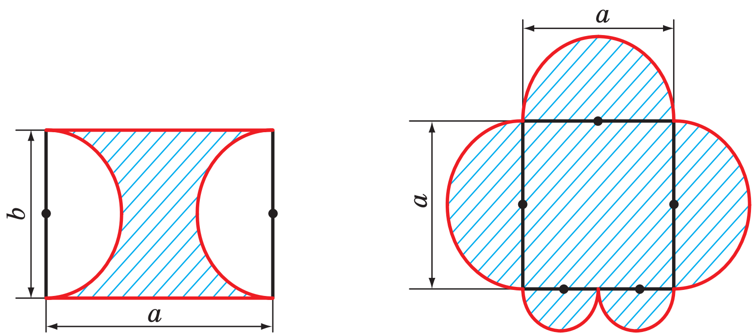
7.6.° Oblicz pole przekroju poprzecznego drzewa, gdy jego objęcie jest równe 125,6 cm.

7.7.° Jak zmieni się długość okręgu, jeżeli jego promień:
1) zwiększyć o 2 razy; 2) zmniejszyć o 3 razy?

7.8.° Promień okręgu zwiększył się o 1 cm. O ile wtedy zwiększyła się długość okręgu?

7.9.° Długość równika Ziemi w przybliżeniu wynosi 40 000 000 m. Biorąc pod uwagę, że Ziemia ma kształt kuli, oblicz jej promień w kilometrach.

7.10.° Oblicz długość czerwonej linii przedstawionej na rysunku 7.8.

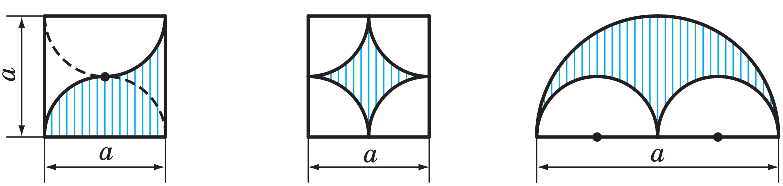


a *b*

Rys. 7.8

7.11.° Jak zmieni się pole koła, jeżeli jego promień:
1) zwiększyć czterokrotnie;
2) zmniejszyć pięciokrotnie?

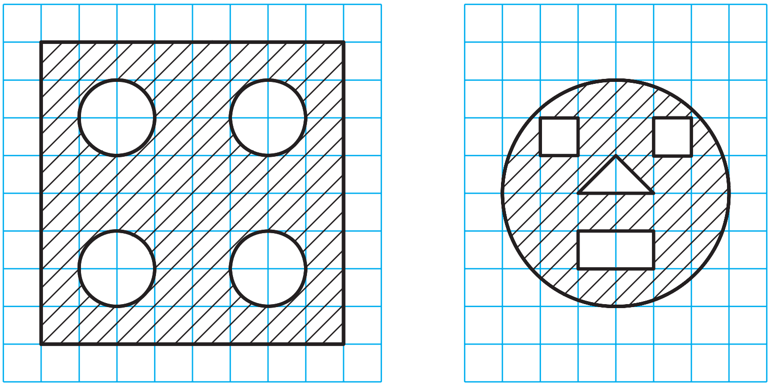
7.12.° Oblicz pole pomalowanej figury, przedstawionej na rysunku 7.9.



a *b* *c*

Rys. 7.9

7.13.° Korzystając z rys. 7.10 oblicz pole zakreskowanej figury, jeżeli długość obranego kwadracika wynosi a.



a *b*

Rys. 7.10

7.14.° Sprzedają się naleśniki o różnych średnicach: 30 cm i 40 cm. W jakim przypadku kupujący zje więcej, gdy kupi jeden duży naleśnik, czy dwa mniejsze, biorąc pod uwagę, że naleśniki są jednakowej grubości?

7.15.° Oblicz długość okręgu, opisanego na trójkącie foremnym o boku równym a.

7.16.° Oblicz długość okręgu wpisanego w kwadrat, bok którego wynosi a.

7.17.° Oblicz pole koła opisanego na kwadracie o boku równym a.

7.18.° Oblicz pole koła wpisanego w sześciokąt foremny o boku równym a.

7.19.° Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt foremny o boku równym a.

7.20.° Oblicz pole koła wpisanego na prostokącie, sąsiednie boki którego są równe a i b.

7.21.° Oblicz pole koła opisanego na trójkącie równoramiennym o ramieniu równym b i kącie α zawartym przy podstawie.

7.22.° Oblicz pole koła opisanego na prostokącie o boku a i kącie α zawartym między danym bokiem i przekątną prostokąta.

7.23.° Promień okręgu jest równy 8 cm. Oblicz długość łuku okręgu o mierze stopniowej równej:
1) 4°; 2) 18°; 3) 160°; 4) 320°.

7.24.° Długość łuku okręgu jest równa 12π cm, a jego miara stopniowa – 27°. Oblicz promień okręgu.

7.25.° Długość łuku okręgu jest równa 3π cm, a promień okręgu – 24 cm. Oblicz miarę stopniową łuku.

7.26.° Oblicz długość łuku równika Ziemi, o mierze stopniowej równej 1°, jeżeli promień równika jest równy w przybliżeniu 6400 km.

7.27.° Promień koła równy 6 cm. Oblicz pole wycinka, jeżeli miara stopniowa jego jest równa:
1) 15°; 2) 144°; 3) 280°.

7.28.° Pole wycinka jest równe $\frac{5}{8}$ pola koła. Oblicz miarę stopniową łuku wycinka.

7.29.° Pole wycinka jest równe 6π dm^2. Oblicz miarę stopniową łuku tego wycinka, jeżeli promień koła wynosi 12 dm.

7.30.° Pole wycinka jest równe $\frac{5\pi}{4}$ cm^2, a miara stopniowa jego łuku wynosi 75°. Oblicz promień koła, wycinek którego jest jego częścią.

7.31.° Czy wycinek koła może być jego odcinkiem?

7.32.° Oblicz pole odcinka kołowego jeżeli promień koła jest równy 5 cm, a miara stopniowa odcinka wynosi:
1) 45°; 2) 150°; 3) 330°.

7.33.° Oblicz pole odcinka kołowego, jeżeli promień koła jest równy 2 cm, a miara stopniowa łuku odcinka wynosi:
1) 60°; 2) 300°.

7.34.• Średnica koła samochodowego wynosi 65 cm. Samochód jedzie z taką prędkością, że jego koła wykonują 6 obrotów w ciągu jednej sekundy. Oblicz prędkość samochodu wyrażoną w kilometrach na godzinę. Odpowiedź zaokrąglij do dziesiętnych.

7.35.• Oblicz długość łuku, jaką opisze godzinowo strzałka zegara o długości 6 cm w ciągu 1 godz.

7.36.• Oblicz długość łuku, jaką opisze minutowa strzałka zegara o długości 24 cm w ciągu 40 min.

7.37.• Promień okręgu zwiększono o a. Udowodnij, że długość okręgu zwiększy się o pewną liczbę, która nie zależy od wielkości promienia do danego okręgu.

7.38.• Trójkąt o boku równym 6 cm i kątach przyległych do niego 50° i 100° jest wpisany w okrąg. Oblicz długość łuków, na które wierzchołki trójkąta podzieliły ten okrąg.

7.39.• Trójkąt o boku równym $5\sqrt{3}$ cm, i kątach przyległych do niego wynoszących 35° i 25° jest wpisany w okrąg. Oblicz długość łuków, na które wierzchołki trójkąta podzieliły ten okrąg.

7.40.• Na przyprostokątnej AC w trójkącie prostokątnym ABC ($\angle C = 90°$) jak na średnicy zbudowano okrąg. Oblicz długość łuku tego okręgu zawartego w tym trójkącie, jeżeli $\angle A = 24°$, $AC = 20$ cm.

7.41.• W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie wynosi 70°. Na wysokości o długości 27 cm opuszczonej na podstawę zbudowano okrąg, przyjmując ją jako średnicę. Oblicz długość łuku okręgu zawartego w tym trójkącie.

7.42.• Odcinek AB podzielono na n części. Na każdej z tych części biorąc ją jako średnicę zbudowano półokręgi. Zatem analogicznie poprzedniemu, odcinek ten podzielono na m części i zbudowano półokręgi. Oblicz stosunek sum długości półokręgów w pierwszym i drugim podziale.

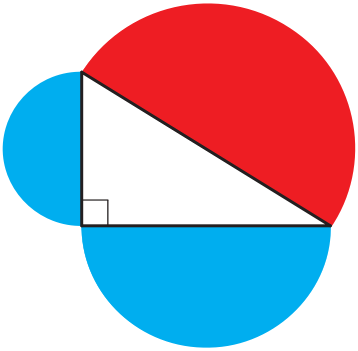
7.43.• Udowodnij, że pole półkola zbudowanego na przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym wziętej za średnicę (rys. 7.11) równe sumie pól półkoli zbudowanych na przyprostokątnych wziętych jako średnica.

7.44.• Dwie rury o średnicy 30 cm i 40 cm należy zamienić jedną rurą o jednakowej zdolności przepuszczania wody[1]. Oblicz średnicę tej rury?

7.45.• O ile odsetek zwiększy się pole koła, jeżeli jego promień zwiększyć o 10 %?

7.46.• W koło wpisano kwadrat o boku równym a. Oblicz pole odcinka, podstawą którego jest bok kwadratu.

7.47.• Z blachy o kształcie koła wycięto sześcian foremny o największym polu. Ile odsetek błahy pozostało?



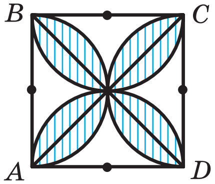
Rys. 7.11

[1] Zdolność przepuszczania wody – to masa wody która przechodzi przez przekrój poprzeczny za jednostkę czasu.

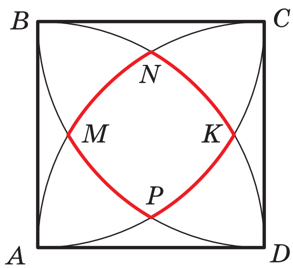
7.48.• W okrąg wpisano trójkąt foremny o boku równym a. Oblicz pole mniejszego wycinka, podstawą którego jest bok trójkąta.

7.49.• W wycinek kołowy o promieniu równym R i kącie środkowym równym $60°$, wpisano koło. Oblicz pole tego koła.

7.50.•• Oblicz pole kwiatka (zakreślonej figury), przedstawionego na rysunku 7.12, jeżeli bok kwadratu $ABCD$ jest równy a.

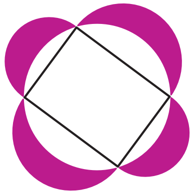


Rys. 7.12

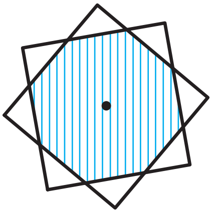


Rys. 7.13

7.51.•• Podczas konstrukcji czterech łuków ze środkami w wierzchołkach kwadratu $ABCD$ i promieniami równymi długości boku kwadratu utworzyła się figura ograniczona linią o kolorze czerwonym (rys. 7.13). Oblicz długość tej linii, jeżeli długość boku kwadratu jest równa a.



Rys. 7.14



Rys. 7.15

7.52.•• (Zadanie Hipokratesa[1]). Okrąg opisano na prostokącie i na każdym jego boku wziętego jako średnicę zbudowano połowę koła (rys. 7.14). Udowodnij, że suma pól pomalowanych figur (półksiężyców Hipokratesa) jest równa polu prostokąta.

7.53.•• Dwa kwadraty o bokach 1 cm mają wspólny środek (rys. 7.15). Udowodnij, że pole ich wspólnej części jest mniejsze od $\frac{3}{4}$.

[1] Hipokrates z Chios – starożytny matematyk i sofista (V st. p.n.e.).

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

7.54. Oblicz bok rombu, jeżeli jego wysokość jest równa 6 cm, zaś kąt zawarty między bokiem i jedną z przekątnych wynosi 15°.

7.55. Dwusieczna wychodząca z kąta A w prostokącie $ABCD$ dzieli jego bok BC na odcinki BM i MC o długości 10 cm i 14 cm. Na jakie odcinki ta dwusieczna dzieli przekątną prostokąta?

7.56. Suma kątów przy większej podstawie trapezu jest równa 90°. Udowodnij, że odległość między środkami podstaw trapezu jest równa połowie różnicy podstaw.

PRZYGOTOWUJEMY SIĘ DO NOWEGO TEMATU

7.57. Oblicz odległość między punktami A i B współrzędnej prostej AB, jeżeli:
1) A (3) i B (7);
2) A (–2) i B (4);
3) A (–2) i B (–6);
4) A (a) i B (b)?

7.58. Na płaszczyźnie współrzędnych wykreśl odcinek AB i według rysunku określ współrzędne środki odcinka oraz porównaj ich ze średnim arytmetycznym odpowiednich współrzędnych punktów A i B, jeżeli:
1) A (–1; –6), B (5; –6);
2) A (3; 1), B (3; 5);
3) A (3; –5), B (–1; 3).

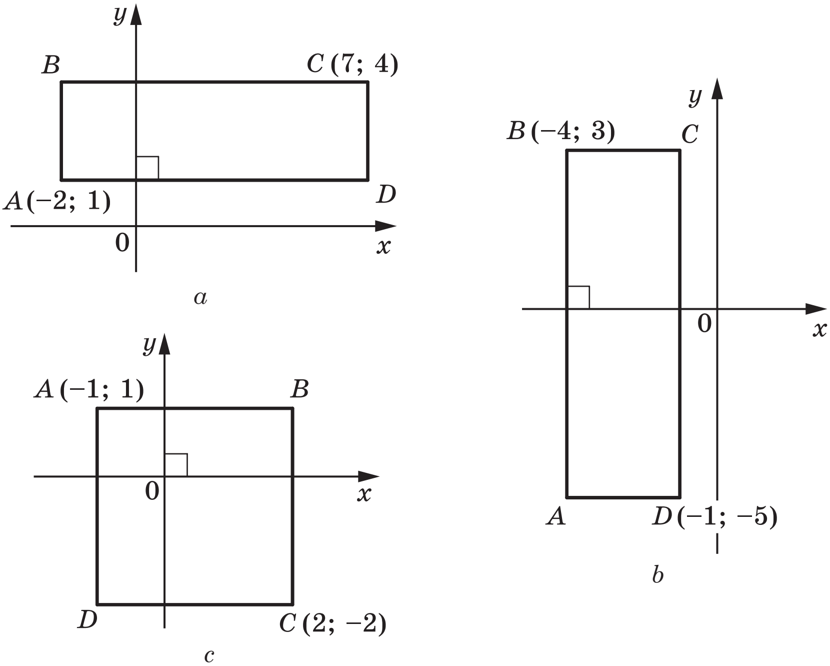
7.59. Skonstruuj na płaszczyźnie współrzędnych trójkąt ABC i oblicz długości jego boków, jeżeli A (5; –1), B (–3; 5), C (–3; –1).

7.60. W jakich ćwiartkach współrzędnych leżą punkty:
1) A (3; –4); 2) B (–3; 1); 3) C (–4; –5); 4) D (1; 9)?

7.61. W jakich ćwiartkach współrzędnych leżą punkt M, gdy:
1) jego odcięta jest dodatnia, zaś rzędna jego jest ujemna;
2) iloczyn jego odciętej i rzędnej jest liczbą ujemną;
3) odcięta i rzędna jest liczbą ujemną?

7.62. Co można sądzić o punkcie A, gdy:
1) punkt A leży na osi odciętych;
2) punkt A leży na osi rzędnych;
3) punkt A leży na dwusiecznej czwartej ćwiartki układu współrzędnych;
4) punkt A leży na dwusiecznej trzeciej ćwiartki układu współrzędnych;
5) leży na dwusiecznej pierwszej ćwiartki układu współrzędnych?

7.63. Wskaż współrzędne wierzchołków prostokąta *ABCD* (rys. 7.16).



Rys. 7.16

SPOSTRZEGAJCIE, RYSUJCIE, KONSTRUUJCIE, FANTAZJUJCIE

7.64. Na płaszczyźnie współrzędnych obrano kilka punktów. Niektóre z nich są wykreślone czerwonym kolorem, inne niebieskim. Wiadomo, że punktów każdego koloru jest nie mniej niż trzy i żadne trzy punkty jednego koloru nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że dowolne trzy punkty jednakowego koloru są wierzchołkami trójkąta, na bokach którego mogą leżeć nie więcej niż dwa punkty innego koloru.

ZADANIA TESTOWE N2 "SPRAWDŹ SIEBIE"

1. Oblicz ilość boków wielokąta foremnego, jeden z kątów którego jest równy 170°.
A) 30; C) 36;
B) 32; D) taki wielokąt nie istnieje.

2. Ile wynosi kąt środkowy dziesięciokąta foremnego?
A) 18°; B) 36°; C) 144°; D) 10°.

3. Jaki największy kąt środkowy może mieć wielokąt foremny?
A) 90°; B) 150°;
B) 120°; D) nie można określić.

4. W okrąg wpisano sześciokąt foremny o boku równym a. Oblicz bok trójkąta opisanego na tym okręgu.
A) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; C) $a\sqrt{3}$; D) $2a\sqrt{3}$.

5. Ile wynosi promień okręgu wpisanego w sześciokąt foremny, w którym mniejsza przekątna jest równa 12 cm?
A) 6 cm; B) $6\sqrt{3}$ cm; C) $2\sqrt{3}$ cm; D) 12 cm.

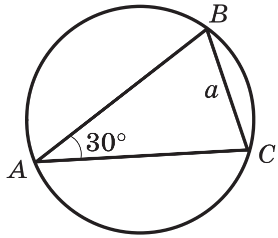
6. Oblicz długość łuku okręgu, miara stopniowa którego jest równa 207°, zaś promień okręgu równy – 4 cm.
A) 23 cm; B) 4,6 cm; C) 23π cm; D) $4{,}6\pi$ cm.

7. Jaką część koła stanowi pole wycinka, kąt środkowy którego jest równy 140°?
A) $\frac{7}{9}$; B) $\frac{7}{12}$; C) $\frac{7}{15}$; D) $\frac{7}{18}$.

8. Kąt wpisany w okrąg jest równy 40° opiera się na łuk o długości 8 cm. Ile wynosi długość tego okręgu?
A) 72 cm; B) 72π cm; C) 36 cm; D) 36π cm.

9. Jakiej długości ma być cięciwa okręgu, promień którego wynosi R, aby stosunek długości łuków, na które cięciwa podzieliła okrąg, był równy 2 : 1?
A) R; B) $2R$; C) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; D) $R\sqrt{3}$.

10. Na rysunku przedstawiono trójkąt ABC wpisany w okrąg, gdzie, $\angle A = 30°$, $BC = a$. Ile wynosi pole odcinka, który opiera się na bok, który opiera się na łuk BAC?



A) $\frac{a^2\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

B) $\frac{a^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

C) $\frac{a^2\left(10\pi + 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

D) $\frac{a^2\left(10\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$.

11. W trójkącie ABC wiadomo, że $\angle A = 20°$, $\angle C = 30°$, $AC = 14$ cm. Okrąg o środku w punkcie A jest styczny do boku BC. Oblicz długość łuku tego okręgu, który leży wewnątrz tego trójkąta ABC.

A) $\frac{7\pi}{18}$ cm; B) $\frac{7\pi}{9}$ cm; C) $\frac{7\pi}{12}$ cm; D) $\frac{7\pi}{6}$ cm.

12. Promień okręgu opisanego na wielokącie foremnym jest równy $6\sqrt{3}$ cm, zaś promień okręgu wpisanego w niego – 9 cm. Ile boków posiada wielokąt?

A) 6; B) 12; C) 9; D) 18.

GŁÓWNE W PARAGRAFIE 2

Wielokąt foremny

Wielokąt nazywa się foremnym, w którym wszystkie boki są równe, oraz wszystkie kąty są równe.

Własności wielokąta foremnego

- Wielokąt foremny jest wielokątem wypukłym.
- Dowolny wielokąt foremny może być wpisany w okrąg lub opisany na okręgu, przy czym środek wpisanego okręgu i opisanego okręgu jest tym samym punktem.

Wzory na obliczenie promieni opisanego i wpisanego okręgu wielokąta foremnego

Ilość boków wielokąta foremnego n-kątnego o boku a	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Promień okręgu opisanego	$R_n = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Promień okręgu wpisanego	$r_n = \dfrac{a}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Długość okręgu

$C = 2\pi R$

Długość łuku okręgu o n°

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

Pole koła

$S = \pi R^2$

Pole wycinka, zawierającego łuk w n°

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

WSPÓŁRZĘDNE KARTEZJAŃSKIE NA PŁASZCZYŹNIE §3

Po przestudiowaniu materiału tego paragrafu rozszerzysz swoje wiadomości o płaszczyźnie współrzędnych.

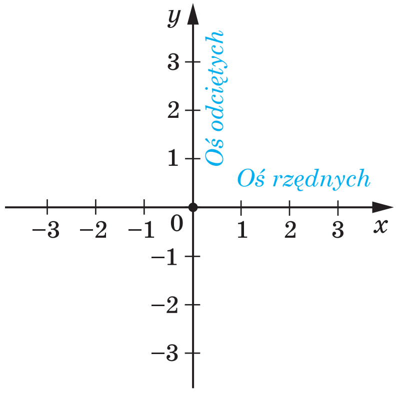
Nauczysz się, jak znaleźć długość odcinka, oraz wyznaczać współrzędne środka odcinka, mając współrzędne jego końców.

Zapoznasz się z równaniem figur, nauczysz się układać równanie prostej i okręgu.

Zapoznasz się z metodą współrzędnych, która umożliwia rozwiązywanie zadań geometrycznych zastosowując algebrę.

8. Odległość między dwoma punktami według danymi współrzędnymi. Współrzędne środka odcinka

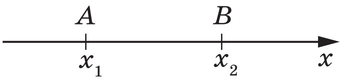
W klasie 6. zapoznaliście się z płaszczyzną współrzędnych, to oznacza z płaszczyzną, na której są podane dwie wzajemnie prostopadłe proste współrzędnych (oś odciętych i oś rzędnych) ze wspólnym początkiem odczyta (rys. 8.1). Już umiecie oznaczać na układzie punkty według ich współrzędnych oraz określać współrzędne punktu według jego położenia w układzie.



Rys. 8.1

Umówimy się, że płaszczyznę współrzędnych z osią x (oś odciętych) i z osią y (oś rzędnych) będziemy nazywać **płaszczyzną *xy***.

Współrzędne punktu na płaszczyźnie xy nazywa się **współrzędnymi kartezjańskimi** zawdzięczając francuskiemu matematykowi Rene Kartezjuszowi (Descartesowi), patrz opowiadanie na str. 101).



Rys. 8.2

Wiecie, jak znaleźć odległość między dwoma punktami za pomocą ich współrzędnych na prostej współrzędnych. Dla punktów A (x_1) i B (x_2) (rys. 8.2) otrzymamy:

$AB = |x_2 - x_1|$.

Nauczymy się obliczać odległość między punktami A (x_1; y_1) i B (x_2; y_2), podanymi na płaszczyźnie xy.

Rozpatrzymy przypadek, gdy odcinek AB jest nie prostopadły do żadnej z osi współrzędnych (rys. 8.3).

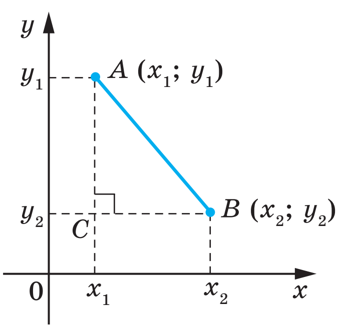
Przez punkty A i B poprowadzimy proste prostopadłe do każdej osi współrzędnych. Otrzymamy trójkąt prostokątny ACB, w którym $BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$. Stąd $AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Wtedy wzór na obliczenie odległości między punktami A (x_1; y_1) i B (x_2; y_2) można podać w postaci:

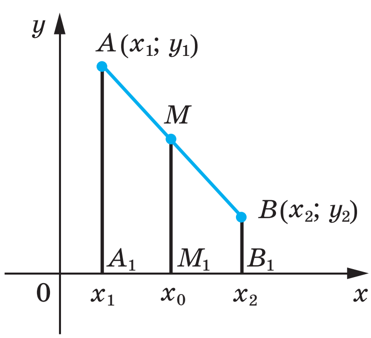
$$\boxed{\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}}$$

Udowodnij samodzielnie, że wzór ten jest prawdziwy i dla przypadku, kiedy odcinek AB jest prostopadły do jednej z osi współrzędnych.

Przypuśćmy, że A (x_1; y_1) i B (x_2; y_2) – punkty na płaszczyźnie xy. Znajdziemy współrzędne (x_0; y_0) punktu M – środka odcinka AB.



Rys. 8.3



Rys. 8.4

Rozpatrzymy przypadek, gdy odcinek AB jest nie proporcjonalny do żadnej osi współrzędnych (rys. 8.1). Przyjmiemy, że $x_2 > x_1$ (przypadek, gdy $x_2 < x_1$, rozpatrz samodzielnie). Z punktów A, M i B opuścimy prostopadłe do osi odciętych, które przecinają tę oś odpowiednio w punktach A_1, M_1 i B_1. Zgodnie z twierdzeniem Talesa $A_1M_1 = M_1B_1$, wtedy $|x_0 - x_1| = |x_2 - x_0|$. Ponieważ $x_2 > x_0 > x_1$, to możemy zapisać, że: $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$. Stąd

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Analogicznie, można udowodnić, że

$$\boxed{y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Wzory na obliczenie współrzędnych środka odcinka spełnia się i dla przypadku, gdy odcinek AB prostopadły do jednej z osi współrzędnych. Udowodnij samodzielnie.

Zadanie 1. Udowodnij, że trójkąt o wierzchołkach w punktach A (–1; 7), B (1; 3) i C (5; 5), jest równoramiennym i prostokątnym.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru odległości między dwoma punktami, obliczamy boki danego trójkąta:

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20};$$
$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20};$$
$$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

A więc, $AB = BC$, to oznacza, że trójkąt ABC jest równoramienny.

Ponieważ $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, to trójkąt ABC jest prostokątny. ◄

Zadanie 2. Punkt M (2; –5) – środek odcinka AB, A (–1; 3). Oblicz współrzędne punktu B.

Rozwiązanie. Oznaczymy $(x_B; y_B)$ – współrzędne punktu B, $(x_A; y_A)$ – współrzędne punktu A, $(x_M; y_M)$ – współrzędne punktu M.

Ponieważ $\frac{x_A + x_B}{2} = x_M$, to otrzymamy: $\frac{-1 + x_B}{2} = 2$; $-1 + x_B = 4$; $x_B = 5$.

Analogicznie $\frac{y_A + y_B}{2} = y_M$; $\frac{3 + y_B}{2} = -5$; $y_B = -13$.

Odpowiedź: B (5; –13). ◄

Zadanie 3. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach w punktach A (2; –1), B (1; 3), C (–3; 2) i D (–2; –2) jest prostokątem.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że punkt M – środek przekątnej AC. Wtedy

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2-3}{2} = \mathbf{-0{,}5}; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = \mathbf{0{,}5}.$$

A więc, M (–0,5; 0,5).

Przypuśćmy, że punkt K – środek przekątnej BD. Wtedy

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1-2}{2} = \mathbf{-0{,}5}; \quad y_K = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3-2}{2} = \mathbf{0{,}5}.$$

A więc, K (–0,5; 0,5).

Możemy wnioskować, że punkty M i K to ten sam punkt, a oznacza to że przekątne czworokąta $ABCD$ mają wspólny punkt. Stąd wnioskujemy, że czworokąt $ABCD$ – równoległobok.

Obliczamy długość przekątnych równoległoboku:

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}, \quad BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

A więc, długości przekątnych równoległoboku $ABCD$ są równe. Stąd wynika, że ten równoległobok jest prostokątem. ◀

1. Jak obliczyć odległość między danymi punktami, jeżeli są znane ich współrzędne?
2. Jak obliczyć współrzędne środka odcinka, jeżeli są znane współrzędne końców odcinka?

ĆWICZENIA

8.1.° Oblicz odległość między punktami A i B, jeżeli:
1) A (10; 14), B (5; 2); 2) A (–1; 2), B (4; –3).

8.2.° Oblicz odległość między punktami C i D, jeżeli:
1) C (–2; –4), D (4; –12); 2) C (6; 3), D (7; –1).

8.3.° Wierzchołkami trójkąta są punkty A (–1; 3), B (5; 9), C (6; 2). Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.

8.4.° Udowodnij, że punkt M (0; –1) jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeżeli A (6; –9), B (–6; 7), C (8; 5).

8.5.° Udowodnij, że kąty B i C w trójkącie ABC są równe, jeżeli A (5; –7), B (–3; 8), C (–10; –15).

8.6.° Oblicz współrzędne środka odcinka BC, jeżeli:
1) B (5; 4), C (3; 2); 2) B (–2; –1), C (–1; 7).

8.7.° Punkt C – środek odcinka AB. Oblicz współrzędne punktu B, jeżeli:
1) A (3; –4), C (2; 1); 2) A (–1; 1), C (0,5; –1).

8.8.° Punkt K – środek odcinka AD. Wypełnij tabelę:

Punkt	Współrzędne punktów		
A	(–3; 1)	(–8; 2)	
D	(–1; –3)		(–9; 2)
K		(–4; 6)	(1; 2)

8.9.° Oblicz środkową AM trójkąta, wierzchołkami którego są punkty A (3; –2), B (2; 3) i C (7; 4).

8.10.° Znając punkty A (–2; 4) i B (2; –8). Oblicz odległość od początku współrzędnych do środka odcinka AB.

8.11.• Udowodnij, że trójkąt o wierzchołkach w punktach A (2; 7), B (–1; 4) i C (1; 2) jest prostokątnym.

8.12.• Punkty A (–1; 2) i B (7; 4) są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Czy trzeci wierzchołek może mieć współrzędne:
1) (7; 2); 2) (2; –3)?

8.13.• Czy punkty leżą na jednej prostej:
1) A (–2; –7), B (–1; –4) i C (5; 14);
2) D (–1; 3), E (2; 13) i F (5; 21)?
W razie potwierdzającej odpowiedzi należy podać który z punktów leży między dwoma innymi.

8.14.• Udowodnij, że punkty M (–4; 5), N (–10; 7) i K (8; 1) leżą na jednej prostej oraz wskaż, który z nich leży między dwoma innymi.

8.15.• Przy jakiej wartości x odległość między punktami C (3; 2) i D (x; –1) jest równa 5?

8.16.• Na osi odciętych znajdź punkt, który jest równo oddalony od punktów A (–1; –1) i B (2; 4).

8.17.• Oblicz współrzędne punktu, który leży na osi rzędnych i na jednakowej odległości od punktów D (–2; –3) i E (4; 1).

8.18.• Oblicz współrzędne punktu, który dzieli odcinek AB w stosunku 1 : 3, licząc od punktu A, jeżeli A (5; –3) i B (–3; 7).

8.19.• Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, gdzie, A (–5; 1), B (–4; 4), C (–1; 5). Oblicz współrzędne wierzchołka D.

8.20.• Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, gdzie, A (–2; –2), C (4; 1), D (–1; 1). Oblicz współrzędne wierzchołka B.

8.21.• Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach w punktach A (–2; 8), B (3; –3), C (6; 2) i D (1; 13) jest równoległobokiem.

8.22.• Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach w punktach A (–3; –2), B (–1; 2), C (1; –2) i D (–1; –6) jest rombem.

8.23.• Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach w punktach A (–2; 6), B (–8; –2), C (0; –8) i D (6; 0) jest kwadratem.

8.24.• Punkty D (1; 4) i E (2; 2) – środki odpowiednio boków AC i BC w trójkącie ABC. Określ współrzędne wierzchołków A i C, jeżeli B (–3; –1).

8.25.• Oblicz długość odcinka, końce którego leżą na osiach współrzędnych oraz środek jego leży w punkcie M (–3; 8).

8.26.•• Oblicz współrzędne wierzchołka C w trójkącie równobocznego ABC, gdy A (2; –3) i B (–2; 3).

8.27.•• Oblicz współrzędne wierzchołka E w trójkącie równobocznym DEF, gdy D (–6; 0) i F (2; 0).

8.28.•• W trójkącie ABC znając że $AB = BC$, A (5; 9), C (1; –3), oraz wartości bezwzględne współrzędnych punktu B są równe, oblicz współrzędne punktu B.

8.29.•• Oblicz współrzędne wszystkich takich punktów C leżących na osi odciętych, że trójkąt ABC będzie równoramiennym oraz A (1; 1), B (2; 3).

8.30.•• Oblicz współrzędne punktów B leżących na osi rzędnych takich, że trójkąt ABC będzie prostokątnym, w którym A (1; 3), C (3; 7).

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

8.31. W trójkącie ABC wiadomo, że $\angle C = 90°$, $AB = 9$ cm, $BC = 3$ cm. Na przeciwprostokątnej AB obrano punkt M w taki sposób, że $AM : MB = 1 : 2$. Oblicz długość odcinka CM.

8.32. Oblicz kąty rombu, jeżeli kąt zawarty między wysokością i przekątną rombu, które są poprowadzone z jednego wierzchołka, wynosi 28°.

8.33. Przekątna BD równoległoboku $ABCD$ wynosi 24 cm, punkt E – środek boku BC. Oblicz odcinki, na które prosta AE dzieli przekątna BD.

PRZYGOTOWUJEMY SIĘ DO NOWEGO TEMATU

8.34. Punkt A (1; –6) – środek okręgu, zaś punkt B (10; 6) leży na tym okręgu. Oblicz promień tego okręgu?

8.35. Odcinek CD – średnica okręgu. Oblicz współrzędne środka okręgu, w którym C (6; –4), D (–2; 10).

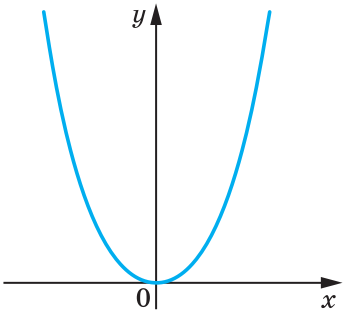
8.36. Jaka figura odpowiada wykresowi równań:

1) $y = 1$;
2) $y = 3x - 4$;
3) $x = -2$;
4) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$;
5) $xy = 1$;
6) $y = \sqrt{x}$?

9. Równanie figury. Równanie okręgu

Z kursu klasy 7. już wiecie jaka figura nazywa się wykresem równania. W danym punkcie zapoznacie się z pojęciem równania figury.

Współrzędne $(x; y)$ każdego punktu paraboli, przedstawionej na rysunku 9.1 są rozwiązaniem równania $y = x^2$. I odwrotnie, każde rozwiązanie równania z dwiema niewiadomymi $y = x^2$ odpowiada współrzędnym punktu, który leży na tej paraboli. W tym przypadku, można powiedzieć, że postać równania paraboli, przedstawionej na rysunku 9.1 jest $y = x^2$.



Rys. 9.1

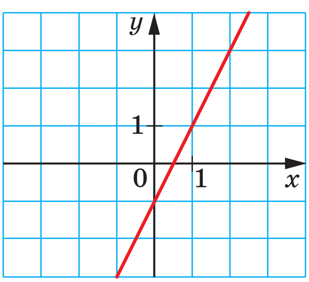
Definicja. **Równaniem figury F, określonej na płaszczyźnie xy, nazywa się równanie z dwiema niewiadomymi x i y, jeżeli spełniają się następujące własności:**

1) jeżeli punkt należy do figury F, to współrzędne jego są rozwiązaniem danego równania;

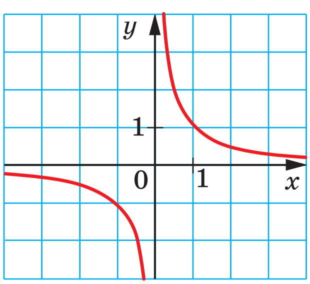
2) dowolne rozwiązania $(x; y)$ które spełniają to równanie są współrzędnymi pewnego punktu figury F.

Na przykład, równanie prostej przedstawionej na rysunku 9.2 ma postać $y = 2x - 1$, zaś równanie hiperboli, przedstawionej na rysunku 9.3 ma postać $y = \frac{1}{x}$. Przyjęto używać, na przykład, że równanie $y = 2x - 1$ i $y = \frac{1}{x}$ **określa** się parabolą i hiperbolą.

Jeżeli dane równanie jest równaniem figury F, wtedy tę figurę można rozpatrywać jak miejsce geometryczne punktów (MGP), współrzędne których spełniają dane równanie.

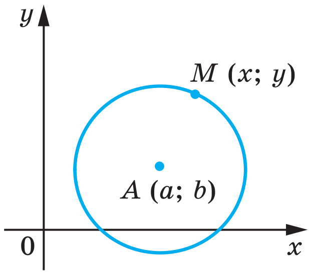


Rys. 9.2

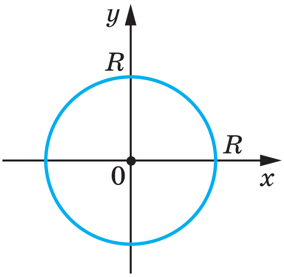


Rys. 9.3

Korzystając z wyżej wymienionych wiadomości, wyprowadzimy równanie okręgu o promieniu R oraz środkiem w punkcie $A\ (a;\ b)$.



Rys. 9.4



Rys. 9.5

Przypuśćmy, że $M\ (x;\ y)$ – dowolny punkt danego okręgu (rys. 9.4). Wtedy $AM = R$. Zastosowując wzór na odległość między punktami, otrzymamy: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R.$ Stąd

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (*)$$

Przekonaliśmy się, że współrzędne $(x;\ y)$ dowolnego punktu M danego okręgu są rozwiązaniem równania (*). A teraz pokażemy, że dowolne rozwiązanie równania $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ to współrzędna punktu, który leży na danym okręgu.

Przyjmiemy, że para liczb $(x_1;\ y_1)$ – to dowolne rozwiązanie równania (*). Wtedy $(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 = R^2$. Stąd $\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2} = R.$

Równanie to wskazuje, że punkt $N\ (x_1;\ y_1)$ jest oddzielony od środka okręgu $A\ (a;\ b)$ na odległość równą promieniom okręgu, a więc, punkt $N\ (x_1;\ y_1)$ leży na danym okręgu.

Więc, udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9.1. ***Równanie okręgu o promieniu R ze środkiem w punkcie A (a; b) ma postać***

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$

Sprawiedliwe i następujące twierdzenie: *dowolne równanie postaci* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, *gdzie* a, b *i* R *– pewne liczby, przy czym* $R > 0$, *jest równaniem okręgu o promieniu* R *i ze środkiem w punkcie ze współrzędnymi* $(a;\ b)$.

Jeżeli środek okręgu leży w początku współrzędnych (rys. 9.5), to $a = b = 0$. W tym przypadku równanie okręgu ma postać

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Zadanie 1. Ułóż równanie okręgu, średnicą którego jest odcinek AB, gdzie A (–5; 9), B (7; –3).

Rozwiązanie. Ponieważ środek okręgu jest środkiem średnicy, to można obliczyć współrzędne $(a; b)$ środka C okręgu:

$$a = \frac{-5+7}{2} = 1, \quad b = \frac{9-3}{2} = 3.$$

A więc, C (1; 3).

Promień okręgu R jest równy długości odcinka AC. Wtedy $R^2 = (1+5)^2 + (3-9)^2 = 72$.

A więc, szukane równanie okręgu ma postać

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 72.$$

Odpowiedź: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 72$. ◀

Zadanie 2. Udowodnij, że równanie $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ jest równaniem okręgu. Oblicz współrzędne środka i promienia tego okręgu.

Rozwiązanie. Zapiszemy dane równanie w postaci $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + 50 - 58 = 0;$$
$$(x+3)^2 + (y-7)^2 = 8.$$

A więc, dane równanie jest równaniem okręgu o środku w punkcie (–3; 7) i promienia $2\sqrt{2}$.

Odpowiedź: (–3; 7), $2\sqrt{2}$. ◀

Zadanie 3. Udowodnij, że trójkąt o wierzchołkach w punktach A (–2; –3), B (1; 3) i C (5; 1) jest prostokątnym i ułóż równanie okręgu, opisanego na trójkącie ABC.

Rozwiązanie. Obliczymy kwadraty boków danego trójkąta:

$$AB^2 = (1+2)^2 + (3+3)^2 = 45;$$
$$AC^2 = (5+2)^2 + (1+3)^2 = 65;$$
$$BC^2 = (5-1)^2 + (1-3)^2 = 20.$$

Ponieważ $AB^2 + BC^2 = AC^2$, to dany trójkąt jest prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku B. Środkiem okręgu opisanego jest środek przeciwprostokątnej AC – punkt (1,5; –1), zaś promień okręgu $R = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

A więc: szukane równanie ma postać

$$(x-1{,}5)^2 + (y+1)^2 = \frac{65}{4}.$$

Odpowiedź: $(x-1{,}5)^2 + (y+1)^2 = \frac{65}{4}$. ◀

1. Podaj definicję równania figury podanej na płaszczyźnie xy?
2. Jaką postać ma równanie okręgu ze środkiem w punkcie $(a; b)$ i promieniu R?
3. Jaką postać ma równanie okręgu ze środkiem w początku współrzędnych i promieniu R?

ĆWICZENIA

9.1.° Z równania okręgu określ współrzędne jego środka oraz promień:

1) $(x-8)^2+(y-3)^2=25$;
2) $(x+5)^2+y^2=9$;
3) $x^2+y^2=7$;
4) $x^2+(y+1)^2=3$.

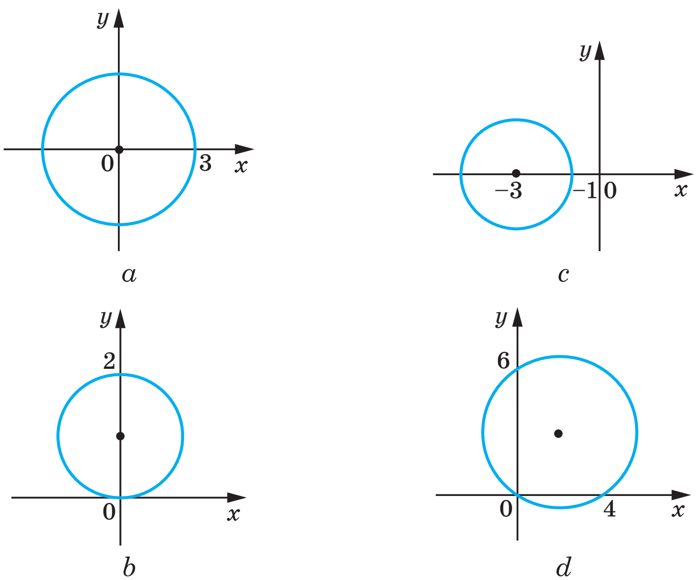
9.2.° Ułóż równanie okręgu według danych współrzędnych środka okręgu A i promienia R:

1) $A\ (3; 4)$, $R=4$;
2) $A\ (-2; 0)$, $R=1$;
3) $A\ (7; -6)$, $R=\sqrt{2}$;
4) $A\ (0; 5)$, $R=\sqrt{7}$.

9.3.° Ułóż równanie okręgu według danych współrzędnych środka B i promienia R:

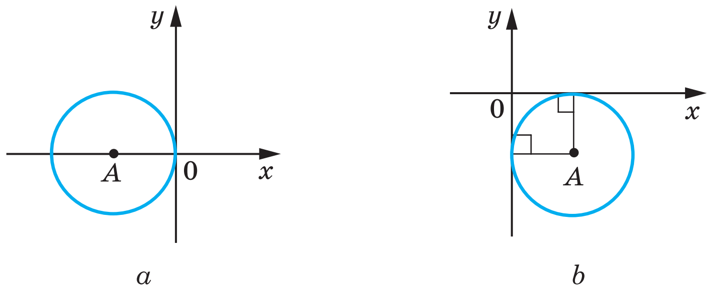
1) $B\ (-1; 9)$, $R=9$;
2) $B\ (-8; -8)$, $R=\sqrt{3}$.

9.4.° Określ współrzędne środka i promień okręgu, przedstawionego na rysunku 9.6 i podaj równanie tego okręgu.



Rys. 9.6

9.5.° Promień okręgu o środku w punkcie A jest równy 4 (rys. 9.7). Ułóż równanie tego okręgu.



Rys. 9.7

9.6.° Skonstruuj na płaszczyźnie współrzędnych okrąg, który jest podany następującym równaniem:
1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

9.7.° Na płaszczyźnie współrzędnych skonstruuj okrąg, który jest podany następującym równaniem $(x - 4)^2 + y^2 = 9$.

9.8.° Okrąg jest podany równaniem $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 10$. 9.8. Określ, które z podanych punktów A (–3; 0), B (–5; –2), C (1; 0), D (–4; 3), E (–7; –3), F (–9; 0) leżą: 1) na okręgu; 2) wewnątrz okręgu; 3) zewnątrz okręgu.

9.9.° Czy wymienione punkty leżą na okręgu $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$:
1) A (8; –8); 2) B (6; –9); 3) C (–3; 7); 4) D (–4; 6)?

9.10.° Ułóż równanie okręgu ze środkiem w punkcie M (–3; 1), i przechodzący przez punkt K (–1; 5).

9.11.° Ułóż równanie okręgu, średnicą którego jest odcinek AB, jeżeli A (2; –7), B (–2; 3).

9.12.• Udowodnij, że odcinek AB jest średnicą okręgu $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 17$, jeżeli A (1; –5), B (9; –3).

9.13.• Udowodnij, że odcinek CD jest cięciwą okręgu $x^2 + (y - 9)^2 = 169$, jeżeli C (5; –3), D (–12; 4).

9.14.• Ułóż równanie okręgu, środek okręgu którego leży w punkcie P (–6; 7) oraz jest styczny do osi rzędnych.

9.15.• Ułóż równanie okręgu, środek którego leży na prostej $y = -5$ oraz jest styczny do osi odciętych w punkcie S (2; 0).

9.16.• Ile istnieje okręgów, które przechodzą przez punkt (3; 5), o promieniach równych $3\sqrt{5}$ i środki tych okręgów leżą na osi rzędnych? Ułóż równanie każdego z tych okręgów.

9.17.• Ułóż równanie okręgu przechodzącego przez punkty A (–4; 1) i B (8; 5) i środek jakiego leży na osi odciętych.

9.18.• Udowodnij, że okrąg $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$:
1) jest styczny do osi rzędnych;
2) przecina oś odciętych;
3) nie ma wspólnych punktów z prostą $y = 10$.

9.19.•• Przekonaj się, że dane równanie jest równaniem okręgu. Przy stwierdzającej odpowiedzi podaj współrzędne środka i promień R tego okręgu:
1) $x^2 + 2x + y^2 - 10y - 23 = 0$;
2) $x^2 - 12x + y^2 + 4y + 40 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 51 = 0$.

9.20.•• Udowodnij, że dane równanie jest równaniem okręgu i podaj współrzędne środka i promienia R tego okręgu:
1) $x^2 + y^2 + 16y + 60 = 0$;
2) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$.

9.21.•• Udowodnij, że trójkąt o wierzchołkach w punktach A (–1; –2), B (–1; 2), C (5; 2) jest prostokątnym i ułóż równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

9.22.•• Ułóż równanie okręgu, promień którego jest równy 5 oraz przechodzi przez punkty C (–1; 5) i D (6; 4).

9.23.•• Ułóż równanie okręgu, promień którego jest równy $\sqrt{10}$ oraz przechodzi przez punkty M (–2; 1) i K (–4; –1).

9.24.•• Ułóż równanie okręgu, który jest styczny do dwóch osi współrzędnych i do prostej $y = -4$.

9.25.•• Ułóż równanie okręgu, który jest styczny do dwóch osi współrzędnych prostej $x = 2$.

9.26.* Ułóż równanie okręgu, który przechodzi przez punkty:
1) A (–3; 7), B (–8, 2), C (–6, –2);
2) M (–1; 10), N (12; –3), K (4; 9).

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

9.27. W równoległoboku $ABCD$ dwusieczna kąta B przecina jego bok AD w punkcie E, gdzie $AB = BE = 12$ cm, $ED = 18$ cm. Oblicz pole równoległoboku.

9.28. Prostopadła, opuszczona z wierzchołka prostokąta na jego przekątną, dzieli tą przekątną na odcinki o długościach 9 cm i 16 cm. Oblicz obwód prostokąta.

9.29. W trapez równoramienny wpisano okrąg o promieniu 12 cm. Punkt styczności dzieli ramię na dwa odcinki, długość jednego z nich jest równa 16 cm. Oblicz pole trapezu.

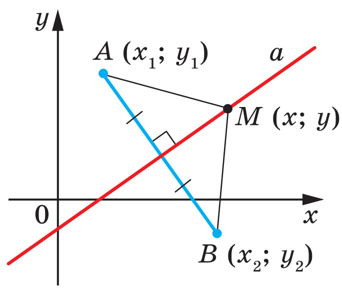
SPOSTRZEGAJCIE, RYSUJCIE, KONSTRUUJCIE, FANTAZJUJCIE

9.30. Na płaszczyźnie obrano punkty A i B. Korzystając tylko z cyrkla wykreśl punkt C tak, aby punkt B był środkiem odcinka AC.

10. Równanie prostej

W poprzednim punkcie, rozpatrując okrąg jak GMP, równo oddalonych od danego punktu, wyprowadziliśmy jego równanie. Aby zapisać równanie prostej, rozpatrzymy ją jak GMP równo oddalonych dwóch danych punktów.

Przypuśćmy, że a – dana prosta. Wybierzemy dwa punkty $A\ (x_1; y_1)$ i $B\ (x_2; y_2)$ tak, aby prosta a była symetralną do odcinka AB (rys. 10.1).



Rys. 10.1

Przypuśćmy, że $M\ (x; y)$ – dowolny punkt leżący na prostej a. Wtedy, zgodnie z własności symetralnej spełnia się równość $MA = MB$, to oznacza, że

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}. \qquad (*)$$

Przekonaliśmy się, że współrzędne $(x; y)$ dowolnego punktu M leżącego na prostej a jest rozwiązaniem równania (*).

Zatem, przekonamy się, że dowolne rozwiązanie równania (*) będzie współrzędnym punktu, który leży na danej prostej a.

Przypuśćmy, że $(x_0; y_0)$ – pewne rozwiązanie równania (*).

Wtedy $\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}=\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}$. Równość ta oznacza, że punkt $N\ (x_0; y_0)$ jest na jednakowej odległości od punktów $A\ (x_1; y_1)$ i $B\ (x_2; y_2)$, a więc punkt N leży na symetrycznej do odcinka AB, to oznacza na prostej a.

W taki sposób, udowodniliśmy, że równanie (*) jest równaniem danej prostej a.

Lecz w kursie algebry klasy 7. równanie prostej ma o wiele prostszą postać, a mianowicie: $ax + by = c$, gdzie a, b i c – dowolne liczby, przy czym a i b liczby, które jednocześnie nie dorównują zero. Pokażemy, że równanie (*) można sprowadzić do takiej postaci.

Podniesiemy obustronnie części równania (*) do kwadratu. Otrzymamy: $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$.

Otworzymy nawiasy i zredukujemy wyrazy podobne. Otrzymamy:

$$2\,(x_2 - x_1)\,x + 2\,(y_2 - y_1)\,y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2.$$

Wprowadzając oznaczenie $2\,(x_2 - x_1) = a$, $2\,(y_2 - y_1) = b$, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = c$, otrzymamy równanie $ax + by = c$.

Ponieważ punkty $A\,(x_1; y_1)$ i $B\,(x_2; y_2)$ są różnymi, to chociażby jedna z różnic $x_2 - x_1$ i $y_2 - y_1$ nie dorównuje zeru. A więc, liczby a i b nie mogą jednocześnie dorównywać zeru.

A więc, udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10.1. ***Równanie prostej ma postać***

$$\boxed{ax + by = c,}$$

gdzie a, b i c – dowolne liczby, przy czym a i b jednocześnie nie dorównuje zeru.

Prawdziwie jest i następujące twierdzenie: *dowolne równanie postaci $ax + by = c$, gdzie a, b, c – dowolne liczby, przy czym a i b jednocześnie nie dorównują zeru, jest równaniem prostej.*

Jeżeli $a = b = c = 0$, to wykresem równania $ax + by = c$ jest cała płaszczyzna xy. Jeżeli $a = b = 0$ i $c \neq 0$, to równanie nie ma rozwiązania.

Z kursu algebry klasy 7. wiecie, że równanie postaci $ax + by = c$ nazywa się równaniem liniowym z dwiema zmiennymi. Równanie prostej jest szczególnym przypadkiem równania liniowego. Schemat podany na rysunku 10.2 ilustruje wyżej wymienioną wypowiedź.

Rys. 10.2

Jednocześnie, na lekcjach algebry w klasie 7 przyjęliśmy bez udowodnienia twierdzenie, że wykresem funkcji liniowej $y = kx + p$ jest prosta. Teraz możemy to udowodnić.

Przepiszemy równanie $y = kx + p$ w postaci: $-kx + y = p$. Otrzymaliśmy równanie w postaci $ax + by = c$ dla przypadku, że $a = -k$, $b = 1$, $c = p$. Ponieważ w tym równaniu $b \neq 0$, otrzymaliśmy równanie prostej.

A czy dowolną prostą na płaszczyźnie można podać równaniem postaci $y = kx + p$? Odpowiedź na to pytanie będzie zaprzeczać.

Rzecz w tym, że prosta prostopadła do osi odciętych nie będzie wykresem funkcji, a więc nie może być podana równaniem postaci $y = kx + p$.

Jednocześnie, jeżeli w równaniu prostej $ax + by = c$ przyjąć że $b = 0$, to jest równanie, wtedy można zapisać w postaci: $x = \frac{c}{a}$. Otrzymaliśmy szczególny przypadek równania prostej, wszystkie punkty której posiadają jednakową odciętą. A więc, prosta ta jest prostopadła do osi odciętych. Ona nazywa się pionową.

Gdy $b \neq 0$, to równanie prostej $ax + by = c$ można zapisać w postaci: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Zamieniając $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$, otrzymamy równanie $y = kx + p$.

A więc, ***jeżeli*** $b = 0$ ***i*** $a \neq 0$, ***to równanie prostej*** $ax + by = c$ ***zadaje prostą pionową; jeżeli*** $b \neq 0$, ***to te równanie zadaje prostą niepionową***.

Równania prostej niepionowej zręcznie zapisywać w postaci
$y = kx + p$.

Uogólnimy materiał rozpatrywany w tym punkcie w następującej tabeli.

Równanie	Wartości a, b i c	Wykres
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a i c – dowolne	Prosta nie pionowa
	$b = 0$, $a \neq 0$, c – dowolna	Prosta pionowa
	$a = b = c = 0$	Cała płaszczyzna współrzędnych
	$a = b = 0$, $c \neq 0$	–

Zadanie 1. Ułóż równanie prostej, przechodzącej przez punkty:
1) A (–3; 5) i B (–3; –6); 2) C (6; 1) i D (–18; –7).

Rozwiązanie. 1) Ponieważ dane punkty mają jednakową odciętą, to prosta AB jest pionową. Równanie jej jest w postaci $x = -3$.

2) Ponieważ dane punkty mają różne odcięte, to prosta CD nie jest pionową. Wtedy można zastosować równanie prostej w postaci $y = kx + p$.

Podstawiając współrzędne punktów C i D w równanie $y = kx + p$, otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Gdy rozwiążemy ten układ, to otrzymamy, że $\boldsymbol{k = \frac{1}{3}}$, $p = -1$.

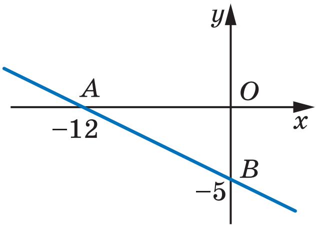
Odpowiedź: 1) $x = -3$; 2) $\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x - 1}$. ◀

Zadanie 2. Oblicz obwód i pole trójkąta, ograniczonego prostą $5x + 12y = -60$ i osiami współrzędnych.

Rozwiązanie. Znajdziemy punkty przecięcia prostej z osiami współrzędnych.

Z osią odciętych: przy $y = 0$ otrzymamy $5x = -60$; $x = -12$.

Z osią rzędnych: przy $x = 0$ otrzymamy $12y = -60$; $y = -5$.



Rys. 10.3

A więc, dana prosta wraz z osiami współrzędnych tworzy trójkąt prostokątny AOB (rys. 10.3) o wierzchołkach A (–12; 0), B (0; –5) i O (0; 0). Obliczymy długości boków trójkąta: $OA = 12$, $OB = 5$, $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \mathbf{13}$. Wtedy szukamy obwód i pole odpowiednio będą wynosić $P = OA + OB + AB = 30$, $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 30}$.

Odpowiedź: $P = 30$, $S = 30$. ◀

1. Jaką postać ma równanie prostej na płaszczyźnie xy?
2. Jak przyjęto nazywać prostą, wszystkie punkty której mają jednakową odciętą? Jakie jest położenie prostej względem osi odciętych?
3. Czy dowolne równanie liniowe z dwiema zmiennymi jest równaniem prostej?
4. W jakiej postaci jest zręcznie zapisywać równanie prostej, która nie jest pionowa?
5. Czy dowolną prostą na płaszczyźnie można podać równaniem postaci $y = kx + p$?
6. Zgodnie jakiego warunku równanie prostej $ax + by = c$ jest równaniem pionowej prostej? Prostej nie pionowej?

ĆWICZENIA

10.1.° Które z podanych równań są równaniami prostych:

1) $2x - 3y = 5$;	4) $2x = 5$;	7) $0x + 0y = 0$;
2) $2x - 3y = 0$;	5) $-3y = 5$;	8) $0x + 0y = 5$?
3) $2x^2 - 3y = 5$;	6) $2x + 0y = 0$;	

10.2.° Znajdź współrzędne punktów przecięcia prostej $4x - 5y = 20$ z osiami współrzędnych. Czy podany punkt należy do tej prostej:
1) $A\ (10; 4)$; 2) $B\ (6; 1)$; 3) $C\ (-1{,}5; 5{,}2)$; 4) $D\ (-1; 5)$?

10.3.° Znajdź współrzędne punktów przecięcia prostej $3x + 4y = 12$ z osiami współrzędnych. Który z punktów $M\ (-2; 4)$ i $K\ (8; -3)$ należy do tej prostej?

10.4.° Ułóż równanie prostej która przechodzi przez punkt $A\ (6; -3)$ i jest prostopadłą do osi x. Jakie będą współrzędne punktu przecięcia tej prostej z osią x?

10.5.° Ułóż równanie prostej, która przechodzi przez punkt $B\ (5; -8)$ i jest prostopadła do osi y. Jakie będą współrzędne punktu przecięcia tej prostej z osią y?

10.6.° Ułóż równanie prostej, która przechodzi przez punkt $C\ (-4; 9)$ i jest równoległa do: 1) osi odciętych; 2) osi rzędnych.

10.7.° Ułóż równanie prostej, przechodzącej przez punkty:
1) $A\ (1; -3)$ i $B\ (-2; -9)$; 3) $E\ (-4; -1)$ i $F\ (9; -1)$;
2) $C\ (3; 5)$ i $D\ (3; -10)$; 4) $M\ (3; -3)$ i $K\ (-6; 12)$.

10.8.° Ułóż równanie prostej, przechodzącej przez punkty:
1) $A\ (2; -5)$ i $B\ (-3; 10)$; 2) $C\ (6; -1)$ i $D\ (24; 2)$.

10.9.° Podaj współrzędne punktu przecięcia prostych:
1) $y = 3x - 7$ i $y = 5x + 9$; 2) $2x - 7y = -16$ i $6x + 11y = 16$.

10.10.° Podaj współrzędne punktu przecięcia prostych:
1) $y = -4x + 1$ i $y = 2x - 11$; 2) $3x + 2y = 10$ i $x - 8y = 12$.

10.11.• Punkty $A\ (-6; -1)$, $B\ (1; 2)$ i $C\ (-5; -8)$ – wierzchołki w trójkącie ABC. Ułóż równanie prostej, która jest środkową AK trójkąta.

10.12.• Punkty $A\ (-3; -4)$, $B\ (-2; 2)$, $C\ (1; 3)$ i $D\ (3; -2)$ – wierzchołki trapezu $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Ułóż równanie prostej, która jest linią środkową danego trapezu.

10.13.• Odcięte środków ramion trapezu są jednakowe. Czy można stwierdzić, że podstawy trapezu są prostopadłe do osi odciętych?

10.14.• Oblicz obwód trójkąta ograniczonego osiami współrzędnych i prostą $4x - 3y = 12$.

10.15.• Oblicz pole trójkąta, ograniczonego osiami współrzędnych i prostą $7y - 2x = 28$.

10.16.• Oblicz pole trójkąta, ograniczonego prostymi $3x + 2y = 6$ i $y = -\frac{9}{4}x$ oraz osią rzędnych.

10.17.• Udowodnij, że okrąg $(x-5)^2+(y-5)^2=9$ i prosta $x+y=7$ przecinają się, oraz znajdź współrzędne punktu ich przecięcia.

10.18.• Udowodnij, że prosta $x+y=5$ jest styczną do okręgu $(x-3)^2+$ $+(y+2)^2=8$, i znajdź współrzędne punktu styczności.

10.19.• Udowodnij, że okrąg $(x-4)^2+(y-2)^2=1$ i prosta $3x+y=3$ nie mają wspólnych punktów.

10.20.•• Oblicz odległość od początku współrzędnych do prostej o równaniu $5x-2y=10$.

10.21.•• Oblicz odległość od początku współrzędnych do prostej o równaniu $x++y=-8$.

10.22.•• Oblicz długość cięciwy okręgu $(x+1)^2+(y-2)^2=25$, która leży na prostej $y=3x$.

10.23.•• Ułóż równanie miejsca geometrycznego środków okręgów, które przechodzą przez punkty $A\ (1; -7)$ i $B\ (-3; 5)$.

10.24.•• Ułóż równanie miejsca geometrycznego środków okręgów, które przechodzą przez punkty $C\ (2; 3)$ i $D\ (-5; -2)$.

10.25.•• Wyznacz współrzędne punkty, które są na jednakowej odległości od osi współrzędnych i od punktu $A\ (3; 6)$.

10.26.•• Wyznacz współrzędne punkty, które są na jednakowej odległości od osi współrzędnych i od punktu $B\ (-4; 2)$.

10.27.* Ułóż równanie okręgu, który przechodzi przez punkt $A\ (2; 0)$ i $B\ (4; 0)$ a środek jego leży na prostej $2x+3y=18$.

10.28.* Ułóż równanie miejsca geometrycznego środków okręgów, promień których jest równy 5 i odcinają od osi odciętych cięciwę o długości 6.

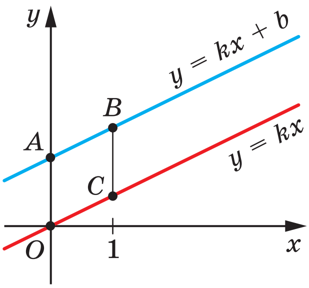
ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

10.29. Przekątne równoległoboku są równe $6\sqrt{2}$ cm i 8 cm, zaś kąt zawarły między nimi wynosi 45°. Oblicz boki równoległoboku.

10.30. Jeden bok trójkąta jest o 15 cm dłuższy od drugiego, a wysokość, opuszczona na trzeci bok, dzieli go na odcinki o długości 32 cm i 7 cm. Oblicz obwód trójkąta.

10.31. Środek okręgu opisanego na trapezie równoramiennym leży na większej podstawie. Oblicz promień okręgu, jeżeli przekątna trapezu jest równa 20 cm, a wysokość – 12 cm.

11. Współczynnik kątowy prostej



Rys. 11.1

Rozpatrzymy równanie $y = kx$. Ono przedstawia nie pionową prostą, która przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Przekonamy się, że proste $y = kx$ oraz $y = kx + b$, gdzie $b \neq 0$, są równoległe.

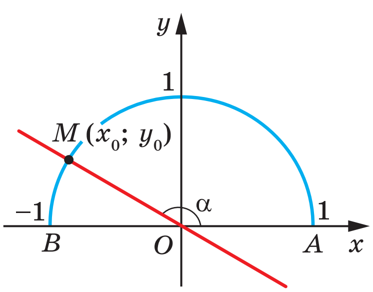
Punkty O (0; 0) i C (1; k) należą do prostej $y = kx$, zaś punkty A (0; b) i B (1; $k + b$) należą do prostej $y = kx + b$ (rys. 11.1). Lekko można przekonać się (rozpatrz samodzielnie), że środki przekątnych AC i OB w czworokącie $AOBC$ pokrywają się. A więc, czworokąt $OABC$ jest równoległobokiem. Stąd $AB \parallel OC$.

Wtedy, wypływa następujący wniosek:

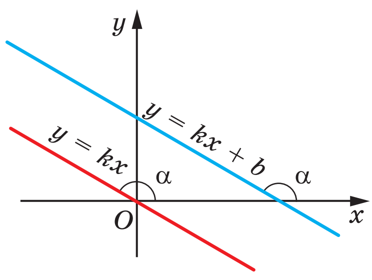
***Jeżeli $k_1 = k_2$ i $b_1 \neq b_2$, to proste $y = k_1x + b_1$ i $y = k_2x + b_2$ są równoległe* (1)**.

Przypuśćmy, że prosta $y = kx$ przecina jednostkowy półokrąg w punkcie M (x_0; y_0) (rys. 11.2). Kąt AOM nazywa się **kątem zawartym między daną prostą z dodatnim kierunkiem osi odciętych**.

Jeżeli prosta $y = kx$ pokrywa się z osią odciętych, wtedy kąt zawarty między daną prostą i dodatnim kierunkiem osi odciętych jest równy 0°.



Rys. 11.2



Rys. 11.3

Jeżeli prosta $y = kx$ tworzy z dodatnim kierunkiem osi odciętych kąt α, to uważa się, że prosta $y = kx + b$, która jest równoległa do prostej $y = kx$, także tworzy kąt α z dodatnim kierunkiem osi odciętych. (rys. 11.3).

Rozpatrzymy prostą MO, równanie której ma postać $y = kx$ (rys. 11.2). Jeżeli $\angle MOA = \alpha$, to $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y_0}{x_0}$. Ponieważ punkt $M (x_0; y_0)$ leży na prostej $y = kx$, to $\frac{y_0}{x_0} = k$. Stąd $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Wtedy dla drugiej prostej $y = kx + b$ możemy zapisać, że

$$\boxed{k = \operatorname{tg} \alpha,}$$

gdzie α – zawarty między tą prostą i dodatnim kierunkiem osi odciętych. Wtedy, współczynnik k nazywa się **współczynnikiem kątowym** tej prostej.

Gdy proste są nie pionowe, to one tworzą równe kąty z dodatnim kierunkiem osi odciętych. Wtedy tangensy tych kątów będą równe, znaczy współczynniki kątowe będą równe.

Zatem,

jeżeli proste $y = k_1x + b_1$ i $y = k_2x + b_2$ są równoległe, to $k_1 = k_2$ **(2)**.

Wnioski **(1)** i **(2)** można złączyć, otrzymując twierdzenie.

Twierdzenie 11.1. ***Proste $y = k_1x + b_1$ i $y = k_2x + b_2$ są równoległe, wtedy i dokładnie wtedy, gdy $k_1 = k_2$ i $b_1 \neq b_2$.***

Zadanie. Ułóż równanie prostej, która przechodzi przez punkt $A (-4; 3)$ i jest równoległa do prostej $y = 0{,}5x - 4$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że równanie szukanej prostej $y = kx + p$. Ponieważ ta prosta oraz prosta $y = 0{,}5x - 4$ są równoległe, to współczynniki kątowe będą równe, a więc $k = 0{,}5$.

A więc, szukane równanie ma postać $y = 0{,}5x + p$. Biorąc pod uwagę, że dana prosta przechodzi przez punkt $A (-4; 3)$, otrzymamy: $0{,}5 \cdot (-4) + p = 3$. Stąd $p = 5$.

Postać szukanej prostej będzie $y = 0{,}5x + 5$.

Odpowiedź: $y = 0{,}5x + 5$. ◀

?

1. Objaśnij, co nazywa się kątem zawartym między prostą a dodatnim kierunkiem osi odciętych.
2. Dlaczego uważa się, że kąt zawarty między prostą równoległą do osi odciętych i z dodatnim kierunkiem osi odciętych?
3. Podaj definicję współczynnika kątowego prostej?
4. Jaka jest zależność między współczynnikiem kątowym prostej a kątem zawartym między prostą i dodatnim kierunkiem prostej?

5. Podaj dostateczny i konieczny warunek prostopadłości dwóch nie pionowych prostych na płaszczyźnie współrzędnych.

ĆWICZENIA

11.1.° Ile wynosi współczynnik kątowy prostej:
1) $y = 2x - 7$; 3) $y = x + 10$; 5) $y = 4$;
2) $y = -3x$; 4) $y = 5 - x$; 6) $3x - 2y = 4$?

11.2.° Które proste: $y = 6x - 5$, $y = 0,6x + 1$, $y = \frac{3}{5}x + 4$, $y = 2 - 6x$ i $y = 600 + 0,6x$ są równoległe?

11.3.° Jaką liczbę należy zamienić gwiazdką, aby proste były równoległe:
1) $y = 8x - 14$ i $y = {*}x + 2$;
2) $y = {*}x - 1$ i $y = 3 - 4x$?

11.4.° Ułóż równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i równoległej do prostej:
1) $y = 14x - 11$; 2) $y = -1,15x + 2$.

11.5.• Ułóż równanie prostej, przechodzącej przez punkt A (–3; 7) i ze współczynnikiem kątowym równym:
1) 4; 2) –3; 3) 0.

11.6.• Ułóż równanie prostej, przechodzącej przez punkt B (2; –5) i współczynnikiem kątowym równym –0,5.

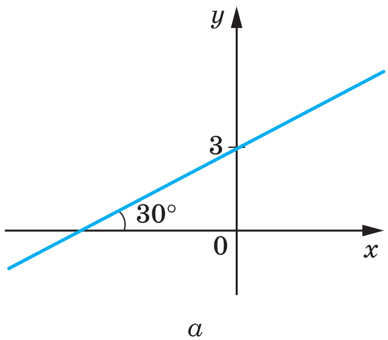
11.7.• Ułóż równanie prostej przechodzącej przez punkt M (–1; 9) i równoległej do prostej:
1) $y = -7x + 3$; 2) $3x - 4y = -8$.

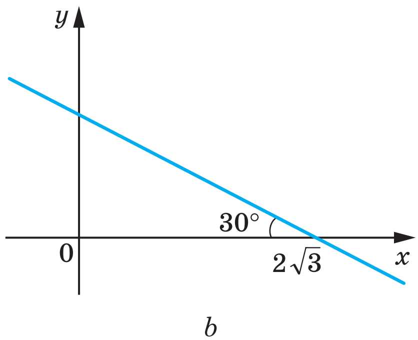
11.8.• Ułóż równanie prostej przechodzącej przez punkt $K\left(-\frac{1}{3}; 10\right)$ i równoległej do prostej:
1) $y = 9x - 16$; 2) $6x + 2y = 7$.

11.9.• Ułóż równanie prostej przechodzącej przez punkt A (2; 6) i tworzącej z dodatnią osią odciętych kąt równy:
1) 60°; 2) 120°.

11.10.• Ułóż równanie prostej, która przechodzi przez punkt B (3; –2) i tworzy z dodatnim kierunkiem osi odciętych kąt równy:
1) 45°; 2) 135°.

11.11.• Ułóż równanie prostej przedstawionej na rysunku 11.4.





Rys. 11.4

11.12.• Przekonaj się, że proste są równoległe:

1) $2x - 5y = 9$ i $5y - 2x = 1$;
2) $8x + 12y = 15$ i $4x + 6y = 9$;
3) $7x - 2y = 12$ i $7x - 3y = 12$;
4) $3x + 2y = 3$ i $6x + 4y = 6$.

11.13.• Udowodnij, że proste o równaniach $7x - 6y = 3$ i $6y - 7x = 6$ są równoległe.

11.14.•• Ułóż równanie prostej, która jest równoległa do prostej $y = 4x + 2$ i przecina prostą $y = -8x + 9$ w punkcie, który leży na osi rzędnych.

11.15.•• Ułóż równanie prostej, która jest równoległa do prostej $y = 3x + 4$ i przecina prostą $y = -4x + 16$ w punkcie, który leży na osi odciętych.

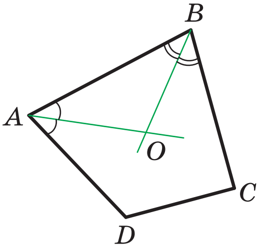
11.16.* Ułóż równanie prostej prostopadłej do prostej $y = -x + 3$ i przechodzącej przez punkt $A\ (1; 5)$.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

11.17. W wypukłym czworokącie $ABCD$ dwusieczne kątów A i B przecinają się w punkcie O (rys. 11.5). Udowodnij, że kąt AOB jest równy połowie sumy kątów C i D.

11.18. Wysokość rombu opuszczona z kąta rozwartego dzieli jego bok na odcinki równe 7 cm i 18 cm, licząc od wierzchołka kąta ostrego. Oblicz przekątne rombu.

11.19. W trójkącie równoramiennym środkowe są równe 15 cm; 15 cm; 18 cm. Oblicz pole trójkąta.



Rys. 11.5

SPOSTRZEGAJCIE, RYSUJCIE, KONSTRUUJCIE, FANTAZJUJCIE

11.20. Jaką najmniejszą wartość może mieć promień koła, z którego można wyciąć trójkąt o bokach równych 2 cm, 3 cm, 4 cm?

METODA WSPÓŁRZĘDNYCH

Często używamy słów: prosta $y = 2x - 1$, parabola $y = x^2$, okrąg $x^2 + y^2 = 1$, co oznacza, że porównujemy figurę z jej wykresem. Takie traktowanie daje możliwość zamienić zadanie o poszukiwaniu własności figury na zadanie o badaniu równania figury. Na tym polega metoda współrzędnych.

Zilustrujemy tą wypowiedź na następującym przykładzie.

Nawet wzrokowo widać, że prosta i okrąg mają nie więcej niż dwa wspólne punkty. Lecz nie można stwierdzić, że ta wypowiedź jest aksjomatem, dlatego należy ją udowodnić.

To zadanie sprowadza się do badania ilości rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ (x-m)^2 + (y-n)^2 = R^2, \end{cases}$$

gdzie liczby a i b jednocześnie nie są równe zeru i $R > 0$.

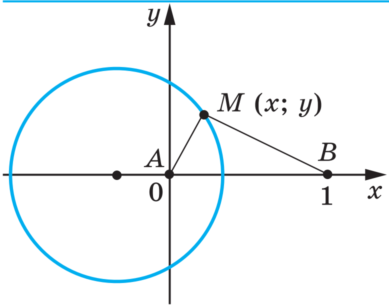
Rozwiązując ten układ metodą podstawienia, otrzymamy równanie kwadratowe, które może mieć dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub nie mieć żadnego rozwiązania. A więc dla danego układu istnieje trzy możliwe przypadki:

1) układ ma dwa rozwiązania – prosta i okrąg przecinają się w dwóch punktach;
2) układ ma jedno rozwiązanie – prosta jest styczna do okręgu;
3) układ nie ma rozwiązań – prosta i okrąg nie mają wspólnych punktów.

Zastosowując jeden z tych przypadków będziecie mogli rozwiązać zadanie 10.17–10.19.

Metoda współrzędnych szczególnie jest skuteczna w tym przypadku, gdy należy znaleźć figurę, wszystkie punkty której są przyporządkowane tej samej własności tzn. znalezienie GMP.

Na płaszczyźnie wybierzemy dwa punkty A i B. Wiecie, że będzie to figura odpowiadająca miejscu geometrycznemu punktów M takich, że $\frac{MA}{MB} = 1$.



Rys. 11.6

Jest to symetralna odcinka AB. Ciekawie jaką figurę tworzą wszystkie punkty M, dla których $\frac{MA}{MB} = k$, gdzie $k \neq 1$. To zadanie rozwiążemy dla $k = \frac{1}{2}$.

Płaszczyznę, na której są wybrane punkty A i B, „przekształcimy" w płaszczyznę współrzędnych. A mianowicie, postąpimy następująco, początek układu współrzędnych pomieścimy w punkcie A, i za jednostkowy odcinek przyjmiemy odcinek równy AB, oś odciętych obierzemy tak, aby punkt B miał współrzędne (1; 0) (rys. 11.6).

Przypuśćmy, że punkt $M\ (x; y)$ – dowolny punkt szukanej figury F. Wtedy $2MA = MB$; $4MA^2 = MB^2$. Stąd

$$4\,(x^2 + y^2) = (x - 1)^2 + y^2;$$
$$3x^2 + 2x + 3y^2 = 1;$$
$$x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 = \frac{1}{3};$$
$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 = \frac{4}{9};$$
$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}. \qquad (*)$$

A więc, jeżeli punkt $M\ (x; y)$ należy do figury F, wtedy jego współrzędne są rozwiązaniem równania (*).

Przypuśćmy, że $(x_1; y_1)$ – jest jednym z rozwiązań równania (*). Wtedy można stwierdzić, że $4\,(x_1^2 + y_1^2) = (x_1 - 1)^2 + y_1^2$. A to oznacza, że punkt $N\ (x_1; y_1)$ jest punktem, że $4NA^2 = NB^2$. Wtedy $2NA = NB$. A więc, punkt N należy do figury F.

Możemy sądzić, że równaniem figury F jest równanie (*), a to oznacza, że figura F – to okrąg o środku w punkcie $O\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$ o promieniu $\frac{2}{3}$.

Rozwiązaliśmy zadanie: dla szczególnego przypadku, gdy $k = \frac{1}{2}$. Można przekonać się, że okrąg będzie szukaną figurą dla dowolnej dodatniej wartości $k \neq 1$. Koło to nazywa się **Kołem Apolin'a**[1].

[1] Apoloniusz z Pergi (III–II st. p.n.e) – matematyk i astronom z Starożytnej Grecji.

JAKIM SPOSOBEM ZBUDOWANO MOST MIĘDZY GEOMETRIĄ I ALGEBRĄ

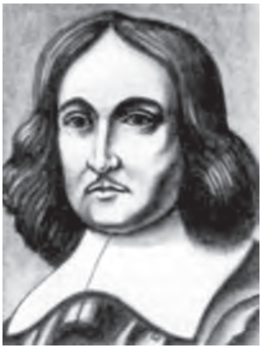
Układem współrzędnych posługiwano się już bardzo dawno. W dawnych czasach uczeni, badając zmiany na Ziemi, spostrzegali położenie gwiazd na niebie i za pomocą swoich badań wyniki spostrzeżeń zastosowali do ułożenia map i schematów.

W II w. p.n.e. uczona Starożytnej Grecji Hipparch po raz pierwszy zastosował pojęcie współrzędnych do określenia rozmieszczenia obiektów na powierzchni Ziemi.

Tylko w XVI w. po raz pierwszy francuski matematyk Mikołaj Oresme (około 323–362) zastosował w matematyce idei Hipparcha: on podzielił płaszczyznę na kwadraciki (takie, jakimi są podzielone wasze kartki zeszytu) i za ich pomocą pomocą określił położenie punktów według ich szerokości i długości.

Lecz tylko możliwość zastosowania tej idei wprowadzono w XVII w. francuskimi matematykami Pierre de Fermatem, René Descartesem (Kartezjuszem) w swoich pracach. W tych pracach oni pokazali w jaki sposób można zastosować układ współrzędnych do przyjścia od punktu do liczb, od linii do równania, od geometrii do algebry.

Mimo to, że P. Fermat opublikował swoją pracę o rok wcześniej od R. Kartezjusza, układ współrzędnych, który teraz używamy, nazwano **kartezjańskim**. R. Kartezjusz w swojej pracy „Rozmyślenie o metodzie" zaproponował nową zręczną literową symbolikę, którą z pewnymi nie licznymi zmianami, zastosowuje się w teraźniejszości. Idąc śladami Kartezjusza oznaczamy zmienne wielkości końcowymi literami alfabetu łacińskiego x, y, z, zaś współrzędne – początkowymi literami: a, b, c, ... Obecnie stosowane oznaczenia potęg x^2, y^3, z^5 itd. również wprowadził Kartezjusz.



Pierre de Fermat
(1601–1665)

René Descartes (Kartezjusz)
(1596–1650)

ZADANIE TESTOWE N 3 "SPRAWDŹ SIEBIE"

1. Jakie współrzędne będą środka odcinka AB, jeżeli A (–6; 7), B (4; –9)?

A) (–5; 8); C) (–5; –1);
B) (–1; –1); D) (–1; 8).

2. Ile wynosi odległość między punktami C (8; –11) i D (2; –3)?

A) 100; C) $\sqrt{296}$;
Б) 10; D) $\sqrt{164}$.

3. Jakie są współrzędne środka okręgu $(x-5)^2 + (y+9)^2 = 16$?

A) (5; –9); C) (5; 9);
B) (–5; 9); D) (–5; –9).

4. Dla jakiego z podanych okręgów środek leży w początku współrzędnych?

A) $x^2 + (y-1)^2 = 1$; C) $x^2 + y^2 = 1$;
B) $(x-1)^2 + y^2 = 1$; D) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

5. Oblicz promień okręgu, średnicą którego jest odcinek MK, gdy M (14; 12) i K (–10; 2).

A) 26; C) 25;
B) 13; D) 5.

6. Jakie współrzędne będzie mieć punkt przecięcia prostej $5x - 3y = 15$ z osią odciętych?

A) (0; –5); C) (0; 3);
B) (–5; 0); D) (3; 0).

7. Czworokąt $ABCD$ – równoległobok. Są podane trzy jego wierzchołki: B (–2; 3), C (10; 9), D (7; 0). Znajdź współrzędne wierzchołka A.

A) (1; 6); C) (–5; –6);
B) (19; –3); D) (6; 5).

8. Jakie współrzędne są punktu leżącego na osi rzędnych i znajdującego się na jednakowej odległości od punktów A (–3; 4) i B (1; 8)?

A) (–5; 0); C) (5; 0);
B) (0; –5); D) (0; 5).

9. Podaj odciętą punktu, leżącego na prostej AB, rzędna której równa 2, jeżeli A (–7; 4), B (9; 12).

A) 8,5; C) 4;
B) –11; D) –2.

10. Ile wynosi odległość punktu przecięcia prostych $x - y = 4$ i $x + 3y = 12$ do punktu $M\,(1; 7)$?

A) 5;
C) $5\sqrt{2}$;
B) 50;
D) $2\sqrt{5}$.

11. Podaj równanie prostej, przechodzącej przez punkt $P\,(-1; 6)$ i równoległej do prostej $y = 2x - 5$?

A) $y = 6 - 5x$;
C) $y = 5x - 6$;
B) $y = 2x + 8$;
D) $y = 2x - 8$.

12. Podaj długość promienia okręgu, podanego równaniem $x^2 + y^2 + 14y - 12x + 78 = 0$?

A) $\sqrt{7}$;
C) 14;
B) 7;
D) $\sqrt{14}$.

GŁÓWNE W PARAGRAFIE 3

Odległość między dwoma punktami

Odległość między punktami $A\ (x_1; y_1)$ i $B\ (x_2; y_2)$ można obliczyć według wzoru $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Współrzędne środka odcinka

Współrzędne $(x_0; y_0)$ są środkami odcinka o końcach $(x_1; y_1)$ i $(x_2; y_2)$ można znaleźć według wzorów:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Równanie figury

Równaniem figury F, podanej na płaszczyźnie xy nazywa się równanie z dwiema zmiennymi x i y posiadające następujące własności:

1) jeżeli punkt należy do płaszczyzny F, to jego współrzędne są rozwiązaniem danego równania;
2) dowolne rozwiązanie $(x; y)$ danego równania będzie współrzędnymi punktu, który należy do figury F.

Równanie okręgu

Równanie okręgu o promieniu R i środkiem w punkcie $A\ (a; b)$ ma postać $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
Dowolne równanie postaci $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, gdzie a, b i R – dowolne liczby, przy czym $R > 0$, jest równaniem okręgu o promieniu R i środkiem w punkcie ze współrzędnymi $(a; b)$.

Równanie prostej

Równanie prostej ma postać $ax + by = c$, gdzie a, b i c – dowolne liczby, przy czym a i b jednocześnie nie dorównują zeru.
Dowolne równanie postaci $ax + by = c$, gdzie a, b i c – dowolne liczby, oprócz a i b jednocześnie nie dorównują zeru, jest równaniem prostej.
Jeżeli $b = 0$ i $a \neq 0$, to równanie prostej $ax + by = c$ będzie równaniem prostej pionowej; jeżeli $b \neq 0$, to równanie będzie równaniem prostej nie pionowej.

Współczynnik kątowy prostej

Współczynnik k dla równania prostej $y = kx + b$ nazywa się kątem współrzędnej prostej i jest równy tangensowi kąta, zawartego między prostą i dodatnim kierunkiem osi odciętych.

Warunek konieczny i dostateczny równoległości nie pionowych prostych

Proste $y = k_1x + b_1$ i $y = k_2x + b_2$ są równoległy dokładnie wtedy i tylko wtedy, gdy $k_1 = k_2$ i $b_1 \neq b_2$.

WEKTORY §4

Ucząc się materiału tego paragrafu dowiecie się, że wektory zastosowuje się nie tylko w fizyce, ale i w geometrii.

Nauczycie się dodawać i odejmować wektory, mnożyć wektor przez liczbę, znachodzić kąt między dwoma wektorami, zastosowywać własności wektorów dla rozwiązywania zadań.

12. Pojęcie wektora

Zapoznaliście się z wielkościami, które charakteryzują się liczbowymi wartościami, a mianowicie: masa, pole, długość, objętość, czas, temperatura i inne. Takie wielkości nazywają się **skalarnymi wielkościami** lub **skalarami**.

Z kursu fizyki znacie wielkości dla podania których nie wystarczy tylko ich liczbowa wartość. Na przykład, jeżeli na sprężynę działa siła 5 H, to nie można zrozumieć, czy sprężyna rozciąga się, czy ściąga się (rys. 12.1). A zatem, należy wiedzieć w jakim kierunku działa siła.

Rys. 12.1

Wielkości, które charakteryzują się nie tylko swoimi wielkościami liczbowymi ale i kierunkiem, nazywają się **wielkościami wektorowymi** lub **wektorem**[1].

Siła, przekształcenie, prędkość, przyspieszenie, waga – to przykłady wielkości wektorowej.

Wektory zastosowują się także w geometrii.

---

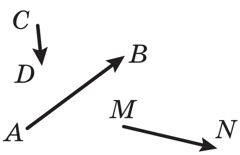
[1] Nazwa "wektor" po raz pierwszy pojawiła się w 1815 r., który wprowadził irlandzki matematyk i astronom W. Hamilton.

Rozpatrzymy odcinek AB. Jeżeli przyjmiemy, że punkt A będzie **początkiem** odcinka, zaś punkt B – jego **końcem**, to ten odcinek będzie charakteryzował się nie tylko długością ale i kierunkiem od punktu A do punktu B.

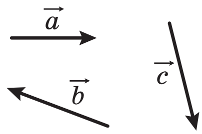
Jeżeli jest podano, który z punktów jest początkiem odcinka, a który punkt jest jego końcem, to taki odcinek nazywa się **odcinkiem skierowanym** lub **wektorem**.

Wektor o początku w punkcie A i końcem w punkcie B oznacza się następująco: $\overrightarrow{AB}$ (czyta się “wektor AB”).

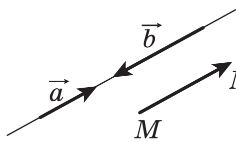
Na rysunku wektor przedstawia się odcinkiem ze strzałką u góry, która wskazuje jego koniec. Na rysunku 12.2 przedstawiono wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{MN}$.



Rys. 12.2



Rys. 12.3



Rys. 12.4

Dla oznaczenia wektorów używa się małe litery alfabetu łacińskiego ze strzałką u góry. Na rysunku 12.3 przedstawiono wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Wektor, w którym początek i koniec – to ten samy punkt nazywa się **wektorem zerowym** lub **zero-wektor** i oznacza się $\vec{0}$. Jeżeli początek i koniec wektora zerowego – to punkt A, wtedy on oznacza się jak: $\overrightarrow{AA}$. Na rysunku wektor zerowy przedstawia się punktem.

Modułem wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywa się długość odcinka AB. Moduł wektora $\overrightarrow{AB}$ oznacza się następująco: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, zaś moduł wektora $\vec{a}$ – następująco: $\left|\vec{a}\right|$.

Moduł wektora zerowego jest równy zeru: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

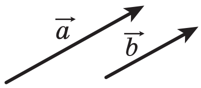
Definicja. Niezerowe wektory nazywają się kolinearnymi, jeżeli leżą na prostych równoległych lub na jednej prostej.

Wektor zerowy uważa się kolinearnym do jakiegokolwiek wektora.

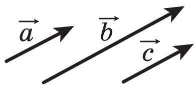
Na rysunku 12.4 są przedstawione kolinearne wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\overrightarrow{MN}$.

Oznaczenie kolinearności wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zapisuje się: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

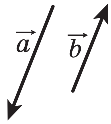
Niezerowe kolinearne wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ przedstawione na rysunku 12.5 są wektory o tym samym kierunku. Takie wektory nazywają się **zgodnie skierowane** i oznaczają się: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.



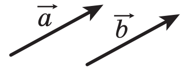
Rys. 12.5



Rys. 12.6



Rys. 12.7



Rys. 12.8

Jeżeli $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ***i*** $\vec{b} \parallel \vec{c}$, ***to*** $\vec{a} \parallel \vec{c}$.

Analogiczną własność posiadają i wektory zgodnie skierowane, to oznacza, że ***jeżeli*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ***i*** $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, ***to*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (rys. 12.6).

Niezerowe wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ przedstawione na rysunku 12.7 są **skierowane w przeciwnych kierunkach**. Ten przypadek zapisuje się następująco: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Definicja. Niezerowe wektory nazywają się równymi, jeżeli ich wartości bezwzględne są równe i zwroty są zgodnie skierowane.

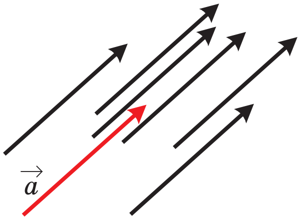
Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ przedstawione na rysunku 12.8 są równe. Wtedy oznaczają, że: $\vec{a} = \vec{b}$.

Równość wektorów niezerowych $\vec{a}$ i $\vec{b}$ potwierdza, ż $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ i $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

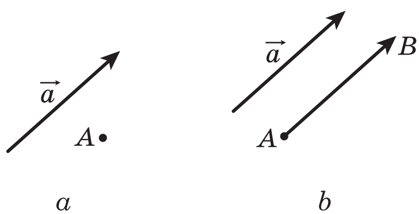
Łatwo udowodnić, że gdy $\vec{a} = \vec{b}$ i $\vec{b} = \vec{c}$, to $\vec{a} = \vec{c}$. Przekonaj się w tej prawdziwości samodzielnie.

Często mówiąc o wektorach nie konkretyzujemy, jaki punkt był jego początkiem. A więc, na rysunku 12.9 przedstawiony wektor $\vec{a}$ oraz wektory, które dorównują wektorowi $\vec{a}$. Każdy z ich również przyjęto nazywać wektorem $\vec{a}$.

Wektor $\vec{a}$ oraz punkt A są przedstawione na rysunku 12.10. Jeżeli wykreślono wektor $\overrightarrow{AB}$, równy wektorowi $\vec{a}$, to uważa się, że wektor $\vec{a}$ **odłożono od punktu** A (rys. 12.10, b).



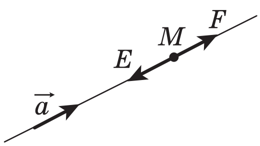
Rys. 12.9



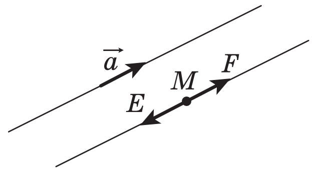
Rys. 12.10

Pokażemy, w jaki sposób od punktu M można odłożyć wektor równy danemu wektorowi $\vec{a}$.

Jeżeli wektor $\vec{a}$ zerowy, to szukany wektor będzie wektorem $\overrightarrow{MM}$.



Rys. 12.11



Rys. 12.12

Teraz rozpatrzymy przypadek, kiedy $\vec{a} \neq \vec{0}$. Przypuśćmy, że punkt M leży na prostej, która zawiera wektor $\vec{a}$ (rys. 12.11). Na tej prostej istnieją dwa punkty E i F takie, że $ME = MF = |\vec{a}|$. Na wymienionym rysunku wektor $\overrightarrow{MF}$ będzie równy wektorowi $\vec{a}$. A więc, jego należy wybrać.

Jeżeli punkt M nie leży na prostej, która zawiera wektor $\vec{a}$, wtedy przez punkt M poprowadzimy prostą równoległą dla niej (rys. 12.12). Następna konstrukcja jest analogiczna poprzedniej.

Z danego punktu można odłożyć dokładnie jeden wektor równy danemu.

Zadanie. W danym czworokącie $ABCD$ wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Określ rodzaj czworokąta $ABCD$.

Rozwiązanie. Według warunku $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ wynika, że $AB \parallel DC$ i $AB = DC$. A więc czworokąt $ABCD$ – to równoległobok.

Równość $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ oznacza, że przekątne czworokąta $ABCD$ są równe. Lecz równoległobok o równych przekątnych jest prostokątem. ◄

1. Podaj przykłady skalarnych wielkości.
2. Jakie wielkości nazywają się wektorami?
3. Co w geometrii nazywa się wektorami?
4. Które z podanych wielkości są wektorami: czas, waga, przyspieszenie, impuls, masa, przemieszczenie, droga, pole, ciśnienie?
5. Jaki odcinek nazywa się wektorem skierowanym lub wektorem?

6. Jak oznacza się wektor o początku w punkcie A i końcem w punkcie B?
7. Jaki wektor nazywa się zerowym?
8. Co nazywa się modułem wektora $\overrightarrow{AB}$?
9. Ile wynosi moduł wektora zerowego?
10. Jakie wektory nazywają się kolinearnymi?
11. Jak oznaczają się wektory o jednakowym zwrocie? o zwrocie przeciwnym?
12. Jakie wektory nazywają się równymi?

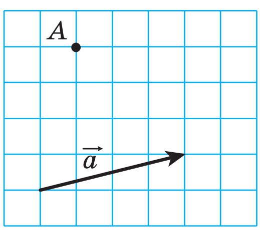
ZADANIA PRAKTYCZNE

12.1.° Wybierz trzy punkty A, B i C, które nie leżą na jednej prostej. Wykreśl wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{CB}$.

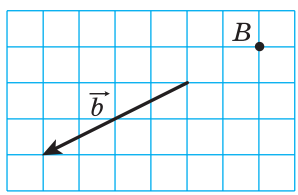
12.2. Motorówka z punktu A płynie na północ na odległość równą 40 km do punktu B, a zatem na zachód na odległość 60 km z punktu B do punktu C. Wybierz podziałkę i wykreśl wektory, które przedstawiają przejście z punktu A do punktu B, z punktu B do punktu C, a zatem z punktu A do punktu C.

12.3.° Wykreśl trójkąt ABC. Wykreśl wektor zgodnie skierowany z wektorem $\overrightarrow{CA}$, początek jakiego jest w punkcie B.

12.4.° Dany jest wektor $\vec{a}$ oraz punkt A (rys. 12.13) Od punktu A odłóż wektor, równy wektorowi $\vec{a}$.



Rys. 12.13



Rys. 12.14

12.5.° Wiadomy jest wektor $\vec{b}$ i punkt B (rys. 12.14). Od punktu B odłóż wektor o długości równej wektorowi $\vec{b}$.

12.6.° Wybierz punkty A i B. Wykreśl wektor $\overrightarrow{BC}$, równy wektorowi $\overrightarrow{AB}$.

12.7.° Wykreśl wektor $\vec{a}$ i wybierz punkty M i N. Od tych punktów wykreśl wektory równe wektorowi $\vec{a}$.

12.8.• Wykreśl trójkąt ABC i wybierz punkt M, który będzie środkiem BC. Od punktu M odłóż wektor równy wektorowi $\overrightarrow{AM}$, zaś od punktu B – wektor równy wektorowi $\overrightarrow{AC}$. Udowodnij, że końce wykreślonych wektorów, pokrywają się.

12.9.• Wykreśl trójkąt ABC. Od punktów B i C odłóż wektory, odpowiednio równe wektorom $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB}$. Udowodnij, że końce wykreślonych wektorów pokrywają się.

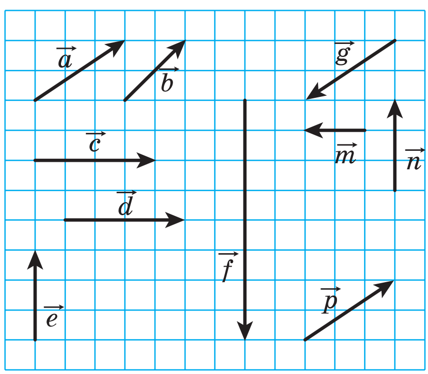
ĆWICZENIA

12.10.° Wskaż równe wektory, początki i końce których są wierzchołkami kwadratu $ABCD$.

12.11.° W rombie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O. Wskaż równe wektory, początki i końce których leżą w punktach A, B, C, D i O.

12.12.° Które z wektorów, podanych na rysunku 12.15:

1) są równe;
2) zgodnie skierowane;
3) o przeciwnych kierunkach;
4) kolinearne?



Rys. 12.15

12.13.° Punkty M i N – to środki odpowiednich boków AB i CD w równoległoboku $ABCD$. Wskaż wektory, początki i końce których leżą w punktach A, B, C, D, M i N:

1) które równe wektorowi $\overrightarrow{AM}$;

2) które kolinearne z wektorem $\overrightarrow{CD}$;

3) o zwrotach przeciwnych do wektora $\overrightarrow{NC}$;

4) zgodnie skierowanymi z wektorem $\overrightarrow{BC}$.

12.14.° Przypuśćmy, że punkt O – punkt przecięcia przekątnych w równoległoboku $ABCD$. Wskaż wektory, końce i początki których w punktach A, B, C, D i O:

1) są równe;

2) zgodnie skierowane;

3) o przeciwnych kierunkach.

12.15.° Punkty M, N i P – środki odpowiednich boków AB, BC i CA w trójkącie ABC. Wskaż wektory, początki i końce których leżą w punktach A, B, C, M, N i P i będą:

1) równe wektorowi $\overrightarrow{MN}$;

2) kolinearne z wektorem $\overrightarrow{AB}$;

3) przeciwne z kierunkiem z wektorem $\overrightarrow{MP}$;

4) zgodnie skierowanymi z wektorem $\overrightarrow{CA}$.

12.16.° Czy wypowiedzi są prawdziwe:

1) jeżeli $\vec{m} = \vec{n}$, to $|\vec{m}| = |\vec{n}|$;

2) jeżeli $\vec{m} = \vec{n}$, to $\vec{m} \parallel \vec{n}$;

3) jeżeli $\vec{m} \neq \vec{n}$, to $|\vec{m}| \neq |\vec{n}|$?

12.17.° Udowodnij, że gdy $ABCD$ – równoległobok, to $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

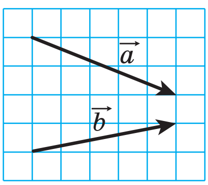
12.18.° Określ rodzaj czworokąta $ABCD$, jeżeli $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$.

12.19.° Określ rodzaj czworokąta $ABCD$, jeżeli wektory $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$ kolinearne i $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AD}|$.

12.20.° Oblicz moduły wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. 12.16), jeżeli bok kratki jest równy 0,5 cm.

12.21.° W prostokącie $ABCD$ wiadomo, że $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, O – punkt przecięcia przekątnych. Oblicz moduły wektorów $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$ i $\overrightarrow{OC}$.

12.22.° W prostokącie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O. Wiadomo, że $|\overrightarrow{AB}| = 5$ cm, $|\overrightarrow{AO}| = 6{,}5$ cm. Oblicz moduły wektorów $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{AD}$.



Rys. 12.16

12.23.° Wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Czy można stwierdzić, że punkty A, B, C i D są wierzchołkami równoległoboku?

12.24.° Wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Jakie jeszcze wektory będą równe które wychodzą z punktów A, B, C i D?

12.25.° W danym czworokącie $ABCD$ wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$. Określ rodzaj czworokąta $ABCD$.

12.26.° W danym czworokącie $ABCD$, wiadomo, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są kolinearne oraz $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$. Określ rodzaj czworokąta $ABCD$.

12.27.° Co można powiedzieć o wektorze $\overrightarrow{AB}$, jeżeli $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?

12.28.• W trójkącie prostokątnym ABC punkt M – środek przeciwprostokątnej AB i $\angle B = 30°$. Oblicz moduły wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{MC}$, jeżeli $AC = 2$ cm.

12.29.• W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle C = 90°$) środkowa CM jest równa 6 cm. Oblicz moduły wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, jeżeli $\angle A = 30°$.

12.30.• Wiadomo, że wektory $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nie jest kolinearne. Wektor $\vec{a}$ jest kolinearny do wektorów $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Udowodnij, że wektor $\vec{a}$ jest wektorem zerowym.

12.31.• Wiadomo, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ są kolinearne. Udowodnij, że punkty A, B i C leżą na jednej prostej. Czy wypowiedź jest prawdziwa: jeżeli punkty A, B i C leżą na jednej prostej, to wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ są kolinearne?

12.32.• Dla czterech punktów A, B, C i D wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Udowodnij, że środki odcinków AD i BC pokrywają się. Udowodnij następującą wypowiedź: jeżeli środki odcinków AD i BC pokrywają się, to $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

12.33.• Wiadomo, że $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$. Udowodnij, że punkt O – środek odcinka MN. Udowodnij odwrotne twierdzenie: jeżeli punkt O – środek odcinka MN, to $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

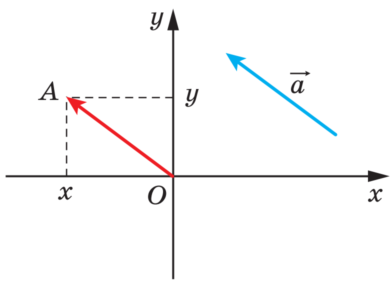
12.34. Jeden z kątów równoległoboku jest równy połowie sumy trzech pozostałych kątów. Oblicz kąty równoległoboku.

12.35. Obwód jednego z dwóch podobnych trójkątów jest o 8 cm dłuższy od obwodu drugiego trójkąta. Oblicz obwody tych trójkątów, jeżeli współczynnik podobieństwa jest równy $\frac{1}{3}$.

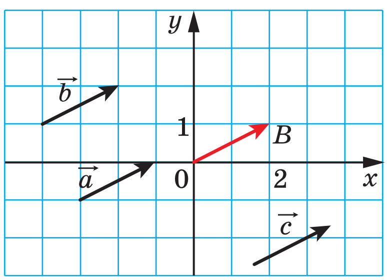
12.36. Na bokach BC i AD w rombie $ABCD$ obrano odpowiednio punkty M i K tak, że $BM : MC = KD : AK = 1 : 2$. Oblicz odcinek MK, jeżeli $AB = a$, $\angle ABC = 60°$.

13. Współrzędne wektora

Na płaszczyźnie współrzędnych rozpatrzymy wektor $\vec{a}$. Od początku współrzędnych odłożymy równy jemu wektor $\overrightarrow{OA}$ (rys. 13.1). **Współrzędnymi wektora** $\vec{a}$ nazywają się współrzędne punktu A. Zapis $\vec{a}\,(x; y)$ oznacza, że wektor $\vec{a}$ ma współrzędne $(x; y)$.



Rys. 13.1



Rys. 13.2

Liczby x i y odpowiednie nazywają się **pierwszą** i **drugą współrzędną wektora** $\vec{a}$.

Z definicji wynika, że ***równe wektory mają odpowiednio równe współrzędne***. Na przykład, współrzędnymi każdego z równych wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (rys. 13.2) będą współrzędne $(2; 1)$.

Prawdziwe i odwrotne twierdzenie: ***jeżeli odpowiednie współrzędne wektorów są równe, to równe są i same wektory***.

Łatwo przekonać się, że jeżeli odłożyć te wektory od początku współrzędnych, to końce tych wektorów pokryją się.

Zatem, wektor zerowy ma współrzędne $(0; 0)$.

Twierdzenie 13.1. ***Jeżeli punkty $A\,(x_1; y_1)$ i $B\,(x_2; y_2)$ odpowiednio są początkiem i końcem wektora $\vec{a}$, to liczby $x_2 - x_1$ i $y_2 - y_1$ są odpowiednio równe pierwszej i drugiej współrzędnej wektora $\vec{a}$.***

Dowód. Przypuśćmy, że wektor $\vec{a}$, jest równy wektorowi $\overrightarrow{AB}$, i ma współrzędne $(a_1; a_2)$. Udowodnimy, że $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Jeżeli $\vec{a} = \vec{0}$, to udowodnienie jest widoczne.

Przyjmiemy, że $\vec{a} \neq \vec{0}$. Od początku współrzędnych odłożymy wektor $\overrightarrow{OM}$, który jest równy wektorowi $\overrightarrow{AB}$. Wtedy, współrzędne punktu M będą równe $(a_1; a_2)$.

Ponieważ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, to korzystając z wyniku zadania 12.32, możemy zrobić wniosek, że środki odcinków OB i AM pokrywają się. Współrzędne środków odcinków OB i AM odpowiednio są równe $\left(\frac{0 + x_2}{2}; \frac{0 + y_2}{2}\right)$ i $\left(\frac{x_1 + a_1}{2}; \frac{y_1 + a_2}{2}\right)$. Wtedy $\frac{0 + x_2}{2} = \frac{x_1 + a_1}{2}$, $\frac{0 + y_2}{2} = = \frac{y_1 + a_2}{2}$. Te równości spełniają się i wtedy, gdy punkt O pokrywa się z punktem B; lub punkt A pokrywa się z punktem M.

Stąd $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ◀

Ze wzoru na odległość między dwoma punktami wynika, że gdy wektor $\vec{a}$ ma współrzędne $(a_1; a_2)$, to

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Zadanie. Znając wierzchołki A (3; –2), B (–4; 1), C (–2; –3) w równoległoboku $ABCD$, znajdź współrzędne punktu D.

Rozwiązanie. Ponieważ $ABCD$ – to równoległobok, wtedy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. A więc, współrzędne tych wektorów są równe.

Przyjmiemy, że współrzędne punktu D są równe $(x; y)$. Dla znalezienia współrzędnych wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ zastosujemy twierdzenie 13.1. Otrzymamy:

$\overrightarrow{AB}(-4 - 3; 1 - (-2)) = \overrightarrow{AB}(-7; 3)$; $\overrightarrow{DC}(-2 - x; -3 - y)$. Stąd

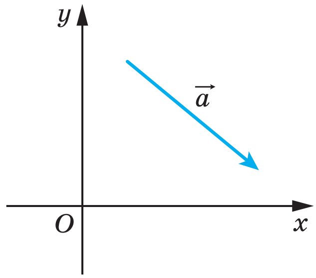
$$\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

Odpowiedź: D (5; –6). ◀

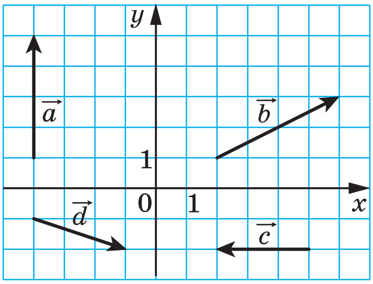
1. Objaśnij, co nazywamy współrzędnymi danego wektora.
2. Co można powiedzieć o współrzędnych równych wektorów?
3. Co można powiedzieć o wektorach, które mają odpowiednie wektory równe?
4. W jaki sposób określić współrzędne wektora, znając jego współrzędne początku i końca?
5. Jak określić moduł wektora znając jego współrzędne?

ZADANIA PRAKTYCZNE

13.1.° Korzystając cyrklem i linijką narysuj punkt, współrzędne którego są równe współrzędnym wektora $\vec{a}$ (rys. 13.3).



Rys. 13.3



Rys. 13.4

13.2.° Od początku współrzędnych odłóż wektory $\vec{a}$ **(–3; 2)**, $\vec{b}$ **(0; –2)** i $\vec{c}$ **(4; 0)**.

13.3.° Od punktu M (–1; 2) odłóż wektory $\vec{a}$ **(1; –3)**, $\vec{b}$ **(–2; 0)** i $\vec{c}$ **(0; –1)**.

ĆWICZENIA

13.4.° Podaj współrzędne wektorów przedstawionych na rysunku 13.4.

13.5.° Oblicz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, jeżeli:

1) A (2; 3), B (–1; 4);
2) A (3; 0), B (0; –3);
3) A (0; 0), B (–2; –8);
4) A (m; n), B (p, k).

13.6.° Znając punkt A (1; 3) i wektor $\vec{a}$ **(–2; 1)**. Oblicz współrzędne punktu B takiego, że $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

13.7.° Dane punkty A (3; –7), B (4; –5) i C (5; 8). Oblicz współrzędne punktu D takiego, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

13.8.° Od punktu A (4; –3) odłożono wektor $\vec{m}$ **(–1; 8)**. Oblicz współrzędne końca wektora.

13.9.° Wiadome są punkty A (3; –4), B (–2; 7), C (–4; 16) i D (1; 5). Udowodnij, że $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

13.10.° Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach w punktach A (1; –5), B (2; 3), C (–3; 1) i D (–4; –7) jest równoległobokiem.

13.11.° Pośród wymienionych wektorów $\vec{a}\,(3; -4)$, $\vec{b}\,(-4; 2)$, $\vec{c}\left(3; \sqrt{11}\right)$, $\vec{d}\,(-2; -4)$, $\vec{e}\left(-1; -2\sqrt{6}\right)$ i $\vec{f}\,(-4; 5)$ wybierz takie, które mają równe moduły.

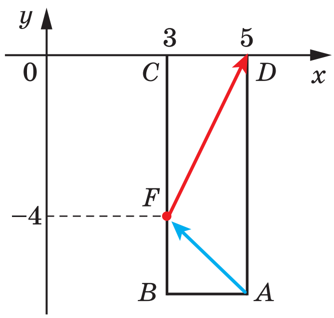
13.12.° Wiadome są punkty A (1; –4), B (–2; 5), C (1 + a; –4 + b) i D (–2 + a; 5 + b). Udowodnij, że $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

13.13.° Podaj wszystkie wartości x, dla których moduł wektora $\vec{a}\,(x; -8)$ jest równy 10.

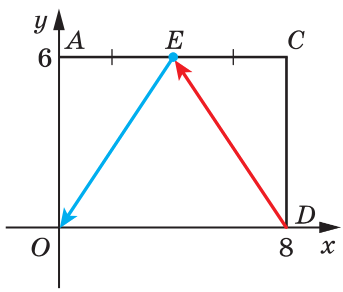
13.14.° Przy jakich wartości y moduł wektora $\vec{b}\,(12; y)$ jest równy 13?

13.15.• W trójkącie ABC o wierzchołkach A (3; –5), B (2; –3) i C (–1; 7) odcinek BM jest jego środkową. Oblicz współrzędne i moduł wektora $\overrightarrow{BM}$.

13.16.• Punkt F dzieli bok BC w prostokąta $ABCD$ w stosunku 1 : 2, licząc od wierzchołka B (rys. 13.5). Oblicz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{FD}$.



Rys. 13.5



Rys. 13.6

13.17.• W prostokącie $ABCD$ punkt E – środek boku AC (rys. 13.6). Oblicz współrzędne wektorów $\overrightarrow{DE}$ i $\overrightarrow{EO}$.

13.18.• Moduł wektora $\vec{a}$ jest równy 10, którego pierwsza współrzędna jest o 2 większa od drugiej. Oblicz współrzędne wektora $\vec{a}$.

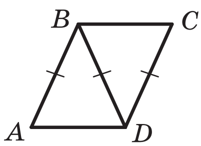
13.19.• Moduł wektora $\vec{c}$ jest równy 2, a jego współrzędne są równe. Oblicz współrzędne wektora $\vec{c}$.

13.20.•• Punkty A (2; 5) i B (7; 5) – są wierzchołkami w prostokącie $ABCD$. Moduł wektora $\overrightarrow{BD}$ jest równy 13. Podaj współrzędne punktu C i D.

13.21.•• Punkty A (1; 2) i D (1; –6) – są wierzchołkami w prostokącie $ABCD$. Moduł wektora $\overrightarrow{AC}$ jest równy 17. Podaj współrzędne wierzchołków B i C.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

13.22. Dwa trójkąty równoramienny ADB i CBD ($AB = BD = CD$) mają wspólne ramię (rys. 13.7). Określ rodzaj czworokąta $ABCD$.



Rys. 13.7

13.23. Obwód trójkąta jest równy 48 cm, a dwusieczna dzieli bok trójkąta na odcinki o długości 5 cm i 15 cm. Oblicz boki trójkąta.

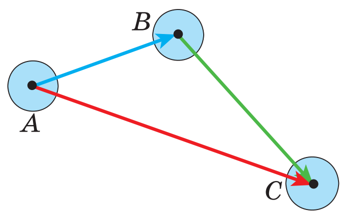
13.24. Ramię trapezu równoramiennego opisanego na okręgu jest równe a, zaś jeden z kątów – 60°. Oblicz pole trapezu.

SPOSTRZEGAJCIE, RYSUJCIE, KONSTRUUJCIE, FANTAZJUJCIE

13.25. Czy można z kwadratu o boku równym 10 cm wyciąć kilka kół, suma średnia których będzie większa od 5 m?

14. Dodawanie i odejmowanie wektorów

Jeżeli ciało przenieść z punktu A do punktu B, a zatem z punktu B do punktu C, to suma tych przemieszczeń uważa się jako wektor $\overrightarrow{AC}$, który równy sumie wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$, wtedy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (rys. 14.1).



Rys. 14.1

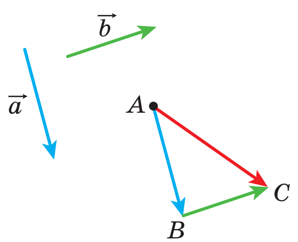
Przykład ten wskazuje w jaki sposób podać pojęcie sumy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, czyli, jak dodawać dwa dane wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Z dowolnego punktu A odłożymy wektor $\overrightarrow{AB}$, *równy wektorowi* $\vec{a}$. *Zatem od punktu B odłożymy wektor* $\overrightarrow{BC}$, *równy wektorowi* $\vec{b}$. *Wektor* $\overrightarrow{AC}$ *nazywa się* **sumą wektorów** $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ (rys. 14.2) *i zapisuje się tak:* $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

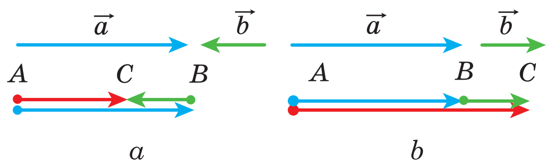
Podany wyżej algorytm dodawania dwóch wektorów nazywa się **metodą trójkąta**.

Nazwa ta pochodzi od tego, że gdy niekolinearne wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ to punkty A, B i C są wierzchołkami trójkąta (rys. 14.2).

Za pomocą metody trójkąta można dodawać i kolinearne wektory. Wektor $\overrightarrow{AC}$ przedstawiony na rysunku 14.3 jest równy sumie kolinearnych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Rys. 14.2



Rys. 14.3

A więc, ***dla dowolnych trzech punktów A, B i C spełnia się równość*** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, która wyraża dodawanie wektorów metodą trójkąta.

Twierdzenie 14.1. ***Jeżeli współrzędne wektorów*** $\vec{a}$ ***i*** $\vec{b}$ ***są odpowiednio równe*** $(a_1; a_2)$ ***i*** $(b_1; b_2)$, ***to współrzędne wektora*** $\vec{a}+\vec{b}$ ***są równe*** $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Dowód. ⊙ Przypuśćmy, że punkty $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$ i $C\ (x_3; y_3)$ są takie, że $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ i $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Mamy: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Udowodnimy, że współrzędne wektora $\overrightarrow{AC}$ są równe $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Obliczymy współrzędne wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\overrightarrow{AC}$: $\vec{a}\ (x_2-x_1; y_2-y_1)$, $\vec{b}\ (x_3-x_2; y_3-y_2)$, $\overrightarrow{AC}\ (x_3-x_1; y_3-y_1)$.

Mamy:

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}\ (x_3-x_1; y_3-y_1)=\overrightarrow{AC}\ (x_3-x_2+x_2-x_1; y_3-y_2+y_2-y_1)$.

Biorąc pod uwagę, że $x_2-x_1=a_1$, $x_3-x_2=b_1$, $y_2-y_1=a_2$, $y_3-y_2=b_2$, otrzymamy: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}\ (a_1+b_1; a_2+b_2)$. ◀

Uwaga. Opisując metodę trójkąta dla obliczenia sumy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odkładaliśmy wektor $\vec{a}$ od dowolnego punktu. Jeżeli punkt A zamienić punktem A_1, to wektor $\overrightarrow{AC}$, który równy sumie wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, zamieni się pewnym wektorem $\overrightarrow{A_1C_1}$. Z twierdzenia 14.1 wynika, że współrzędne wektorów $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{A_1C_1}$ będą równe $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, a więc, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. To oznacza, że suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nie zależy od wyboru punktu, od którego odłożono wektor $\vec{a}$.

Własności dodawania wektorów są analogiczne z własnościami dodawania liczb.

Dla dowolnych wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ spełniają się równości:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – własność przemienności;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – własność łączności.

Dla udowodnienia tych własności wystarczy porównać odpowiednie współrzędne wektorów zapisanych w lewej i prawej stronach równości. Udowodnij samodzielnie.

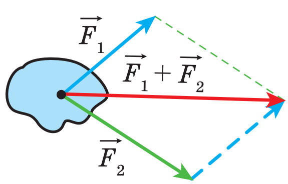
Sumę trzech i więcej wektorów można wyznaczyć w następujący sposób: na początku dodaje się pierwszy i drugi wektor, a zatem do otrzymanego wektora dodaje się trzeci wektor itd. Na przykład $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Zgodnie z własnością przemienności i łączności dodawania wektorów wynika, że przy dodawaniu większej ilości wektorów można zamieniać miejscami składniki oraz łączyć w nawiasy w jakikolwiek sposób.

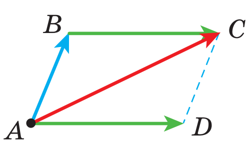
W fizyce często dodaje się wektory, które są odłożone z jednego punktu. Tak, jeżeli do ciała przyłożyć siły $\vec{F_1}$ i $\vec{F_2}$ (rys. 14.4), to równoważna tych sił jest równa sumie $\vec{F_1} + \vec{F_2}$.

Aby znaleźć sumę dwóch niekolinearnych wektorów, odłożonych od jednego punktu zręcznie zastosować **metodę równoległoboku dla dodawania wektorów**.

Przypuśćmy, że należy znaleźć sumę niekolinearnych wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ (rys. 14.5). Odłożymy wektor $\overrightarrow{BC}$, równy wektorowi $\overrightarrow{AD}$. Wtedy



Rys. 14.4



Rys. 14.5

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Ponieważ wektory $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$ są równe, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem o przekątnej AC.

Wymienione wyżej wypowiedzi pozwalają sformułować metodę równoległoboku dodawania niekolinearnych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

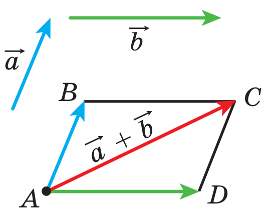
Od dowolnego punktu A odłożymy wektor $\overrightarrow{AB}$, *równy wektorowi* $\vec{a}$, *i wektor* $\overrightarrow{AD}$, *równy wektorowi* $\vec{b}$. *Następnie wykreślimy równoległobok* $ABCD$ (rys. 14.6). *Wtedy szukana suma* $\vec{a}+\vec{b}$ *jest równa wektorowi* $\overrightarrow{AC}$.

Definicja. Różnicą wektorów $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ nazywa się taki wektor $\vec{c}$, suma którego z wektorem $\vec{b}$ jest równa wektorowi $\vec{a}$.

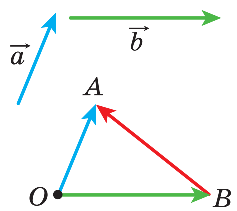
Wtedy: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Pokażemy, w jaki sposób można skonstruować wektor, równy różnicy danych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Od dowolnego punktu O odłożymy wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, odpowiednio równe wektorom $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. 14.7). Wtedy wektor $\overrightarrow{BA}$ jest równy różnicy $\vec{a}-\vec{b}$. Innymi słowy, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$. A więc, według definicji różnicy dwóch wektorów otrzymamy, że $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, czyli $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$.



Rys. 14.6



Rys. 14.7

Wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ przedstawione na rysunku 14.7 są niekolinearne. A zatem, podany wyżej algorytm można zastosować i dla znalezienia różnicy kolinearnych wektorów. Na rysunku 14.8 wektor $\overrightarrow{BA}$ jest równy różnicy kolinearnych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rys. 14.8

A więc, ***dla dowolnych trzech punktów O, A i B spełnia się równość*** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, która wyraża **regułę znalezienia różnicy dwóch wektorów**, odłożonych z jednego punktu.

Twierdzenie 14.2. ***Jeżeli współrzędne wektorów*** $\vec{a}$ ***i*** $\vec{b}$ **odpowiednio są równe** $(a_1; a_2)$ **i** $(b_1; b_2)$***, to współrzędne wektora*** $\vec{a} - \vec{b}$ ***są równe*** $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$**.**

Dane twierdzenie udowodnij samodzielnie.

Z twierdzenia 14.2 wynika, że dla dowolnych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istnieje dokładnie jeden wektor $\vec{c}$ taki, że $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

Definicja. Dwa niezerowe wektory nazywają się przeciwnymi, jeżeli mają równe moduły, lecz przeciwne zwroty.

Jeżeli wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są przeciwnymi, wtedy uważa się, że wektor $\vec{a}$ jest **przeciwny** do wektora $\vec{b}$, zaś wektor $\vec{b}$ jest przeciwny do wektora $\vec{a}$.

Wektor, przeciwny do wektora zerowego uważa się wektorem zerowym.

Zapis pojęcia, że wektor przeciwny do wektora $\vec{a}$, będzie następujący: $-\vec{a}$.

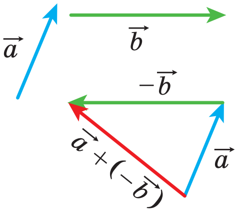
Z definicji wynika, że wektor $\overrightarrow{AB}$ jest przeciwny do wektora $\overrightarrow{BA}$. Wtedy, ***dla dowolnych punktów A i B spełnia się równość*** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Z metody trójkąta wynika, że

$$\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}.$$

A z tej równości wynika, że gdy współrzędne wektora $\vec{a}$ są $(a_1; a_2)$, wtedy współrzędne wektora $-\vec{a}$ będą $(-a_1; -a_2)$.

Twierdzenie 14.3. ***Dla dowolnych wektorów*** $\vec{a}$ ***i*** $\vec{b}$ **spełnia się równość** $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$**.**



Rys. 14.9

Dla udowodnienia wystarczy porównać odpowiedne współrzędne wektorów, podane w lewej i prawej części równości. Udowodnij samodzielnie.

Twierdzenie 14.3 umożliwia sprowadzić odejmowanie wektorów do ich dodawania: *aby od wektora* $\vec{a}$ *odjąć wektor* $\vec{b}$, *należy do wektora* $\vec{a}$ *dodać wektor* $-\vec{b}$ (rys. 14.9).

Zadanie. W równoległoboku $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O (rys. 14.10). Wyraź wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{CB}$ przez wektory $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

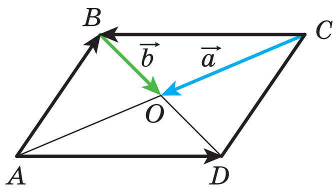
Rozwiązanie. Ponieważ punkt O – jest środkiem odcinków AC i BD, to $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Otrzymamy:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BO} = -\vec{a} - \vec{b}$;

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$;

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$. ◀



Rys. 14.10

?

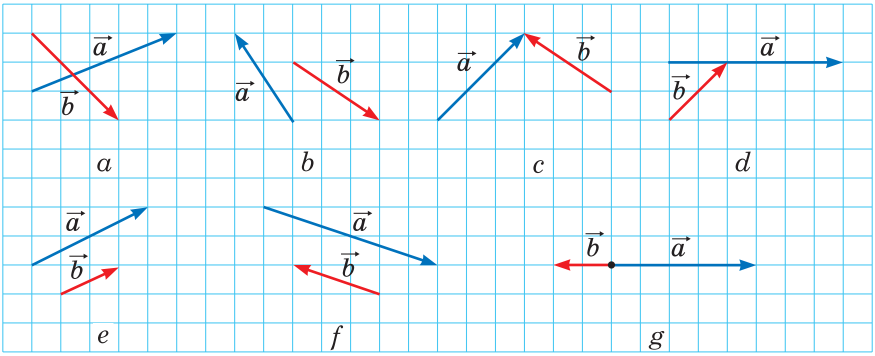
1. Opisz metodę trójkąta dla obliczenia sumy wektorów.
2. Która równość spełnia metodę trójkąta dla obliczenia sumy wektorów?
3. Jakie będą współrzędne wektora, który równy sumie dwóch danych wektorów?
4. Podaj równości, które wyrażają własności dodawania wektorów.
5. Opisz metodę równoległoboku dla obliczenia sumy dwóch wektorów.
6. Jaki wektor nazywa się różnicą wektorów?
7. Jaka równość wyraża regułę znalezienia różnicy dwóch wektorów odłożonych od jednego punktu?
8. Jakie będą współrzędne wektora, który jest równy różnicy dwóch danych wektorów?
9. Jakie wektory nazywają się przeciwnymi?
10. W jaki sposób oznacza się wektor, który jest przeciwny do wektora $\vec{a}$?
11. W jaki sposób odejmowanie wektorów można sprowadzić do dodawania wektorów?

ZADANIA PRAKTYCZNE

14.1.° Korzystając z metody trójkąta, wykreśl sumę wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, przedstawionych na rysunku 14.11.

14.2.° Korzystając z metody równoległoboku skonstruuj sumę wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, przedstawionych na rysunku 14.11, *a–d*.

14.3.° Dla wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, przedstawionych na rysunku 14.11, wykonaj konstrukcję wektora $\vec{a} - \vec{b}$.



Rys. 14.11

14.4.° Wykreśl trójkąt ABC. Odłóż od punktu A wektor przeciwny do wektora:

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC}$.

14.5.° Wykreśl równoległobok $ABCD$. Zbuduj wektory $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

14.6.° Wykreśl trójkąt MNP. Zbuduj wektory $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

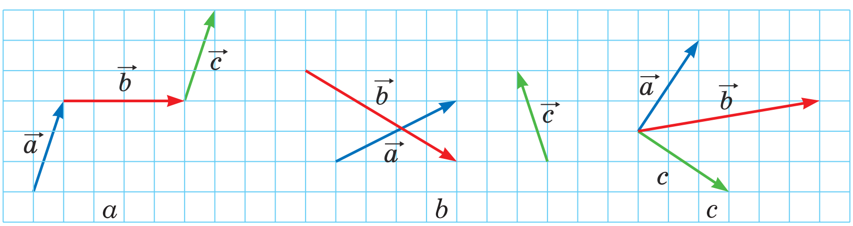
14.7.° Wykreśl równoległobok $ABCD$. Zbuduj wektory $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

14.8.° Wykreśl trójkąt ABC. Zbuduj wektory $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

14.9.° Wybierz cztery punkty M, N, P i Q. Zbuduj wektor $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}$.

14.10.° Dla wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, przedstawionych na rysunku 14.12, wykreśl wektor:

1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

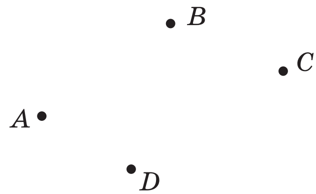


Rys. 14.12

14.11.• Od jednego punktu odłóż trzy wektory, o równych modułach w taki sposób, że suma dwóch z nich jest równa trzeciemu wektorowi.

14.12.• Od danego punktu odłóż trzy wektory o równych modułach w taki sposób, aby ich suma była równa wektorowi zerowemu.

14.13.• Dla punktów A, B, C i D, przedstawionych na rysunku 14.13 wykreśl taki wektor $\vec{x}$, aby $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}=\vec{0}$.



Rys. 14.13

14.14.• Wykreśl trójkąt ABC. Dobierz taki punkt X, aby:

1) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}$;
2) $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA}$.

ĆWICZENIA

14.15.° Dany jest trójkąt ABC. Wyraź wektor $\overrightarrow{BC}$ przez wektory:
1) $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

14.16.° Dany jest równoległobok $ABCD$. Wyraź wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{DA}$ przez wektory $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$ i $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.

14.17.° Dany jest równoległobok $ABCD$. Wyraź wektory $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{BC}$ przez wektory $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$ i $\overrightarrow{DA}=\vec{b}$.

14.18.° Dany jest równoległobok $ABCD$. Wyraź wektory $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{DA}$ przez wektory $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ i $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$.

14.19.° Udowodnij, że dla dowolnych punktów A, B, C i D spełnia się równość:
1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$;
3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

14.20.° Udowodnij, że dla dowolnych punktów A, B, C i D spełnia się równość:
1) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$.

14.21.° W trójkącie ABC środkami boków BA i BC odpowiednio są punkty M i N. Wyraź wektory $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{NB}$ przez wektory $\overrightarrow{BM}=\vec{m}$ i $\overrightarrow{BN}=\vec{n}$.

14.22.° W równoległoboku $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O. Udowodnij, że $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

14.23.° Dany jest czworokąt $ABCD$ i pewny punkt O. Wiadomo, że $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

14.24.° Dany jest czworokąt $ABCD$ i pewny punkt O. Wiadomo, że $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

14.25.° Dane są wektory $\vec{a}\,(4; -5)$ i $\vec{b}\,(-1; 7)$. Oblicz:

1) współrzędne wektorów $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-\vec{b}$;

2) $|\vec{a}+\vec{b}|$ i $|\vec{a}-\vec{b}|$.

14.26.° Dane są punkty $A\,(1; -3)$, $B\,(4; 5)$, $C\,(-2; -1)$ i $D\,(3; 0)$. Oblicz:

1) współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$;

2) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$ i $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$.

14.27.° Suma wektorów $\vec{a}\,(5; -3)$ i $\vec{b}\,(x; 4)$ dorównuje wektorowi $\vec{c}\,(2; y)$. Oblicz x i y.

14.28.° Suma wektorów $\vec{a}\,(x; -1)$ i $\vec{b}\,(2; y)$ dorównuje wektorowi $\vec{c}\,(-3; 4)$. Oblicz x i y.

14.29.° Dany jest wektor $\overrightarrow{MN}\,(3; -5)$. Oblicz współrzędne wektora $\overrightarrow{NM}$.

14.30.° Ramię trójkąta równoramiennego ABC jest równe 3 cm. Oblicz $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$.

14.31.° W równoramiennym trójkącie prostokątnym ABC ($\angle C = 90°$) przyprostokątna jest równa 4 cm. Oblicz $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}|$.

14.32.° Dane są punkty $N\,(3; -5)$ i $F\,(4; 1)$. Oblicz $|\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OF}|$ i $|\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{ON}|$, gdzie O – dowolny punkt.

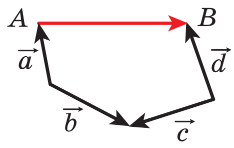
14.33.° Pływaczka z prędkością $\sqrt{3}$ m/s przepływa rzekę prostopadle do równoległych brzegów. Prędkość prądu rzeki jest równa 1 m/s. Pod jakim kątem do kierunku prostopadłego do brzegów przemieszcza się pływaczka?

14.34.• Udowodnij, że dla dowolnych n punktów A_1, A_2, ..., A_n spełnia się równość

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

14.35.• Udowodnij, że dla dowolnych punktów A, B, C, D i E spełnia się równość

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}.$$



Rys. 14.14

14.36.• Wyraź wektor $\overrightarrow{AB}$ przez wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ (rys. 14.14).

14.37.• W równoległoboku $ABCD$ punkty M, N i K – są środkami odpowiednich boków AB, BC i CD. Podaj wektory $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AD}$ przez wektory $\overrightarrow{MN} = \vec{m}$ i $\overrightarrow{KN} = \vec{n}$.

14.38.• W równoległoboku $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O. Podaj wektory $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AD}$ przez wektory $\overrightarrow{DO} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$.

14.39.• Czworokąt $ABCD$ jest równoległobok. Udowodnij, że:
1) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$;
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

14.40.• W trójkącie ABC poprowadzono środkową BM. Udowodnij, że:
1) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$;
2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

14.41.• Udowodnij, że dla wektorów niekolinearnych $\vec{a}$ i $\vec{b}$ spełnia się nierówność $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

14.42.• Udowodnij, że dla wektorów niekolinearnych $\vec{a}$ i $\vec{b}$ spełnia się nierówność $|\vec{a} - \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

14.43.•• Dla wektorów niezerowych $\vec{a}$ i $\vec{b}$ spełnia się równość $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Udowodnij, że $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

14.44.•• Dla wektorów niezerowych $\vec{a}$ i $\vec{b}$ spełnia się równość $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Udowodnij, że $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

14.45.•• Czy suma trzech wektorów może być wektorem zerowym, jeżeli moduły tych wektorów są równe:
1) 5; 2; 3;
2) 4; 6; 3;
3) 8; 9; 18?

14.46.•• W czworokącie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O. Wiedząc, że $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

14.47.•• Wektory $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{EF}$ są kolejno prostopadłe, przy czym $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$. Udowodnij, że istnieje trójkąt, boki którego są równe odcinkom MN, PQ i EF.

14.48.•• Udowodnij, że dla równoległoboku $ABCD$ i dowolnego punktu x spełnia się równość $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$.

14.49.•• Dane są dwa punkty A i B. Znajdź miejsce geometryczne punktów X, dla których $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

14.50.•• Dane są dwa punkty A i B. Znajdź miejsce geometryczne punktów X, dla których $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{BX}\right|$.

14.51.•• Z punktu A wypłynął wioślarz na łódce ze stałą własną prędkością, kierując nos łódki prostopadle do przeciwległego brzegu o szerokości 240 m. Po 4 min łódka przebiła do przeciwległego brzegu w punkcie C oddalonego od punktu A o 48 km przez działanie prądu rzeki. Oblicz prędkość prądu oraz prędkość łódki względem brzegów rzeki.

14.52.•• Płynąc z punktu A motorówka ma przepłynąć rzekę o szerokości 300 m ze stałą własną prędkością. Po 100 s motorówka przebiła do punktu B położonego na przeciwległym brzegu. Prosta AB prostopadła do równoległych brzegów rzeki. Prędkość rzeki jest równa $\sqrt{3}$ m/s. Pod jakim kątem do brzegów rzeki był skierowany nos motorówki?

14.53.* W trójkącie ABC środkowa przecina się w punkcie M. Udowodnij, że $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

14.54.* Na bokach trójkąta ABC zewnętrznie zbudowano równoległoboki AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Prostę A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 parami są nierównoległe. Udowodnij, że istnieje trójkąt, boki którego są równe odcinkom A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

14.55. W trójkąt ABC wpisano równoległobok $CDMK$ ze wspólnym kątem C, a wierzchołki D, M i K odpowiednio leżą na bokach AC, AB i BC w trójkącie. Oblicz boki równoległoboku $CDMK$, jeżeli jego obwód są równy 20 cm, $AC = 12$ cm, $BC = 9$ cm.

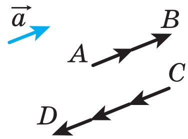
14.56. Trzy okręgi o promieniach 1 cm, 2 cm i 3 cm, są kolejno styczne zewnętrznie. Oblicz promień okręgu, który przechodzi przez środki danych okręgów.

14.57. Udowodnij, że pole foremnego sześciokąta wpisanego w okrąg jest równe $\frac{3}{4}$ pola foremnego sześciokąta opisanego na tym okręgu.

15. Mnożenie wektora przez liczbę

Przyjmiemy, że dany jest niezerowy wektor $\vec{a}$. Wektor $\overrightarrow{AB}$, przedstawiony na rysunku 5.1 jest równy wektorowi $\vec{a}+\vec{a}$, i wektor $\overrightarrow{CD}$, równy wektorowi $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$. Oczywiście, że

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\vec{a}\right| \text{ i } \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{a},$$
$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = 3\left|\vec{a}\right| \text{ i } \overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \vec{a}.$$



Rys. 15.1

Wektor $\overrightarrow{AB}$ oznacza się $2\vec{a}$ i uważa się, że otrzymano go w wyniku **mnożenia wektora $\vec{a}$ przez** 2. Analogicznie, uważa się, że wektor $\overrightarrow{CD}$ otrzymany w wyniku mnożenia wektora $\vec{a}$ przez liczbę –3 i zapisuje się: $\overrightarrow{CD} = -3\vec{a}$.

Przykład ten wskazuje, w jaki sposób wprowadzić pojęcie “mnożenie wektora przez liczbę”.

Definicja. Iloczyn niezerowego wektora $\vec{a}$ przez liczbę k, różnej od zera, nazywa się taki wektor $\vec{b}$, gdzie:

1) $\left|\vec{b}\right| = |k|\left|\vec{a}\right|$;

2) jeżeli $k > 0$, to $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; jeżeli $k < 0$, to $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

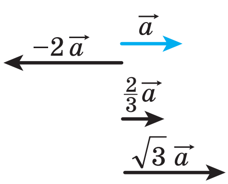
Zapisuje się: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Jeżeli $\vec{a} = \vec{0}$ lub $k = 0$, to przyjmuje się, że $k\vec{a} = \vec{0}$.

Na rysunku 15.2 są przedstawione wektory $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\,\vec{a}$.

Z definicji wypływa, że

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a},$$
$$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$



Rys. 15.2

A także, z definicji wypływa, że ***gdy $\vec{b} = k\vec{a}$, to wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są kolinearne***.

A wtedy, gdy wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są kolinearne, czy można podać wektor $\vec{b}$ jako iloczyn $k\vec{a}$? Odpowiedź otrzymamy z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 15.1. ***Jeżeli wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są kolinearne oraz $\vec{a} \neq \vec{0}$, to istnieje taka liczba k, że $\vec{b} = k\vec{a}$.***

Dowód. ⍟ Jeżeli $\vec{b} = \vec{0}$, to przy $k = 0$ otrzymamy, że $\vec{b} = k\vec{a}$.

Jeżeli $\vec{b} \neq \vec{0}$, to $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, lub $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1) Przyjmiemy, że $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Rozpatrzymy wektor $\vec{c} = k\vec{a}$, gdzie $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. 1) Ponieważ $k > 0$, to $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, a więc, $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Oprócz tego, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. W ten sposób, wektory $\vec{b}$ i $\vec{c}$ zgodnie skierowane oraz ich module są równe. Stąd $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Przyjmiemy, że $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Rozpatrzymy wektor $\vec{c} = k\vec{a}$, gdzie $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Dla tego przypadku wykonaj udowodnienie samodzielnie. ◀

Twierdzenie 15.2. ***Jeżeli wektor*** $\vec{a}$ ***ma współrzędne*** $(a_1; a_2)$***, to wektor*** $k\vec{a}$ ***ma współrzędne*** $(ka_1; ka_2)$***.***

Dowód. Jeżeli $\vec{a} = \vec{0}$ lub $k = 0$, to twierdzenie oczywiste.

Przypuśćmy, że $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $k \neq 0$. Rozpatrzymy wektor $\vec{b}\,(ka_1; ka_2)$. Pokażemy, że $\vec{b} = k\vec{a}$.

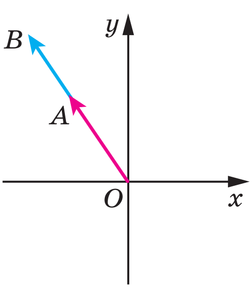
Mamy: $|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k||\vec{a}|$.

Od początku współrzędnych odłożymy wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, odpowiednio równe wektorom $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ponieważ prosta OA przechodzi przez początek współrzędnych, to równanie jej ma postać $ax + by = 0$.

Punkt $A\,(a_1; a_2)$ należy do tej prostej. Wtedy

$$aa_1 + ba_2 = 0. \text{ Stąd } a\,(ka_1) + b\,(ka_2) = 0.$$

A więc, punkt $B\,(ka_1; ka_2)$ także należy do prostej OA, dlatego wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ są kolinearne, to znaczy $\vec{a} \parallel \vec{b}$.



Rys. 15.3

Dla $k > 0$ liczby a_1 i ka_1 są jednakowego znaku (lub obie są równe zeru). Taką samą własność posiadają liczby a_2 i ka_2. A więc, dla $k > 0$ punkty A i B leżą w jednej ćwiartce współrzędnych (lub na jednej półprostej współrzędnych) dlatego wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ są zgodnie skierowane (rys. 15.3), a to oznacza, że $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Dla $k < 0$ wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ mają zwrot przeciwny, to oznacza, że $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

A więc, otrzymamy, że $\vec{b} = k\vec{a}$. ◀

Wniosek 1. ***Wektory*** $\vec{a}\,(a_1;\, a_2)$ ***i*** $\vec{b}\,(ka_1;\, ka_2)$ ***są kolinearne.***

Wniosek 2. ***Jeżeli wektory*** $\vec{a}\,(a_1;\, a_2)$ ***i*** $\vec{b}\,(b_1;\, b_2)$ ***są kolinearne, przy czym*** $\vec{a} \neq \vec{0}$***, to istnieje taka liczba*** k***, że*** $b_1 = ka_1$ ***i*** $b_2 = ka_2$***.***

Za pomocą twierdzenia 15.2 można udowodnić następujące własności mnożenia wektora przez liczbę.

Dla dowolnej liczby k, m i dowolnych wektorów $\vec{a}$***,*** $\vec{b}$ ***spełnia się równość:***

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ – własność łączności;
2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ – pierwsza własność rozdzielności;
3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ – druga własność rozdzielności.

Dla udowodnienia tych własności wystarczy porównać odpowiednie współrzędne wektorów podanych w lewej i w prawej stronach równości. Udowodnij samodzielnie.

Te własności umożliwiają przekształcać wyrazy, które zawierają sumę wektorów, różnicę wektorów i iloczyn wektora i liczby, analogicznie do tego jak przekształcaliśmy wyrażenia algebraiczne. Na przykład $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.

Zadanie 1. Udowodnij, że, jeżeli $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, to punkty O, A i B leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie. Z warunku wynika, że wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ są kolinearne. Oprócz tego, te wektory są odłożone od punktu O. A więc, punkty O, A i B leżą na jednej prostej. ◀

Zadanie 2. Punkt M – to środek odcinka AB i X – dowolny punkt (rys. 15.4). Udowodnij, że $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

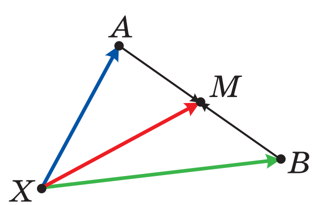
Rozwiązanie. Zastosowując metodę trójkątów, otrzymamy:

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AM};$$
$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BM}.$$

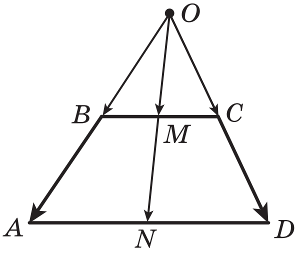
Te równości dodamy stronami:

$$2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

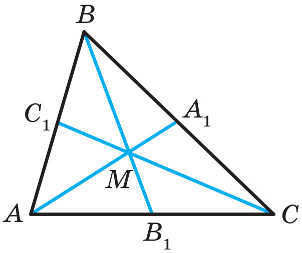
Ponieważ wektory $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{BM}$ przeciwne, to $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$. Mamy: $2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$. Stąd $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$. ◀



Rys. 15.4



Rys. 15.5



Rys. 15.6

Zadanie 3. Udowodnij, że środki podstaw trapezu oraz punkt przecięcia przedłużeń jego ramion leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że punkty M i N – środki podstaw BC i AD trapezu $ABCD$, O – punkt przecięcia prostych AB i CD (rys. 15.5).

Zastosowując zadanie pod kluczem 2, zapiszemy: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$.

Ponieważ $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OD}$, to $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OD}$, gdzie k i k_1 – pewne liczby.

Ponieważ $\Delta BOC \backsim \Delta AOD$, to $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$. A więc, $k = k_1$.

Mamy: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}) = k \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = k\overrightarrow{ON}$.

Zgodnie z zadaniem pod kluczem 1, wynika, że punkty O, M i N leżą na jednej prostej. ◄

Zadanie 4. Udowodnij, że, gdy punkt M – punkt przecięcia środkowych trójkąta ABC, to $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Rozwiązanie[1]. ***Przypuśćmy, że odcinki*** AA_1, BB_1 i CC_1 – środkowe trójkąta ABC (rys. 15.6). Otrzymamy:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC});$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC});$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}).$$

[1] We wskazówce do zadania 14.35 wprowadzono inny sposób rozwiązania zadania 4.

Stąd $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$.

Według własności środkowych trójkąta wynika, że $AM=\frac{2}{3}AA_1$. Wtedy $\overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$. Analogicznie $\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Stąd $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}=-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)=\vec{0}$. ◄

?

1. Podaj definicję iloczynu wektora niezerowego $\vec{a}$ i liczby k, różnego od zera?
2. Ile wynosi iloczyn $k\vec{a}$, jeżeli $k=0$ lub $\vec{a}=\vec{0}$?
3. Co można powiedzieć o wektorach niezerowych $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli $\vec{b}=k\vec{a}$, gdzie k – pewna liczba?
4. Wiadomo, że $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są wektory kolinearne, przy czym $\vec{a}\neq\vec{0}$. W jaki sposób można wyrazić wektor $\vec{b}$ przez wektor $\vec{a}$?
5. Wektor $\vec{a}$ ma współrzędne $(a_1;\ a_2)$. Jakie są współrzędne wektora $k\vec{a}$?
6. Co można powiedzieć o wektorach, współrzędne których są równe $(a_1;\ a_2)$ i $(ka_1;\ ka_2)$?
7. Jaką zależność zawierają między sobą współrzędne kolinearnych wektorów $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ i $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$?
8. Zapisz łączną i przydziałową właściwości mnożenia wektora na liczbę.

ZADANIA PRAKTYCZNE

15.1.° Dane są wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (rys. 15.7). Skonstruuj wektory:

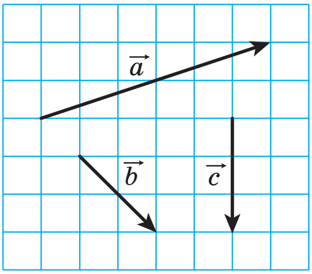
1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{c}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{6}\vec{a}$.

15.2.° Dane są wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (rys. 15.7). Skonstruuj wektory:

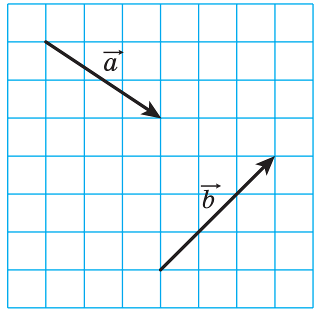
1) $\frac{1}{2}\vec{a}$; 2) $-2\vec{b}$; 3) $-\frac{2}{3}\vec{c}$.

15.3.° Dane są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. 15.8). Skonstruuj wektory:

1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.



Rys. 15.7



Rys. 15.8

15.4.° Skonstruuj dwa wektory niekolinearne $\vec{x}$ i $\vec{y}$. Wybierz dowolny punkt O. Od punktu O odłóż wektory:

1) $3\vec{x}+\vec{y}$; 2) $\vec{x}+2\vec{y}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{x}+3\vec{y}$; 4) $-2\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

15.5.• Wybierz trzy punkty A, B i C takie, że:

1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

15.6.• Wykreśl trójkąt ABC. Oznaczymy punkt M jaki jest środkiem boku AC.

1) Od punktu M odłóż wektor, równy wektorowi $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

2) Od punktu B odłóż wektor, równy wektorowi $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

15.7.• Wykreśl trapez $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Oznacz punktem M – środek ramienia AB. Od punktu M odłóż wektor, równy wektorowi $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

15.8.• Wykreśl trójkąt ABC. Skonstruuj wektor, równy wektorowi $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, w taki sposób, aby jego początkiem leżał na ramieniu AB, a koniec – na boku BC.

ĆWICZENIA

15.9.° Oblicz moduły wektora $3\vec{m}$ i $-\frac{1}{2}\vec{m}$, jeżeli $|\vec{m}|=4$.

15.10.° Który pośród następujących wektorów, $3\vec{a}$ lub $-\frac{1}{3}\vec{a}$, jest zgodnie skierowany z wektorem $\vec{a}$, jeżeli $\vec{a} \neq \vec{0}$?

15.11.° Określ czy są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, zgodnie skierowane lub przeciwne, jeżeli:

1) $\vec{b} = 2\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{b} = \sqrt{2}\,\vec{a}$.

Znajdź stosunek $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

15.12.° Wyraź wektor $\vec{p}$ z równości:

1) $\vec{q} = 3\vec{p}$; 2) $\overrightarrow{AC} = -2\vec{p}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{p} = \vec{q}$; 4) $2\vec{p} = 3\vec{q}$.

15.13.° W równoległoboku $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O. Wyraź:

1) wektor $\overrightarrow{AO}$ przez wektor $\overrightarrow{AC}$;
2) wektor $\overrightarrow{BD}$ przez wektor $\overrightarrow{BO}$;
3) wektor $\overrightarrow{CO}$ przez wektor $\overrightarrow{AC}$.

15.14.° W równoległoboku $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Wyraź wektor $\overrightarrow{AO}$ przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

15.15.° W równoległoboku $ABCD$ na przekątnej AC oznaczono punkt M w taki sposób, że $AM : MC = 1 : 3$. Wyraź wektor $\overrightarrow{MC}$ przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, gdzie $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

15.16.° W równoległoboku $ABCD$ punkt M – środek boku BC, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Wyraź wektory $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{MD}$ przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

15.17.° W trójkącie ABC punkty M i N – środki odpowiednich boków AB i BC. Wyraź:

1) wektor $\overrightarrow{MN}$ przez wektor $\overrightarrow{CA}$;
2) wektor $\overrightarrow{AC}$ przez wektor $\overrightarrow{MN}$.

15.18.° Na odcinku AB o długości 18 cm wybrano punkt C, w taki sposób, że $BC = 6$ cm. Wyraź:

1) wektor $\overrightarrow{AB}$ przez wektor $\overrightarrow{AC}$;
2) wektor $\overrightarrow{BC}$ przez wektor $\overrightarrow{AB}$;
3) wektor $\overrightarrow{AC}$ przez wektor $\overrightarrow{BC}$.

15.19.° Dany jest wektor $\vec{a}\,(-4;\ 2)$. Określ współrzędne oraz moduły wektorów $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$ i $\frac{3}{2}\vec{a}$.

15.20.° Dany jest wektor $\vec{b}\,(-6;\ 12)$. Określ współrzędne oraz moduły wektorów $2\vec{b}$, $-\frac{1}{6}\vec{b}$ i $\frac{2}{3}\vec{b}$.

15.21.° Dany jest wektor $\vec{a}\,(3;\ -2)$. Które z wektorów $\vec{b}\,(-3;\ -2)$, $\vec{c}\,(-6;\ 4)$, $\vec{d}\left(\frac{3}{2};\ -1\right)$, $\vec{e}\left(-1;\ -\frac{2}{3}\right)$ i $\vec{f}\left(-3\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right)$ są kolinearne z wektorem $\vec{a}$?

15.22.° Dane są wektory $\vec{a}\,(3;\ -3)$ i $\vec{b}\,(-16;\ 8)$. Określ współrzędne wymienionych wektorów:

1) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$.

15.23.° Dane są wektory $\vec{m}\,(-2;\ 4)$ i $\vec{n}\,(3;\ -1)$. Określ współrzędne wymienionych wektorów:

1) $3\vec{m}+2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m}+2\vec{n}$; 3) $\vec{m}-3\vec{n}$.

15.24.• W trójkącie ABC na bokach AB i AC obrano odpowiednio punkty M i N w taki sposób, że $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Wyraź wektor $\overrightarrow{MN}$ przez wektor $\overrightarrow{CB}$.

15.25.• Punkty O, A i B leżą na jednej prostej. Udowodnij, że istnieje taka liczba k, że $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$.

15.26.• W równoległoboku $ABCD$ na bokach AB i BC wybrano odpowiednio punkty M i N w taki sposób, że $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Wyraź wektor $\overrightarrow{NM}$ przez wektory $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

15.27.• W równoległoboku $ABCD$ na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F w taki sposób, że $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Wyraź wektor $\overrightarrow{EF}$ przez wektory $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

15.28.• Udowodnij, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są kolinearne, jeżeli $A\,(1;\ 1)$, $B\,(3;\ -2)$, $C\,(-1;\ 3)$, $D\,(5;\ -6)$.

15.29.• Pośród wektorów $\vec{a}\,(1;\ -2)$, $\vec{b}\,(-3;\ -6)$, $\vec{c}\,(-4;\ 8)$ i $\vec{d}\,(-1;\ -2)$ wskaż parę wektorów kolinearnych.

15.30.• Dane są wektory $\vec{m}\,(4;\ -6)$, $\vec{n}\left(-1;\ \frac{3}{2}\right)$ i $\vec{k}\left(3;\ -\frac{9}{2}\right)$. Podaj wektory, które są parami zgodnie skierowane i w przeciwnych kierunkach.

15.31.$^{\bullet}$ Znajdź wartość x, dla których wektory $\vec{a}\,(1;\,x)$ i $\vec{b}\left(\frac{x}{4};\,4\right)$ są kolinearne.

15.32.$^{\bullet}$ Przy jakiej wartości y wektory $\vec{a}\,(2;\,3)$ i $\vec{b}\,(-1;\,y)$ są kolinearne?

15.33.$^{\bullet}$ Dany jest wektor $\vec{b}\,(-3;\,1)$. Oblicz współrzędne wektora kolinearnego z wektorem $\vec{b}$, moduł jakiego jest o dwa razy większy od modułu wektora $\vec{b}$. Ile rozwiązań posiada zadanie?

15.34.$^{\bullet}$ Oblicz współrzędne wektora $\vec{m}$, który ma zwrot przeciwny do wektora $\vec{n}\,(5;\,-12)$, jeżeli $|\vec{m}| = 39$.

15.35.$^{\bullet}$ Oblicz współrzędne wektora $\vec{a}$, zgodnie skierowanego z wektorem $\vec{b}\,(-9;\,12)$, jeżeli $|\vec{a}| = 5$.

15.36.$^{\bullet}$ Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A\,(-1;\,2)$, $B\,(3;\,5)$, $C\,(14;\,6)$ i $D\,(2;\,-3)$ jest trapezem.

15.37.$^{\bullet}$ Udowodnij, że punkt $A\,(-1;\,3)$, $B\,(4;\,-7)$ i $D\,(-2;\,5)$ leżą na jednej prostej.

15.38.$^{\bullet}$ Dane są wektory $\vec{a}\,(1;\,-4)$, $\vec{b}\,(0;\,3)$ i $\vec{c}\,(2;\,-17)$. Znajdź takie liczby x i y, że $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

15.39.$^{\bullet\bullet}$ W równoległoboku $ABCD$ przekątne przecinają się w punktach O. Na boku BC wybrano punkt K taki, że $BK : KC = 2 : 3$. Wyraź wektor $\overrightarrow{OK}$ przez wektory $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

15.40.$^{\bullet\bullet}$ Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie O, tak, że $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Wyraź wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{DA}$ przez wektory $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

15.41.$^{\bullet\bullet}$ W trójkącie ABC na bokach AC i BC obrano odpowiednio punkty K i F tak, że $AK : KB = 1 : 2$ i $BF : FC = 2 : 3$. Wyraź wektory $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{KC}$ i $\overrightarrow{KF}$ przez wektory $\overrightarrow{BK} = \vec{m}$ i $\overrightarrow{CF} = \vec{n}$.

15.42.$^{\bullet\bullet}$ W trójkącie ABC na bokach AC i BC obrano odpowiednio punkty M i N tak, że $AM : MC = 1 : 3$ i $BN : NC = 4 : 3$. Wyraź wektory $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{NM}$ przez wektory $\overrightarrow{BN} = \vec{k}$ i $\overrightarrow{AM} = \vec{p}$.

15.43.$^{\bullet\bullet}$ W trójkącie ABC środkowe przecinają się w punkcie M. Wyraź wektor $\overrightarrow{BM}$ przez wektory $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$.

15.44.$^{\bullet\bullet}$ Za pomocą wektorów udowodnij twierdzenie o linii środkowej trójkąta.

15.45.•• Punkty M_1 i M_2 – środki odpowiednich odcinków A_1B_1 i A_2B. Udowodnij, że $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}\right)$.

15.46.•• Zastosowując zadanie 15.45 udowodnij twierdzenie o linii środkowej trapezu.

15.47.•• W czworokącie $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środki przekątnych AC i BD. Zastosowując zadanie 15.45, udowodnij, że $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$.

15.48.•• Punkty M i N są odpowiednimi środkami przekątnych AC i BD w trapezie $ABCD$ $BC \parallel AD$. Zastosowując zadanie 15.45, udowodnij, że $MN \parallel AD$.

15.49.•• W trójkącie ABC na boku AC obrano punkt M tak, że $AM : MC = 2 : 3$. Udowodnij, że $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

15.50.•• W trójkącie ABC na boku BC obrano punkt D tak, że $BD : DC = 1 : 2$. Udowodnij, że $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

15.51.* Udowodnij, że istnieje trójkąt długości boków jakiego są równe długościom środkowych trójkąta.

15.52.* Punkty M_1 i M_2 – to środki odpowiednich odcinków A_1B_1 i A_2B_2. Udowodnij, że środki odcinków A_1A_2, M_1M_2 i B_1B_2 leżą na jednej prostej.

15.53.* W równoległoboku $ABCD$ na boku AD i na przekątnej AC wybrano odpowiednio punkty M i N tak, że $AM = \frac{1}{5}AD$ i $AN = \frac{1}{6}AC$. Udowodnij, że punkty M, N i B leżą na jednej prostej.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

15.54. Mniejsza podstawa oraz ramię w trapezie równoramiennym są równe 12 cm. Oblicz linię środkową trapezu, jeżeli jeden z jego kątów wynosi 60°?

15.55. Przekątne równoległoboku są równe 6 cm i 16 cm, zaś jeden jego bok – 7 cm. Oblicz kąt zawarty między przekątnymi równoległoboku oraz jego pole.

15.56. Oblicz długość cięciwy okręgu o promieniu R, końce której dzielą ten okrąg na łuki, długości których mają się do siebie, jak 2 : 1.

SPOSTRZEGAJCIE, RYSUJCIE, KONSTRUUJCIE, FANTAZJUJCIE

15.57. Dany jest kwadrat o wymiarach 101×101 kwadracików. Kwadraciki pomalowano jak deska do szach w czarny i biały kolor, w taki sposób, że środkowy kwadracik okazał się czarny. Dla każdej pary różnokolorowych kwadracików odłożono wektor, początek którego pokrywa się ze środkiem czarnego kwadracika, zaś koniec – ze środkiem białego kwadracika. Udowodnij, że suma wszystkich odłożonych wektorów jest równa wektorowi zerowemu.

ZASTOSOWANIE WEKTORÓW

Podczas zastosowania wektorów przy rozwiązywaniu zadań często używa się następujący lemat.

Lemat. ***Przypuśćmy, że M – taki punkt leżący na odcinku AB, że*** $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ (rys. 15.9)***. Wtedy dla jakiegokolwiek punktu X spełnia się równość***

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

Dowód. Wiemy, że $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AM}$.

Ponieważ $AM = \frac{m}{m+n}AB$, to $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

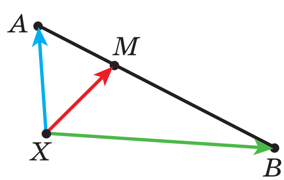
Zapiszemy: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Ponieważ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, więc mamy:

$$\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA});$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}. \blacktriangleleft$$

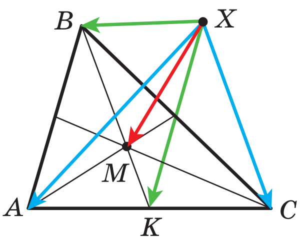


Rys. 15.9

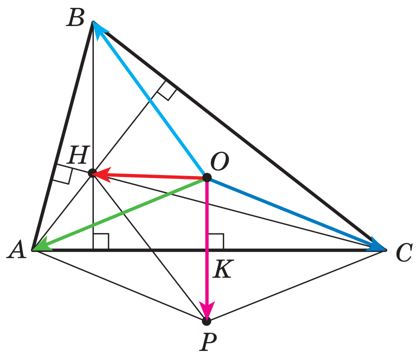
Zauważ, że ten lemat jest uogólnieniem zadania pod kluczem 2 z p. 15.

Zadanie. Przypuśćmy, że M – punkt przecięcia środkowych w trójkącie ABC i X – dowolny punkt (rys. 15.10). Udowodnij, że

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}).$$



Rys. 15.10



Rys. 15.11

Rozwiązanie. Przyjmiemy, że punkt K – środek odcinka AC. Otrzymamy: $BM : MK = 2 : 1$. Wtedy, korzystając z lematu, można zapisać:
$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$. ◄

Udowodnimy równość wektorową, która łączy cudowne[1] dwa punkty w trójkącie.

Twierdzenie. ***Jeżeli punkt H – punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC, zaś punkt O – środek opisanego okręgu na nim, to***

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (*)$$

Dowód. Dla trójkąta prostokątnego równość (*) jest widoczna.

Przypuśćmy, że trójkąt ABC nie jest prostokątnym. Z punktu O opuścimy prostopadłą OK na bok AC w trójkącie ABC (rys. 15.11). W kursie geometrii klasy 8. było udowodniono, że $BH = 2OK$.

Na półprostej OK wybierzemy punkt P taki, że $OK = KP$. Wtedy $BH = OP$. Ponieważ $BH \parallel OP$, to czworokąt $HBOP$ – jest równoległobokiem.

Zgodnie z metodą równoległoboku $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$.

Ponieważ punkt K to środek odcinka AC, to w czworokącie $AOCP$ przekątne punktem przecięcia dzielą się na połowę. A więc, ten czworokąt – to równoległobok. Stąd $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Otrzymamy: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. ◄

Zwróćmy się do równości wektorowej $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$, gdzie M – punkt przecięcia środkowych w trójkącie ABC. Ponieważ X – dowolny

[1] Materiał o cudownych punktach w trójkącie patrz w podręczniku: “Geometria klasa 8”

punkt, to równość spełnia się, gdy punkt X będzie wybrany jako punkt O – środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Otrzymamy: $3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

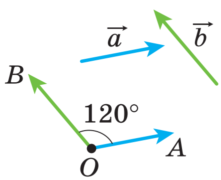
Biorąc pod uwagę równość (*), otrzymamy: $3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}$.

Równość ta oznacza, że punkty O, M i H leżą na jednej prostej, którą nazwano **prostą Eulera**. Przypominamy, że cudowną własność było udowodniono w podręczniku klasy 8., lecz w inny sposób.

16. Skalarny iloczyn wektorów

Przypuśćmy, że $\vec{a}$ i $\vec{b}$ – dwa wektory niezerowe niezgodnie skierowane (rys. 16.1). Od dowolnego punktu O odłożymy wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, które są odpowiednio równe wektorom $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Wielkość kąta AOB nazywa się **kątem zawartym między wektorami** $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oznacza się następująco: $\angle(\vec{a},\vec{b})$. Na przykład na rysunku 16.1 $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$, zaś na rysunku 16.2 $\angle(\vec{m},\vec{n})=180°$.



Rys. 16.1

Rys. 16.2

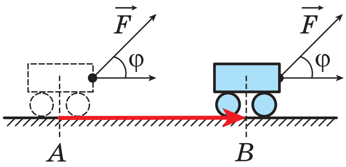
Jeżeli wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są o zwrocie zgodnie skierowanym, to uważa się, że $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$. Jeżeli chociażby jeden z wektorów $\vec{a}$ lub $\vec{b}$ zerowy, to także uważa się, że $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$.

A więc, dla jakichkolwiek wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ spełnia się równość:

$$0°\leqslant\angle(\vec{a},\vec{b})\leqslant 180°.$$

Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywają się **prostopadłymi**, gdy kąt zawarty między nimi jest równy 90°. Zapisuje się: $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Już umiecie dodawać i odejmować wektory, mnożyć wektor przez liczbę. Z fizyki już wiecie, że, gdy pod kątem do stałej siły $\vec{F}$ ciało porusza się od punktu A do punktu B (rys. 16.3), to wykonana mechaniczna praca dorównuje $|\vec{F}|\,|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, gdzie $\varphi = \angle(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.



Rys. 16.3

Powyżej podane wiadomości twierdzą, że należy podać jeszcze jedno działanie nad wektorami.

Definicja. Skalarnym iloczynem dwóch wektorów nazywa się iloczyn ich modułów i kosinusa kąta zawartego między nimi.

Skalarny iloczyn wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oznacza się: $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Otrzymamy:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Jeżeli chociażby jeden z wektorów $\vec{a}$ lub $\vec{b}$ był zerowym, to oczywiście $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Przypuśćmy, że $\vec{a} = \vec{b}$. Wtedy $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos 0° = |\vec{a}|^2$.

Skalarny iloczyn $\vec{a}\cdot\vec{a}$ nazywa się **skalarnym kwadratem** wektora $\vec{a}$ i oznacza się $\vec{a}^{\,2}$.

Otrzymaliśmy, że $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, czyli ***skalarny kwadrat wektora jest równy kwadratowi jego modułu***.

Twierdzenie 16.1. ***Skalarny iloczyn dwóch niezerowych wektorów jest równy zeru wtedy i tylko wtedy, gdy te wektory są prostopadłe.***

Dowód. Przypuśćmy, że $\vec{a}\perp\vec{b}$. Udowodnimy, że $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Mamy, że: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$. Stąd $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 90° = 0$.

Przypuśćmy teraz, że $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Udowodnimy, że $\vec{a}\perp\vec{b}$.

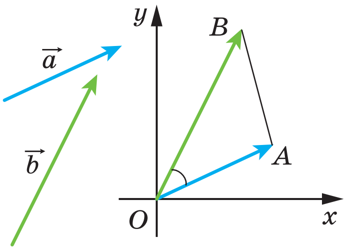
Zapiszemy: $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Ponieważ $|\vec{a}| \neq 0$ i $|\vec{b}| \neq 0$, to $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Stąd $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, to oznacza, że $\vec{a}\perp\vec{b}$. ◄

Twierdzenie 16.2. ***Skalarny iloczyn wektorów*** $\vec{a}\,(a_1;\, a_2)$ ***i*** $\vec{b}\,(b_1;\, b_2)$ ***można obliczyć według wzoru***

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

Dowód. Najpierw rozpatrzymy przypadek, gdy wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są niekolinearne.

Od początku współrzędnych odłożymy wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, odpowiednio równe wektorom $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. 16.4). Wtedy $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle AOB$.



Rys. 16.4

Zastosujemy twierdzenie kosinusów dla trójkąta AOB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB.$$

Stąd

$$OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2).$$

Ponieważ $|\vec{a}| = OA$ i $|\vec{b}| = OB$, to $OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB = \vec{a}\cdot\vec{b}$.

Oprócz tego, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. Stąd $\overrightarrow{AB}\,(b_1 - a_1;\, b_2 - a_2)$.

Otrzymamy: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2\right)$. Zastosowując wzór na obliczenie modułu wektora według jego współrzędnych, otrzymamy:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left(a_1^2 + a_2^2\right) + \left(b_1^2 + b_2^2\right) - \left(b_1 - a_1\right)^2 - \left(b_2 - a_2\right)^2\right).$$

Przekształcając wyraz znachodzący się w prawej stronie końcowej równości, otrzymamy:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Rozpatrzymy przypadek, gdy wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są kolinearne.

Jeżeli $\vec{a} = \vec{0}$ lub $\vec{b} = \vec{0}$, to widocznie, że $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Jeżeli $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$, to istnieje taka liczba k, że $\vec{b} = k\vec{a}$, czyli $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$.

Jeżeli $k > 0$, to $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Otrzymamy:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{a}) = |\vec{a}|\,|k\vec{a}|\cos 0° = |k|\,|\vec{a}|^2 = k\left(a_1^2 + a_2^2\right) =$$
$$= a_1\cdot ka_1 + a_2\cdot ka_2 = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Przypadek, gdy $k < 0$, rozpatrz samodzielnie. ◀

Wniosek. ***Kosinus kąta, zawartego między niezerowymi wektorami $\vec{a}\,(a_1;\, a_2)$ i $\vec{b}\,(b_1;\, b_2)$ można obliczyć według wzoru***

$$\boxed{\cos\angle\left(\vec{a},\, \vec{b}\right) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}} \qquad (*)$$

Dowód. ⊙ Według definicji skalarnego iloczynu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wynika, że $\cos\angle\left(\vec{a},\, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$. Korzystając z twierdzenia 16.2 i wzoru na obliczenie modułu wektora według jego współrzędnych otrzymamy wzór (*). ◀

Za pomocą twierdzenia 16.2 łatwo udowodnić następujące własności skalarnego iloczynu wektorów.

Dla jakichkolwiek wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i dowolnej liczby k spełniają się równości:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ – własność przemienności;

2) $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ – własność łączności;

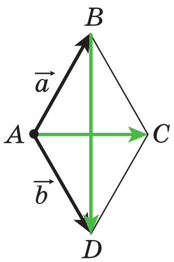
3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ – własność rozdzielności.

Aby udowodnić te własności, wystarczy wyrazić skalarny iloczyn przez współrzędne wektory, które są podane jak w lewej, tak i w prawej stronie równości oraz porównać ich. Udowodnij to samodzielnie.

Te własności wraz z własnościami dodawania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę umożliwiają przekształcać wyrażenia, zawierające skalarny iloczyn wektorów, analogicznie temu, jak przekształca się wyrażenia algebraiczne.

Na przykład, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a} + \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b} =$

$$= \vec{a}^{\,2} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^{\,2}.$$



Rys. 16.5

Zadanie 1. Za pomocą wektorów udowodnij, że przekątne rombu są prostopadłe.

Rozwiązanie. Romb *ABCD* jest podany na rysunku 16.5. Przypuśćmy, że $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Oczywiście, że $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$. Według metody równoległoboku otrzymamy: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$. Stąd

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{b}^{\,2} - \vec{a}^{\,2} = \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 = 0.$$

A więc, $AC \perp BD$. ◀

Zadanie 2. Wiadomo, że $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Oblicz $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Rozwiązanie. Ponieważ skalarny kwadrat wektora jest równy kwadratowi jego modułu, to $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b})^2$. Stąd

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\vec{b}^2} =$$

$$= \sqrt{4|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{36 + 18 + 9} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$$

Odpowiedź: $3\sqrt{7}$. ◀

Zadanie 3. W trójkącie ABC wiadomo, że $AB = 4$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$ cm, $\angle ABC = 30°$. Oblicz środkową BM.

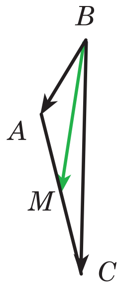
Rozwiązanie. Zastosowując zadanie pod kluczem 2 z p. 15, zapiszemy: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ (rys. 16.6). Stąd

$$\overrightarrow{BM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{BA}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\angle ABC + |\overrightarrow{BC}|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(16 + 48\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 108\right) = 49.$$



Rys. 16.6

A więc, $BM^2 = 49$; $BM = 7$ cm.

Odpowiedź: 7 cm. ◀

?

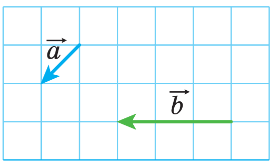
1. Podaj, w jaki sposób można skonstruować kąt, wielkość którego jest równa kątowi zawartemu między dwoma niezerowymi oraz nie zgodnie skierowanymi wektorami.
2. Ile wynosi kąt zawarty między dwoma zgodnie skierowanymi wektorami?
3. Ile wynosi kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, gdy chociażby jeden z nich byłby zerowym?
4. W jaki sposób oznacza się kąt zawarty między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$?
5. W jakich granicach rozmieszczony kąt zawarty między dowolnymi wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$?
6. Jakie wektory nazywają się prostopadłymi?
7. Co nazywa się skalarnym iloczynem dwóch wektorów?
8. Co nazywa się skalarnym kwadratem wektora?

9. Ile wynosi skalarny iloczyn wektorów?
10. Podaj warunek prostopadłości dwóch niezerowych wektorów.
11. Co wynika z równości $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, gdy $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$?
12. W jaki sposób znaleźć skalarny iloczyn wektorów, jeżeli są znane ich współrzędne?
13. Jak znaleźć kosinus kąta, zawartego między dwoma niezerowymi wektorami, jeżeli są znane ich współrzędne?
14. Podaj własności skalarnego iloczynu wektorów.

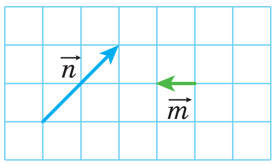
ZADANIA PRAKTYCZNE

16.1.° Skonstruuj kąt, wielkość którego jest równa kątowi zawartego między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. 16.7).

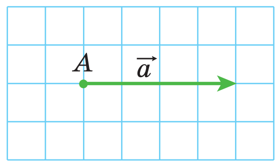
16.2.° Skonstruuj kąt, wielkość którego jest równa kątowi, zawartego między wektorami $\vec{m}$ i $\vec{n}$ (rys. 16.8).



Rys. 16.7



Rys. 16.8



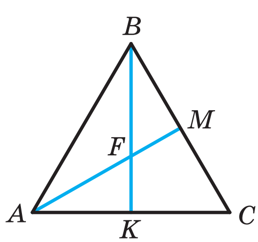
Rys. 16.9

16.3.° Na rysunku 16.9 podano wektor $\vec{a}$ (16.1. długość boku kratki jest równa 0,5 cm). Odłóż od punktu A wektor $\vec{b}$ taki, że $\left|\vec{b}\right| = 3$ cm i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Ile rozwiązań ma zadanie?

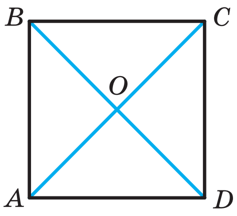
ĆWICZENIA

16.4.° Na rysunku 16.10 jest przedstawiony równoboczny trójkąt ABC, środkowe AM i BK którego przecinają się w punkcie F. Oblicz kąt zawarty między wektorami:

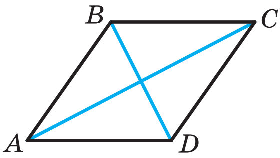
1) $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$;
2) $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AC}$;
3) $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AM}$;
4) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AM}$;
5) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BK}$;
6) $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{BK}$;
7) $\overrightarrow{CF}$ i $\overrightarrow{AB}$.



Rys. 16.10



Rys. 16.11



Rys. 16.12

16.5.° Na rysunku 16.11 przedstawiono kwadrat $ABCD$, przekątne którego przecinają się w punkcie O. Oblicz kąt między wektorami:

1) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DA}$;
2) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$;
3) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CA}$;
4) $\overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{CB}$;
5) $\overrightarrow{BO}$ i $\overrightarrow{CD}$.

16.6.° Oblicz skalarny iloczyn wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli:

1) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 5,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$;
2) $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2\sqrt{2},\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$;
3) $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 1,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$;
4) $|\vec{a}| = \frac{1}{2},\ |\vec{b}| = 6,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$;
5) $|\vec{a}| = 0{,}3,\ |\vec{b}| = 0,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 137°$.

16.7.° Oblicz skalarny iloczyn wektorów $\vec{m}$ i $\vec{n}$, jeżeli:

1) $|\vec{m}| = 7\sqrt{2},\ |\vec{n}| = 4,\ \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$;
2) $|\vec{m}| = 8,\ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150°$.

16.8.° Oblicz skalarny iloczyn wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli:

1) $\vec{a}\,(2; -1),\ \vec{b}\,(1; -3)$;
2) $\vec{a}\,(-5; 1),\ \vec{b}\,(2; 7)$;
3) $\vec{a}\,(1; -4),\ \vec{b}\,(8; 2)$.

16.9.° Oblicz skalarny iloczyn wektorów $\vec{m}$ i $\vec{n}$, jeżeli:

1) $\vec{m}\,(3; -2),\ \vec{n}\,(1; 0)$;
2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2}; -1\right),\ \vec{n}\,(6; 9)$.

16.10.° Na rysunku 16.12 przedstawiono romb $ABCD$, w którym $AB = 6$, $\angle ABC = 120°$. Oblicz skalarny iloczyn następujących wektorów:

1) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$;
2) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CB}$;
3) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$;
4) $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{DA}$;
5) $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{AC}$;
6) $\overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{DC}$;
7) $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{AD}$.

16.11.° W trójkącie ABC, wiadomo, że $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 2$. Oblicz skalarny iloczyn podanych wektorów:
1) $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{BA}$.

16.12.° Oblicz pracę siły o wielkości 6 H podczas przemieszczenia ciała na odległość 7 m, jeżeli kąt między kierunkiem siły i przemieszczeniem jest równy 60°.

16.13.° Oblicz kosinus kąta zawartego między wektorami $\vec{a}\,(1; -2)$ i $\vec{b}\,(2; -3)$.

16.14.° Jaki znak będzie miał skalarny iloczyn wektorów, jeżeli kąt zawarty między nimi jest:
1) ostry; 2) rozwarty?

16.15.° Wiadomo, że skalarny iloczyn wektorów jest:
1) liczbą dodatnią; 2) liczbą ujemną.
Podaj rodzaj kąta zawartego między wektorami.

16.16.• W równobocznym trójkącie ABC, bok którego jest równy 1, środkowe AA_1 i BB_1 przecinają się w punkcie M. Oblicz:
1) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$; 2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA_1}$.

16.17.• Punkt O – to środek foremnego sześciokąta $ABCDEF$, o boku równym 1. Oblicz:
1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{ED}$; 4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

16.18.• Przy jakiej wartości x wektory $\vec{a}\,(3; x)$ i $\vec{b}\,(1; 9)$ są prostopadłe?

16.19.• Wiadomo, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Udowodnij, że wektory $\vec{a}\,(-x; y)$ i $\vec{b}\,(y; x)$ są prostopadłe.

16.20.• Przy jakich wartościach x wektory $\vec{a}\,(2x; -3)$ i $\vec{b}\,(x; 6)$ są prostopadłe?

16.21.• Przy jakiej wartości y skalarny iloczyn wektorów $\vec{a}\,(4; y)$ i $\vec{b}\,(3; -2)$ jest równy 14?

16.22.• Przy jakich wartości x kąt zawarty między wektorami $\vec{a}\,(2; 5)$ i $\vec{b}\,(x; 4)$:
1) ostry; 2) rozwarty?

16.23.• Oblicz współrzędne wektora $\vec{b}$, kolinearnego do wektora $\vec{a}\,(3; -4)$, jeżeli $\vec{a} \cdot \vec{b} = -100$.

16.24.• Wiadomo, że wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są niekolinearne oraz $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$. Przy jakich wartościach x wektory $\vec{a} + x\vec{b}$ i $\vec{a} - x\vec{b}$ są prostopadłe?

16.25.$^{\bullet}$ Wektory $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-\vec{b}$ są prostopadłe. Udowodnij, że $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

16.26.$^{\bullet}$ Wiadomo, że $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=45°$.
Oblicz skalarny iloczyn $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$.

16.27.$^{\bullet}$ Oblicz skalarny iloczyn $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$, jeżeli

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ \angle(\vec{a}, \vec{b})=120°.$$

16.28.$^{\bullet}$ Wiadomo, że $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=150°$.
Oblicz $|2\vec{a}+5\vec{b}|$.

16.29.$^{\bullet}$ Wiadomo, że $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n})=60°$.
Oblicz $|2\vec{m}-3\vec{n}|$.

16.30.$^{\bullet}$ Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach A (3; –2), B (4; 0), C (2; 1) i D (1; –1) jest prostokątem.

16.31.$^{\bullet}$ Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach A (–1; 4), B (–2; 5), C (–1; 6) i D (0; 5) jest kwadratem.

16.32.$^{\bullet}$ Oblicz kosinusy kątów trójkąta, o wierzchołkach w punktach A (1; 6), B (–2; 3) i C (2; –1).

16.33.$^{\bullet}$ Oblicz kąty trójkąta o wierzchołkach w punktach A (0; 6), $B(4\sqrt{3}; 6)$ i $C(3\sqrt{3}; 3)$.

16.34.$^{\bullet}$ Udowodnij, że dla jakichkolwiek dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ spełnia się nierówność $-|\vec{a}||\vec{b}|\leqslant\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}||\vec{b}|$.

16.35.$^{\bullet}$ Określ wzajemne położenie dwóch niezerowych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$.

16.36.$^{\bullet\bullet}$ Oblicz kąt między wektorami $\vec{m}$ i $\vec{n}$, jeżeli

$$(\vec{m}+3\vec{n})\cdot(\vec{m}-\vec{n})=-11,\ |\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=3.$$

16.37.$^{\bullet\bullet}$ Oblicz kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=\frac{3}{2}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$.

16.38.$^{\bullet\bullet}$ W trójkącie ABC wiadomo, że $\angle C=90°$, $AC=1$, $BC=\sqrt{2}$. Udowodnij, że jego środkowe AK i CM są prostopadłe.

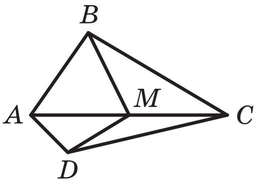
16.39.•• W czworokącie $ABCD$ przekątne AC i BD są prostopadłe i przecinają się w punkcie O. Wiadomo, że $OB = OC = 1$, $OA = 2$, $OD = 3$. Oblicz kąt zawarty między AB i DC.

16.40.•• W trójkącie ABC poprowadzono środkową BD. Wiadomo, że $\angle DBC = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Oblicz kąt ABD.

16.41.* W trójkącie ABC na bokach AB i BC na zewnątrz zbudowano kwadraty $ABMN$ i $BCKF$. Udowodnij, że środkowa BD w trójkącie ABC jest prostopadła do prostej MF.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

16.42. Punkt M – środek przekątnej AC w wypukłym czworokącie $ABCD$ (rys. 16.13). Udowodnij, że czworokąt $ABMD$ i $CBMD$ są równoważne.



Rys. 16.13

16.43. Prostopadła, opuszczona z punktu przecięcia przekątnych rombu, dzieli jego bok na odcinki, który jeden z nich jest o 7 cm dłuższy od drugiego. Oblicz obwód rombu, jeżeli jego wysokość równa 24 cm.

16.44. Na wysokości w foremnym trójkącie o boku $6\sqrt{3}$ cm jak na średnicy wykreślono okrąg. Oblicz długość łuku tego okręgu, który leży poza trójkątem.

ZADANIE TESTOWE N 4 "SPRAWDŹ SIEBIE"

1. Która z podanych wielkości jest wektorową?
A) Masa; C) prędkość;
B) objętość; D) czas.

2. Ile wynosi długość wektora, początek i koniec którego pokrywają się?
A) 1; C) 5;
B) –1; D) 0.

3. Dany jest równoległobok *ABCD*. Która z wymienionych równości jest prawdziwa?
A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; C) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}$;
B) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$; D) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

4. Wiadomo, że $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$. Która z wymienionych wypowiedzi jest prawdziwa?
A) Punkt *B* – środek odcinka *AM*;
B) punkt *A* – środek odcinka *MB*;
C) punkt *M* – środek odcinka *AB*;
D) punkt *M* – wierzchołek trójkąta równoramiennego *AMB*.

5. Dane są punkty *A* (–3; 4) i *B* (1; –8). Punkt *M* – środek odcinka *AB*. Oblicz współrzędne wektora $\overrightarrow{AM}$.
A) (2; –6); C) (–2; –6);
B) (–2; 6); D) (6; –2).

6. Przy jakiej wartości *x* wektory $\vec{a}\,(x;\,2)$ i $\vec{b}\,(-4;\,8)$ są kolinearne?
A) –1; C) 0;
B) 1; D) $\frac{1}{2}$.

7. Które z wymienionych równości jest prawdziwa?
A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$;
B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$;
C) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$;
D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$.

8. Dany jest wektor $\vec{a}\left(\sqrt{3};\,-2\right)$. Który z wektorów będzie równy wektorowi $\sqrt{3}\vec{a}$?
A) $\vec{m}\left(1;\,-2\sqrt{3}\right)$; C) $\vec{p}\,(3;\,-2)$;
B) $\vec{n}\left(-3;\,-2\sqrt{3}\right)$; D) $\vec{q}\left(3;\,-2\sqrt{3}\right)$.

9. Punkt M – środek boku BC w trójkącie ABC. Która z wymienionych równości jest prawdziwa?

A) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;

B) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

D) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

10. Oblicz skalarny iloczyn wektorów $\vec{a}\ \mathbf{(2;\ -3)}$ i $\vec{b}\ \mathbf{(3;\ -2)}$.

A) 12; C) 0;
B) –12; D) 6.

11. Przy jakiej wartości x wektory $\vec{a}\ \mathbf{(2}x\mathbf{;\ -3)}$ i $\vec{b}\ \mathbf{(1;\ 4)}$ są prostopadłe?

A) –6; C) 12;
B) 3; D) 6.

12. Oblicz kosinus kąta zawartego między wektorami $\vec{a}\ \mathbf{(5;\ -12)}$ i $\vec{b}\ \mathbf{(-3;\ 4)}$.

A) $\frac{63}{65}$; C) $-\frac{63}{65}$;

B) $\frac{65}{63}$; D) $\frac{1}{2}$.

GŁÓWNE W PARAGRAFIE 4

Wektor

Jeżeli podano, który z punktów jest początkiem odcinka, a który punkt – końcem odcinka, to taki odcinek nazywa się skierowanym odcinkiem lub wektorem.

Wektory kolinearnego

Niezerowe wektory nazywają się kolinearnymi, jeżeli leżą na prostych równoległych lub na jednej prostej. Wektor zerowy jest kolinearnym do jakiegokolwiek wektora.

Równe wektory

Niezerowe wektory nazywają się równymi, jeżeli ich wartości bezwzględne są równe i zwroty są zgodnie skierowane. Jakikolwiek dwa zerowe wektory są równe.
Równe wektory mają równe odpowiednie współrzędne. Jeżeli odpowiednie współrzędne wektorów są równe, to równe są i same wektory.

Współrzędne wektora

Jeżeli punkty $A\ (x_1; y_1)$ i $B\ (x_2; y_2)$ odpowiednio są początkiem i końcem wektora $\vec{a}$, to liczby $x_2 - x_1$ i $y_2 - y_1$ odpowiednio są równymi pierwszej i drugiej współrzędnym wektora $\vec{a}$.

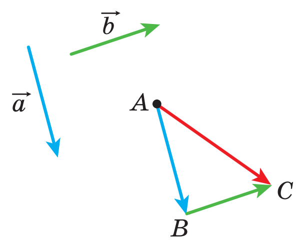
Moduł wektora

Jeżeli wektor $\vec{a}$ ma współrzędne $(a_1; a_2)$, to $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

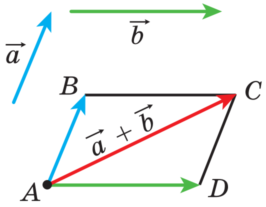
Metoda dodawania wektorów

Metoda trójkąta

Od dowolnego punktu A odłożymy wektor $\overrightarrow{AB}$, równy wektorowi $\vec{a}$, zaś od punktu B – wektor $\overrightarrow{BC}$, równy wektorowi $\vec{b}$. Wektor $\overrightarrow{AC}$ – to suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
Dla dowolnych punktów A, B i C spełnia się równość $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Metoda równoległoboku



Od dowolnego punktu A odłożymy wektor $\overrightarrow{AB}$, równy wektorowi $\vec{a}$, i wektor $\overrightarrow{AD}$, równy wektorowi $\vec{b}$. Wykreślimy równoległobok $ABCD$. Wtedy, wektor $\overrightarrow{AC}$ – to suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Współrzędne sumy wektorów

Jeżeli współrzędne wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ odpowiednio są równe $(a_1; a_2)$ i $(b_1; b_2)$, to współrzędne wektora $\vec{a}+\vec{b}$ będą równe $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Własności dodawania wektorów

Dla dowolnych wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ spełniają się równości:

1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – własność przemienności;
3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ – własność łączności.

Różnica wektorów

Różnicą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywa się wektor $\vec{c}$, suma którego wraz z wektorem $\vec{b}$ jest równa wektorowi $\vec{a}$.
Dla dowolnych trzech punktów O, A i B spełnia się równość $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

Współrzędne różnicy wektorów

Jeżeli współrzędne wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ odpowiednio są równe $(a_1; a_2)$ i $(b_1; b_2)$, to współrzędne wektora $\vec{a}-\vec{b}$ są równe $(a_1-b_1; a_2-b_2)$.

Wektory przeciwne

Dwa niezerowe wektory nazywają się przeciwnymi, jeżeli mają równe moduły, lecz przeciwne zwroty.
Dla dowolnych punktów A i B spełnia się równość $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Mnożenie wektora przez liczbę

Iloczynem wektora niezerowego $\vec{a}$ i liczby k, różnej od zera, nazywa się taki wektor $\vec{b}$, że:

1) $|\vec{b}| = |k| |\vec{a}|$;
2) jeżeli $k > 0$, to $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; jeżeli $k < 0$, to $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Jeżeli $\vec{a} = \vec{0}$ lub $k = 0$, to uważa się, że $k\vec{a} = \vec{0}$.

Jeżeli wektor $\vec{a}$ posiada współrzędne $(a_1; a_2)$, to wektor $k\vec{a}$ posiada współrzędne $(ka_1; ka_2)$.

Własności kolinearnych wektorów

Jeżeli wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są kolinearne, przy czym $\vec{a} \neq \vec{0}$, to istnieje taka liczba k, że $\vec{b} = k\vec{a}$.

Jeżeli wektory $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ i $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ są kolinearne, przy czym $\vec{a} \neq \vec{0}$, to istnieje taka liczba k, że $b_1 = ka_1$ i $b_2 = ka_2$.

Własności mnożenia wektora przez liczbę

Dla dowolnych liczb k, m oraz dla dowolnych wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ spełniają się równości:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ – własność łączności;
2) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ – pierwsza własność rozdzielności;
3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ – druga własność rozdzielności.

Skalarny iloczyn wektorów

Skalarnym iloczynem dwóch wektorów nazywa się iloczyn modułów tych wektorów i kosinusa kąta zawartego między nimi:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Skalarny iloczyn wektorów $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ i $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ można obliczyć według wzoru $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Własności skalarnego iloczynu

Dla jakichkolwiek wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i dla dowolnej liczby k spełnia się równość:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ – własność przemienności;

2) $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ – własność łączności;

3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ – własność rozdzielności.

Warunek prostopadłości dwóch wektorów

Skalarny iloczyn dwóch wektorów niezerowych jest równy zeru, wtedy i tylko wtedy, gdy wektory są prostopadłe.

Kosinus kąta zawartego między dwoma wektorami

Kosinus kąta zawartego między niezerowymi wektorami $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ i $\vec{b}\,(b_1;\,b_2)$ można obliczyć według wzoru

$$\cos\angle\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

GEOMETRYCZNE PRZEKSZTAŁCENIA §5*

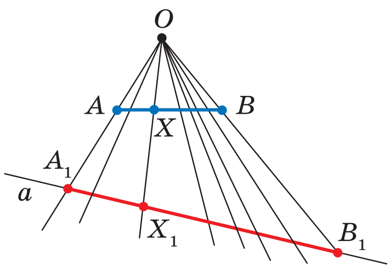
W tym paragrafie dowiecie się co to jest przekształcenie figury.

Zapoznacie się z takimi rodzajami przekształceń, jak równoległe przesunięcie, środkowa symetria, osiowa symetria, obrót, homotetia i podobieństwo.

Nauczycie się zastosowywać własności przekształceń do rozwiązywania zadań i udowodnienia twierdzeń.

17. Ruch (przesunięcie) figury. Równoległe przesunięcie

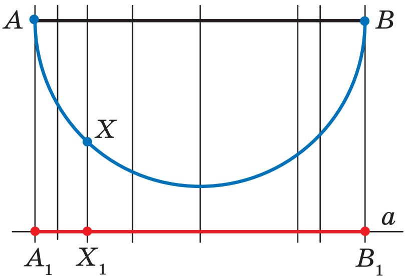
Przykład 1. Na rysunku 17.1 przedstawiono odcinek AB, prostą a i punkt O, który nie należy do prostej a ani do prostej AB. Każdemu punktowi X leżącemu na odcinku AB przyporządkowuje się punkt X_1 leżący na prostej a w taki sposób, aby punkty O, X i X_1 leżały na jednej prostej. Punkt A przyporządkowuje się punktowi A_1, punkt B – punktowi B_1. Oczywiście, wszystkie takie punkty X_1 tworzą odcinek A_1B_1.



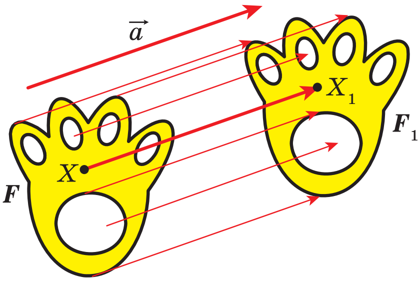
Rys. 17.1

Pokazaliśmy, w jaki sposób każdemu punktowi X leżącemu na odcinku AB przyporządkowuje się dokładnie jeden punkt X_1 leżący na odcinku A_1B_1, który otrzymaliśmy w wyniku **przekształcenia** odcinka AB.

Przykład 2. Na rysunku 17.2 przedstawiono połowę okręgu ze średnicą AB i prostą a równoległą do AB. Każdemu punktowi X leżącego na połowie okręgu przyporządkowany każdy punkt X_1 leżący na prostej a w taki sposób, że prosta XX_1 będzie prostopadła do prostej a. W takim razie, wszystkie takie punkty X_1 tworzą odcinek A_1B_1. W tym przypadku uważa się, że odcinek A_1B_1 otrzymano w wyniku przekształcenia połowy okręgu o średnicy AB.



Rys. 17.2



Rys. 17.3

Przykład 3. Przypuśćmy, że jest podane figura F i wektor $\vec{a}$ (rys. 17.3). Każdemu punktowi X należącemu do figury F przyporządkowany punkt X_1 taki, że $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. W wyniku takiego przekształcenia z figury F otrzymamy figurę F_1 (rys. 17.3). Takie przekształcenie figury F nazywa się **równoległym przesunięciem o wektor $\vec{a}$.**

Uogólnimy rozpatrywane przykłady.

Przypuśćmy, że podana figura F. Każdemu punktowi figury F przyporządkujemy według pewnej reguły pewny punkt. Wszystkie otrzymane punkty utworzą figurę F_1. Mówi się, że **figurę F_1 otrzymano w wyniku przekształcenia figury F**. W tym przypadku figurę F_1 nazywa się **obrazem** figury F, zaś figura F nazywa się **proobrazem** figury F_1.

A więc, w przykładzie 1 odcinek A_1B_1 jest obrazem odcinka AB. Punkt X_1 jest obrazem punktu X odcinek AB – to odwzorowanie odcinka A_1B_1.

Zwróćmy uwagę na to, że w przykładzie 3 figura F jest równa swojemu obrazowi F_1. Przekształcenia, podane w zadaniach 1 i 2 także nie posiadają tą własność.

A jakie własności powinno posiadać przekształcenie, aby obraz i dana figura byłe jednakowe? Okazuje się, że wystarczy tylko jednej własności, a mianowicie: przekształcenie, które zachowuje odległość między punktami, to znaczy, jeżeli A i B – dowolne punkty figury F, zaś punkty A_1 i B_1 – ich obrazy, wtedy spełnia się równość $AB = A_1B_1$.

Definicja. **Przekształcenie figury F, które zachowuje odległości między punktami nazywa się ruchem (przesunięcie) figury F.**

Jeżeli każdemu punktowi X figury F przyporządkowuje się ten sam punkt X, to takie przekształcenie nazywa się **tożsamościowym**. Przy przekształceniu tożsamościowym obraz figury F jest sama figura F. Oczywiście, że przekształcenie tożsamościowe jest ruchem.

Już przed tym zastosowywaliśmy pojęcie "przystawania figur" chociaż nie dawaliśmy konkretnej definicji.

Następujące własności wskazują, że ruch ściśle powiązany z przystawaniem figur.

Jeżeli przekształcenie jest ruchem, to:

- *obrazem prostej jest prosta;*
- *obrazem odcinka jest odcinek o tej samej długości;*
- *obrazem kąta jest kąt, równy danemu;*
- *obrazem trójkąta jest trójkąt równy danemu.*

Udowodnienie tych własności nie wchodzą do rozpatrywanego kursu geometrii.

Własności ruchu podpowie następująca definicja.

Definicja. **Dwie figury nazywają się przystające, jeżeli istnieje ruch, przy którym jedna z danych figur jest obrazem drugiej.**

Zapis $F = F_1$ oznacza, że figury F i F_1 są przystające.

Jeżeli istnieje ruch, przy którym figura F_1 jest obrazem figury F, to obowiązkowo istnieje ruch, przy którym figura F jest obrazem figury F_1. Takie ruchy nazywają się **wzajemnie odwrotnymi**.

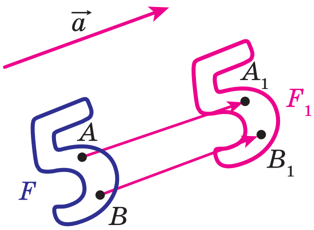
Uwaga. Poprzednio przystającymi figurami nazywaliśmy takie figury, które przy nakładaniu pokrywały się. Termin "nakładanie" jest zrozumiałym i w naszym przedstawieniu on wiąże się z realnymi ciałami. Lecz figury geometryczne nie można nałożyć w znaczeniu tego słowa. Teraz nakładanie figury F na figurę F_1 można rozpatrywać jak ruch figury F, przy którym figura F_1 jest jej obrazem.

Pojęcie "ruch" asocjuje się także z pewnym fizycznym działaniem: zmiana położenia ciała bez deformacji. A więc, z tym pojęciem jest powiązany termin w matematyce. Lecz, w geometrii przedmiotem badania jest nie proces, który odbywa się w czasie, lecz własności figury oraz jej obrazu.

To, że figury F i F_1 przedstawione na rysunku 17.3 są przystające jest oczywiście widoczne. Udowodnienie tego faktu umożliwi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 17.1 (własność przesunięcia równoległego). ***Równoległe przesunięcia jest ruchem.***

Dowód. Przypuśćmy, że $A\ (x_1;\ y_1)$ i $B\ (x_2;\ y_2)$ – dowolne punkty figury F (rys. 17.4), punkty A_1 i B_1 – ich odpowiednie obrazy przy równoległym przesunięciu względem wektora $\vec{a}\ (m;\ n)$. Udowodnimy, że $AB = A_1B_1$.



Rys. 17.4

Mamy: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$. Wektory $\overrightarrow{AA_1}$ i $\overrightarrow{BB_1}$ posiadają współrzędne $(m;\ n)$. A więc, współrzędnymi punktów A_1 i B_1 są odpowiednimi pary liczb $(x_1 + m; y_1 + n)$ i $(x_2 + m; y_2 + n)$.

Obliczymy odległość między A i B:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Obliczymy odległość między A_1 i B_1:

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 + m - x_1 - m)^2 + (y_2 + n - y_1 - n)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

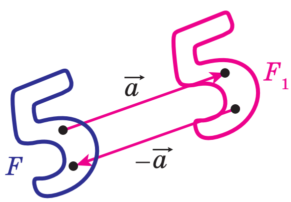
Więc, pokazaliśmy, że $AB = A_1B_1$, a to znaczy, że równoległe przesunięcie zachowuje odległości między punktami. ◀

Wniosek. ***Jeżeli figura F_1 – jest obrazem figury F przy równoległym przesunięciu, to $F_1 = F$.***

Tę własność zastosowują przy nanoszeniu rysunków na materiały, przy tapetach oraz pokryć podłogowych i inne (rys. 17.5).

Rys. 17.5

Jeżeli figura F_1 jest obrazem figury F przy równoległym przesunięciu o wektor $\vec{a}$, to figura F jest obrazem figury F_1 przy równoległym przesunięciu o wektor $-\vec{a}$ (rys. 17.6). Równoległe przesunięcie wektorów $\vec{a}$ i $-\vec{a}$ są wzajemnie odwrotnymi ruchami.



Rys. 17.6

Zadanie 1. Każdy punkt $X(x; y)$ figury F odwzorowuje się na punkt X_1 $(x + m; y + n)$, gdzie m i n – podane liczby. Udowodnij, że takie przekształcenie figury F jest równoległym przesunięcia o wektor $\vec{a}$ **$(m; n)$.**

Rozwiązanie. Rozpatrzymy wektor $\vec{a}$ **$(m; n)$.** Widzimy, że współrzędne wektora $\overrightarrow{XX_1}$ są równe $(m; n)$, to znaczy $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. A więc, wyżej wymienione przekształcenie figury F – to równoległe przesunięcie o wektor $\vec{a}$. ◀

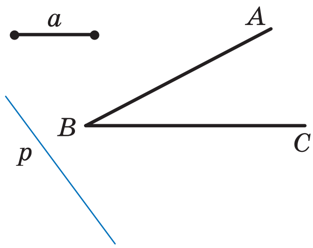
Zadanie 2. Punkt A_1 (–2; 3) jest obrazem punktu A (–1; 2) przy równoległym przenoszeniu o wektor $\vec{a}$. Oblicz współrzędne wektora $\vec{a}$ oraz współrzędne obrazu punktu B (–7; –3).

Rozwiązanie. Z warunku wynika, że $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Stąd $\vec{a}$ **(–1; 1).**

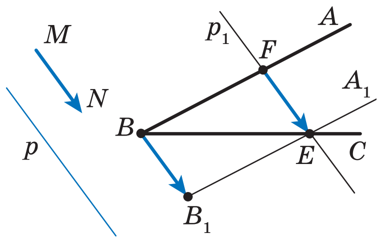
Przypuśćmy, że $B_1(x; y)$ – obraz punktu B (–7; –3). Wtedy $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, to znaczy, że $x + 7 = -1$ i $y + 3 = 1$. Stąd $x = -8$, $y = -2$.

Odpowiedź: $\vec{a}$ **(–1; 1),** B_1 (–8; –2). ◀

Zadanie 3. Dany jest kąt ABC i prosta p, która nie jest równoległa do ramion danego kąta (rys. 17.7). Skonstruuj prostą p_1, równoległą do prostej p tak, aby boki kąta odcinały na niej odcinek danej długości a.



Rys. 17.7



Rys. 17.8

Rozwiązanie. Rozpatrzymy wektor $\overrightarrow{MN}$ taki, że $MN \parallel p$ i $|\overrightarrow{MN}| = a$ (rys. 17.8). Wykreślony wektor B_1A_1, który jest obrazem BA przy równoległym przesunięciu o wektor $\overrightarrow{MN}$. Punkt przecięcia półprostych BC i B_1A_1 oznaczymy literą E. Przypuśćmy, że F jest punktem, dla którego obrazem jest punkt E przy równoległym przesunięciu, które rozpatrujemy. Wtedy $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{MN}$, to znaczy $|\overrightarrow{FE}| = a$ i $FE \parallel p$.

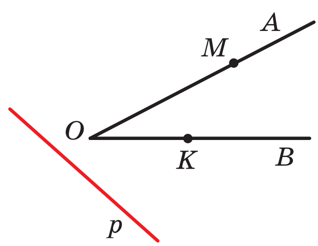
Rozpatrywane wypowiedzi umożliwiają podawanie algorytmu następującej konstrukcji:

1) znalezienie obrazu półprostej BA przy równoległym przesunięciu na wektor $\overrightarrow{MN}$;
2) określenia punktu przecięcia półprostej BC z zbudowanym obrazem;
3) przez znaleziony punkt poprowadzić prostą p_1, równoległą do prostej p. Prosta p_1 będzie szukaną proste. ◀

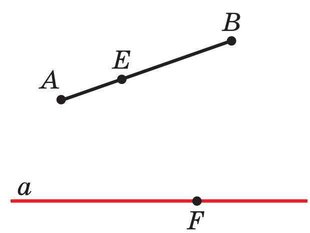
1. Podaj, co to jest przekształcenie figury.
2. Podaj przykłady przekształcenia figur.
3. Określ przekształcenie figury F, które nazywa się równoległym przesunięciem o wektor $\vec{a}$.
4. Kiedy figura F_1 nazywa się obrazem figury F, zaś figura F – służącą do odwzorowania na figurę F_1?
5. Jakie przekształcenie nazywa się ruchem?
6. Jakie przekształcone figury nazywają się tożsamościowe?
7. Sformułuj własności ruchu.
8. Jakie figury nazywają się równymi?
9. Podaj ruchy, które nazywają się wzajemnie odwrotne.
10. Określ własności równoległego przesunięcia.
11. Jakimi ruchami będzie równoległe przesunięcie o wektor $\vec{a}$ i $-\vec{a}$?

ZADANIA PRAKTYCZNE

17.1.° Na rysunku 17.9 przedstawiono kąt AOB i prostą p, która jest nie równoległa do ramiom kąta. Każdemu punktowi X ramienia OA przyporządkowuje się taki punkt X_1 na ramieniu OB, że $XX_1 \parallel p$ (punkt O odwzorowuje się w punkt O). Wykreśl obraz punktu M i odwzorowanie dla punktu K przy danym przekształceniu półprostej OA. Jaka figura będzie obrazem półprostej OA?



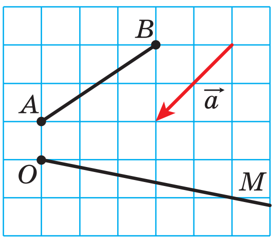
Rys. 17.9



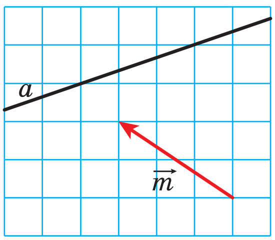
Rys. 17.10

17.2.° Na rysunku 17.10 jest przedstawiony odcinek AB i prosta a. Każdy punkt X leżący na odcinku AB odwzorowuje się na spadek prostopadłej poprowadzonej z punktu X na prostą a. Wykreśl obraz punktu E i punkt, który służył obrazem punktu F przy danym przekształceniu odcinka AB. Czy istnieją punkty leżące na prostej a i nie mogły być obrazem? Wykreśl obraz odcinka AB.

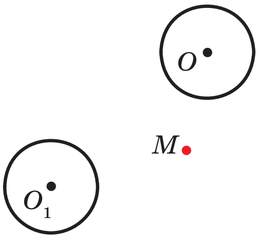
17.3.° Wykreśl obraz odcinka AB i półprostej OM przy równoległym przesunięciu o wektor $\vec{a}$ (rys. 17.11).



Rys. 17.11



Rys. 17.12



Rys. 17.13

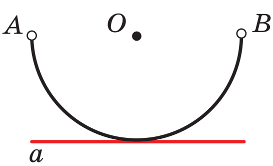
17.4.° Na rysunku 17.12 prosta a jest obrazem pewnej prostej przy równoległym przesunięciu o wektor $\vec{m}$. Wykreśl tą prostą, która służyła obrazem dla a.

17.5.° Okrąg ze środkiem O_1 jest obrazem okręgu ze środkiem O przy równoległym przesunięciu o wektor $\vec{a}$ (rys. 17.13). Odłóż wektor $\vec{a}$ od punktu M.

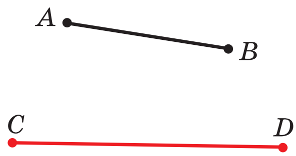
17.6.• Wykreśl obraz paraboli $y = x^2$ przy równoległym przesunięciu o wektor: 1) $\vec{a}$ **(0; 2);** 2) $\vec{b}$ **(–1; 0);** 3) $\vec{c}$ **(–1; 2).** Zapisz równanie obrazu paraboli $y = x^2$ przy danym równoległym przesunięciu.

17.7.• Wykreśl obraz okręgu $x^2 + y^2 = 4$ przy równoległym przesunięciu o wektor: 1) $\vec{a}$ **(2; 0);** 2) $\vec{b}$ **(0; –1);** 3) $\vec{c}$ **(2; –1).** Zapisz równanie obrazu okręgu $x^2 + y^2 = 4$ przy danym równoległym przesunięciu.

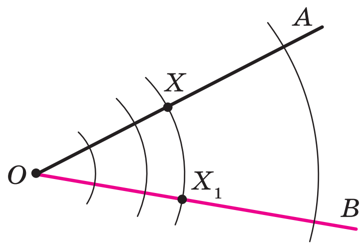
17.8.• Prosta a jest styczna do połowy okręgu średnicy AB ze środkiem w punkcie O (rys. 17.14). Podaj jakiekolwiek przekształcenie, przy którym prosta a będzie obrazem półokręgu AB z "odrzuconymi" punktami A i B.



Rys. 17.14

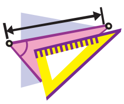


Rys. 17.15



Rys. 17.16

17.9.• Wybierz jakiekolwiek przekształcenie przy którym odcinek CD odwzorowuje się na odcinek AB (rys. 17.15).



ĆWICZENIA

17.10.° Rozpatrzymy okrąg o promieniu r i środkiem w punkcie O. Każdy punkt X odwzorowuje się w punkt X_1, który leży na promieniu OX, tak, że $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Jaka figura będzie obrazem danego okręgu? Czy przekształcenie będzie ruchem?

17.11.° Dany jest kąt AOB (rys. 17.16). Każdy punkt X leżący na OA odwzorowuje się w odpowiedni punkt X_1, który należy do ramienia OB i leży na okręgu o promieniu OX; ze środkiem w punkcie O (punkt O odwzorowuje się w punkt O). Jaka figura jest obrazem ramienia OA? Udowodnij, że wymienione wyżej przekształcenie jest ruchem.

17.12.° Dany jest kąt MON. Każdy punkt X leżący na ramieniu OM odwzorowuje się w punkt X_1 leżący na ramieniu ON, że prosta XX_1 jest prostopadła do dwusiecznej kąta MON (O odwzorowuje się odpowiednio w punkt O). Udowodnij, że opisane przekształcenie jest ruchem.

17.13.° Dana jest prosta a i odcinek AB, który nie ma z nią wspólnych punktów. Każdy punkt X leżący na odcinku AB odwzorowuje się na spodek prostopadłej, opuszczonej z punktu X na prostą a. Przy jakim wzajemnym położeniu prostej a i odcinka AB podane przekształcenie będzie ruchem?

17.14.° Punkty A_1 i B_1 nie należą do prostej AB i są obrazami odpowiednio punktów A i B przy równoległym przesunięciu prostej AB. Udowodnij, że czworokąt AA_1B_1B jest równoległobokiem.

17.15.° Punkty A_1 i B_1 są obrazami punktów A i B przy równoległym przesunięciu odcinka AB. Oblicz odcinek A_1B_1, jeżeli $AB = 5$ cm.

17.16.° Wektor $\vec{m}$ jest równoległy do prostej a. Jaka figura będzie obrazem prostej a przy równoległym przesunięciu o wektor $\vec{m}$?

17.17.° Dany jest równoległobok $ABCD$. Który z wektorów podaje równoległe przesunięcie przy którym bok AD jest obrazem boku BC?

17.18.° Czy istnieje równoległe przesunięcie trójkąta równobocznego ABC przy którym bok AB jest obrazem boku BC?

17.19.° Znajdź punkty, które są obrazem punktów A (–2; 3) i B (1; –4) przy równoległym przesunięciu o wektor $\vec{a}$ **(–1; –3).**

17.20.° Czy istnieje równoległe przesunięcie, przy którym obrazem punktu A (1; 3) jest punkt A_1 (4; 0), zaś obrazem dla punktu B (–2; 1) – punkt B_1 (1; 4)?

17.21.° Przy równoległym przesunięciu o wektor $\vec{a}$ **(2; –1)** obrazem punktu A jest punkt A_1 (–3; 4). Oblicz współrzędne punktu A.

17.22.° Punkt M_1 (x; 2) jest obrazem dla punktu M (3; y) przy równoległym przesunięciu, przy którym punkt A (2; 3) jest obrazem dla początku współrzędnych. Oblicz x i y.

17.23.• Ile istnieje równoległych przeniesień prostej a, przy której jej obrazem jest prosta a?

17.24.• Rozpatrzymy figurę, która utworzona ze wszystkich punktów, które należą do boków trójkąta. Opisz jakiekolwiek przekształcenie figury, przy którym obrazem będzie okrąg.

17.25.• Rozpatrzymy figurę, która utworzona ze wszystkich punktów, które należą do boków trójkąta. Oblicz jakiekolwiek przekształcenie tej figury, przy którym obraz jej jest figura, która utworzona ze wszystkich punktów boków rombu.

17.26.• Wiadomo, że przy przekształceniu figury F jej obrazem jest ta sama figura F. Czy można stwierdzić, że to przekształcenie jest tożsamościowym?

17.27.• Dane są punkty A (3; –2) i B (5; –4). Przy równoległym przesunięciu odcinka AB obrazem jego środka jest punkt M_1 (–4; 3). Znajdź obrazy punktów A i B przy takim równoległym przesunięciu.

17.28.• Punkty A (1; 3), B (2; 6), C (–3; 1) są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Przy równoległym przesunięciu równoległoboku $ABCD$ obrazem punktu przecięcia przekątnych jest punkt O_1 (–2 –4). Znajdź obrazy punktów A, B, C i D przy takim równoległym przesunięciu.

17.29.• Podaj równanie okręgu, który jest obrazem okręgu $x^2 + y^2 = 1$ przy równoległym przesunięciu o wektor $\vec{a}$ **(–3; 4).**

17.30.• Zapisz równanie paraboli, która jest obrazem paraboli $y = x^2$ przy równoległym przesunięciu o wektor $\vec{a}$ **(2; –3).**

17.31.•• Wykreśl trapez znając podstawy i przekątne.

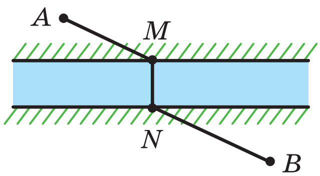
17.32.•• Wykreśl trapez znając cztery jego boki.

17.33.•• Wykreśl odcinek, równy i równoległy do danego odcinka AB tak, aby jeden z jego końców należał do danej prostej, zaś drugi – danemu okręgu.

17.34.•• Wykreśl cięciwę danego okręgu, która jest równa i równoległa do danego odcinka AB.

17.35.* Wykreśl czworokąt, w którym przeciwległe boki nie są nie równoległe parami, według czterech kątów i dwoma przeciwległymi bokami.

17.36.* W którym miejscu należy zbudować most MN przez rzekę, która dzieli dwa zaludnione punkty A i B (rys. 17.17), tak, aby droga $AMNB$ była najkrótsza (brzegi rzeki uważa się, że są równoległe, zaś most jest prostopadły do brzegów rzeki)?



Rys. 17.17

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

17.37. Przez każdy wierzchołek trójkąta poprowadzono proste, które są równoległe do przeciwległych boków. Ile jest równy obwód utworzonego trójkąta, jeżeli obwód danego trójkąta jest równy 18 cm?

17.38. Udowodnij, że czworokąt o wierzchołkach A (–3; –4), B (0; 3), C (7; 6) i D (4; –1) jest rombem. Oblicz jego pole.

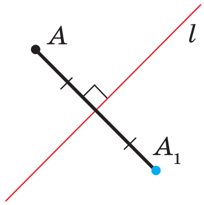
17.39. W trapez prostokątny wpisano okrąg. Punkty przecięcia dzieli większe ramię trapezu na odcinki o długości 4 cm i 25 cm. Oblicz pole trapezu.

SPOSTRZEGAJCIE, RYSUJCIE, KONSTRUUJCIE, FANTAZJUJCIE

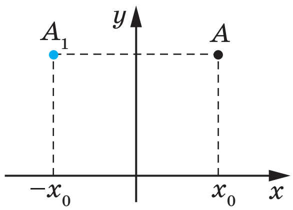
17.40. Wewnątrz foremnego sześciokąta o boku 1 m wybrano 7 punktów. Udowodnij, że pośród nich znajdą się 2 punkty odległość między jakimi jest nie większa od 1 m.

18. Osiowa symetria

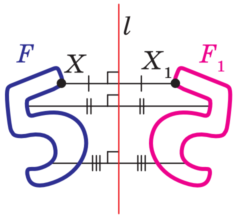
Definicja. **Punkty A i A_1 nazywają się symetrycznymi względem prostej l, jeżeli prosta l jest symetralną do odcinka AA_1** (rys. 18.1). **Jeżeli punkt A należy do prostej l, to ona nazywa się symetryczną do siebie względem prostej l.**



Rys. 18.1



Rys. 18.2



Rys. 18.3

Na przykład, punkty A i A_1, które mają jednakowe rzędne, zaś odcięte – to liczby przeciwne, są symetryczne względem osi rzędnych (rys. 18.2).

Rozpatrzymy figurę F i prostą l. Każdy punkt X figury F odwzorowuje się w symetryczny punkt X_1 względem prostej l. Zawdzięczając takiemu przekształceniu figury F otrzymamy figurę F_1 (rys. 18.3). Takie przekształcenie figury F nazywa się **symetrią osiową względem prostej l**. Prosta l nazywa się **osią symetrii**. Uważa się, że figury F i F_1 **są symetryczne względem prostej** l.

Twierdzenie 18.1 (własność symetrii osiowej). ***Symetria osiowa jest ruchem.***

Dowód. ⊙ Wybierzemy układ współrzędny w raki sposób, aby oś symetrii pokryła się z osią rzędnych. Niech $A\ (x_1; y_1)$ i $B\ (x_2; y_2)$ – dowolne punkty figury F. Wtedy punkty $A_1\ (-x_1; y_1)$ i $B_1\ (-x_2; y_2)$ – ich odpowiednie obrazy przy osiowej symetrii względem osi rzędnych. Mamy:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Otrzymaliśmy, że $AB = A_1B_1$, a to oznacza, że symetria osiowa zachowuje odległość między punktami. A więc, symetria osiowa jest ruchem. ◄

Wniosek. ***Jeżeli figury F i F_1 są symetryczne względem prostej to $F = F_1$.***

Definicja. **Figura nazywa się symetryczną względem prostej l, jeżeli dla każdego punktu danej figury istnieje punkt symetryczny do niego względem prostej l, również należy do tej figury.**

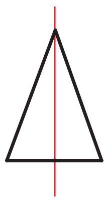
Prosta l nazywa się **osią symetrii figury**. Mówi się, że **figura posiada oś symetrii**.

Podamy przykłady figur, które posiadają oś symetrii.

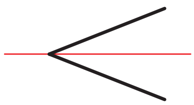
Na rysunku 18.4 przedstawiony trójkąt równoramienny. Prosta, która zawiera jego wysokość opuszczoną na podstawę, jest osią symetrii trójkąta.

Dowolny kąt ma oś symetrii – to prosta, która zawiera jego dwusieczną (rys. 18.5).

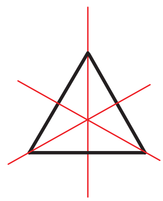
Trójkąt równoboczny posiada trzy osie symetrii (rys. 18.6).



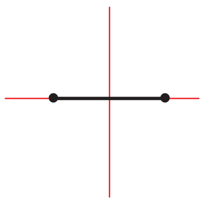
Rys. 18.4



Rys. 18.5



Rys. 18.6



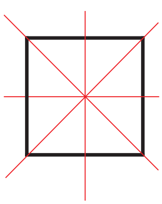
Rys. 18.7

Odcinek posiada dwie osie symetrii: jest to jego symetralna oraz prosta, która zawiera ten odcinek (rys. 18.7).

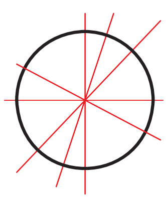
Kwadrat posiada cztery osi symetrii (rys. 18.8).

Istnieją figury, które posiadają nieskończoną ilość symetrii, na przykład okrąg. Jakakolwiek prosta, która przechodzi przez środek okręgu jest jego osią symetrii (rys. 18.9).

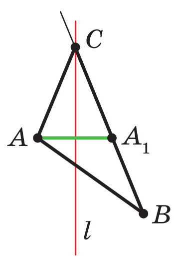
Nieskończoną ilość osi symetrii posiada i prosta: jest to sama prosta oraz jakakolwiek prosta prostopadła do niej, jest jej osią symetrii.



Rys. 18.8



Rys. 18.9



Rys. 18.10

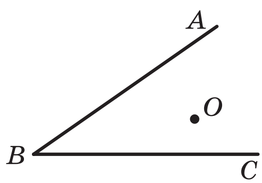
Z a d a n i e 1. Wykreśl nie równoramienny trójkąt ABC. Poprowadź prostą l, która zawiera dwusieczną kąta C. Następnie zetrzyj rysunek, pozostawiając tylko punkty A i B oraz prostą l. Odnów trójkąt ABC.

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ prosta l jest osią symetrii kąta ACB, to punkt A_1 – jest obrazem punktu A przy symetrii względem prostej l –

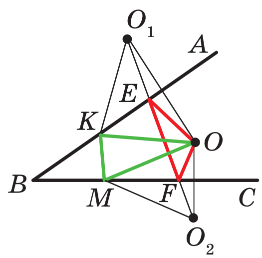
należy do półprostej CB. Wtedy przecięciem prostych l i BA_1 jest wierzchołek C szukanego trójkąta ABC (rys. 18.10).

Te rozwiązania wskazują w jaki sposób zbudować szukany trójkąt, a mianowicie: budujemy punkt A_1, symetryczny z punktem A względem prostej l. Znajdujemy wierzchołek C jako punkt przecięcia prostych l i BA_1. ◀

Zadanie 2. Punkt O należy do kąta ostrego ABC (rys. 18.11). Na ramionach BA i BC kąta wybierzemy takie punkty E i F, aby obwód trójkąta OEF był najmniejszy.



Rys. 18.11



Rys. 18.12

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że punkty O_1 i O_2 – obrazy punktu O przy symetrii względem prostych BA i BC (rys. 18.12), zaś prosta O_1O_2 przecina ramiona BA i BC odpowiednio w punktach E i F. Udowodnimy, że punkty E i F – szukane.

Zwróć uwagę, że odcinki EO_1 i EO są symetryczne względem prostej BA. A więc, $EO_1 = EO$. Analogicznie $FO = FO_2$. Wtedy obwód trójkąta OEF jest równy odcinku O_1O_2.

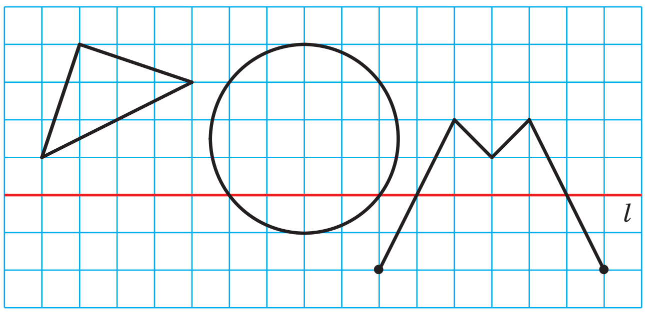
Pokażemy, że zbudowanie trójkąta, który ma najmniejszy obwód jest możliwe. Rozpatrzymy trójkąt KOM, gdzie K i M – dowolne punkty odpowiednich półprostych BA i BC, przy czym punkt K nie pokrywa się z punktem E lub punkt M nie pokrywa się z punktem F. Wiadomo, że $KO = KO_1$ i $MO = MO_2$. Wtedy obwód trójkąta KOM jest równy sumie $O_1K + KM + MO_2$. A więc $\boldsymbol{O_1K + KM + MO_2 \geqslant O_1O_2}$. ◀

?

1. Jakie punkty nazywają się symetryczne względem prostej l? Jak nazywa się prosta l?
2. Jakie figury nazywają się symetryczne względem prostej l?
3. Podaj własność symetrii osiowej.
4. Jaką własność posiadają figury, symetryczne względem prostej?
5. O jakiej figurze mówi się, że ma oś symetrii?
6. Podaj przykłady figur, jakie mają oś symetrii.

ZADANIA PRAKTYCZNE

18.1.° Zbuduj obrazy figur przedstawionych na rysunku 18.13 za pomocą symetrii względem prostej l.

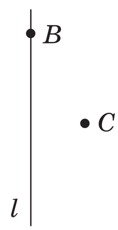


Rys. 18.13

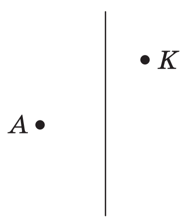
18.2.° Wykreśl trójkąt. Zbuduj trójkąt symetryczny do danego względem prostej, która zawiera jedną z linii środkowej.

18.3.° Punkty A i B są symetryczne względem l (rys. 18.14). Wykreśl tą prostą l.

Rys. 18.14



Rys. 18.15



Rys. 18.16

Rys. 18.17

18.4.• Wykreśl przecinające się proste a i a_1. Zbuduj prostą, względem której prosta a_1 będzie symetryczną do prostej a. Ile rozwiązań posiada zadanie?

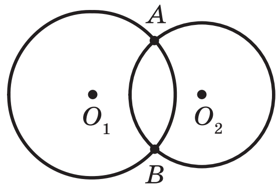
18.5.• Wykreśl równoległe proste a i a_1. Zbuduj prostą, względem której prosta a_1 będzie symetryczną do prostej a.

18.6.• Wykreśl romb $ABCD$ według jego wierzchołków B i C oraz prostej l, która zawiera jego przekątną BD (rys. 18.15).

18.7.• Wykreśl trójkąt równoramienny ABC znając wierzchołek A i punkt K, który należy do boku BC oraz prostą, która zawiera wysokość, poprowadzonej do podstawy AB (rys. 18.16).

18.8.• Popatrz się na rysunek 18.17 przez szklaną probówkę napełnioną wodą. Dlaczego niektóre litery w drugim słowie okazały się przewróconymi, a na pierwszej – nie?

18.9.•• Okręgi ze środkami O_1 i O_2 mają dwa wspólne punkty (rys. 18.18). Za pomocą tylko cyrkla zbuduj okręgi symetryczne do danych względem prostej AB.



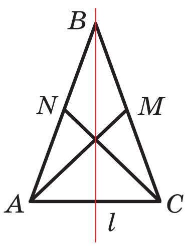
Rys. 18.18

ĆWICZENIA

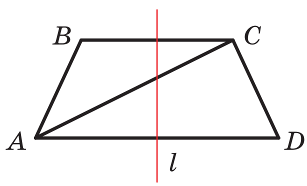
18.10.° Prosta l przechodzi przez środek odcinka AB. Czy obowiązkowo punkty A i B są symetryczne względem prostej l?

18.11.° Udowodnij, że prosta, która zawiera środkową trójkąta równoramiennego poprowadzoną do podstawy, jest jego osią symetrii.

18.12.° Trójkąt równoramienny ABC jest przedstawiony na rysunku 18.19 oraz prosta l, która zawiera wysokość trójkąta, poprowadzoną do podstawy AC. Odcinki AM i CN – środkowe trójkąta. Podaj obrazy punktów A i B środkowej CN oraz boku AC przy symetrii względem l.



Rys. 18.19



Rys. 18.20

18.13.° Udowodnij, że prosta przechodząca przez środki podstaw równoramiennego trapezu jest jego osią symetrii.

18.14.° Na rysunku 18.20 przedstawiono trapez równoramienny $ABCD$, prostą l, która przechodzi przez środki jego podstawy. Wskaż obrazy punktów B i D, przekątną AC oraz podstawy BC przy symetrii względem prostej l.

18.15.° Udowodnij, że proste, które zawierają przekątne rombu, są jego osiami symetrii.

18.16.° Udowodnij, że proste, przechodzące przez środki przeciwległych boków prostokąta, są jego osiami symetrii.

18.17.° Punkty A_1 i B_1 są obrazami odpowiednich punktów A i B przy symetrii osiowej. Wiadomo, że $AB = 5$ cm. Oblicz odcinek A_1B_1.

18.18.° Udowodnij, że prosta zawierająca dwusieczną kąta jest jego osią symetrii.

18.19.° Podaj współrzędne punktów, symetrycznych do punktów A (–2; 1) i B (0; –4) względem osi współrzędnych.

18.20.° Punkty A (x; 3) i B (–2; y) są symetryczne względem:
1) osi odciętych;
2) osi rzędnych.
Oblicz x i y.

18.21.• Obrazem prostej a przy symetrii względem prostej l jest sama prosta a. Jakie jest wzajemne położenie prostych a i l?

18.22.• Udowodnij, że trójkąt, który ma oś symetrii, będzie równoramiennym.

18.23.• Udowodnij, że trójkąt, który ma dwie osie symetrii, jest równoboczny. Czy trójkąt musi mieć dokładnie dwie osie symetrii?

18.24.• Udowodnij, że, gdy równoległobok ma dokładnie dwie osie symetrii, to on jest prostokątem lub rombem.

18.25.• Udowodnij, że, gdy czworokąt ma cztery osie symetrii, to on jest kwadratem.

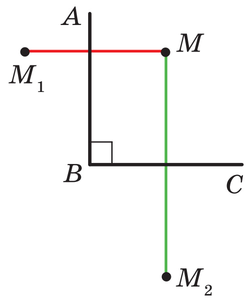
18.26.• Okręgi ze środkami O_1 i O_2 przecinają się w dwóch punktach A i B. Udowodnij, że punkty A i B są symetryczne względem prostej O_1O_2.

18.27.• Punkt M należy do kąta prostego ABC (rys. 18.21). Punkty M_1 i M_2 – są obrazami punktu M podczas symetrii względem odpowiednich prostych BA i BC. Udowodnij, że punkty M_1, B i M_2 leżą na jednej prostej.

18.28.• Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do punktów A (–2; 0) i B (3; –1) względem prostej, która zawiera dwusieczne: 1) pierwszej i trzeciej ćwiartce współrzędnych; 2) drugiej i czwartej ćwiartce współrzędnych.

18.29.• Punkty A (x; –1) i B (y; 2) symetryczne względem prostej, która zawiera dwusieczne pierwszej i trzeciej ćwiartce współrzędnych. Oblicz x i y.

18.30.•• Punkty A i B leżą w różnych półpłaszczyznach względem prostej a. Na prostej a wyznacz taki punkt X, aby prosta a zawierała dwusieczną kąta AXB.



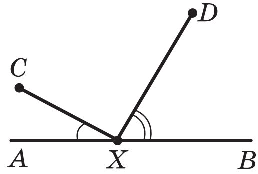
Rys. 18.21

18.31.•• Punkty A i B leżą w jednej półpłaszczyźnie względem prostej a. Wyznacz na prostej a taki punkt X, aby półprosta XA i XB tworzyły z nią dokładnie równe kąty.

18.32.•• Punkty A i B leżą w jednej półpłaszczyźnie względem a. Wyznacz na prostej a taki punkt X, aby suma $AX + XB$ była najmniejszą.

18.33.* Wykreśl trójkąt ABC według dwóch boków AB i AC ($AB < AC$) i różnicą kątów B i C.

18.34.* Punkty C i D leżą w jednej półpłaszczyźnie względem prostej AB (rys. 18.22). Na prostej AB określ taki punkt X, aby $\angle AXC = \frac{1}{2}\angle DXB$.



Rys. 18.22

18.35.* Udowodnij, że pole czworokąta wypukłego $ABCD$ nie przewyższa $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

18.36.* Dany jest trójkąt ABC. Znajdź punkt taki, że symetryczny obraz jakiego względem jakiegokolwiek boku trójkąta leży na okręgu opisanego na tym trójkącie.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

18.37. Obwód równoległoboku $ABCD$ wynosi 48 cm, $AD = 7$ cm. Jaki bok równoległoboku przecina dwusieczna kąta B? Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna dzieli bok równoległoboku.

18.38. Dwa trójkąty mają po dwa równe boki, zaś suma kątów zawartymi między odpowiednio równymi bokami tych trójkątów jest równa 180°. Udowodnij, że dwa trójkąty są równoważne.

18.39. Dane są punkty A (5; 2), B (–7; 1) i C (1; –5), oraz odcinek AM – środkowa trójkąta ABC. Ułóż równanie prostej AM.

PIERWSZA OGÓLNOUKRAIŃSKA OLIMPIADA MŁODYCH MATEMATYKÓW

Spodziewamy się, że zadanie 18.36 podobało się wam i odczuwacie radość sukcesu, gdy rozwiązaliście je. Zadanie to warte uwagi dlatego, że w 1961 r. ono było zaproponowane uczestnikom pierwszej Ogólnoukraińskiej olimpiady młodych matematyków.

W ogóle, matematyczne olimpiady w Ukrainie mają dawną tradycję. Pierwsza miejska olimpiada młodych matematyków odbyła się w 1935 r.

w Kijowie. Od tego czasu minęło ponad 80 lat i za ten czas olimpiady matematyczne stały dla wielu utalentowanej młodzieży pierwszym krokiem do naukowej twórczości. Teraz takie nazwiska, jak Pogoriełow O.W., Krejn S.G., Krasnosielskij M.O., Drinfeld W.G. są znane całemu naukowemu światu. W różnych latach oni byli zwyciężcami olimpiad matematycznych w Kijowie.

Chcemy z zadowoleniem zaznaczyć, że i w teraźniejszych czasach olimpiady matematyczne w Kijowie są popularne. Dziesięć tysięcy uczniów naszego państwa na różnych etapach biorą udział w tych matematycznych zawodach. Do organizacji i przeprowadzenia olimpiad są zatrudnieni najlepsi uczeni, metodyści, nauczyciele. Zawdzięczając ich entuzjazmu i profesjonalizmu drużyna Ukrainy godnie prezentuje nasze państwo na międzynarodowych olimpiadach matematycznych.

Radzimy wam, drodzy dzieci, uczestniczyć w olimpiadach matematycznych. Niżej zapisane są pewne zadania pierwszej ogólnoukraińskiej olimpiady młodych matematyków. Wyprobuj swoje siły.

1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC dotyka się do jego boków w punktach K, L, M. Przyjmiemy, że punkty O_1, O_2, O_3 są środkami okręgów zewnętrznie wpisanych w ten samy trójkąt. Udowodnij, że trójkąty KLM i $O_1O_2O_3$ są podobne.

2. Wewnątrz prostokąta o polu równym 4 m^2, pomieszczono 7 prostokątów, przy czym pole każdego z nich jest równe 1 m^2. Udowodnij, że chociażby dwa prostokąty mają wspólną część, pole której jest nie mniejsze niż $\frac{1}{7}$ m^2.

3. Niech boki czworokąta odpowiednio są równe a, b, c, d, a pole jego dorównuje S. Udowodnij, że $S \leqslant \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

Oleksij Wasylowicz Pogoriełow (1919 – 2002)

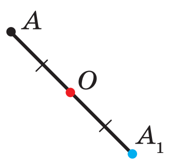
Selim Grygorowicz Krejn (1917 – 1999)

Mark Oleksandrowich Krasnosielskij (1920 – 1997)

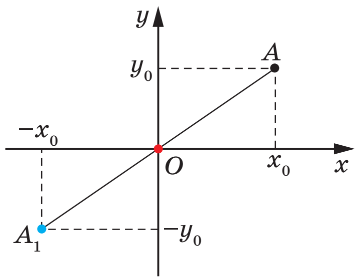
Wołodymyr Gerszonowicz Drinfeld (1954 r. u.)

19. Symetria środkowa. Obrót

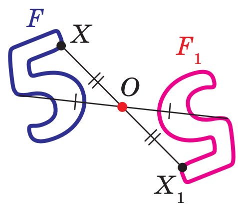
Definicja. **Punkty A i A_1 nazywają się symetrycznymi względem punktu O, jeżeli punkt O jest środkiem odcinka AA_1** (rys. 19.1). **Punkt O nazywa się symetrycznym względem siebie.**



Rys. 19.1



Rys. 19.2



Rys. 19.3

Na przykład, punkty A i A_1, dla których i odcięte i rzędne – to liczby przeciwne symetryczne względem początku współrzędnych (rys. 19.2).

Rozpatrzymy figurę F i punkt O. Każdemu punktowi X figury F przyporządkowuje się symetryczny do niego punkt X_1 względem punktu O. Podczas takiego przekształcenia figury F otrzymamy figurę F_1 (rys. 19.3). Takie przekształcenie figury F nazywa się **symetrią środkową względem punktu** O. Punkt O nazywa się **środkiem symetrii**. Często mówi się, że figury F i F_1 **są symetryczne względem punktu** O.

Twierdzenie 19.1 (własność środkowej symetrii). ***Symetria środkowa jest ruchem.***

Dowód. ⊙ Wybierzemy układ współrzędny w taki sposób, aby środek symetrii pokrywał się z początkiem układu współrzędnych. Niech punkty $A\ (x_1; y_1)$ i $B\ (x_2; y_2)$ – dowolne punkty figury F. Punkty $A_1\ (-x_1; -y_1)$ i $B_1\ (-x_2; -y_2)$ – odpowiednie ich obrazy przy symetrii środkowej względem początku współrzędnych. Mamy:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = AB.$$

Otrzymaliśmy, że $AB = A_1B_1$, to znaczy, że symetria środkowa zachowuje odległości między punktami. A więc, symetria środkowa jest ruchem. ◄

Wniosek. ***Jeżeli figury F i F_1 są symetryczne względem punktu, to $F = F_1$.***

Definicja. Figura nazywa się symetryczną względem punktu O, jeżeli dla każdego punktu tej figury istnieje punkt symetryczny do niego względem punktu O i także należy do tej figury.

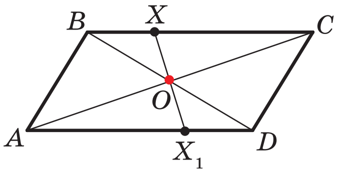
Rys. 19.4

Punkt O nazywa się **środkiem symetrii figury**. Uważa się, że **figura posiada środek symetrii**.

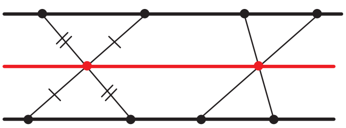
Podamy przykłady figur, które posiadają środek symetrii.

Środkiem symetrii odcinka jest jego środek (rys. 19.4).

Przecięcie przekątnych równoległoboku jest jego środek symetrii (rys. 19.5).



Rys. 19.5



Rys. 19.6

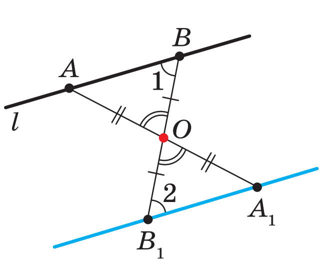
Istnieją figury, które mają nieskończoną ilość środków symetrii. Na przykład, każdy punkt prostej jest jej osią symetrii.

Figura, składająca się z dwóch równoległych prostych posiada nieskończoną ilość środków symetrii. Jakikolwiek punkt prostej równo oddalony od dwóch danych jest środkiem symetrii rozpatrywanej figury (rys. 19.6).

Zadanie 1. Udowodnij, że obrazem danej prostej l przy symetrii względem punktu O, która nie należy do prostej l, jest prosta równoległa do danej.

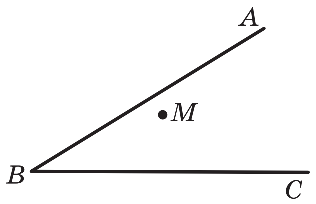
Rozwiązanie. Ponieważ symetria osiowa – to ruch, wtedy obrazem prostej l będzie prosta. Dla konstrukcji prostej wystarczy znaleźć dwa jakiekolwiek jej punkty.

Na prostej l wybierzemy dwa dowolne punkty A i B (rys. 19.7). Niech punkty A_1 i B_1 – będą ich obrazami względem symetrii środkowej względem punktu O. Wtedy prosta A_1B_1 – obraz prostej l.

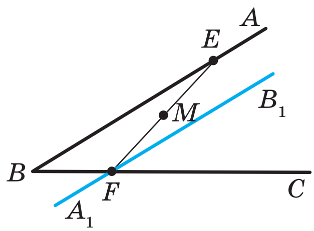


Rys. 19.7

Ponieważ $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, to kąty AOB i A_1OB_1 są równe jako wierzchołkowe, wtedy trójkąty AOB i A_1OB_1 są przystające według cechy przystawania trójkątów. Stąd $\angle 1 = \angle 2$ (rys. 19.7). A więc, zgodnie z cechą równoległości prostych wynika, że $l \parallel A_1B_1$. ◀



Rys. 19.8



Rys. 19.9

Zadanie 2. Punkt M leży wewnątrz kąta ABC (rys. 19.8). Na ramionach BA i BC danego kąta wybierz takie punkty E i F, aby punkt M był środkiem odcinka EF.

Rozwiązanie. Niech prosta A_1B_1 – to obraz prostej AB przy symetrii środkowej względem punktu M (rys. 19.9). Oznaczymy punkt przecięcia prostych A_1B_1 i BC przez F.

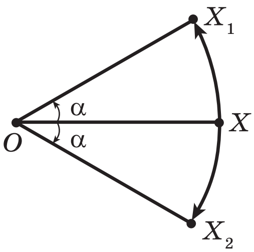
Znajdziemy początkowy punkt obrazem którego jest F. Oczywiście, że on leży na prostej AB. Dlatego wystarczy znaleźć punkt przecięcia prostych FM i AB. Oznaczymy ten punkt literą E. Wtedy E i F – szukane punkty. ◀

Rozpatrując otaczające nas środowisko, często widzimy przykłady spotykane symetrię w przyrodzie (rys. 19.10). Obiekty, które posiadają oś lub środek symetrii łatwo przyjmuje się oraz są przyjemne dla oczu. Niedaremnie, że w Starożytnej Grecji słowo “symetria” odpowiadało symbolom słów “harmonia” i “piękno”.

Rys. 19.10

Idea symetrii zastosowuje się w malarstwie, w architekturze i w technice (rys. 19.11).

Rys. 19.11

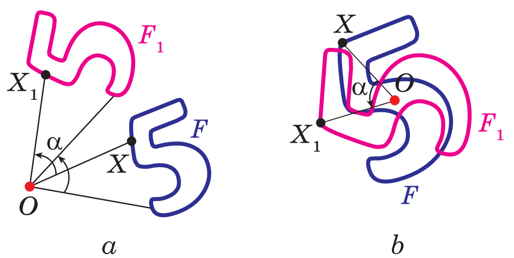


Rys. 19.12

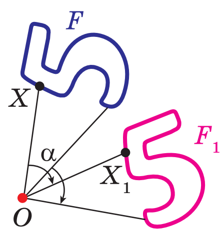
Na rysunku 19.12 są przedstawione punkty O, X, X_1 i X_2 w taki sposób, że $OX_1 = OX_2 = OX$, $\angle X_1OX = \angle X_2OX = \alpha$. Uważa się, że punkt X_1 jest obrazem punktu X podczas **obrotu dookoła środka *O* o kąt α zwróconego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara**. Analogicznie mówi się, że punkt X_2 – to obraz punktu X względem **obrotu dookoła punktu *O* o kąt α, zwrócony w kierunku ruchu wskazówek zegara.**

Punkt O nazywa się **środkiem obrotu**, kąt α – **kątem obrotu**.

Rozpatrzymy figurę F i punkt O oraz kąt α. Każdy punkt X figury F przekształca się w punkt X_1, który jest obrazem punktu X przy obrocie dookoła punktu O w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt α (jeżeli punkt O należy do figury F to ona przekształca się samą w siebie). Podczas takiego przekształcenia figury F otrzymamy figurę F_1 (rys. 19.13). Takie przekształcenie figury F nazywa się **obrotem dookoła punktu *O* o kąt α zwróconego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.** Punkt O nazywa się **środkiem obrotu**.



Rys. 19.13



Rys. 19.14

Analogicznie oznacza się przekształcenie figury F o kąt α zwróconego w kierunku ruchu wskazówek zegara (rys. 19.14).

Zwróć uwagę, że symetria środkowa jest obrotem dookoła środka symetrii o kąt 180°.

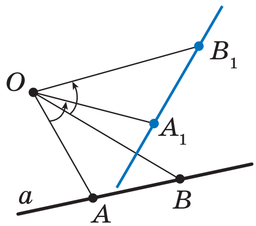
Twierdzenie 19.2 (własność obrotu). ***Obrót jest ruchem.***

To twierdzenie udowodnij samodzielnie.

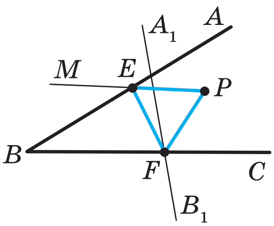
Wniosek. ***Jeżeli figura F_1 – jest obrazem figury F podczas obrotu, to $F = F_1$.***

Zadanie 3. Dana jest prosta a i punkt O leżący poza nią. Wykreśl obraz prostej a przy obrocie dookoła punktu O w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt 45°.

Rozwiązanie. Ponieważ obrót – to ruch, to obrazem prostej a jest prosta. Dla konstrukcji prostej wystarczy znaleźć dwa dowolne jej punkty. Oznaczymy na prostej a dowolne dwa punkty A i B (rys. 19.15). Wykreślimy punkty A_1 i B_1 – które będą ich obrazy przy obrocie dookoła punktu O o kąt 45° zwrócony w przeciwnym kierunku do ruchu wskazówek zegarka. Wtedy prosta A_1B_1 – obraz prostej a. ◀



Rys. 19.15



Rys. 19.16

Zadanie 4. Punkt P należy do kąta ABC, lecz nie należy do jego ramion. Wykreśl trójkąt równoboczny, mający jeden z wierzchołków w punkcie P, a dwa pozostałe leżą na ramionach BA i BC kąta ABC.

Rozwiązanie. Niech prosta A_1B_1 – obraz prostej AB przy obrocie dookoła punktu P o kąt 60° skierowany w przeciwnym kierunku do ruchu wskazówek zegara (rys. 19.16). Oznaczymy punkt przecięcia prostych A_1B_1 i BC literą F.

Niech punkt E – punkt obrazem którego jest F na rozpatrywanym obrocie. Punkt E należy do ramienia BA kąta ABC.

Te rozmyślenia podpowiadają w jaki sposób można skonstruować szukany trójkąt.

Wykreślamy prostą A_1B_1 jako obraz prostej AB przy obrocie dookoła punktu P przeciw wskazówkom zegara o kąt 60°. Niech F – punkt przecięcia prostych A_1B_1 i BC.

Skonstruujemy kąt MPF o wielkości 60°. Niech prosta MP i AB przecinają się w punkcie E. Ten punkt i jest punktem, obraz którego jest punkt F.

Mamy: $PF = PE$ i $\angle FPE = 60°$. A więc, trójkąt EPF jest równoboczny. ◀

?

1. Jakie punkty nazywają się symetrycznymi względem punktu O? Jak nazywa się punkt O?
2. Jakie figury nazywają się symetrycznymi względem punktu O?
3. Podaj własność symetrii środkowej.
4. Jaką własność mają figury symetryczne względem punktu?
5. O jakiej figurze mówi się, jeżeli ona ma środek symetrii?

6. Podaj przykłady figur posiadających środek symetrii.
7. Opisz przekształcenie obrotu dookoła punktu.
8. Podaj własności obrotu.
9. Jaką własność posiadają figury, jeżeli jedna z nich jest obrazem dla drugiej przy obrocie?

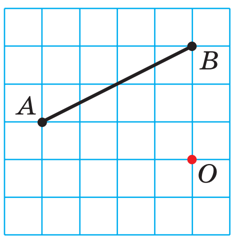
ZADANIA PRAKTYCZNE

19.1.° Wykreśl trójkąt ABC i oznacz punkt O tak, aby nie należał do niego. Skonstruuj trójkąt symetryczny do danego względem punktu O.

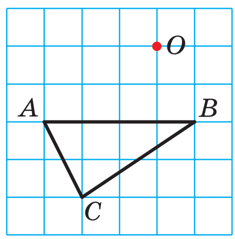
19.2.° Wykreśl trójkąt ABC. Skonstruuj trójkąt symetryczny do danego względem środka boku AB.

19.3.° Wykreśl okrąg i wybierz na nim punkt. Skonstruuj okrąg symetryczny do danego względem wybranego punktu.

19.4.° Zbuduj obraz odcinka AB przy obrocie dookoła punktu O o kąt $45°$ przeciw wskazówkom zegara (rys. 19.17).



Rys. 19.17



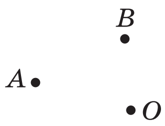
Rys. 19.18

19.5.° Zbuduj obraz trójkąta ABC przy obrocie dookoła środka O o kąt $90°$ w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (rys. 19.18).

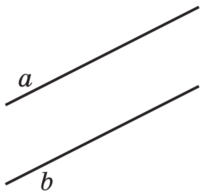
19.6.• Wykreśl równoległobok $ABCD$ według jego wierzchołków A i B oraz punktu O przecięcia jego przekątnych (rys. 19.19).

19.7.• Dane są dwie równoległe proste a i b (rys. 19.20). Znajdź punkt, względem którego prosta a będzie symetryczną do prostej b.

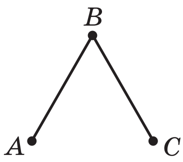
19.8.• Na rysunku 19.21 przedstawiono dwa równe odcinki AB i BC, przy czym $\angle ABC = 60°$. Skonstruuj punkt O taki, aby odcinek AB był obrazem odcinka BC przy obrocie dookoła punktu O o kąt $120°$ skierowanego w przeciwnym kierunku ze wskazówkami zegara.



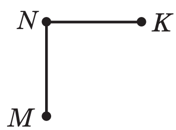
Rys. 19.19



Rys. 19.20



Rys. 19.21



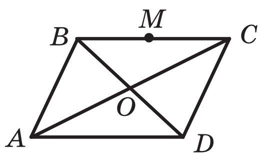
Rys. 19.22

19.9.• Na rysunku 19.22 przedstawiono dwa równe wzajemnie prostopadłe odcinki MN i NK. Wykreśl taki punkt O, przy którym odcinek NK będzie obrazem dla odcinka MN przy obrocie dookoła punktu O o kąt 90° w kierunku wskazówek zegara.

19.10.* Wykreśl figurę, jaka nie posiada osi symetrii oraz obrazem jakiej jest ta sama figura przy obrocie dookoła pewnego punktu:
1) o kąt 90°; 2) o kąt 120°.

ĆWICZENIA

19.11.° Przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie O (rys. 19.23). Punkt M – środek boku BC. Znajdź obraz punktów A, D i M, boku CD, przekątnej BD przy symetrii względem punktu O.



Rys. 19.23

19.12.° Udowodnij, że punkt przecięcia przekątnych równoległoboku jest jego środkiem symetrii.

19.13.° Udowodnij, że okrąg posiada środek symetrii.

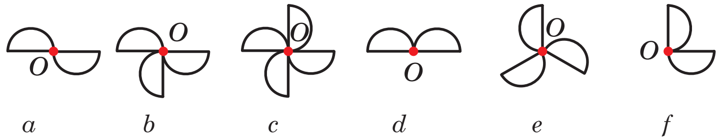
19.14.° Punkty A_1 i B_1 są obrazami odpowiednich punktów A i B przy symetrii względem punktu, który nie należy do prostej AB. Udowodnij, że czworokąt ABA_1B_1 – jest równoległobokiem.

19.15.° Oblicz współrzędne punktów symetrycznych do punktów A (3; –1) i B (0; –2) względem:
1) początku współrzędnych; 2) punktu M (2; –3).

19.16.° Udowodnij, że obrazem prostej przechodzącej przez środek symetrii jest ta sama prosta.

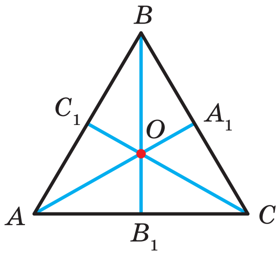
19.17.° Punkty A (x; –2) i B (1; y) są symetryczne względem:
1) początku współrzędnych; 2) punktu M (–1; 3).
Oblicz x i y.

19.18.° Na rysunku 19.24 podano figury, które składają się z równych półokręgów. Która z wymienionych figur przy pewnym obrocie dookoła punktu O o kąt α, gdzie $0° < \alpha \leqslant 180°$, pokrywa się ze swoim obrazem?

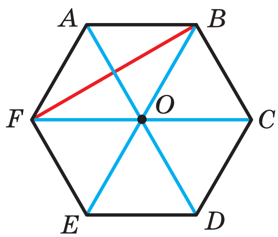


Rys. 19.24

19.19.° Środkowe trójkąta równobocznego ABC przecinają się w punkcie O (rys. 19.25). Wskaż obrazy punktów C, C_1 i O, boku BC, środkowej BB_1, odcinka OC_1, trójkąta $A_1B_1C_1$ przy obrocie dookoła punktu O o kąt 120° w kierunku przeciwnym ze wskazówką zegara.



Rys. 19.25

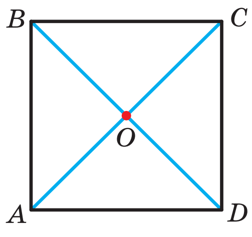


Rys. 19.26

19.20.° Punkt O – środek foremnego sześciokąta $ABCDEF$ (rys. 19.26). Wskaż obrazy boku AF, przekątnej BF, przekątnej AD, sześciokąta $ABCDEF$ przy obrocie dookoła punktu O w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara o kąt:

1) 60°; 2) 120°.

19.21.° Przekątne kwadratu $ABCD$ przecinają się w punkcie O (rys. 19.27). Wskaż obrazy punktów A, O i C, boku AD, przekątnej BD przy obrocie dookoła punktu O o kąt 90° w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.



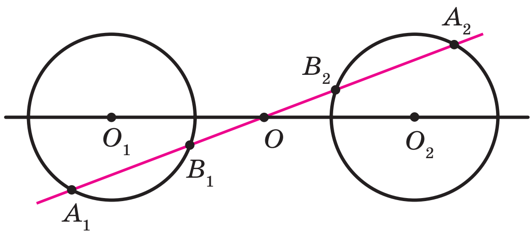
Rys. 19.27

19.22.• Udowodnij, że trójkąt nie posiada środka symetrii.

19.23.• Udowodnij, że półprosta nie posiada środka symetrii.

19.24.• Udowodnij, że, gdy czworokąt posiada środek symetrii, to on jest równoległobokiem.

19.25.• Okręgi ze środkami O_1 i O_2 są symetryczne względem punktu O (rys. 19.28). Prosta, która przechodzi przez środek symetrii przecina pierwszy okrąg w punktach A_1 i B_1, zaś drugie – w punktach A_2 i B_2. Udowodnij, że $A_1B_1 = A_2B_2$.



Rys. 19.28

19.26.• Wierzchołek A trójkąta równobocznego ABC jest środkiem obrotu o kąt 120°. Oblicz odcinek BC_1, gdzie punkt C_1 – obraz punktu C przy podanym obrocie, jeżeli $AB = 1$ cm. Ile rozwiązań ma to zadanie?

19.27.• Wierzchołek A kwadratu $ABCD$ jest środkiem obrotu o kąt 90° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Oblicz odcinek CC_1, gdzie punkt C_1 – obraz punktu C przy wymienionym obrocie, jeżeli $AB = 1$ cm.

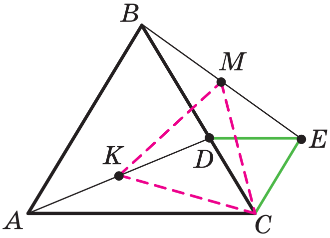
19.28.•• Wierzchołki jednego równoległoboku leżą na bokach drugiego po jednym wierzchołku na każdym boku. Udowodnij, że punkty przekątnych tych równoległoboków pokrywają się.

19.29.•• Punkty A i C należą do kąta ostrego, lecz nie leżą na jego ramionach. Wykreśl równoległobok $ABCD$ tak, że punkty B i D leżą na ramionach kąta.

19.30.•• Wykreśl odcinek, środkiem którego jest dany punkt, zaś końce należą do danych nie równoległych prostych.

19.31.•• Punkt M należy do kąta ABC lecz nie należy do jego ramion. Wykreśl trójkąt równoramienny, prostokątny, którego wierzchołek kąta prostego jest punkt M, a dwa pozostałe odpowiednie leżą na bokach BA i BC.

19.32.* Na boku BC w równobocznym trójkącie ABC oznaczono punkt D. Poza trójkątem ABC obrano punkt E taki, że trójkąt DEC jest równoboczny (rys. 19.29). Udowodnij, że punkt C oraz środki M i K odpowiednich odcinków BE i AD są wierzchołkami równobocznego trójkąta.



Rys. 19.29

19.33.* Wykreśl równoboczny trójkąt tak, aby jego wierzchołki należały do trzech danych równoległych prostych.

19.34.* Wykreśl romb, jakiego punkt przecięcia przekątnych jest dany punkt, zaś trzy wierzchołki jego leżą na trzech prostych parami nie równoległych.

19.35.* Na boku CD w kwadracie $ABCD$ oznaczono punkt E. Dwusieczna kąta BAE przecina bok BC w punkcie F. Udowodnij, że $AE = BF + ED$.

19.36.* W równobocznym trójkącie ABC obrano punkt P tak, że $\angle APB =$ $= 150°$. Udowodnij, że istnieje trójkąt prostokątny, boki jakiego są równe odcinkom PA, PB i PC.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

19.37. Oblicz boki trójkąta ABC, w którym $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, a wysokość opuszczona z wierzchołka C wynosi 4 cm.

19.38. Znajdź punkt leżący na osi odciętych i równo oddalony od punktów A (–2; 4) i B (6; 8).

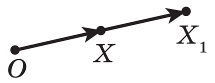
19.39. W trójkąt równoramienny wpisano okrąg. Punkt styczności dzieli jego ramię trójkąta w stosunku 25 : 12, licząc od wierzchołka równoramiennego trójkąta. Oblicz promień okręgu opisanego, jeżeli pole trójkąta wynosi 1680 cm^2.

SPOSTRZEGAJCIE, RYSUJCIE, KONSTRUUJCIE, FANTAZJUJCIE

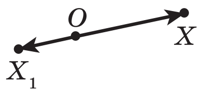
19.40. Wybierz na płaszczyźnie 6 punktów tak, aby jakiekolwiek z nich trzy punkty byłe wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

20. Podobieństwo figur[1]

Na rysunku 20.1 przedstawiono punkty O, X i X_1 taki, że $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$. Uważa się, że punkt X_1 – to obraz punktu X przy **homotetii ze środkiem** O i **współczynnikiem** 2.



Rys. 20.1



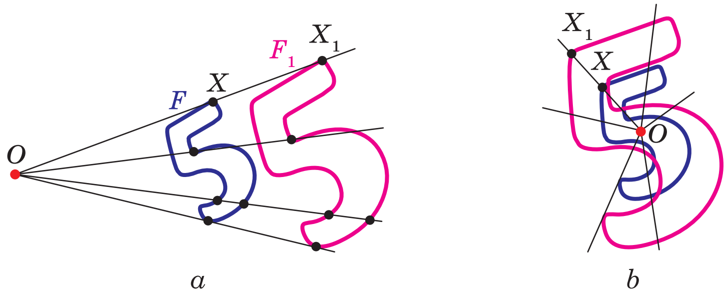
Rys. 20.2

Na rysunku 20.2 przedstawiono punkty O, X i X_1 tak, że $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$. Uważa się, że punkt X_1 – to obraz punktu X przy homotetii ze środkiem O i współczynnikiem $-\frac{1}{2}$.

Ogółem, jeżeli punkty O, X i X_1 są takie, że $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, gdzie $k \neq 0$, to uważa się, że punkt X_1 – jest obrazem punktu X przy **homotetii ze środkiem w punkcie O i współczynnikiem k**.

Punkt O nazywa się **środkiem homotetii** (czyli jednokładności), liczba k – **współczynnik homotetii**, $k \neq 0$.

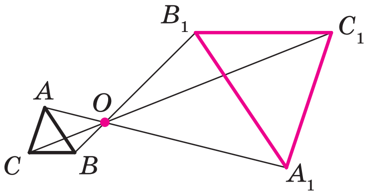
Rozpatrzymy figurę F i punkt O. Każdy punkt X figury F przekształca się w punkt X_1, który jest obrazem punktu X przy homotetii ze środkiem w punkcie O i współczynnikiem k (jeżeli punkt O należy do figury F, to on przekształca się w samego siebie). W wyniku tego przekształcenia figury F otrzymamy figurę F_1 (rys. 20.3). Takie przekształcenie figury F nazywa się **homotetią ze środkiem O i współczynnikiem k**. Także używa się, że figura F_1 **homotetyczna** do figury F ze środkiem O oraz współczynnikiem k.



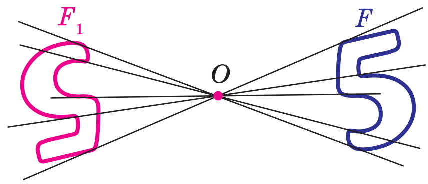
Rys. 20.3

[1] Materiał punktu, który stosuje się homotetii jest nie obowiązkowym dla nauki.

Na przykład na rysunku 20.4 trójkąt $A_1B_1C_1$ jest homotetyczny do trójkąta ABC ze środkiem O i współczynnikiem, jaki wynosi –3. Także można powiedzieć, że trójkąt ABC jest homotetyczny do trójkąta $A_1B_1C_1$ o tym samym środku, lecz współczynnik homotetii jest równy $-\frac{1}{3}$.



Rys. 20.4



Rys. 20.5

Zwróć uwagę, że przy $k = -1$ homotetia ze środkiem O jest symetrią środkową ze środkiem O (rys. 20.5). Jeżeli $k = 1$, to homotetia jest tożsamościowym przekształceniem.

Oczywiście, że przy $k \neq 1$ i $k \neq -1$ homotetia nie jest ruchem.

Twierdzenie 20.1. ***Przy homotetii figury F ze współczynnikiem k, wszystkie odległości między jej punktami zmieniają się w | k | razy, co znaczy że, jeżeli punkty A i B dowolne punkty figury F, zaś punkty A_1 i B_1 – odpowiednie ich obrazy przy homotetii ze współczynnikiem k, to $A_1B_1 = |\,k\,|\,AB$.***

Dowód. ⊙ Przypuśćmy, że punkt O – środek homotetii. Wtedy $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$. Mamy:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k\,\overrightarrow{AB},$$

czyli $A_1B_1 = |k|\,AB$. ◄

Wniosek. ***Jeżeli trójkąt $A_1B_1C_1$ jest homotetyczny do trójkąta ABC ze współczynnikiem k, to $\Delta A_1B_1C_1 \overset{k}{\backsim} \Delta ABC$.***

Dla udowodnienia tego twierdzenia wystarczy zastosować twierdzenie 20.1 oraz trzecią cechę podobieństwa trójkątów.

Homotetia posiada i wielu innych własności.

Przy homotetii:

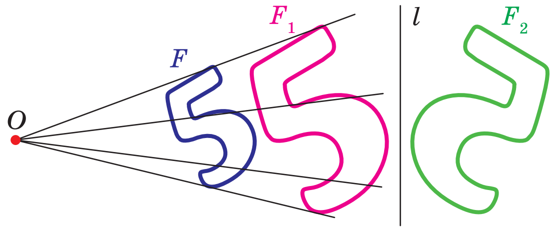
- *obrazem prostej jest prosta;*
- *obrazem odcinka jest odcinek;*
- *obrazem kąta jest kąt jaki jest równy danemu;*
- *obrazem trójkąta jest trójkąt podobny danemu;*
- *obrazem okręgu jest okrąg;*

- *pole wielokąta zmieni się w k^2 razy, gdzie k – współczynnik homotetii.*

Te własności możecie udowodnić na zajęciach kółka matematycznego.

Wyżej wymienione własności homotetii wskazują, że przekształcenie może zmienić wymiary figury, lecz nie zmienia jej kształt, to znaczy, przy homotetii obraz i figura są podobnymi figurami. Zwrócimy uwagę, że w klasie 8., kiedy rozpatrywano podobieństwo figur, to dawaliśmy definicję tylko dla podobieństwa trójkątów. Teraz wyznaczamy podobieństwo dla dowolnych figur.

Na rysunku 20.6 figura F_1 jest homotetyczna dla figury F, zaś figura F_2 jest symetryczną z figurą F_1 względem prostej l.

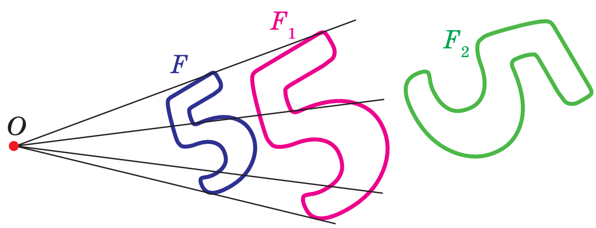


Rys. 20.6

Uważa się, że figurę F_2 otrzymano z figury F w wyniku kompozycji dwóch przekształceń: homotetii oraz osiowej symetrii.

Ponieważ $F_1 = F_2$, to figury F i F_2 mają jednakowy kształt, ale różne rozmiary, to znaczy one są podobne. Mówi się, że figurę F_2 otrzymano z figury F w wyniku **przekształcenia podobieństwa**.

Na rysunku 20.7 figura F_1 jest homotetyczna do figury F, zaś figura F_2 – obraz figury F_1 w pewnym ruchu. Więc i tutaj można stwierdzić, że figury F i F_2 są podobne.



Rys. 20.7

Z wyżej wymienionego wynika, że dogodnie jest wprowadzić następującą definicję.

Definicja. Dwie figury nazywają się podobnymi, z jednej z nich otrzymuje się druga w wyniku kompozycji dwóch przekształceń: homotetii oraz ruchu.

Definicję tę ilustruje następujący schemat, który jest podany na rysunku 20.8.

Podobieństwo = Homotetia + Ruch

Rys. 20.8

Zapis $F \sim F_1$ oznacza, że figury F i F_1 są podobne. Analogicznie, można powiedzieć, że figura F_1 – obraz figury F przy **przekształceniu podobieństwa**.

Z wymienionej definicji wynika, że *przy przekształceniu podobieństwa figury F odległości między jej punktami zmieniają się w tę samą ilość razy*.

Ponieważ przekształcenie tożsamościowe jest ruchem, to ze schematu przedstawionego na rysunku 20.8, wynika, że homotetia – szczególny przypadek przekształcenia podobieństwa.

Niech A i B – dowolne punkty figury F, zaś punkty A_1 i B_1 – ich obrazy przy przekształceniu podobieństwa. Punkty A_1 i B_1 należą do figury F_1, która jest podobna do figury F. Liczba $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ nazywa się **współczynnikiem podobieństwa**. Uważa się, że figura F_1 jest podobna do figury F o współczynniku podobieństwa równym k, a figura F podobna do figury F_1 o współczynniku podobieństwa równym $\frac{1}{k}$.

Zauważymy, że przekształcenie podobieństwa o współczynniku podobieństwa $k = 1$ jest ruchem. Stąd wynika, że ruch – szczególny przypadek przekształcenia podobieństwa.

Bardzo często w życiu codziennym spotykamy się z przekształceniem podobieństwa (rys. 20.9). Na przykład podczas zmiany podziałki mapy, otrzymujemy podobną mapę, zdjęcie – to przekształcenie negatywu na podobne obraz w aparacie fotograficznym. Przerysowując do swego zeszytu rysunek, wykonany przez nauczyciela na tablicy, wykonujecie też przekształcenie podobieństwa.

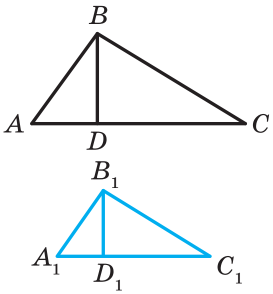
Rys. 20.9

Twierdzenie 20.2. ***Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi współczynnika podobieństwa.***

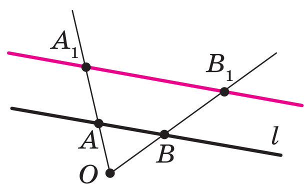
Udowodnienie tego twierdzenia wychodzi za granice kursu geometrii dla klasy 9. Udowodnimy tylko w tym przypadku, rozpatrzywszy podobne trójkąty.

Dowód. ⊙ Przyjmiemy, że trójkąt $A_1B_1C_1$ – obraz trójkąta ABC przy przekształceniu podobieństwa o współczynniku podobieństwa równym k (rys. 20.10). Bok A_1C_1 – obraz boku AC. Wtedy $A_1C_1 = k \cdot AC$. Opuścimy wysokość BD. Przyjmiemy, że punkt D_1 – to obraz punktu D. Ponieważ przy równoległym przesunięciu zachowują się miary kątowe kątów, to odcinek B_1D_1 – wysokość trójkąta $A_1B_1C_1$. Wtedy $B_1D_1 = k \cdot BD$. Otrzymamy:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{k \cdot AC \cdot k \cdot BD}{AC \cdot BD} = k^2.$$ ◄



Rys. 20.10



Rys. 20.11

Zadanie 1. Udowodnij, że obrazem prostej l przy jednokładności środku O, który nie leży na prostej l, jest prosta równoległa do danej.

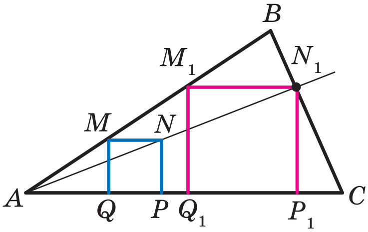
Rozwiązanie. Zgodnie z własnościami homotetii wynika, że obrazem prostej l jest prosta. Aby zbudować prostą wystarczy znaleźć jej dwa jakiekolwiek punkty. Na prostej l wybierzemy dwa dowolne punkty A i B (rys. 20.11). Przyjmiemy, że punkty A_1 i B_1 – to ich obrazy przy homotetii o współczynniku k oraz środkiem O (rysunek 20.11 odpowiada przypadkowi, gdy $k > 1$). Wtedy, prosta A_1B_1 – to obraz prostej AB.

Podczas dowodu twierdzenia 20.1 pokazaliśmy, że $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$. A więc, $AB \parallel A_1B_1$. ◄

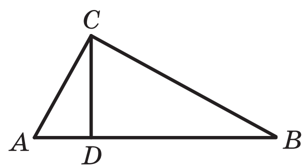
Zadanie 2. W trójkąt ostrokątny ABC wpisz kwadrat w taki sposób, aby dwa jego wierzchołki leżały odpowiednio na bokach AB i BC, zaś dwa pozostałe na boku AC.

Rozwiązanie. Z dowolnego punktu M leżącego na boku AB opuścimy prostopadłą MQ na bok AC (rys. 20.12). Wykreślimy kwadrat $MQPN$ w taki sposób, aby punkt P leżał na półprostej QC. Przypuśćmy, że półprosta AN przecina bok BC w punkcie N_1.

Rozpatrzymy jednokładność o środku A i o współczynniku $k = \dfrac{AN_1}{AN}$. Wtedy, punkt N_1 – obraz punktu N przy tej jednokładności. Odcinek M_1N_1, jest obrazem odcinka MN, gdzie punkt M_1 należy do półprostej AB, przy czym $M_1N_1 \parallel MN$. Analogicznie, odcinek N_1P_1 taki, że punkt P_1 należy do półprostej AC i $N_1P_1 \parallel NP$, jest obrazem odcinka NP. A więc odcinki M_1N_1 i N_1P_1 – boki sąsiednie szukanego kwadratu. Dla zakończenia konstrukcji pozostaje tylko opuścić prostopadłą M_1Q_1 na bok AC. ◀



Rys. 20.12



Rys. 20.13

Zadanie 3. W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle C = 90°$) odcinek CD – to wysokość. Oblicz promień r wpisanego okręgu w ten trójkąt ABC, jeżeli promień okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD odpowiednio są równe r_1 i r_2.

Rozwiązanie. Ponieważ kąt A jest wspólnym kątem dla trójkątów prostokątnych ACD i ABC, to te trójkąty są podobne (rys. 20.13). Niech współczynnik podobieństwa jest k_1. Oczywiście, że $k_1 = \dfrac{r_1}{r}$. Analogicznie $\Delta BCD \sim \Delta ABC$ o współczynniku podobieństwo $k_2 = \dfrac{r_2}{r}$.

Oznaczymy pola trójkątów ACD, BCD i ABC odpowiednio przez S_1, S_2 i S. Otrzymamy:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

Stąd $\dfrac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \dfrac{S_1 + S_2}{S} = 1.$

Otrzymamy $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, znaczy $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

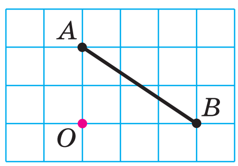
Odpowiedź: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. ◀

1. W jakim przypadku uważa się, że punkt X_1 jest obrazem punktu X przy jednokładności środku O i o współczynniku k?
2. Opisz przekształcenie figury F, które nazywa się homotetią ze środkiem O o współczynniku równym k.
3. Jak zmienia się odległość między punktami przy jednokładności o współczynniku równym k?
4. Sformułuj własności jednokładności.
5. Jakie figury nazywają się podobnymi?
6. Ile jest równy stosunek pól podobnych wielokątów?

ZADANIA PRAKTYCZNE

20.1.° Wykreśl obraz odcinka AB (rys. 20.14) przy jednokładności o środku O i o współczynniku równym:

1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.



Rys. 20.14

20.2.° Wykreśl odcinek AB. Skonstruuj obraz tego odcinka przy jednokładności o współczynniku k i o środku:

1) w punkcie A, $k = 3$;
2) w punkcie B, $k = -2$;
3) w środku odcinka AB, $k = 2$.

20.3.° Wykreśl okrąg, promień którego jest równy 2 cm i wybierz na nim punkt A. Skonstruuj obraz tego okręgu przy jednokładności o współczynniku k i o środku:

1) w środku okręgu, $k = -\frac{1}{2}$, $k = 2$;

2) w punkcie A, $k = 2$, $k = -\frac{1}{2}$.

20.4.° Wykreśl trójkąt ABC. Skonstruuj obraz tego trójkąta przy jednokładności współczynniku k i o środku:

1) w punkcie B, $k = 3$;

2) w punkcie C, $k = -\frac{1}{2}$;

3) w punkcie A, $k = \frac{1}{2}$;

4) w środku boku AB, $k = \frac{1}{2}$;

5) w środku boku AC, $k = -\frac{1}{3}$.

20.5.° Wykreśl trójkąt ABC. Znajdź punkt przecięcia jego środkowych. Skonstruuj obraz tego trójkąta przy jednokładności o środku przecięcia jego środkowych i o współczynniku:

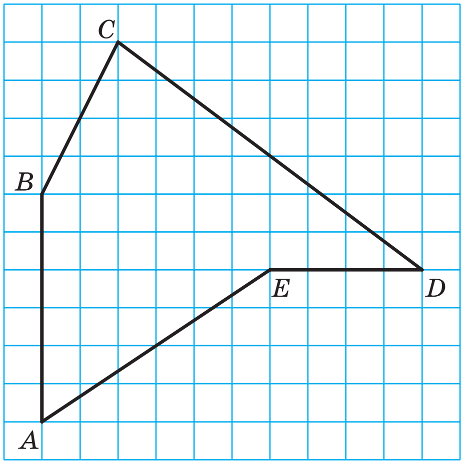
1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$.

20.6.° Wykreśl równoległobok $ABCD$. Oznacz literą O punkt przecięcia jego środkowych. Skonstruuj obraz tego równoległoboku przy jednokładności o środku O i współczynnikiem: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

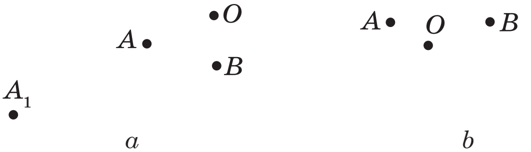
20.7.° Wykreśl kwadrat $ABCD$. Skonstruuj obraz tego kwadratu przy jednokładności współczynniku k i o środku:

1) w punkcie A, $k = \frac{1}{3}$; 2) w punkcie B, $k = -2$; 3) w punkcie C, $k = 2$.

20.8.° Orientują się położeniem wierzchołków po kratkach, wykreśl pięciokąt $ABCDE$ (rys. 20.15). Skonstruuj pięciokąt $A_1B_1C_1D_1E_1$, podobny do niego o współczynniku podobieństwa równym $\frac{1}{2}$.



Rys. 20.15



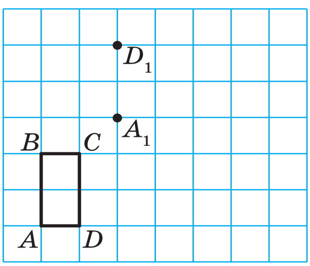
Rys. 20.16

Rys. 20.17

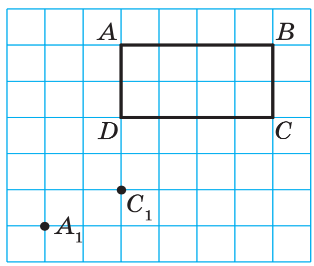
20.9.• Na rysunku 20.16 punkt A_1 – to obraz punktu A przy jednokładności o środku O. Wykreśl obraz punktu B przy jednokładności.

20.10.• Na rysunku 20.17 punkt A_1 – jest obrazem punktu A przy jednokładności homotetii o współczynniku: 1) $k = 3$; 2) $k = -2$. Skonstruuj środek homotetii.

20.11.• Na rysunku 20.18 przedstawiono prostokąt $ABCD$ oraz punkty A_1 i D_1, które są obrazami odpowiednich punktów A i D przy przekształceniu podobieństwa. Skonstruuj obraz prostokąta $ABCD$ przy tym przekształceniu. Ile rozwiązań ma zadanie?



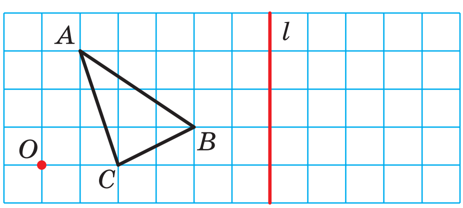
Rys. 20.18



Rys. 20.19

20.12.• Na rysunku 20.19 przedstawiony jest prostokąt $ABCD$ oraz punkty A_1 i C_1, które są odpowiednimi obrazami punktów A i C przy przekształceniu podobieństwa. Skonstruuj obraz prostokąta $ABCD$ przy danym przekształceniu. Ile rozwiązań ma zadanie?

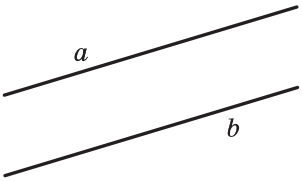
20.13.• Skonstruuj obraz trójkąta ABC przy przekształceniu podobieństwa, które jest kompozycją dwóch przekształceń: homotetii o środku O i o współczynniku $k = 2$ oraz symetrii osiowej względem prostej l (rys. 20.20). Wskaż współczynnik podobieństwa.



Rys. 20.20

20.14.• Wykreśl okrąg o promieniu równym 2 cm. Oznacz punkt O na odległości 4 cm od środka okręgu. Skonstruuj obraz tego okręgu przy przekształceniu podobieństwa, które jest kompozycją dwóch przekształceń: jednokładności o środku O oraz o współczynniku $k = \frac{1}{2}$ i obrotu o środku O i kącie 45° w kierunku zgodnie skierowanym z ruchem wskazówek zegara. Wskaż współczynnik podobieństwa.

20.15.• Na rysunku 20.21 przedstawione są dwie równoległe proste a i b. Wykreśl środek homotetii przy którym prosta b będzie obrazem prostej a o współczynniku: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$. Ile rozwiązań ma zadanie?



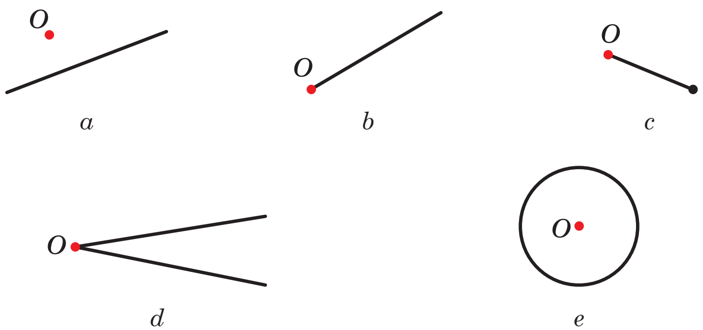
Rys. 20.21

20.16.• Wykreśl trapez $ABCD$ podstawa BC którego jest o dwa razy mniejsza od podstawy AD. Skonstruuj środek jednokładności, przy której odcinek AD jest obrazem odcinka BC o współczynniku: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

ĆWICZENIA

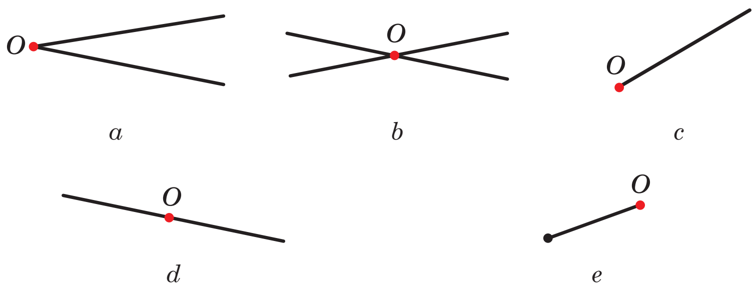
20.17.° W równoległoboku $ABCD$ punkt D_1 – to środek boku AD. Przy jednokładności o środku A punkt D_1 jest obrazem punktu D. Znajdź współczynnik jednokładności. Wskaż, jakie punkty są obrazami punktów B i C przy tej homotetii.

20.18.° Które z podanych figur przedstawionych na rysunku 20.22, pokrywają się ze swoimi obrazami przy jednokładności o środku O oraz współczynnikiem $k > 0$ i $k \neq 1$?



Rys. 20.22

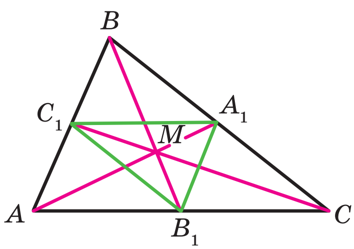
20.19.° Które z figur przedstawionych na rysunku 20.23 pokrywają się ze swoimi obrazami przy homotetii o środku O oraz o współczynniku $k < 0$?



Rys. 20.23

20.20.° Środkowe w trójkącie ABC przecinają się w punkcie M (rys. 20.24). Określ współczynnik jednokładności (homotetii) o środku:

1) w punkcie B, przy którym punkt B_1 jest obrazem punktu M;
2) w punkcie M, przy którym punkt A_1 jest obrazem punktu A;
3) w punkcie C, przy którym punkt M jest obrazem punktu C_1.



Rys. 20.24

20.21.° W trójkącie ABC środkowe przecinają się w punkcie M (rys. 20.24) Wskaż współczynnik jednokładności, przy której trójkąt $A_1B_1C_1$ jest obrazem trójkąta ABC.

20.22.° W trójkącie ABC środkowe AA_1, BB_1 i CC_1 przecinają się w punkcie M. Punkty K, F i N – to środki odpowiednich odcinków AM, BM i CM. Wskaż współczynnik i środek jednokładności przy której trójkąt ABC jest obrazem dla trójkąta KFN.

20.23.° Podaj obrazy punktów A (–2; 1), B (3; 0) i D (0; –6) przy jednokładności o środku O (0; 0) i współczynnikiem:

1) $k = 2$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{3}$.

20.24.° Punkt A_1 (–1; 2) – to obraz punktu A (–3; 6) przy homotetii o środku w początku układu współrzędnych. Podaj współczynnik jednokładności.

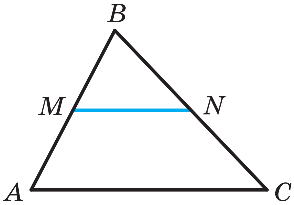
20.25.° Pola dwóch trójkątów podobnych są równe 28 cm i 63 cm. Jeden z boków pierwszego trójkąta jest równy 8 cm. Oblicz bok drugiego trójkąta, który odpowiada danemu bokowi pierwszego trójkąta.

20.26.° Odpowiednie boki dwóch podobnych trójkątów są równe 30 cm i 24 cm. Pole trójkąta o boku równym 30 cm jest równe 45 cm^2. Oblicz pole drugiego trójkąta.

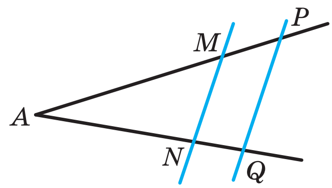
20.27.° Pole trójkąta jest równe S. Ile wynosi pole trójkąta, otrzymanego od poprowadzenia linii środkowej w danym trójkącie?

20.28.° Pole trójkąta jest równe S. Oblicz pole drugiego trójkąta, wierzchołki którego – środki linii środkowych w danym trójkącie.

20.29.• Odcinek MN – linia środkowa w trójkącie ABC (rys. 20.25). Podaj współczynnik podobieństwa i środek homotetii, przy której:
1) odcinek AC jest obrazem dla odcinka MN;
2) odcinek MN jest obrazem dla odcinka AC.



Rys. 20.25



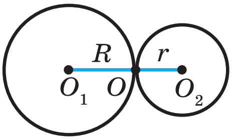
Rys. 20.26

20.30.• Proste równoległe przecinają ramiona kąta A w punktach M, N, P i Q (rys. 20.26). Wiadomo, że $AM : MP = 3 : 1$. Podaj współczynnik i środek jednokładności przy której:
1) odcinek PQ jest obrazem odcinka MN;
2) odcinek MN jest obrazem odcinka PQ.

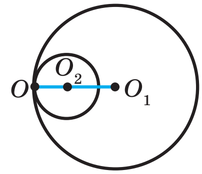
20.31.• Równoległe odcinki BC i AD są takie, że $AD = 3BC$. Ile istnieje punktów, które są środkami jednokładności przy których obrazem odcinka BC jest odcinek AD? Dla każdych z takich punktów określ współczynnik jednokładności.

20.32.• Okręgi o środkach w punkcie O_1 i O_2 oraz o promieniach R i r są styczne zewnętrznie w punkcie O (rys. 20.27). Udowodnij, że okrąg o środku w punkcie O_1 jest obrazem okręgu o środku O_2 przy jednokładności o środku O i o współczynniku $-\frac{R}{r}$.

20.33.• Okręgi o środkach w punkcie O_1 i O_2 i o promieniach R i r są styczne wewnętrznie w punkcie O (rys. 20.28). Udowodnij, że okrąg o środku O_1 jest obrazem okręgu o środku O_2 przy jednokładności o środku O i o współczynniku $\frac{R}{r}$.

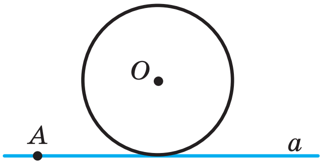


Rys. 20.27



Rys. 20.28

20.34.• Prosta a jest styczna do okręgu ze środkiem w punkcie O. Udowodnij, że obraz tego okręgu przy jednokładności o środku A, gdzie A – dowolny punkt leżący na prostej a (rys. 20.29) jest styczny do tej prostej.



Rys. 20.29

20.35.• Punkt A (2; –3) – obraz punktu B (8; 6) w jednokładności o środku M (4; 0). Wskaż współczynnik jednokładności.

20.36.• Punkt A (–7; 10) – obraz punktu B (–1; –2) w jednokładności o współczynniku –2. Podaj środek jednokładności.

20.37.• Punkt A_1 (x; 4) – obraz punktu A (–6; y) w jednokładności o środku w początku współrzędnych i o współczynniku:

1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

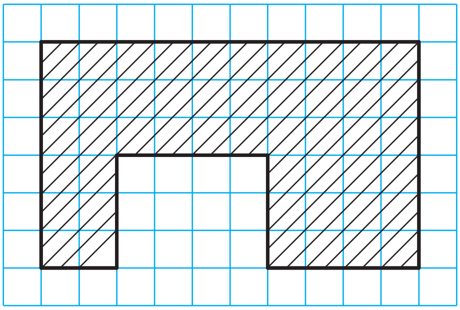
Oblicz x i y.

20.38.• Punkt A_1 (4; y) – obraz punktu A (x; –4) w jednokładności o środku B (1; –1) i o współczynniku $k = -3$. Oblicz x i y.

20.39.• Linia środkowa trójkąta odcina od niego trapez o polu równym 21 cm^2. Oblicz pole danego trójkąta.

20.40.• W trójkącie ABC prosta równoległa do boku AC przecina jego bok AB w punkcie M; zaś bok BC – w punkcie K. Oblicz pole trójkąta ABC, jeżeli $BM = 4$ cm, $AC = 8$ cm, $AM = MK$, a pole trójkąta MBK jest równe 5 cm^2.

20.41.• Przedłużenie ramion AB i CD w trapezie $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Oblicz pole trapezu, jeżeli $BC : AD = 3 : 5$, zaś pole trójkąta AED jest równe 175 cm^2.



Rys. 20.30

20.42.• Na rysunku 20.30 jest przedstawiony plan szkoły. Oblicz, jakie pole zajmuje szkoła, jeżeli plan wykonano w skali 1 : 2000. Długość boku krateczki jest równa 0,5 cm.

20.43.•• Podaj obraz prostej $y = 2x + 1$ w jednokładności o środku położonym w początku współrzędnych i o współczynniku:

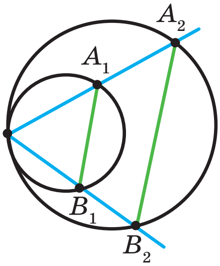
1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

20.44.•• Podaj obraz okręgu $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ w jednokładności o środku leżącym w początku współrzędnych i o współczynniku:

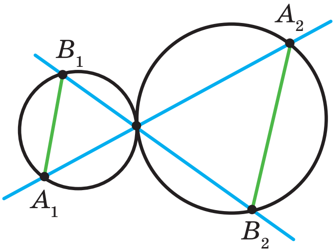
1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

20.45.•• Dwa okręgi są styczne wewnętrznie. Przez punkt styczności poprowadzono dwie proste, które przecinają okręgi w punktach A_1, A_2, B_1, B_2 (rys. 20.31). Udowodnij, że $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

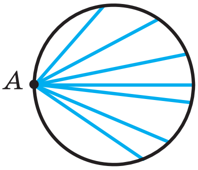
20.46.•• Dwa okręgi są styczne zewnętrznie. Przez punkt styczności poprowadzono dwie proste, które przecinają okręgi w punktach A_1, A_2, B_1, B_2 (rys. 20.32). Udowodnij, że $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.



Rys. 20.31



Rys. 20.32



Rys. 20.33

20.47.•• Punkt A leży na okręgu (rys. 20.33). Znajdź miejsce geometryczne punktów, które są środkami cięciw danego okręgu, mające jeden z końców w punkcie A.

20.48.•• Dwa okręgi są styczne wewnętrznie przy czym mniejszy okrąg przechodzi przez środek okręgu większego. Udowodnij, że mniejszy okrąg dzieli dowolną cięciwę większego okręgu, wychodzącą z punktu styczności, na połowę.

20.49.•• Dany jest trójkąt ABC i dowolny punkt M. Udowodnij, że punkty symetryczne z punktem M względem środków boków trójkąta ABC, są wierzchołkami trójkąta, przystającego do danego.

20.50.•• Skonstruuj trójkąt według dwóch jego kątów i promieniem okręgu opisanego.

20.51.•• Skonstruuj trójkąt według znanych dwóch jego kątów oraz promienia wpisanego okręgu.

20.52.•• W trójkącie ABC największym bokiem jest bok AC. W trójkąt ABC wpisz prostokąt, sąsiednie boki którego dzielą się w stosunku 2 : 1, oraz dwa wierzchołki większego boku prostokąta leżą na boku AC w trójkącie, a dwa pozostałe wierzchołki – na bokach AB i BC.

20.53.* Odcinek AB – to cięciwa danego okręgu, punkt C – dowolny punkt leżący na okręgu. Podaj miejsca geometryczne punktów, które są punktami przecięcia środkowych trójkąta ABC.

20.54.* Dane są dwa punkty A i B oraz prostą l. Podaj miejsce geometryczne punktów, które są punktami przecięcia środkowych trójkątów ABC, gdzie C – dowolny punkt leżący na prostej l.

20.55.* Punkt M należy do kąta ABC, lecz nie leży na jego ramionach. Wykreśl okrąg, który jest styczny do ramion kąta i przechodzi przez punkt M.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE

20.56. Oblicz pole rombu oraz promień okręgu wpisanego w romb, jeżeli jego przekątne są równe 12 cm i 16 cm.

20.57. Oblicz obwód trójkąta utworzonego przy przecięciu prostej $3x + 4y = 24$ osiami współrzędnych.

20.58. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie z punktem styczności A, zaś punkty B i C są punktami styczności do tych okręgów ich wspólnej stycznej. Udowodnij, że kąt BAC jest prosty.

ZASTOSOWANIE PRZEKSZTAŁCEŃ PRZY ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ

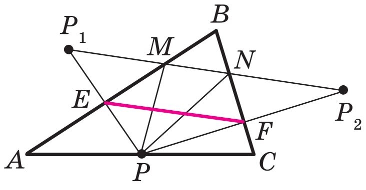
Przekształcenie figur – to efektywna metoda rozwiązywania wielu zadań geometrycznych. Zilustrujemy to na przykładach.

Zadanie 1. Na ramionach AB, BC i CA trójkąta ostrokątnego ABC wybierz takie punkty M, N i P aby obwód trójkąta MNP był najmniejszy.

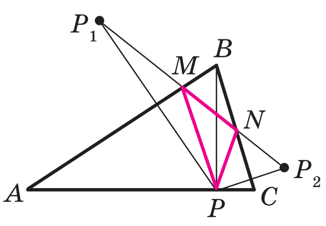
Rozwiązanie. Przyjmiemy, że punkt P jest o boku AC w trójkącie ABC, punkty P_1 i P_2 – są obrazami w symetrii względem prostych AB i BC (rys. 20.34). Prosta P_1P_2 przecina odpowiedne boki AB i BC w odpowiednich punktach M i N. Z rozwiązanego zadania 2 p. 18 wynika, że z obwodów wszystkich trójkątów, dla których punkt P jest fiksowany, zaś punkty M i N leżą na bokach AB i BC, obwód trójkąta MNP jest najmniejszym. Obwód ten jest równy długości odcinka P_1P_2.

Biorąc pod uwagę, że odcinek EF – to linia środkowa w trójkącie PP_1P_2. Wtedy $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Ponieważ $\angle BEP + \angle BFP = 180°$, to punkty P, E, B i F leżą na jednym okręgu o średnicy BP. Stąd $EF = BP \sin B$. A więc, długość odcinka EF będzie najmniejszą przy najmniejszej długości odcinka BP, co oznacza, gdy BP jest wysokością trójkąta ABC.



Rys. 20.34



Rys. 20.35

Na rysunku 20.35 odcinek BP – wysokość trójkąta ABC. Algorytm konstrukcji punktów M i N jest zrozumiały rozpatrując rysunek.

Z konstrukcji wynika, że obwód jakiegokolwiek innego trójkąta, wierzchołki którego leżą na bokach trójkąta ABC, są większe od obwodu trójkąta MNP. Dlatego szukany trójkąt jest dokładnie jeden – to zbudowany trójkąt MNP.

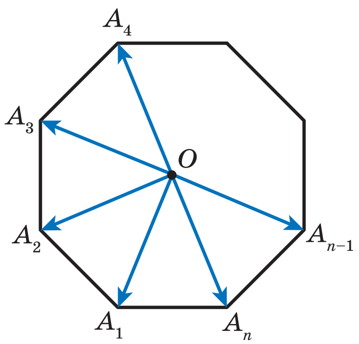
Można przekonać się (wykonaj to samodzielnie), że punkty M i N są spodki wysokości, opuszczonych odpowiednio z wierzchołków C i A w trójkącie ABC.

A więc, wierzchołki szukanego trójkąta – to spodki wysokości danego trójkąta ABC. Taki trójkąt nazywa się **współśrodkowy**. ◀

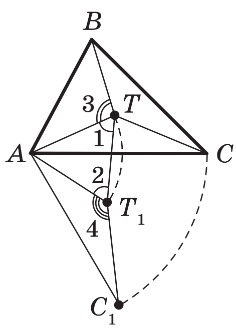
Zadanie 2. Punkt O – środek foremnego n-kąta $A_1A_2...A_n$ (rys. 20.36). Udowodnij, że $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

Rozwiązanie. Niech $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}$. Rozpatrzymy obrót względem punktu O o kąt $\frac{360°}{n}$, na przykład skierowany w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Przy takim przekształceniu obrazem danego n-kąta będzie ten samy n-kąt.

A więc, szukana suma nie zmienia się. A to jest możliwe tylko wtedy, gdy $\vec{a}=\vec{0}$. ◀



Rys. 20.36



Rys. 20.37

Zadanie 3. Wewnątrz trójkąta ABC, wszystkie kąty jakiego są mniejsze od 120°, znajdź taki punkt T, aby suma $TA+TB+TC$ była najmniejsza.

Rozwiązanie. Niech T – dowolny punkt danego trójkąta ABC (rys. 20.37). Rozpatrzymy obrót o środku A o kąt 60° zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara. Niech punkty T_1 i C_1 – obrazy punktów T i C (rys. 20.37). Ponieważ obrót – to ruch, to $T_1C_1=TC$. Oczywiście, że trójkąt ATT_1 jest równoboczny. Wtedy $AT=TT_1$.

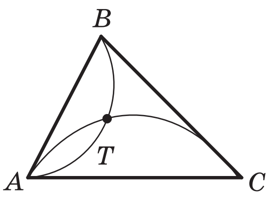
Mamy: $TA+TB+TC=TT_1+TB+T_1C_1$.

Wiadomo, że suma $TT_1+TB+T_1C_1$ jest najmniejszą, jeżeli punkty B, T, T_1 i C_1 leżą na jednej prostej. Ponieważ $\angle 1=\angle 2=60°$, to ten będzie wykonywać się wtedy, gdy $\angle 3=\angle 4=120°$.

Ponieważ kąt AT_1C_1 – to obraz kąta ATC przy podanym obrocie, wtedy spełnia się równość $\angle ATC = 120°$.

A więc, punkty B, T, T_1 i C_1 będą należeć do jednej prostej wtedy i tylko wtedy gdy $\angle ATB = \angle ATC = 120°$. Stąd $\angle BTC = 120°$.

W ten sposób, suma $TA + TB + TC$ będzie najmniejszą jeżeli $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120°$.



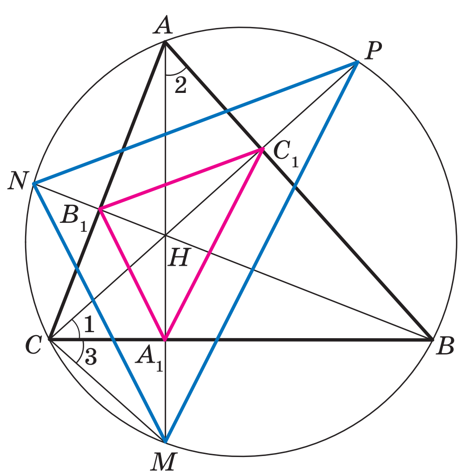
Rys. 20.38

Znaleźć punkt T można, na przykład za pomocą MGP, z którego odcinki AB i AC widać pod kątem $120°$ (rys. 20.38).

Oczywiście, że gdy jeden z kątów trójkąta ABC jest nie mniejszy od $120°$, wtedy punkt przecięcia skonstruowanych łuków nie będzie leżeć wewnątrz trójkąta. Można pokazać, że w trójkącie o kącie nie mniejszym od $120°$, punkt T pokrywa się z wierzchołkiem trójkąta, gdzie suma odległości od tego punktu do wierzchołków trójkąta jest najmniejszą. ◀

Zadanie 4. Odcinki AA_1, BB_1 i CC_1 – to wysokości ostrokątnego trójkąta ABC. Udowodnij, że promień opisanego okręgu na trójkącie ABC jest dwa razy większy od promienia okręgu na trójkącie $A_1B_1C_1$.

Rozwiązanie. Przyjmiemy, że proste AA_1, BB_1 i CC_1 przecinają opisany okrąg na trójkącie ABC w odpowiednich punktach M, N i P (rys. 20.39). Udowodnij, że $HA_1 = A_1M$, gdzie punkt H – punkt przecięcia wysokości w trójkącie ABC.



Rys. 20.39

Mamy: $\angle 1 = \angle 2 = 90° - \angle ABC$.

Kąty 2 i 3 są równe, jako wpisane które opierają się na łuku MB. A więc, $\angle 1 = \angle 3$.

Wtedy w trójkącie HCM odcinek CA_1 jest dwusieczną oraz wysokością, a więc i środkową. Stąd $HA_1 = A_1M$.

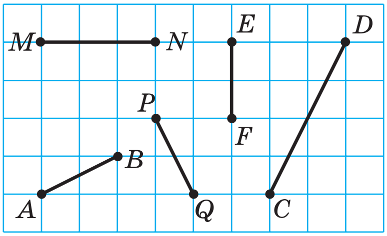
Analogicznie, można udowodnić, że $HB_1 = B_1N$, $HC_1 = C_1P$.

A więc jest widoczne, że trójkąt MNP jest jednoskładnościowy trójkąta $A_1B_1C_1$ o środku H i o współczynniku 2. Wtedy promień okręgu opisanego na trójkącie MNP jest dwa razy większy od promienia okręgu opisanego na trójkącie $A_1B_1C_1$. Zwróć uwagę, że trójkąty MNP i ABC są wpisane w ten sam okrąg. ◀

ZADANIE TESTOWE N 5. "SPRAWDŹ SIEBIE"

1. Który z podanych odcinków na rysunku jest obrazem odcinka AB przy ruchu?

A) MN; B) PQ; C) EF; D) DC.

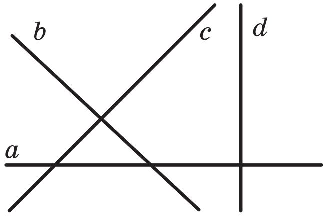


2. Podaj równanie obrazu prostej $y = 2x$ w równoległym przesunięciu o wektor $\vec{a}$ **(0; 1).**

A) $y = 2x + 1$; C) $y = x + 1$;
B) $y = 2x - 1$; D) $y = x - 1$.

3. Która z prostych, przedstawionych na rysunku, jest obrazem prostej a w równoległym przesunięciu?

A) b; B) c; C) d; D) a.



4. Która z niżej wymienionych figur posiada tylko jedną oś symetrii?

A) Kwadrat; C) parabola;
B) okrąg; D) odcinek.

5. Przy jakich wartościach x i y punkty A (–1; y) i B (x; 6) są symetryczne względem osi odciętych?

A) $x = -1$, $y = 6$; C) $x = -1$, $y = -6$;
B) $x = 1$, $y = -6$; D) $x = 1$, $y = 6$.

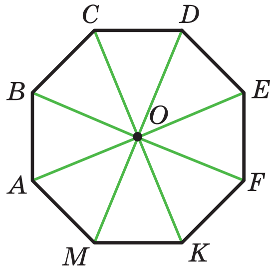
6. Która z niżej podanych figur posiada środek symetrii?

A) Trójkąt; C) trapez;
B) odcinek; D) kąt.

7. Która z niżej podanych figur posiada środek symetrii oraz oś symetrii?
A) Trójkąt równoboczny;
B) równoległobok;
C) trapez równoramienny;
D) prosta.

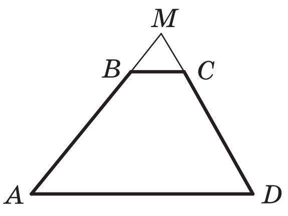
8. Przy jakich wartościach x i y punkty A (x; 7) i B (–4; y) są symetryczne względem początku układu współrzędnych?
A) $x = 4$, $y = -7$;
B) $x = 4$, $y = 7$;
C) $x = -4$, $y = 7$;
D) $x = -4$, $y = -7$.

9. Punkt O – środek foremnego ośmiokąta $ABCDEFKM$ (patrz rysunek). Wskaż obraz boku EF przy obrocie ze środkiem O i o kącie 135° skierowanym w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.
A) AB; B) BC; C) AM; D) CD.



10. Przedłużenie ramion AB i CD w trapezie $ABCD$ przecinają się w punkcie M (patrz rysunek). Podaj współczynnik jednokładności o środku w punkcie M, przy której odcinek BC jest obrazem dla odcinka AD, jeżeli $AB : BM = 7 : 2$.

A) $\frac{2}{7}$; B) $\frac{7}{2}$; C) $\frac{2}{9}$; D) $\frac{9}{2}$.



11. Punkt M (6; –3) – obraz punktu N (2; 1) w jednokładności o współczynniku równym $-\frac{1}{3}$. Podaj współrzędne środka jednokładności.

A) (5; –2); C) (–5; 2);
B) (8; –1); D) (–8; 1).

12. Prosta, która jest równoległa do boku AB w trójkącie ABC, przecina jego bok AC w punkcie E, zaś bok BC – w punkcie F. Oblicz pole trójkąta CEF, gdy $AE : EC = 3 : 2$, zaś pole trójkąta ABC jest równe 75 cm^2.

A) 36 cm^2; C) 30 cm^2;
B) 50 cm^2; D) 12 cm^2.

GŁÓWNE W PARAGRAFIE 5

Ruch (przesunięcie)

Przekształcenie figury F, które zachowuje odległości między punktami, nazywa się ruchem (przesunięciem) figury F.

Przystające figury

Dwie figury nazywają się przystającymi, jeżeli istnieje ruch, przy którym każdy punkt z danych figur jest obrazem.

Równolegle przesunięcie

Jeżeli punkty X i X_1 są takimi, że $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$, to uważa się, że punkt X_1 – jest obrazem dla punktu X w równoległym przesunięciu o wektor $\vec{a}$.

Własności równoległego przesunięcia

Równoległe przesunięcie jest ruchem.
Jeżeli figura F_1 jest obrazem dla figury F w równoległym przesunięciu, to $F_1 = F$.

Symetria osiowa

Punkty A i A_1 nazywają się symetrycznymi względem prostej l, jeżeli prosta l jest symetralną odcinka AA_1. Jeżeli punkt A należy do prostej l, to ona nazywa się symetryczną do siebie względem prostej l.

Własności symetrii osiowej

Symetria osiowa jest ruchem.
Jeżeli figury F i F_1 są symetryczne względem prostej, to $F = F_1$.

Figura, która posiada oś symetrii

Figura nazywa się symetryczną względem prostej l, jeżeli każdy punkt danej figury posiada punkt symetryczny względem prostej l, tak, że należy do tej figury. Prosta l nazywa się osią symetrii figury.

Symetria środkowa

Punkty A i A_1 nazywają się symetrycznymi względem punktu O, jeżeli punkt O jest środkiem odcinka AA_1. Punkt O uważa się symetrycznym do siebie.

Własności symetrii środkowej

Symetria środkowa jest ruchem.
Jeżeli figury F i F_1 są symetryczne względem punktu, to $F = F_1$.

Figury które posiadają środek symetrii

Figura nazywa się symetryczną względem punktu O, jeżeli dla każdego punktu danej figury istnieje punkt symetryczny do niego względem punktu O, także należą do tej figury. Punkt O nazywa się środkiem symetrii figury.

Własności obrotu

Obrót jest ruchem.
Jeżeli figura F_1 jest obrazem figury F przy obrocie, to $F_1 = F$.

Jednokładność

Jeżeli punkty O, X i X_1 są takie, że $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, gdzie $k \neq 0$, to uważa się, że punkt X_1 jest obrazem dla punktu X w jednokładności o środku O oraz o współczynniku k.

Własności jednokładności

W jednokładności figury F o współczynniku k wszystkie odległości między jej punktami z niej zmieniają się o $|k|$ razy, to znaczy, jeżeli punkty A i B są dowolnymi punktami figury F, zaś punkty A_1 i B_1 – są odpowiednimi ich obrazami w jednokładności o współczynniku k, to $A_1B_1 = |k|\ AB$.

Podobieństwo

Dwie figury nazywają się podobnymi, jeżeli jedną z nich można otrzymać z drugiej według kompozycji je dwóch przekształceń: jednokładności i ruchu.

Pola podobnych wielokątów

Stosunek pól podobnych wielokątów jest równy kwadratowi współczynnika podobieństwa.

21. Ćwiczenia do powtórzenia kursu geometrii 9. klasy

1. Rozwiązywanie trójkątów

21.1. Dwa boki trójkąta są równe 4 cm i 10 cm, zaś sinus kąta zawartego między nimi jest równy $\frac{4}{5}$. Oblicz bok trójkąta równoramiennego.

21.2. W równoległoboku $ABCD$ wiadomo, że $AB = 2$ cm, $AD = 4$ cm, $\angle BAD = 60°$. Oblicz cosinus kąta zawartego między prostymi AC i BD.

21.3. Ustal czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny lub rozwartokątny o bokach: 1) 4 cm, 4 cm, 5 cm; 2) 5 cm, 6 cm, 9 cm; 3) 5 cm, 12 cm, 13 cm.

21.4. Jeden z boków trójkąta jest równy 21 cm, a stosunek dwóch prostokątnych jest 3 : 8. Oblicz niewiadome boki trójkąta, jeżeli kąt zawarty między nimi wynosi 60°.

21.5. Jeden z boków trójkąta jest równy 3 cm, a drugi – $\sqrt{7}$ cm, oraz kąt, leżący naprzeciw drugiego boku wynosi 60°. Oblicz niewiadomy bok trójkąta.

21.6. Jeden z boków równoległoboku jest o 4 cm dłuższy od drugiego, zaś jego przekątne są równe 12 cm i 14 cm. Oblicz obwód równoległoboku.

21.7. W trapezie $ABCD$ wiadomo, że $BC \parallel AD$, $AD = 8$ cm, $CD = 4\sqrt{3}$ cm. Okrąg, przechodzący przez wierzchołki A, B i C, przecina prostą AD w punkcie K, $\angle AKB = 60°$. Oblicz długość odcinka BK.

21.8. Podstawy trapezu są równe 3 cm i 7 cm, zaś ramiona – 6 cm i 5 cm. Oblicz cosinusy kątów trapezu.

21.9. Okrąg wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boku AB w punkcie D, $BD = 1$ cm, $AD = 5$ cm, $\angle ABC = 120°$. Oblicz długość odcinka CD.

21.10. Boki trójkąta są równe 11 cm, 12 cm i 13 cm. Oblicz długość środkowej trójkąta poprowadzonej do największego boku.

21.11. Oblicz długość dwusiecznej trójkąta, która dzieli jego bok na odcinki równe 3 cm i 4 cm oraz tworzy z tym bokiem kąt równy 60°.

21.12. Odcinek BD – dwusieczna trójkąta ABC, $BD = a$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 75°$. Oblicz odcinek AD.

21.13. Oblicz stosunek boków trójkąta równoramiennego, jeden z kątów którego wynosi 120°.

21.14. W trójkącie ABC wiadomo, że $AC = 6\sqrt{3}$ cm, $\angle ABC = 60°$. Oblicz promień okręgu, który przechodzi przez środek okręgu wpisanego okręgu w trójkącie ABC oraz przez punkty A i C.

21.15. Dwa boki trójkąta są równe 5 cm i 8 cm, a kąt, zawarty między nimi – 60°. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

21.16. Oblicz dwusieczna trójkąta ABC, poprowadzoną z wierzchołka A, jeżeli $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$.

21.17. W równoległoboku $ABCD$ dwusieczna kąta BAD przecina bok BC w punkcie M. Oblicz pole trójkąta ABM, jeżeli $AB = 4$ cm, $\angle BAD = 60°$.

21.18. Oblicz największą wysokość, promienie okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie o bokach 4 cm, 13 cm i 15 cm.

21.19. Promienie dwóch okręgów jest równe 17 cm i 39 cm, zaś odległość między ich środkami – 44 cm. Oblicz długość wspólnej cięciwy danych okręgów.

21.20. Oblicz pole równoległoboku, jeden z boków którego wynosi 15 cm, zaś przekątne – 11 cm i 25 cm.

21.21. Podstawy trapezu są równe 16 cm i 44 cm, a ramiona – 17 cm i 25 cm. Oblicz pole trapezu.

21.22. Podstawy trapezu są równe 5 cm i 12 cm, zaś przekątne – 9 cm i 10 cm. Oblicz pole trapezu.

2. Wielokąty foremne

21.23. Oblicz pole foremnego n-kąta, jeżeli promień wpisanego w niego okręgu jest równy 6 cm, zaś n jest równe: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

21.24. W okrąg wpisano kwadrat o boku 4 cm. Oblicz pole foremnego trójkąta wpisanego w ten sam okrąg.

21.25. Oblicz stosunek pól foremnych trójkąta oraz sześciokąta, wpisanych w ten sam okrąg.

21.26. Środki boków foremnego 12-kątnego wielokąta złączone przez jeden bok tak, że otrzymana figura jest foremnym sześciokątem. Oblicz bok danego 12-kąta, jeżeli bok utworzonego sześciokąta jest równy a.

21.27. Długość łuku okręgu jest równa 6π cm, a jego miara stopniowa – 24°. Oblicz promień okręgu.

21.28. Na przyprostokątnej AC w trójkącie prostokątnym ABC ($\angle C = 90°$) jak na średnicę skonstruowano okrąg. Oblicz długość boku tego okręgu, zawartego w trójkącie i odcięty przeciwprostokątną AB, jeżeli $\angle A = 42°$, $AC = 8$ cm.

21.29. Bok kwadratu jest równy $2\sqrt{2}$ cm. Oblicz długość łuku opisanego okręgu na danym kwadracie gdzie końce łuku są dwa wierzchołki.

21.30. Odległość między środkami dwóch okręgów o promieniu R jest równa R. Oblicz pole figury, która jest wspólną częścią tych okręgów, i długość linii, która ogranicza tę figurę.

21.31. Pole wycinka kołowego dorównuje 2,4π cm^2. Oblicz miarę pionową łuku tego wycinka, jeżeli promień koła jest równy 4 cm.

21.32. Średnica koła wagonu pociągowego kolei podziemnej jest równa 78 cm. W ciągu 2,5 min. koło obróci się 1000 razy. Oblicz prędkość pociągu kolei podziemnej w kilometrach na godzinę. Odpowiedź zaokrąglij do dziesiętnych.

21.33. Oblicz długość okręgu wpisanego w wycinek, długość łuku którego jest równa m, zaś miara stopniowa wynosi 120°.

21.34. Do okręgu o promieniu równym R, poprowadzono dwie styczne, kąt między którymi jest równy 60°. Oblicz pole figury ograniczonej stycznymi i mniejszymi łukami, końce których są punkty styczności.

3. Kartezjańskie współrzędne na płaszczyźnie

21.35. Wierzchołki trójkąta leżą w punktach A (–4; 1), B (–2; 4) i C (0; 1). Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoramienny i oblicz jego pole.

21.36. Wskaż współrzędne punktu przecięcia symetralnej odcinka AB z osią odciętych, jeżeli A (5; –3), B (4; 6).

21.37. Oblicz współrzędne punktu przecięcia symetralnej odcinka CD z osią rzędnych, jeżeli C (2; 1), D (4; –3).

21.38. Udowodnij że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach w punktach A (–12; 6), B (0; 11), C (5; –1) i D (–7; –6) jest kwadratem.

21.39. Punkt M (5; –2) jest jednym z końców średnicy okręgu, punkt N (2; 0) – środek okręgu. Oblicz współrzędne drugiego końca średnicy.

21.40. Przekonaj się, czy punkty A (–4; –3), B (26; 7) i C (2; –1) leżą na jednej prostej. W razie odpowiedzi stwierdzającej podaj, który z tych punktów leży między dwoma innymi.

21.41. Udowodnij, że trójkąt, wierzchołkami którego są punkty A (5; 1), B (9; –2) i C (7; 2), jest prostokątny i ułóż równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

21.42. Przekonaj się, czy odcinek CD jest środkową okręgu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 52$, jeżeli C (–8; 7), D (4; –1).

21.43. Okrąg, środek którego leży na osi rzędnych przechodzi przez punkty A (1; 2) i B (3; 6). Czy należy do tego okręgu punkt C (–3; 4) ?

21.44. Okrąg, o środku w punkcie M (–5; 3) jest styczny do osi rzędnych. Oblicz współrzędne punktów przecięcia okręgu z osią odciętych.

21.45. Oblicz długość linii podanej równaniem

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$$

21.46. Ułóż równanie prostej, przechodzącej przez punkt P (–3; 5) i współczynnikiem kątowym równym 6.

21.47. Ułóż równanie prostej, przechodzącej przez punkt S (–1; 4) i tworzy z dodatnim kierunkiem osi odciętych kąt równy 135°.

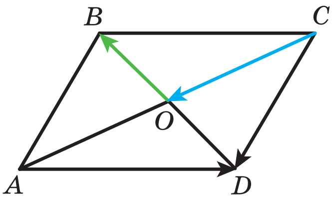
21.48. Ułóż równanie prostej, przechodzącej przez punkt A (–3; 1) i równoległej do prostej $5x + 3y = 6$.

21.49. Podaj równanie miejsca geometrycznego środków okręgów, które przechodzą przez punkty A (–3; –2) i B (2; 5).

4. Wektory na płaszczyźnie

21.50. Dwa wierzchołki prostokąta $ABCD$ – są punkty A (3; 2) i B (3; –4). Moduł wektora $\overrightarrow{BD}$ jest równy 10. Oblicz współrzędne punktów C i D.

21.51. Przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie O (rys. 21.1). Wyraź wektory $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{AD}$ przez wektory $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



Rys. 21.1

21.52. Czworokąt $ABCD$ – równoległobok. Oblicz:

1) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$;

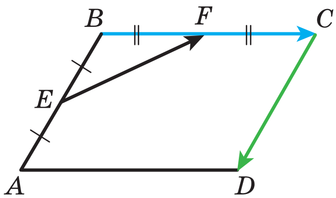
2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$.

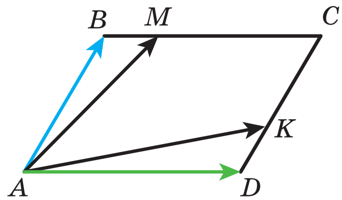
21.53. Oblicz moduł wektora $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, gdzie $\vec{a}\,(1; -2)$, $\vec{b}\,(-1; 3)$.

21.54. Punkty E i F – środki odpowiednich boków AB i BC równoległoboku $ABCD$ (rys. 21.2). Wyraź wektor $\overrightarrow{EF}$ przez wektory $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

21.55. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zaznaczono odpowiednio punkty M i K, przy czym $BM = \frac{1}{4}BC$, $CK = \frac{2}{3}CD$ (rys. 21.3). Wyraź wektory $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{AK}$ przez wektory $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.



Rys. 21.2



Rys. 21.3

21.56. Na bokach AB i BC trójkąta ABC zaznaczono takie punkty D i E odpowiednio, że $AD : DC = 1 : 2$, $BE : EC = 2 : 1$. Wyraź wektory $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{CD}$ przez wektory $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

21.57. Czy wektory $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{KP}$, są kolinearny, jeżeli $M\,(4; -1)$, $N\,(-6; 5)$, $K\,(7; -2)$, $P\,(2; 1)$?

21.58. Oblicz wartość k, przy którym wektory $\vec{a}\,(k; -2)$ i $\vec{b}\,(6; 3)$ są kolinearne.

21.59. Dane są wektory $\vec{a}\,(3; -2)$ i $\vec{b}\,(x; 4)$. Przy jakiej wartości x spełnia się równość $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$?

21.60. Oblicz cosinusy kątów w trójkącie ABC, jeżeli $A\,(-3; -4)$, $B\,(2; -3)$, $C\,(3; 5)$. Ustal rodzaj trójkąta.

21.61. Dane są wektory $\vec{a}\,(2; -1)$ i $\vec{b}\,(1; -2)$. Oblicz wartość m, przy których wektory $\vec{a} + m\vec{b}$ i $\vec{b}$ są proporcjonalne.

21.62. Oblicz cosinus kąta między wektorami $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, jeżeli $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ i $\vec{m} \perp \vec{n}$.

21.63. Dane są wektory $\vec{a}$ **(2; –4)** i $\vec{b}$ **(–1; 1).** Oblicz:

1) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; 2) $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|$.

21.64. Ułóż równanie prostej stycznej w punkcie A (5; –3) do okręgu o środku M (0; –4).

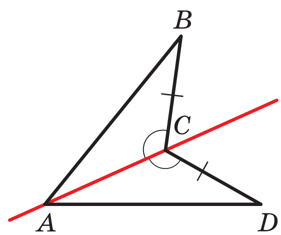
5. Przekształcenia geometryczne

21.65. W równoległym przesunięciu obrazem punktu A (3; –2) jest punkt B (5; –3). Jaki punkt jest obrazem dla punktu C (–3; 4) przy tym samym równoległym przesunięciu?

21.66. Skonstruuj obrazy punktów A (1; –3), B (0; –5) i C (2; 1) w równoległym przesunięciu o wektor $\vec{a}$ **(–2; 1).** Podaj współrzędne skonstruowanych punktów.

21.67. Dane są punkty C (7; –4) i D (–1; 8). W równoległym przesunięciu obrazem środka odcinka CD jest punkt P (–1; –3). Podaj współrzędne punktów, które są obrazem punktów C i D.

21.68. Według rysunku 21.4 wiadomo, że $CB = CD$, $\angle ACB = \angle ACD$. Udowodnij, że punkty B i D są symetryczne względem prostej AC.



Rys. 21.4

21.69. Podaj współrzędne punktów symetrycznych do punktu K (4; –2) względem osi współrzędnych i początku współrzędnych.

21.70. Oblicz x i y, jeżeli punkty A (x; –2) i B (3; y) są symetryczne względem osi odciętych.

21.71. Wiadoma jest półprosta OA oraz punkt B, który nie należy do niej. Skonstruuj półprostą symetryczną do danej względem punktu B.

21.72. Czy punkty M (–3; 10) i N (–1; 6) są symetryczne względem punktu K (1; 4)?

21.73. Podaj równanie okręgu, który jest symetryczny z okręgiem $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 11$ względem:

1) początku współrzędnych; 2) punktu M (–3; 3).

21.74. Dane są punkty K i O. Skonstruuj punkt K_1, który jest obrazem punktu K przy obrocie dookoła punktu O: 1) o kąt 130° w kierunku nie zgodnie skierowanym ze wskazówkami zegara; 2) o kąt 40° w kierunku zgodnie skierowanym ze wskazówkami zegara.

21.75. Dany jest odcinek AB i punkt O, który nie należy do niego. Skonstruuj odcinek A_1B_1, który jest obrazem odcinka AB przy obrocie o kąt 50° dookoła punktu O w kierunku zgodnie skierowanym ze wskazówkami zegara.

21.76. Na jaki kąt należy powrócić prostokąt, różny od kwadratu, względem jego środka symetrii, aby jego obrazem był ten sam prostokąt?

21.77. Wykreśl trójkąt jednokładny z danym trójkątem, jeżeli środkiem jednokładności jest środek okręgu opisanego na trójkącie, o współczynniku jednokładności $k = -2$.

21.78. W jednokładności o środku w początku współrzędnych obrazem punktu A (8; –2) jest punkt B (4; –1). Oblicz współczynnik jednokładności.

21.79. Boki dwóch trójkątów równobocznych są równe 8 cm i 28 cm. Ile jest równy stosunek ich pól?

21.80. Wielokąt F_1 jest podobny do wielokąta F_2 o współczynniku podobieństwa k. Oznaczymy odpowiednio ich obwody i pola literami P_1, P_2, S_1, S_2. Uzupełnij puste kratki w tabeli.

P_1	P_2	S_1	S_2	k
	19	64	16	
12	36	7		
	35	4	100	
	21	36		2

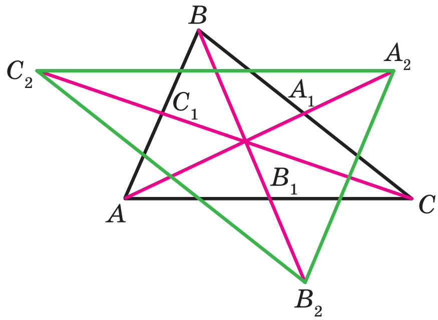
21.81. Prosta równoległa do boku trójkąta o długości 6 cm dzieli ten trójkąt na dwie figury, pola których mają się do siebie jak 1 : 3. Oblicz odcinek tej prostej, który jest zawarty wewnątrz trójkąta.

21.82. W kwadracie $ABCD$ o boku BC wybrano taki punkt M, że $BM : MC = 1 : 2$. Odcinki AM i BD przecinają się w punkcie P. Oblicz pole trójkąta BPM, jeżeli pole trójkąta APD jest równe 27 cm^2.

21.83. Przedłużenie ramion AB i CD w trapezie $ABCD$ przecinają się w punkcie M. Oblicz pole trapezu, jeżeli $AB : BM = 5 : 3$, $AD > BC$, a pole trójkąta AMD jest równe 32 cm^2.

21.84. W trójkącie ABC wiadomo, że $AB = BC = 13$ cm, $AC = 10$ cm. Do okręgu wpisanego w ten trójkąt, poprowadzono styczną, która jest równoległa do boku AC oraz przecina boki AB i BC odpowiednio w punktach M i K. Oblicz pole trójkąta MBK.

21.85. Na przedłużeniu środkowych AA_1, BB_1 i CC_1 w trójkącie ABC wybrano odpowiednio punkty A_2, B_2 i C_2 tak, że $A_1A_2 = \frac{1}{2}AA_1$, $B_1B_2 = \frac{1}{2}BB_1$, $C_1C_2 = \frac{1}{2}CC_1$ (rys. 21.5). Oblicz pole trójkąta $A_2B_2C_2$, jeżeli pole trójkąta ABC jest równe 1 cm^2.



Rys. 21.5

Przyjaźnimy się z komputerem

Będziecie nadal doskonalić nabyte uprawy zastosowania komputera, które otrzymaliście w klasach 7. i 8., opanowywać nowe sposoby oraz nowe programowe środki. Przypominamy wam, że oprócz zadań podanych w tym rozdziale, możecie zastosować różnorodne programy, stworzone dla nauczania szkolnego kursu geometrii. Możecie skorzystać z globalnej sieci Internetu, aby wyszukać odpowiedni program oraz inne dodatkowe informacje dotyczące kursu geometrii.

W podręczniku umieszczono krótkie informacje o wybitnych uczonych, prace których są powiązane z tematami szkolnymi. Za pomocą globalnej sieci Internetu możecie dowiedzieć się więcej o ich życiorysie oraz naukowych odkryciach.

Jeżeli chcecie wybrać zawód, który potrzebuje stałego korzystania wiadomości z matematyki, to możecie zaczynać opanowywać matematyczne zestawy (na przykład, *Mathcad*, *MATLAB* i in.), które zawierają potężne instrumenty do obliczeń matematycznych, konstrukcji geometrycznych i in. Dla przyszłego inżyniera potrzebne są wiadomości wykresów inżynierowych oraz umiejętność konstrukcji określeń złożonych (otrzymać te wiadomości można, na przykład korzystając z pakietu *AutoCAD*). Możecie opanowywać te programowe środki, wykonując zadania z kursu geometrii.

W tym rozdziale są podane zadania, które możecie wykonywać za pomocą komputera w miarę poznawania odpowiednich tematów. Przeważnie to zadania o konstrukcji figur geometrycznych, za pomocą redaktora graficznego oraz obliczenia, które nie można wykonać za pomocą kalkulatora lub matematycznych pakietów.

Oprócz tych zadań, możecie korzystać z zadań z rubryki “Zadania praktyczne” nie tylko w zeszycie, lecz i za pomocą redaktora graficznego.

Większa część z kursu geometrii klasy 9. opiera się kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie oraz na układaniu równań figur. W zależności od możliwości języka programowania, którym posługujecie się na lekcjach informatyki lub samodzielnie, poleca się ułożyć program do przedstawienia na ekranie komputera punktów z podanymi współrzędnymi; prostych i okręgów z podaniem ich równań i in. Te zadania można zastosować na lekcjach z informatyki lub podczas lekcyj pozalekcyjnych oraz do samodzielnego opracowania programowania. Niżej podamy najprostsze zadania: biorąc ich jako wzór, możecie układać samodzielnie nowe zadania oraz układać algorytm dla ich rozwiązywania.

Sinus, kosinus i tangens kąta od 0° do 180°

1. Naucz się obliczać wartości funkcyj trygonometrycznych kątów oraz znalezienia kąta według jego trygonometrycznych funkcji za pomocą kalkulatora.

Twierdzenie cosinusów

2. Zilustruj wniosek z twierdzenia kosinusów za pomocą redaktora graficznego w następujący sposób.

Wybierz zbiór liczb dodatnich, które spełniają warunek $a^2 < b^2 + c^2$, gdzie a – największa liczba z wybranych. Zbuduj zbiór odcinków z podanymi długościami a, b i c. Ułóż z tych odcinków trójkąt, czy będzie on ostrokątnym? Zrób takie same działania dla warunku $a^2 > b^2 + c^2$ i $a^2 = b^2 + c^2$. Liczbę a, b i c mogą spełniać warunek $a < b + c$.

Twierdzenie sinusów

3. Wykreśl dowolny trójkąt, za pomocą instrumentów graficznego redaktora wymierz jego boki oraz kąty. Sprawdź, czy spełnia się twierdzenie sinusów. Wykonaj obliczenia za pomocą komputera.

Rozwiązywanie trójkątów. Wzór na obliczenie pola trójkąta

4. Zadania z pp. 4, 5, które potrzebują znalezienia wartości funkcji trygonometrycznych i złożonych obliczeń możesz wykonać za pomocą komputera.

Wielokąty foremne oraz ich własności

5. Pomyśl, jak można przeprowadzić konstrukcję wielokątów foremnych. Rozpatrz dwa sposoby: 1) zastosuj twierdzenie 6.2 i wzór do obliczenia wielkości kąta środkowego wpisanego wielokąta; 2) zastosuj informację o wielkości kąta wielokąta foremnego oraz długości jego boku.
6. Wykreśl kilka wielokątów foremnych z podaną ilością boków.

Długość okręgu. Pole koła

7. Oblicz kilka razy długość okręgu oraz pole koła, zastosowując przybliżoną wartość π z różną dokładnością.

Czy jest w kalkulatorze lub w matematycznym pakiecie, który zastosujesz, środki dla zastosowania wartości liczby π w naturalnej postaci? Z jaką dokładnością podają liczbę π te środki?

Odległość między dwoma punktami o wiadomych ich współrzędnych. Współrzędne środka odcinka

8. Większość redaktorów graficznych podają obszar dla kreślenia w postaci płaszczyzny współrzędnych. Zbadaj, w jaki sposób podają się współrzędne punktów na tej płaszczyźnie. Pomyśl, w jaki sposób możesz zastosować ten instrument dla wykonania konstrukcji.

Równanie figury

9. Jeżeli opracowujesz matematyczny pakiet, to możesz za ich pomocą wykreślić kilka jakichkolwiek figur mających ich równanie.
10. Ucząc się programowania na lekcjach z informatyki, możesz utworzyć swoje środki dla przedstawienia na ekranie komputera figur według ich równań.
11. Znajdź w globalnej sieci Internetu informację o równości dla automatycznych prac kreślarskich (tak zwane plotery, ang. *plotter*). Czym są podobne i czym różnią się metody konstrukcji przedstawień na ekranie komputera od przedstawienia na papierze? ploterze? Zapoznaj się z pojęciem "żółwi wykres".
12. Napisz program który według wiadomych danych wartości a, b i c wywnioskuje jaka figura będzie wykresem równania $ax + by = c$, zawiadomi o tym oraz przedstawi wykres na ekranie komputera.

Współczynnik kątowy prostej

13. Jakie środki redaktora graficznego można zastosować, aby zbudować prostą o podanym współczynniku kątowym?
14. Napisz program, za pomocą którego według wiadomych wartości k i b buduje przedstawienie prostej $y = kx + b$ na ekranie komputera.

Pojęcie wektora

15. Przedstaw za pomocą redaktora graficznego kilka wektorów, które ilustrują treść p. 12 podręcznika. Który z instrumentów zastosujesz dla konstrukcji wektorów kolinearnych? zgodnie skierowanych wektorów? wektorów o zwrocie przeciwnym? Określ moduły wbudowanych wektorów. W jaki sposób najprościej to wykonać?

Współrzędne wektora

16. Na ekranie komputera przedstaw kartezjański układ współrzędnych, wybierz zręczny odcinek jednostkowy. Podaj współrzędne wektora oraz współrzędne jakiegokolwiek punktu. Od tego punktu odłóż wektor z wiadomymi współrzędnymi.

Dodawanie i odejmowanie wektorów

17. Wykreśl kilka dowolnych wektorów. Za pomocą jakich instrumentów redaktora graficznego najprościej znaleźć sumę i różnicę wektorów?

Mnożenie wektora przez liczbę

18. Wykreśl dowolny wektor i podaj kilka dowolnych liczb (naturalnych, całkowitych, ułamkowych). Zbuduj wektory, który są iloczynami wykreślonego wektora oraz tych liczb.

Skalarny iloczyn wektorów

19. Na płaszczyźnie współrzędnych wykreśl dwa dowolne wektory. Oblicz wielkość kąta między nimi za pomocą wniosku z twierdzenia 16.2. Sprawdź otrzymany wynik, określając ten kąt między wektorami za pomocą redaktora graficznego.

Przekształcenie geometryczne

20. Określ, za pomocą jakich metod redaktora graficznego można wykonać przesunięcie figury. Jakie rodzaje przesunięć można zrealizować za ich pomocą?
21. Znajdź środki redaktora graficznego za pomocą których można zbudować: 1) figurę symetryczną do danej figury względem danej prostej; 2) figurę symetryczną do danej figury względem danego punktu; 3) figurę jednokładną danej figurze.
22. Znajdź środki redaktora graficznego, za pomocą którego można zbudować figurę podobną do danej. Jakie metody należy użyć, aby te figury były podobne o zadanych współczynnikach?

Odpowiedzi i wskazówki do ćwiczeń

§ 1. Rozwiązywanie trójkątów

1. Sinus, kosinus i tangens kąta od 0° do 180°

1.11. 3) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ lub $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) 0,6. **1.12.** 1) $\frac{12}{13}$ lub $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$. **1.15.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) –1,5; 3) $-\sqrt{3}-2$. **1.16.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$. **1.21.** $-\frac{1}{2}$. **1.22.** 120°. **1.23.** 10 cm, 30°, 120°. **1.26.** $5\sqrt{6}$ cm.

2. Twierdzenie cosinusów

2.3. 120°. **2.4.** 45°. **2.10.** $2\sqrt{7}$ cm. **2.11.** $\sqrt{10}$ cm. **2.12.** $\sqrt{21}$ cm lub $\sqrt{29}$ cm. **2.13.** 13 cm. **2.14.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.15.** $3\sqrt{89}$ cm. **2.16.** $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **2.17.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **2.18.** 15 cm, 24 cm. **2.19.** 2 cm, $4\sqrt{3}$ cm. **2.20.** 3 cm, 5 cm. **2.21.** 10 cm, 6 cm, 14 cm. **2.22.** 6 cm lub 10 cm. **2.23.** 75 cm. **2.24.** 13 cm. **2.25.** $\sqrt{79}$ cm. **2.29.** 14 cm. **2.30.** 34 cm. **2.31.** 7 cm, 9 cm. **2.32.** 20 cm, 30 cm. **2.33.** 8 cm. *Wskazówka.* Przez wierzchołek B poprowadź prostą równoległą do boku CD, i rozpatrz utworzony trójkąt. **2.34.** $\frac{13}{20}$. **2.35.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ cm. **2.36.** Nie. **2.38.** 10 cm. **2.39.** 6 cm. **2.40.** 11 cm. **2.41.** 6 cm. **2.42.** 22 cm. **2.47.** 4 cm, 6 cm.

3. Twierdzenie sinusów

3.14. $2\sqrt{6}$ cm. **3.15.** 6 cm. **3.16.** $\frac{a\sin\beta}{\cos(\beta+\gamma)\sin\gamma}$. **3.17.** $\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **3.18.** $\frac{c\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma\sin\varphi}$. **3.19.** $\frac{m\sin\alpha\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$. **3.21.** 9 cm. **3.22.** $\frac{25}{3}$ cm. **3.23.** 60° lub 120°. **3.24.** 4,5 godz. **3.25.** $\frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$. **3.26.** $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45°+\frac{3\alpha}{4}\right)}$. **3.28.** $\frac{85}{8}$ cm. *Wskazówka.* Szukany promień można znaleźć jak promień okręgu opisanego na trójkącie, bokami którego jest jedna z podstaw ramię oraz przekątna trapezu. **3.29.** $\frac{a \sin \alpha}{\sin \beta}$. *Wskazówka*. Udowodnij, że $CE = DE$. **3.30.** $\frac{2m \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$, $\frac{2m \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$. *Wskazówka*. Na przedłużeniu środkowej AM poza punktem M wybierz taki punkt K, aby $AM = MK$, i zastosuj twierdzenie sinusów dla trójkąta ACK lub trójkąta ABK. **3.31.** $\frac{a \sin (\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha}$. **3.32.** *Wskazówka*. Wyraź kąty AHB, BHC i AHC przez kąty trójkąta ABC. **3.33.** Prędzej dojechać przez wieś C. *Wskazówka*. Przyjmij odległość między jakimkolwiek dwiema wioskami przez a i wyraź przez a odległość między pozostałymi wioskami. **3.34.** Autobus. **3.37.** 12 cm.

4. Rozwiązywanie trójkątów

4.12. 107°, 73°, 132°, 48°. *Wskazówka*. Poprowadź przez wierzchołek mniejszej podstawy prostą równoległą do ramiona trapezu i rozpatrz trójkąt który utworzył się. **4.13.** 9 cm. **4.14.** 30 cm, 48 cm.

5. Wzór na obliczenie pola trójkąta

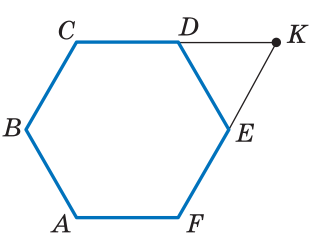
5.4. 1) 60° lub 120°; 2) 90°. **5.5.** 30° lub 150°. **5.9.** 12 cm. **5.10.** 24 cm. **5.11.** 24 cm². **5.12.** $\frac{7}{3}$ cm. **5.13.** 1) $\frac{3}{2}$ cm, $\frac{25}{8}$ cm; 2) 8 cm, $\frac{145}{8}$ cm. **5.14.** 2 cm, $\frac{145}{8}$ cm. **5.25.** 3 : 5. **5.26.** $\frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)}$. **5.27.** $2R^2 \times \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta)$. **5.28.** $\frac{b^2 \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}{2 \sin \beta}$. **5.29.** $\frac{h_1 h_2}{2 \sin \alpha}$. **5.30.** $\frac{h^2 \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}$. **5.31.** 51 cm², 75 cm², 84 cm². **5.32.** $\frac{24}{7}$ cm. *Wskazówka*. Skorzystaj z tego, że $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$. **5.33.** 360 cm². *Wskazówka*. Przez jeden z końców mniejszej podstawy trapezu, poprowadź prostą równoległą do ramienia trapezu oraz oblicz wysokość trójkąta, który ta prosta odcięła od trapezu. **5.34.** $12\sqrt{5}$ cm². *Wskazówka*. Niech $ABCD$ – dany trapez, $BC \parallel AD$. Przez wierzchołek C poprowadź prostą, równoległą do prostej BD i przecina prostą AD w punkcie E. Udowodnij, że trójkąt ACE oraz dany trapez są równoważne. **5.35.** 1 : 2. *Wskazówka*.

$\dfrac{S_{AMK}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2} AK \cdot AM \sin A}{\frac{1}{2} AC \cdot AB \sin A} = \cos^2 A.$ **5.36.** 19,5 cm. **5.37.** 13 cm, 14 cm, 15 cm. **5.39.** 10°. **5.40.** 91 cm, 21 cm. **5.41.** 9,6 cm.

§ 2. Wielokąty foremne

6. Wielokąty foremne oraz ich własności

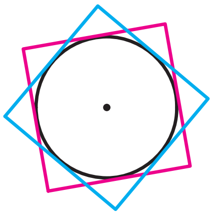
6.20. $\sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{4}}$. **6.21.** $2\sqrt{R^2 - r^2}$. **6.22.** $\sqrt{r^2 + \dfrac{a^2}{4}}$. **6.26.** ≈ 17,4 cm. **6.27.** ≈ 19,8 cm. **6.28.** 5 boków. **6.29.** 18 boków. **6.32.** 1) $\dfrac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$; 2) $\dfrac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}$. **6.33.** 1) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **6.34.** 1 : 2. **6.35.** $\sqrt{3} : 2$. **6.38.** 4,4 cm. **6.39.** $2R^2\sqrt{2}$. **6.40.** $a\sqrt{3}$; $2a$; $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **6.41.** $6\left(\sqrt{2}-1\right)$ cm. **6.42.** 8 cm. **6.43.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a\left(\sqrt{2}+1\right)$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **6.44.** $\dfrac{a\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$. **6.45.** $\dfrac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$. **6.46.** Trójkątów lub kwadratów, lub sześciokątów. *Wskazówka*. Dookoła jednego punktu można odłożyć tyle deseczek, o ile razy kąt przy wierzchołku deseczki, który jest równy $\dfrac{180°(n-2)}{n}$, będzie mniejszy od 360°, to znaczy $360° : \dfrac{180°(n-2)}{n} = \dfrac{2n}{n-2}$ deseczek. Wartość wyrażenia $\dfrac{2n}{n-2}$ musi być liczbą naturalną. Ponieważ $\dfrac{2n}{n-2} = \dfrac{2n-4+4}{n-2} = 2 + \dfrac{4}{n-2}$, to wartość wyrażenia $\dfrac{4}{n-2}$ musi być liczbą naturalną. **6.47.** *Wskazówka*. Niech *ABCDEF* – sześciokąt foremny (patrz rysunek), *K* – punkt przecięcia prostych *CD* i *EF*. Wtedy *AK* – szukany odcinek. **6.49.** 18 cm. **6.50.** 96 cm². **6.51.** 9 cm.



Do zadania 6.47

7. Długość okręgu. Pole koła

7.25. 22,5°. **7.30.** $\sqrt{6}$ cm. **7.32.** 1) $\frac{25(\pi-2\sqrt{2})}{8}$ cm^2; 2) $\frac{25(5\pi-3)}{12}$ cm^2; 3) $\frac{25(11\pi+3)}{12}$ cm^2. **7.33.** 1) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$ cm^2; 2) $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{3}$ cm^2. **7.38.** 2π cm, $\frac{10\pi}{3}$ cm, $\frac{20\pi}{3}$ cm. **7.39.** $\frac{25\pi}{18}$ cm, $\frac{35\pi}{18}$ cm, $\frac{20\pi}{3}$ cm. **7.40.** $\frac{8\pi}{3}$ cm. **7.41.** 6π cm. **7.42.** 1 : 1. *Wskazówka.* Udowodnij, że w obu przypadkach suma długości półokręgów dorównuje $\frac{1}{2}\pi AB$. **7.44.** 50 cm. **7.46.** $\frac{a^2(\pi-2)}{8}$. **7.47.** ≈ 17,3 %. **7.48.** $\frac{a^2(4\pi-3\sqrt{3})}{36}$. **7.49.** $\frac{\pi R^2}{9}$. **7.50.** $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **7.51.** $\frac{2\pi a}{3}$. *Wskazówka.* Rozpatrz trójkąt *AND* i udowodnij, że on jest równoboczny. **7.52.** *Wskazówka.* Suma pól wszystkich pomalowanych i nie pomalowanych sierpików jest równa sumie pól dwóch kół, średnice których są sąsiednimi bokami prostokąta, zaś suma pól nie pomalowanych sierpików i prostokąta dorównuje polu koła, średnica którego jest przekątną prostokąta. Pokaż, że te sumy są równe. **7.53.** *Wskazówka.* Wspólna część kwadratu zawiera koło, promień którego jest równy $\frac{1}{2}$ cm (patrz rysunek). **7.55.** $\frac{130}{17}$ cm, $\frac{312}{17}$ cm. **7.56.** *Wskazówka.* Przez środek mniejszej podstawy poprowadź proste równoległe do ramion trapezu.



Do zadania 7.53

§ 3. Kartezjańskie współrzędne na płaszczyźnie

8. Odległość między dwoma punktami z danymi współrzędnymi. Współrzędne środka odcinka

8.13. 1) Tak, punkt B leży między punktami A i C; 2) Nie. **8.15.** $x = 7$ lub $x = -1$. **8.16.** (3; 0). **8.17.** (0; 0,5). **8.18.** (3; –0,5). **8.19.** (–2; 2). **8.20.** (3; –2). **8.24.** A (–5; 3), C (7; 5). **8.25.** $\mathbf{2\sqrt{73}}$. **8.26.** $\left(3\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$ lub $\left(-3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right)$. **8.27.** $\left(-2; 4\sqrt{3}\right)$ lub $\left(-2; -4\sqrt{3}\right)$. **8.28.** (3; 3) lub (–6; 6). *Wskazówka*. Rozpatrz trzy przypadki: B (a; a) lub B (a; $-a$). **8.29.** (5,5; 0), (3; 0), (–1; 0). *Wskazówka*. Rozpatrz trzy przypadki: $AC = BC$, $AC = AB$ i $BC = AB$. **8.30.** (0; 6), (0; 4), (0; 3,5), (0; 8,5). *Wskazówka*. Rozpatrz trzy przypadki: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AC^2 + AB^2 = BC^2$. **8.31.** $\sqrt{33}$ cm. **8.32.** 56°, 124°. **8.33.** 8 cm i 16 cm.

9. Równanie figury. Równanie okręgu

9.16. Dwa okręgi: $x^2 + (y - 11)^2 = 45$ i $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. **9.17.** $(x - 3)^2 + y^2 = 50$. **9.19.** 1) Tak, punkt (–1; 5) – środek okręgu, $R = 7$; 2) nie; 3) nie; 4) tak, punkt (2; 7) – środek okręgu, $R = \sqrt{2}$. **9.20.** 1) Punkt (0; –8) – środek okręgu, $R = 2$; 2) punkt (4; –2) – środek okręgu, $R = \sqrt{5}$. **9.21.** $(x - 2)^2 + y^2 = 13$. **9.22.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ lub $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 25$. **9.23.** $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 10$ lub $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. **9.24.** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ lub $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. *Wskazówka*. Średnica szukanego okręgu jest równa odległości między osią odciętych i prostą $y = -4$, a środek okręgu należy do dwusiecznej trzeciej lub czwartej kąta współrzędnych. **9.25.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ lub $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$. **9.26.** 1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 2) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 169$. **9.27.** $180\sqrt{3}$ cm². **9.28.** 70 cm. **9.29.** 600 cm².

10. Równanie prostej

10.7. 1) $y = 2x - 5$; 2) $x = 3$; 3) $y = -1$; 4) $5x + 3y = 6$. **10.8.** 1) $y = -3x + 1$; 2) $x - 6y = 12$. **10.9.** 1) (–8; –31); 2) (–1; 2). **10.10.** 1) (2; –7); 2) (4; –1). **10.11.** $y = -0{,}5x - 4$. **10.12.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$. **10.14.** 12. **10.15.** 28. **10.16.** 6. **10.17.** (2; 5), (5; 2). **10.18.** (5; 0). **10.20.** $\frac{10\sqrt{29}}{29}$. *Wskazówka*. Szukana odległość jest równa wysokości trójkąta ograniczonego osiami współrzędnych i daną prostą. **10.21.** $4\sqrt{2}$. **10.22.** $3\sqrt{10}$. **10.23.** $x - 3y =$

= 2. **10.24.** $7x + 5y = -8$. **10.25.** (3; 3) lub (15; 15). **10.26.** (–2; 2) lub (–10; 10). **10.27.** $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 17$. **10.28.** $(y-4)(y+4) = 0$. **10.29.** $\sqrt{10}$ cm, $\sqrt{58}$ cm. **10.30.** 104 cm. **10.31.** 12,5 cm.

11. Współczynnik kątowy prostej

11.5. 1) $y = 4x + 19$; 2) $y = -3x - 2$; 3) $y = 7$. **11.6.** $y = -0{,}5x - 4$. **11.7.** 1) $y = -7x + 2$; 2) $3x - 4y = -39$. **11.8.** 1) $y = 9x + 13$; 2) $3x + y = = 9$. **11.9.** 1) $y = x\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3}$; 2) $y = -x\sqrt{3} + 6 + 2\sqrt{3}$. **11.10.** 1) $y = = x - 5$; 2) $y = -x + 1$. **11.11.** *a*) $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} + 3$; *b*) $y = -\frac{x\sqrt{3}}{3} + 2$. **11.12.** 1) Tak; 2) tak; 3) nie; 4) nie. **11.14.** $y = 4x + 9$. **11.15.** $y = 3x - 12$. **11.16.** $y = x + 4$. **11.18.** 30 cm, 40 cm. **11.19.** 144 cm^2.

§ 4. Wektory

12. Pojęcie wektora

12.26. Prostokąt lub trapez równoramienny. **12.34.** 60°, 120°. **12.35.** 4 cm, 12 cm. **12.36.** $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. *Wskazówka*. Przez wierzchołek B poprowadź prostą równoległą do prostej MK.

13. Współrzędne wektora

13.16. $\overrightarrow{AF}(-2; 2)$, $\overrightarrow{FD}(2; 4)$. **13.17.** $\overrightarrow{DE}(-4; 6)$, $\overrightarrow{EO}(-4; -6)$. **13.18.** $\vec{a}(-6; -8)$ lub $\vec{a}(8; 6)$. **13.19.** $\vec{c}\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ lub $\vec{c}\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$. **13.20.** C (7; 17), D (2; 17) lub C (7; –7), D (2; –7). **13.21.** B (16; 2), C (16; –6) lub B (–14; 2), C (–14; –6). **13.23.** 20 cm, 7 cm, 21 cm. **13.24.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

14. Dodawanie i odejmowanie wektorów

14.45. 1) Tak; 2) tak; 3) nie. **14.46.** *Wskazówka*. Wskaż, że każdy z wektorów $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ jest równy wektorowi zerowemu. **14.48.** *Wskazówka*. Wystarczy pokazać, że $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XC}$. **14.49.** Okrąg o promieniu AB o środku w punkcie A. **14.50.** Symetralna odcinka AB. **14.51.** 0,2 m/s, $\sqrt{1{,}04}$ m/s. **14.52.** 60°. **14.53.** *Wskazówka*. Niech odcinek AA_1 – środkowa trójkąta ABC. Na przedłużeniu odcinka AA_1 poza punktem A_1 odłuż odcinek A_1D, równy MA_1. **14.54.** *Wskazówka*. Mamy: $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2C_1} + + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_2A_2} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_2A_2} = \vec{0}$, stąd $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$. **14.55.** 4 cm, 6 cm. **14.56.** 2,5 cm.

15. Mnożenie wektora przez liczbę

15.31. –4; 4. **15.32.** –1,5. **15.34.** $\vec{m}$ **(–15; 36).** **15.35.** $\vec{a}$ **(–3; 4).** **15.38.** $x = 2$, $y = -3$. **15.39.** $\overrightarrow{OK} = 0{,}5\vec{a} - 0{,}1\vec{b}$. **15.43.** $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **15.45.** *Wskazówka.* Z jednej strony, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2M_2}$. Z drugiej strony, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2M_2}$. Dodaj te równości. **15.51.** *Wskazówka.* Niech odcinki AA_1, BB_1 i CC_1 – środkowe trójkąta ABC. Skorzystaj z tego, że $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$. **15.52.** *Wskazówka.* Zastosuj zadanie 15.45 i zadaniem pod kluczem 1 p. 15. **15.53.** *Wskazówka.* Wyraź wektory $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{BN}$ przez wektory $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$. **15.54.** 18 cm. **15.55.** 60°; $24\sqrt{3}$ cm². **15.56.** $R\sqrt{3}$.

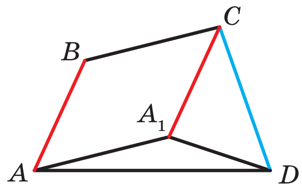
16. Skalarny iloczyn wektorów

16.17. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **16.20.** –3 i 3. **16.21.** –1. **16.23.** $\vec{b}$ **(–12; 16).** **16.24.** –1 i 1. **16.26.** 4. **16.27.** –0,5. **16.28.** $\sqrt{7}$. **16.29.** $2\sqrt{7}$. **16.32.** $\frac{3}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$. **16.33.** 30°, 60°, 90°. **16.36.** 0°. **16.37.** 120°. **16.38.** *Wskazówka.* Niech $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Wtedy $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AK} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Oblicz skalarny iloczyn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AK}$. **16.39.** 45°. *Wskazówka.* Niech $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Wyraź wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ przez wektory $\vec{b}$ i $\vec{c}$. **16.40.** 30°. *Wskazówka.* $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$. Stąd $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \cos\angle ABD$. **16.41.** *Wskazówka.* $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BF}$. Pozostaje pokazać, że $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$. **16.43.** 100 cm. **16.44.** 6π cm.

§ 5. Przekształcenia geometryczne

17. Ruch (przesunięcie) figury. Równoległe przesunięcie

17.13. Przy $AB \parallel a$. **17.23.** Nieskończona ilość. **17.29.** $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 1$. **17.30.** $y = x^2 - 4x + 1$. **17.31.** *Wskazówka.* Niech $ABCD$ – szukany trapez $(BC \parallel AD)$. Wykreśl obraz przekątnej BD przy równoległym przesunięciu o wektor $\overrightarrow{BC}$. **17.33.** *Wskazówka.* Wykreśl obraz danej prostej przy równoległym przesunięciu o wektor $\overrightarrow{AB}$ (lub $\overrightarrow{BA}$). Rozpatrz punkty przecięcia obrazu z danym okręgiem. Zwróć uwagę, że gdy zbudowany obraz i dany okrąg nie mają wspólnych punktów, to zadanie nie ma rozwiązania. **17.35.** *Wskazówka.* Niech $ABCD$ – szukany czworokąt o danych bokach AB i CD (patrz rysunek). Rozpatrzymy równoległe przesunięcie boku AB o wektor $\overrightarrow{BC}$. Trójkąt A_1CD można zbudować według dwóch boków CD i $CA_1 = BA$ i kątem A_1CD, który jest równy $\angle BCD - (180° - \angle ABC)$. Trójkąt AA_1D można zbudować według boku A_1D i dwoma kątami przyległymi AA_1D i ADA_1. **17.36.** *Wskazówka.* Niech punkt A_1 – obraz punktu A w równoległym przesunięciu o wektor $\overrightarrow{MN}$. Połącz punkty A_1 i B. **17.37.** 36 cm. **17.38.** 40. **17.39.** 490 cm^2.

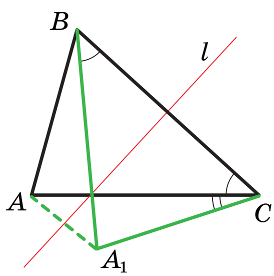


Do zadania 17.35

18. Symetria osiowa

18.21. $a \perp l$ lub proste a i l pokrywają się. **18.24.** *Wskazówka.* Jeżeli czworokąt posiada oś symetrii, to obrazem jakiegokolwiek wierzchołka jest wierzchołek tego samego czworokąta. Wybierz jakikolwiek wierzchołek równoległoboku oraz rozpatrz dwie możliwości: jego obrazem jest sąsiedni wierzchołek lub przeciwległy. **18.27.** *Wskazówka.* Kąty M_1BA i MBA są symetryczne względem prostej AB. A więc, $\angle M_1BA = \angle MBA$. Analogicznie $\angle M_2BC = \angle MBC$. Pozostaje pokazać, że $\angle M_1BM_2 = 180°$. **18.28.** 1) $A_1\,(0; -2)$, $B_1\,(-1; 3)$; 2) $A_2\,(0; 2)$, $B_2\,(1; -3)$. **18.29.** $x = 2$, $y = -1$.

18.30. *Wskazówka.* Niech punkt A_1 – obraz punktu A w symetrii względem prostej a. Wtedy punkt przecięcia prostych a i A_1B będzie szukany. Zwróć uwagę, że gdy punkty A i B są symetryczne względem prostej a, to zadanie ma nieskończoną ilość rozwiązań. Jeżeli punkty A i B są równo oddalone, lecz nie symetryczne względem prostej a, to zadanie nie ma rozwiązania. **18.32.** *Wskazówka.* Niech punkt A_1 – obraz punktu A w symetrii względem prostej a. Wtedy punkt przecięcia prostych a i A_1B będzie szukany. **18.33.** *Wskazówka.* Niech trójkąt A_1BC – obraz trójkąta ABC w symetrii względem symetralnej prostej do odcinka BC (patrz rysunek). Trójkąt ACA_1 można zbudować według wiadomych boków AC i A_1C ($A_1C = AB$) oraz kąta ACA_1, jaki jest równy różnicy kątów B i C. **18.34.** *Wskazówka.* Niech punkt C_1 jest symetryczny z punktem C względem prostej AB. Wykreśl okrąg o środku w punkcie C_1, który dotyka się do prostej AB. Przez punkt D poprowadź styczną do zbudowanego okręgu. Ta styczna przecina prostą AB w szukanym punkcie. **18.35.** *Wskazówka.* Niech prosta l – symetralna do przekątnej AC. Punkt B_1 jest symetryczny z punktem B względnie prostej l. Skorzystaj z tego, że $ABCD$ i AB_1CD są równoważne. **18.36.** Punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC. **18.37.** CD; 7 cm, 10 cm. **18.39.** $y = 0{,}5x - 0{,}5$.

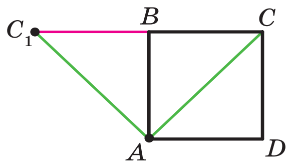


Do zadania 18.33

19. Symetria środkowa. Obrót

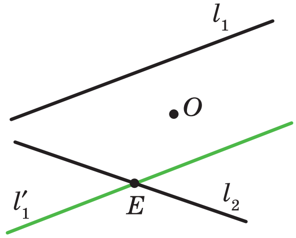
19.22. *Wskazówka.* Przypuść, że trójkąt ABC ma środek symetrii. Wtedy, na przykład obrazem wierzchołka A jest wierzchołek B. A więc, środek symetrii – to środek boku AB. Więc, w tym przypadku obraz wierzchołka C nie należy do trójkąta ABC. **19.24.** *Wskazówka.* Przy symetrii środkowej obrazem boku danego czworokąta jest bok tego samego czworokąta. Zatem skorzystaj z zadania pod kluczem 1 p. 19. **19.25.** *Wskazówka.* Przy symetrii względem punktu O obraz punktów

A_1 i B_1 leżą na okręgu o środku O_2. Ponieważ obrazem prostej, która przechodzi przez środek symetrii jest ta sama prosta, wtedy obrazy punktów A_1 i B_1 także należą do prostej A_1B_1. A więc, odcinek A_2B_2 – obraz odcinka A_1B_1. **19.26.** 2 cm lub 1 cm. **19.27.** 2 cm. *Wskazówka*. Przy rozpatrywanym obrocie punkt B jest obrazem punktu D, punkt C_1 – obrazem punktu C, punkt A – obrazem punktu A (patrz rysunek). A więc, trójkąt ABC_1 – obraz trójkąta ADC. Stąd $\angle ABC_1 = \angle ADC = 90°$. A więc, punkty C_1, B i C leżą na jednej prostej.



Do zadania 19.27

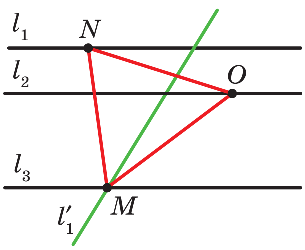
19.28. *Wskazówka*. Rozpatrz symetrię środkową o środku w punkcie przecięcia przyprostokątnych jednego z równoległoboków. **19.29.** *Wskazówka*. Znajdź środek odcinka AC, a następnie zastosuj zadanie 2 p. 19. **19.30.** *Wskazówka*. Niech O – dany punkt, l_1 i l_2 – dane proste. Wykreśl obraz prostej l_1 w symetrii względem punktu O. Otrzymasz prostą l_1' (patrz rysunek), która przecina prostą l_2 w punkcie E. Znajdź punkt, który ma obraz E przy rozpatrywanej symetrii. Widocznie, że on musi należeć do prostej l_1. A więc, punkt symetryczny do punktu E względem punktu O, także należy do prostej l_1.



Do zadania 19.30

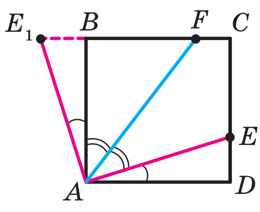
19.31. *Wskazówka*. Skorzystaj ze sposobu rozwiązanego zadania 4 p. 19. **19.32.** *Wskazówka*. Rozpatrz obrót o środku w punkcie C w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt 60°. Przy takim obrocie obrazami punktów E i B będą odpowiednio punkty D i A. A więc, odcinek

AD i jego środek K będą odpowiednio obrazami odcinka BE i i jego środka M. **19.33.** *Wskazówka.* Niech l_1, l_2 i l_3 – dane równoległe proste, O – dowolny punkt prostej l_2 (patrz rysunek). Prosta l_1' – obraz prostej l_1 przy obrocie dookoła punktu O przeciw wskazówek zegara o kąt 60° – przecina prostą l_3 w punkcie M. Znajdziemy punkt, który służy dla obrazu punktu M przy podanym obrocie. Oczywiście, że on należy do prostej l_1. Dlatego wystarczy tylko odłożyć od półprostej OM kąt równy 60°.



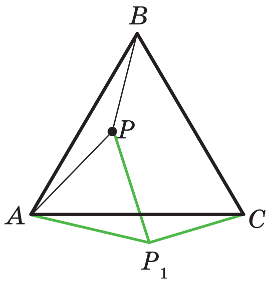
Do zadania 19.33

19.34. *Wskazówka.* Niech O – dany punkt, l_1, l_2 i l_3 – proste zadane. Wykreśl odcinek AC, środkiem jakiego jest punkt O, zaś końce należą do prostych l_1 i l_2. Ten odcinek będzie jedną z przekątnych rombu. Znajdź punkt przecięcia prostej l_3 z środkową prostopadłą odcinka AC. **19.35.** *Wskazówka.* Rozpatrzymy obrót o środku w punkcie A w przeciwnym kierunku ruchu wskazówek zegara o kąt 90°. Przy tym obrocie obrazem odcinka AD będzie odcinek AB (patrz rysunek). Niech punkt E_1 – obraz punktu E. Wtedy trójkąt ABE_1 – obraz trójkąta ADE. Stąd $\Delta ABE_1 = \Delta ADE$. Wtedy $DE = BE_1$, $AE = AE_1$, $\angle E_1AB = \angle EAD$. Mamy: $\angle E_1AF = \angle E_1AB + \angle BAF = \angle EAD + \angle FAE = \angle FAD$. Ale $\angle FAD = \angle E_1FA$. A więc, trójkąt AE_1F równoramienny i $AE_1 = E_1F$.



Do zadania 19.35

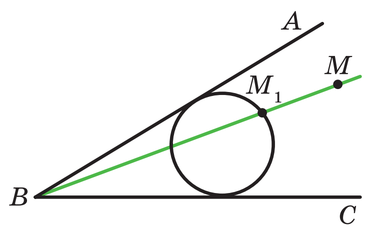
19.36. *Wskazówka.* Rozpatrzymy obrót o środku w punkcie A z ruchem wskazówki zegara o kąt 60° (patrz rysunek). Przy tym obrocie obrazem trójkąta ABP jest trójkąt ACP_1 (punkt P_1 – obraz punktu P). Stąd $\angle AP_1C = \angle APB = 150°$. Trójkąt APP_1 jest równoboczny. Wtedy $\angle AP_1P = 60°$. Więc, $\angle PP_1C = 90°$. Pozostało zwrócić uwagę, że $P_1C = PB$ i $PP_1 = AP$. **19.39.** $\frac{120}{7}$ cm.



Do zadania 19.36

20. Podobieństwo figur

20.20. 1) 1,5; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **20.24.** $\frac{1}{3}$. **20.25.** 12 cm. **20.26.** 28,8 cm^2. **20.28.** $\frac{S}{16}$. **20.29.** 1) $k = 2$, punkt B lub $k = -2$, punkt przecięcia przekątnych trapezu $AMNC$. **20.34.** *Wskazówka.* Niech dany okrąg jest styczny do prostej a w punkcie M. Punkt M_1 – obraz punktu M przy jednokładności o środku A. Ponieważ obrazem prostej a jest ta sama prosta, to punkt M_1 należy do prostej a. Pokaż, że obraz danego okręgu oraz prosta a posiadają tylko jeden wspólny punkt M_1. **20.35.** $-\frac{1}{2}$. *Wskazówka.* Według definicji jednokładności $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Znajdź współrzędne wektorów $\overrightarrow{MA}$ i $\overrightarrow{MB}$. **20.36.** (–3; 2). **20.37.** 1) $x = -3$, $y = 8$; 2) $x = 12$, $y = -2$. **20.38.** $x = 0$, $y = 8$. **20.39.** 28 cm^2. **20.40.** 20 cm^2. **20.41.** 112 cm^2. **20.43.** 1) $y = 2x + 2$; 2) $y = 2x - \frac{1}{2}$. *Wskazówka.* Wykorzystaj to, że współczynnik kątowy szukanej prostej równy 2. **20.44.** 1) $(x + 1)^2 + + (y - 2)^2 = 1$; 2) $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16$. **20.45.** *Wskazówka.* Prosta A_2B_2 jest obrazem prostej A_1B_1 przy jednokładności ze środkiem w punkcie styczności oraz współczynnikiem, który jest równy stosunkowi większego promienia do mniejszego. **20.47.** Okrąg, który jest obrazem danego okręgu w jednokładności o środku A i o współczynniku $\frac{1}{2}$, z wyjątkiem punktu A. **20.49.** *Wskazówka.* Trójkąt, o wierzchołkach w otrzymanych punktach jest obrazem trójkąta o wierzchołkach w środkach boków danego trójkąta przy jednokładności o środku M i o współczynniku 2. **20.50.** *Wskazówka.* Wykreśl dowolny trójkąt, dwa trójkąty którego są równe dwom kątom danym. Opisz na nim okrąg. Szukany trójkąt będzie obrazem zbudowanego trójkąta w jednokładności o środku w dowolnym punkcie i o współczynniku, który jest równy stosunkowi danego promienia okręgu zbudowanego. **20.52.** *Wskazówka.* Patrz rozwiązanie zadania 2 p. 20. **20.53.** *Wskazówka.* Rozpatrz jednokładność o środku w środku odcinka AB i o współczynniku $\frac{1}{3}$. **20.54.** Prosta, która jest obrazem prostej l w jednokładności o środku, który jest środkiem odcinka AB o współczynniku $\frac{1}{3}$, za wyjątkiem punktów AB i l (jeżeli taki punkt istnieje). **20.55.** *Wskazówka.* Wykreśl dowolny okrąg, który jest styczny do ramion kąta (patrz rysunek). Niech M_1 – jeden z punktów przecięcia prostej BM z wykreślonym okręgiem. Rozpatrz jednokładność ze środkiem w punkcie B i o współczynniku, który jest równy stosunkowi $\frac{BM}{BM_1}$. Zadanie ma dwa rozwiązania. **20.56.** 96 cm^2, 4,8 cm. **20.57.** 24.



Do zadania 20.55

21. Ćwiczenia powtórzeniowe kursu geometrii 9. klasy

21.1. $2\sqrt{17}$ cm lub $2\sqrt{41}$ cm. **21.2.** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-2}{2\sqrt{21}}$. **21.4.** 9 cm, 24 cm. **21.5.** 1 cm lub 2 cm. **21.6.** 36 cm. **21.7.** 4 cm. *Wskazówka.* Ponieważ trapez $ABCK$ jest wpisany, to $AB = CK$. Wtedy $\angle KAC = \angle AKB$, $AC = BK$. **21.8.** $\frac{9}{16}$; $-\frac{9}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$. **21.9.** $\sqrt{111}$ cm. **21.10.** 9,5 cm.

21.11. 12 cm. **21.12.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **21.13.** $\mathbf{1:1:\sqrt{3}}$. **21.14.** 6 cm. **21.15.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm. **21.16.** $\frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}$. *Wskazówka*. Skorzystaj ze wzoru dla obliczenia pola trójkąta według jego dwóch boków oraz kąta zawartego między nimi. **21.17.** $4\sqrt{3}$ cm^2. **21.18.** 12 cm, $\frac{3}{2}$ cm, $\frac{65}{8}$ cm. **21.19.** 15 cm. **21.20.** 132 cm^2. **21.21.** 450 cm^2. **21.22.** 36 cm^2. **21.24.** $6\sqrt{3}$ cm^2. **21.25.** 1 : 2. **21.26.** $2a\left(2-\sqrt{3}\right)$. **21.27.** 45 cm. **21.28.** $\frac{32\pi}{15}$ cm. **21.30.** $\frac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{6}$; $\frac{4}{3}\pi R$. **21.31.** 54°. **21.33.** $\frac{3m}{4}$. **21.34.** $\frac{R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3}$. **21.36.** (–9; 0). **21.37.** (0; –2,5). **21.41.** $(x-7)^2 + + (y+0,5)^2 = 6,25$. **21.42.** Tak. **21.43.** Tak. **21.44.** (–1; 0), (–9; 0). **21.45.** 10π. **21.46.** $y = 6x + 23$. **21.47.** $y = -x + 3$. **21.48.** $y=-\frac{5}{3}x-4$. **21.49.** $5x + 7y = 8$. **21.61.** $-\frac{4}{5}$. **21.62.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **21.64.** $5x + y = 22$. **21.81.** 3 cm lub $3\sqrt{3}$ cm. **21.82.** 3 cm^2. **21.83.** 27,5 cm^2. **21.84.** $\frac{320}{27}$ cm^2. **21.85.** $\frac{25}{16}$ cm^2. *Wskazówka*. Trójkąt $A_2B_2C_2$ jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o współczynniku $-\frac{5}{4}$ i o środku w punkcie przecięcia środkowych trójkąta ABC.

Odpowiedzi do ćwiczeń

zadania testowe “Sprawdź siebie”

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	D	C	A	B	A	D	A	C	B	B	D	B
2	C	B	B	A	A	D	D	C	D	C	B	A
3	B	B	A	C	B	D	C	D	B	C	B	A
4	C	D	A	C	A	A	B	D	C	A	D	C
5	B	A	D	C	C	B	D	A	C	C	A	D

Skorowidz

Długość łuku 63
– okręgu 63

Figura jednokładna na figurze 185
–, symetryczne względem prostej 167
–, – – punktu 175
Figury podobne 188
–, symetryczne względem prostej 167
–, – – punktu 175
Foremny wielokąt 51
Funkcje trygonometryczne 8

Iloczyn wektora przez liczbę 129

Jednokładność 185
Jednostkowy półokrąg 5

Kartezjańskie współrzędne na płaszczyźnie 78
Koniec wektora 107
Kosinus 6
Kołowy wycinek 65
– odcinek 64
Kąt między wektorami 141
– – prostą i dodatnim kierunkiem osi odciętych 95
– obrotu 178
Kąt środkowy foremnego wielokąta 53

Metoda równoległoboku 120
– trójkąta 119
Moduł wektora 107

Obraz figury 158
Obrót 178
Odcinek 64
Oś symetrii 167
– – figury 168

Początek wektora 107
Podstawa odcinka 65
Podstawowa trygonometryczna tożsamość 7
Pole figur podobnych 189
Pole koła 64
– kołowego wycinka 65
– – odcinka 65
Przekształcenie podobieństwa 187, 188
– tożsamościowe 159
– figury 158
Przesunięcie 159
Punkty symetryczne względem prostej 167
– – – punktu 175
Półokrąg 65
Płaszczyzna *xy* 78

Rozwiązanie trójkątów 29
Ruch 159
Ruch wzajemnie odwrotny 159
Równanie okręgu 84
– prostej 90
– figury 83
Równe figury 159
Równoległe przesunięcie 158
Różnica wektorów 121

Sinus 6
Skalar 106
Skalarna wielkość 106
Skalarny iloczyn 142
– kwadrat wektora 142
Skierowany odcinek 107

Suma wektorów 119
Symetria osiowa 167
Symetria środkowa 175

Środek jednokładności 185
– obrotu 178
– foremnego wielokąta 52
– symetrii 175
– – figury 176

Tangens 8
Twierdzenie kosinusów 12
– sinusów 21

Wektor 106, 107
–, odłożony od punktu 108
Wektory kolinearne 107
– prostopadłe 141
– przeciwne 122
– o zwrocie przeciwnym 108
– równe 108
– zgodnie skierowane 107
Wielkość wektorowa 106
Współczynnik jednokładności 185
– podobieństwa 188
Współczynnik kątowy 96
Współrzędne wektora 114
Wycinek 65
Wzór Herona 36
– na obliczanie pola opisanego wielokąta 38
– – – promienia wpisanego okręgu w trójkąt 38
Wzór na obliczenie pola opisanego trójkąta 35, 37, 38
– – – promienia wpisanego okręgu w trójkąt 22, 38

Zero-wektor 107

SPIS TREŚCI

Od autorów 3
Znaki umowne 4

§ 1. Rozwiązywanie trójkątów 5
1. Sinus, kosinus i tangens kąta od 0° do 180° 5
2. Twierdzenie kosinusów 12
3. Twierdzenie sinusów 21
4. Rozwiązywanie trójkątów 29
● Trygonometria – nauka o mierzeniu trójkątów 33
5. Wzory na obliczenie pola trójkątów 35
● Zewnętrzno wpisany okrąg w trójkąt 44
Zadania testowe № 1 "Sprawdź siebie" 47
Główne w paragrafie 1 49

§ 2. Wielokąty foremne 51
6. Wielokąty foremne oraz ich własności 51
● O konstrukcji n-kątnych wielokątów foremnych 60
7. Długość okręgu. Pole koła. 62
Zadania testowe № 2 "Sprawdź siebie" 74
Główne w paragrafie 2 76

§ 3. Współrzędne kartezjańskie na płaszczyźnie 77
8. Odległość między dwoma punktami według danymi współrzędnymi.
Współrzędne środka odcinka 77
9. Równanie figury. Równanie okręgu 83
10. Równanie prostej 89
11. Współczynnik kątowy prostej 95
● Metoda współrzędnych 99
● Jakim sposobem zbudowano most między geometrią i algebrą 101

Zadania testowe № 3 “Sprawdź siebie” 102
Główne w paragrafie 3 104

§ 4. Wektory 106
12. Pojęcie wektora 106
13. Współrzędne wektora 114
14. Dodawanie i odejmowanie wektorów 118
15. Mnożenie wektora przez liczbę 129
• Zastosowanie wektorów 139
16. Skalarny iloczyn wektorów 141
Zadania testowe № 4 “Sprawdź siebie” 151
Główne w paragrafie 4 153

§ 5. Geometryczne przekształcenia 157
17. Ruch (przesunięcie) figury. Równoległe przesunięcie 157
18. Osiowa symetria 167
• Pierwsza ogólnoukraińska olimpiada młodych matematyków 173
19. Symetria środkowa. Obrót 175
20. Podobieństwo figur 185
• Zastosowanie przekształceń przy rozwiązywaniu zadań 200
Zadania testowe № 5 “Sprawdź siebie” 204
Główne w paragrafie 5 207

21. Ćwiczenia do powtórzenia kursu geometrii 9. klasy 209

Przyjaźnimy się z komputerem 217
Odpowiedzi i wskazówki do ćwiczeń 221
Odpowiedzi do ćwiczeń zadania testowe “Sprawdź siebie” 235
Skorowidz 236

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ
підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням польською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української
Перекладач
Смірнова Богуслава-Галина Ізидорівна
Польською мовою

Редактор *О. М. Бойцун*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Художній редактор *І. Б. Шутурма*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 15,00. Обл.-вид. арк. 13,88.
Тираж 137 пр. Зам. № 64П

Державне підприємство "Всеукраїнське спеціалізоване видавництво "Світ"
79008, Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua, e-mail:office@svit.gov.ua

Друк ТДВ "Патент"
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4078 від 31.05.2011